

Sugli ostacoli in didattica delle matematiche¹

Teresa Marino²

Sommario

Vengono presentati alcuni aspetti dell'evoluzione dell'errore nella comunicazione delle matematiche. In particolare si evidenzia il ruolo dell'ostacolo epistemologico in alcuni lavori italiani e francesi.

Summary

We present some aspect of the evolution of "mistakes" in the communication of mathematics. In particular we deal with the role of the concept of epistemological obstacle in some Italian and French papers.

Résumé

On présente quelques aspects de l'évolution de l'erreur dans la communication des mathématiques. En particulier on met en évidence le rôle de l'obstacle épistémologique dans quelques travaux italiens et françaises.

¹ Seminario del GRIM tenuto nel Maggio 1997.

² Componente del GRIM, Università di Palermo, lavoro eseguito nell'ambito del MURST.

Sugli ostacoli in didattica delle matematiche

Teresa Marino

Lo scopo di questo intervento è quello di analizzare l'evoluzione della tematica riguardante l'errore nella comunicazione delle matematiche mettendone in evidenza il suo ruolo significativo.

Ci si avvarrà delle ricerche documentate in bibliografia ma che propendono per una modellizzazione teorica dei fenomeni di insegnamento/apprendimento e cioè per la scuola francese che fa capo a Guy Brousseau.[3]

Sarà utile premettere una tabella riguardante il cambiamento semantico della parola "errore" da una valenza solamente negativa ad una valenza utile per una comprensione delle matematiche.

	sbaglio
L'errore	ignoranza
	distrazione
può	svista
essere	evidenziatore di non comprensione
inteso	lacune
come	salto logico (mancanza di motivazioni)
	confusione
	equivoco
	tentativi
	ostacolo
	ostacolo epistemologico

Ciascuno di questi modi di descrivere l'errore privilegia un punto di vista diverso, che è interessante di per sé.

Una breve storia dello sviluppo di tale interesse, potrebbe rappresentare anche il nostro personale percorso di avvicinamento alla questione. Chi di noi non ha avuto risposte singolari, errate, false?

A volte siamo rimasti sorpresi da alcune risposte e ci siamo chiesti.:

Ma cosa avrò fatto?

Che cosa avrò pensato?

Le risposte sono state spesso utilissime per riflettere e per affrontare altre situazioni!

Analizzando i diversi lavori e studi sulla questione, quasi sempre notiamo che vengono date classificazioni, alcune mettono in evidenza la forma, altre il contenuto o entrambi. In particolare hanno messo in evidenza gli errori relativi: *al ragionamento, alle conoscenze specifiche di una teoria, alla comunicazione ...*

Tutte queste classificazioni rispecchiano la visione della *Matematica* dello studioso (in quel momento), le sue certezze, i suoi dubbi e rispecchiano anche lo sviluppo della "*Ricerca in Didattica*" ([3], [24]).

Sintetizziamo in poche battute le varie posizioni del "Matematico" dal punto di vista filosofico, dalle quali è influenzato nella sua prassi d'insegnamento:

la matematica vista dal ...

(*Alcuni slogans da prendere con cautela*)

Formalista	La matematica è un linguaggio
Platonista	La matematica è una scienza descrittiva
Concettualista	La matematica è una scienza costitutiva
Intuzionista	Tutto è opera dell'uomo
Predicativista	Dio ha fatto i numeri naturali, il resto è opera dell'uomo.
Logicista	Matematica = Logica + Teoria degli insiemi
Formalista	La matematica non ha contenuto oggettivo
Platonista - Intuzionista	La matematica ha contenuto oggettivo
Platonisti (Platone - Leibnitz)	La matematica descrive proprietà di enti astratti_esistenti (mondo delle idee) (accettano l'infinito in atto)
Intuzionisti (Aristotele - Kant)	La matematica costruisce i suoi oggetti di studio (non accettano l'infinito in atto)

1.0 Gli "errori" nella letteratura in didattica.

L'analisi dell'errore non può prescindere dall'evoluzione delle concezioni riguardanti l'argomentare. Tuttavia non possiamo trattare tale argomento perchè richiederebbe una discorso a parte. Rimandiamo comunque alla bibliografia ([0], [2], [17]), ma vogliamo riportare solo alcune osservazioni riguardanti l'idea di **dimostrazione** date da alcuni matematici dalle quali si evince il cambiamento avvenuto.

Non ci sono mai state controversie su che cosa sia una dimostrazione rigorosa in Aritmetica e non ce ne sono state più in Analisi dopo Weierstrass, né in Topologia Algebrica dopo il 1930, né in Geometria Algebrica dopo il 1950. (Dieudonné) [9]

Oggi non sappiamo cosa intendere per dimostrazione rigorosa.

L'arte della dimostrazione matematica consiste spesso nel trovare una cornice, una scena in cui quello che uno cerca di dimostrare diventa quasi ovvio. (M.Kac-S.M. Ulam)) [0, pag.9]

Oggi si cerca di dare definizioni di ostacoli che siano operative, si cerca non più soltanto di dare classificazioni (cioè diagnosi), ma si cerca anche di dare strumenti operativi per il superamento (cioè terapie) degli ostacoli.

È evidente che la questione "Errori" ha sempre avuto un posto importante nella riflessione sull'insegnamento e sull'apprendimento della Matematica, con sensibilità diverse a secondo dei momenti storici.

E. Stabler [21] riporta il seguente elenco, che è una classificazione che riguarda la "forma" degli errori relativi al ragionamento:

1. Affermare il conseguente
2. Negare l'antecedente

3. Perché p è vera allora q è vera ³
4. Dopo di ciò, quindi a causa di ciò ⁴
5. È vero perché è vero (circolo vizioso) ⁵
6. Errori statistici ⁶

Stabler segue un'impostazione formalista: Il pensiero matematico viene visto in relazione alla logica e alla scienza e l'analisi dell'argomentare alla luce della “*logica simbolica moderna*” (calcolo proposizionale, logica aristotelica fondata solo sui connettivi logici)⁷.

Contenuti di concetti non erronei in sé	Quanto piuttosto espressi in forma matematicamente scorretta: la pretesa di considerare rettilinei archi di curva “sufficientemente piccoli” (idea dell’infinitesimo attuale).
Contenuti di concetti non erronei in sé	Quanto piuttosto espressi in forma linguisticamente scorretta: la confusione fra il concetto di proporzionalità diretta e quella di crescita dovuto al linguaggio comune (L’ insegnante deve essere cosciente di questi tipi di errori, in quanto si possono parlare lingue diverse).
Contenuti di concetti non erronei in sé	Quanto piuttosto espressi in forma logicamente viziata: La convinzione che i numeri “ritardatari” del lotto sono più “facili” ad uscire, probabilità e frequenza.

In questo articolo viene espressa l’idea che l’errore è una tappa naturale nella costruzione della conoscenza e per questo è *inevitabile* per gli studenti⁸.

Diversi sono gli articoli nelle riviste per la Scuola che riportano elenchi di errori che offrono punti interessanti di lettura.

Ho ritrovati errori “*classici*”, nel senso che si presentano con particolare frequenza, come usare *perpendicolare* per verticale, *inverso* per reciproco, incomprensioni linguistiche che nascondono incomprensioni concettuali come l'uso della parola *ipotesi*, *funzione inversa* etc.

Ieri come oggi, lo studio delle difficoltà e degli errori suggerisce strategie per migliorare il processo d’insegnamento e il processo d’apprendimento consentendo di rivedere in modo più profondo la disciplina stessa.

Certo la scuola oggi, per come è impostata, non favorisce una coscienza del genere e non dà molto spazio alla possibilità di un apprendimento attraverso gli errori.

Inoltre perché si possa meglio inquadrare la *propria* metodologia d’insegnamento, ritengo che sia necessario che ciascun docente conosca in modo approfondito non soltanto i programmi del “*proprio settore scientifico*”, ma anche quelli degli altri settori, per poter fare a se stesso e agli altri richieste sensate.

³ Poiché $[p]$ Berlusconi è proprietario di 3 reti televisive, allora $[q]$ è giustificabile che Berlusconi decida sulla televisione.

⁴ Si dichiara che un evento B avviene dopo un evento A e poi si afferma che l’evento B è stato causato da A.

⁵ Si dimostra una proposizione utilizzando nella dimostrazione la proposizione stessa.

⁶ Uso improprio delle medie, relazioni non giustificabili dai dati, uso erroneo delle percentuali.

⁷ Una più recente classificazione di “forma” si trova in [25].

⁸ Per gli studenti ogni errore è un errore di distrazione (almeno viene giustificato così da loro).

Ciò è utile per esempio nel preparare test di ingresso *sensati* per gli studenti che arrivano nel nuovo⁹ “settore” scolastico. D'altra parte non si può criticare senza conoscere.

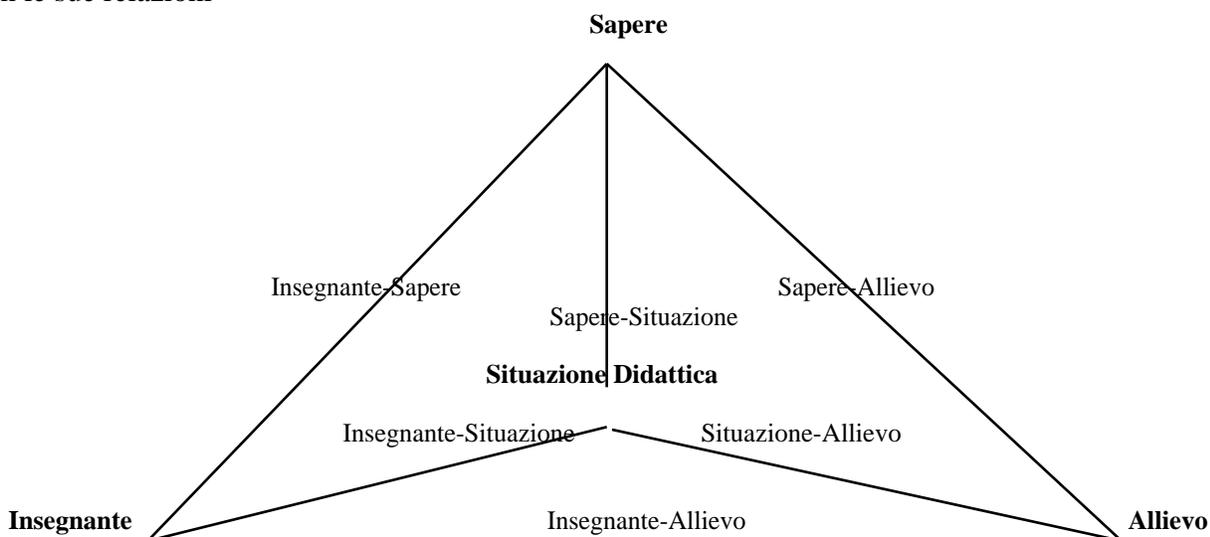
Interessante, in quest'ottica, appare un'inchiesta fatta all'Università di Roma sulle difficoltà degli studenti dell'I anno universitario che coinvolgeva anche i professori della Scuola Secondaria e i professori universitari; la ricerca analizzava⁹:

- le risposte che gli insegnanti pensavano avrebbero date i propri ex alunni,
- le risposte che i professori universitari pensavano avrebbero date gli studenti,
- le risposte effettivamente date dagli studenti.

Questi lavori hanno avuto il pregio di stimolare una certa sensibilità ad osservare gli errori degli allievi. Lo studio e la rilevazione accurata dei vari tipi di errori che emergono, assieme alla loro frequenza, offre *elementi precisi* di riflessione (all'insegnante) sui *percorsi obbligati* che la mente utilizza per arrivare a certi concetti. A questa sensibilità hanno anche contribuito campi del sapere e della ricerca tradizionalmente cointeressate allo studio dello sviluppo intellettuale (Neurofisiologia, Psicologia).

2.0 Un approccio sistemico all'errore visto come ostacolo

Oggi si è più attenti anche alla **comunicazione** della disciplina, perché siamo coscienti che parlare di Didattica della Matematica significa considerare la terna SAPERE-ALLIEVO-INSEGNANTE (S.A.I.) con le sue relazioni



Le domande che bisogna porsi, se si vuole programmare per esempio un intervento di recupero, possono essere:

- *Ci sono elementi intrinseci di difficoltà nell'argomento? Quali sono?*
- *Perché un ragazzo ha difficoltà?*
- *Quale insegnamento favorisce (o meno) l'insorgere di tali difficoltà?*

Oggi noi riconosciamo che i nostri ragionamenti quotidiani non sono precisi, sono approssimati e imprecisi.

⁹ Accascina G. et alii, 1995, La preparazione degli studenti in algebra alla fine delle scuole secondarie superiori, Comunicazione agli Internuclei Scuola Superiore, Pavia.

G.C. Rota afferma che uno dei più *insidiosi* pregiudizi del nostro secolo è quello che un concetto debba essere definito con precisione per aver senso o che un ragionamento debba essere comunque presentato a rigore di logica matematica. Anche L. Wittgenstein nel suo lavoro giovanile *Tractatus Logico-Philosophicus*, aveva tale pregiudizio (in seguito rifiutato).

Se consideriamo il concetto di *ostacolo epistemologico*¹⁰, notiamo che la sua affermazione nella "storia" della Didattica ha avuto una lunga gestazione e la sua storia è intrecciata con quella dello studio e dell'analisi degli errori, oggi alla luce delle conoscenze date dallo studio della

- epistemologia	(Riflessione sulla disciplina)
- neurofisiologia	(Apprendimento su basi fisiologiche)
- semiologia	(Scienza delle comunicazioni)
- ricerca in didattica	(Epistemologia sperimentale)

si può "affermare" che ogni conoscenza si può acquisire solo quando si prende coscienza del suo ruolo nella *organizzazione del sapere*.

Infatti per affrontare una problematica riguardante i fenomeni di insegnamento/apprendimento, oggi cerchiamo di

1. conoscere la storia di quella problematica,
2. analizzare i tentativi precedenti,
3. capire perchè questi sono stati inadeguati,

in breve organizziamo un approccio *storico-epistemologico* al fine di avere un pensiero "storico", nel senso di capire l'evolversi del problema

nei suoi vari significati,
 nelle sue varie formulazioni,
 nelle sue varie applicazioni.

Oggi la *neurofisiologia* dà un'interpretazione dell'apprendimento¹¹ su basi fisiologiche: la questione "errori" viene affrontata in maniera più completa ed organica e grazie allo studio sulla *plasticità del cervello* possiamo ipotizzare terapie per il superamento di *errori-ostacoli*.

La *plasticità cerebrale* realizza modifiche durature del nostro sistema nervoso trasformando i nostri comportamenti, i nostri ricordi, la nostra capacità di imparare. Il cervello si può modificare *strutturalmente* semplicemente leggendo un libro, ascoltando una musica, conversando con gli amici. La scoperta è anche inquietante dato che può avvenire (sempre riferendosi all'ambito della *conoscenza*), senza la *partecipazione cosciente* dell'allievo e/o dell'insegnante.

Per chi vuole riferire la propria ricerca al *paradigma* della *teoria delle situazioni* di G. Brousseau, deve tener conto che i processi d'*apprendimento* devono essere analizzati facendo riferimento alla terna (S.A.I.), intesa come un *unicum logico*, e che l'ostacolo ed il suo superamento sono legati al modello di *adattamento*.

L'**ostacolo** viene visto come:

1. **una conoscenza** che gli *allievi hanno*;
2. **una conoscenza** legata ad *altre conoscenze* precedenti che sono spesso poco corrette, *imprecise e provvisorie*;
3. **una conoscenza anteriore** che ha avuto successo ma che è ora *inadatta*.

L'**ostacolo** è *imprevedibile* (per gli allievi) e *ripetitivo*.

¹⁰ Introdotta nello studio delle Scienze Fisiche da G. Bachelard (1884-1962) nel 1938 ed estesa alla Didattica della matematica da G. Brousseau.

¹¹ [11], [12] e [22].

In prima battuta si può sintetizzare ostacolo = conflitto, nel senso che:

Per l'allievo (valenza negativa)	L'ostacolo è qualcosa che si produce quando ritiene che può applicare in un dato contesto concettuale un certo modello che risulta poi inadeguato. L'ostacolo-errore va contro le sue certezze/sicurezze, sfida la coerenza raggiunta nel modello che lui tenta di considerare come universale o assoluto.
Dall'insegnante (valenza negativa)	L'ostacolo viene visto come evidenziatore di difficoltà nell'apprendimento della sua materia e viene vissuto come un bug nel flusso di trasferimento della conoscenza.
Per il ricercatore in didattica (valenza positiva)	Gli ostacoli (epistemologici) sono i mattoni costitutivi della conoscenza. Esso viene visto come condizione necessaria per lo sviluppo del pensiero dell'allievo.

3.0 Gli ostacoli epistemologici.

Da Bachelard in poi si è arrivati ad individuare delle caratteristiche specifiche degli *errori-ostacoli*. Quelli che risiedono nell'"organizzazione" della matematica (o della disciplina che si vuole considerare), vengono chiamati *ostacoli epistemologici*:

afferma che gli ostacoli epistemologici non sono delle conoscenze mal fatte, ma piuttosto conoscenze fatte altrimenti, per altri scopi, adattate ad altri problemi.

Bachelard	L'ostacolo è nel PENSIERO, esso è l'effetto di una conoscenza anteriore che ha avuto il suo successo, ma che ora si rileva falsa e inadatta. L'ostacolo è uno strumento conoscitivo dell'evoluzione del pensiero scientifico.
-----------	--

In seguito Brousseau¹², sviluppando tale impostazione e riferendosi alla *Didattica della Matematica*, dà la seguente classificazione di *errori-ostacoli*.

ostacoli ontogenetici (Capacità cognitiva dell'allievo in un processo d'insegnamento)	dipendono	dallo sviluppo cerebrale (Epistemologia genetica)
ostacoli didattici	dipendono	da una scelta o da un progetto del sistema educativo (trasposizione didattica) (ingegneria didattiche ad hoc)
ostacoli di origine didattica	dipendono	dalla comunicazione (Ingegnerie didattiche)
ostacoli epistemologici Risiedono nella storia e nei Fondamenti. (Duroux: tesi con Brousseau, 1983. Sul valore assoluto, dà delle condizioni alle quali deve soddisfare)	sono	una conoscenza (non è una mancanza) - Questa conoscenza produce delle risposte adatte in un certo contesto frequentemente riscontrato - Dà risposte false fuori del contesto (una risposta corretta esige un punto di vista differente)
	resistono	alle contraddizioni alle quali è confrontato

¹² Altri studiosi che si sono occupati del problema sono ad es. Duroux, Cornu, Sierpiska. (DUROUX, CORNU, SIERPINSKA),

rimangono

tata e alla sistemazione di una conoscenza migliore
dopo la presa di coscienza della sua inesattezza continua a manifestarsi in maniera intempestiva e ostinata.

Già con questa presentazione, per individuare un ostacolo epistemologico è necessario

- intraprendere un'analisi storica di una certa conoscenza per rilevare i cambiamenti di *CONCEZIONE*¹³, cioè verificare sperimentalmente come attorno a queste conoscenze si accumulino *concezioni* considerando contesti e linguaggi ben determinati.
- Classificare gli errori cercando quelli *rincorrenti* e *persistenti* che si raggruppano attorno a delle *concezioni*.

Dalle posizioni di Brousseau alle ultime posizioni di Spagnolo [23][24] si possono dare quindi le seguenti caratteristiche cui deve soddisfare un'ostacolo epistemologico:

- È una conoscenza applicabile a molte situazioni,
- È una sorgente di errori (catalizzatore),
- L'alunno difende il suo errore,
- Resiste al rigetto dell'errore presso gli alunni,
- Persiste.

Dall'ultima modellizzazione data l'ostacolo epistemologico viene visto anche come *uno strumento conoscitivo* che può indurre *conflitto cognitivo* e *non* risiede nelle formulazioni delle *conoscenze istituzionalizzate*, *ma* nelle rappresentazioni che l'alunno si dà *per la comprensione di una data conoscenza* e nelle (eventuali) rappresentazioni che l'insegnante dà *all'allievo per la sua comprensione e formulazione*.

Oggi alla luce di quanto accennato, possiamo dire che per rintracciare la presenza di un ostacolo epistemologico dobbiamo considerare i diversi momenti dello *sviluppo della scienza e dell'apprendimento della scienza*, dato che l'ostacolo si annida nello sviluppo del *pensiero* (Bachelard) e nella *comunicazione* (Spagnolo).

Gli ostacoli si possono trovare analizzati secondo i seguenti punti di vista:

Allievo	consideriamo i momenti di stagnazione, di regressione e di conflitto nel suo sviluppo intellettuale.
Insegnante (dibattito sull'insegnamento)	consideriamo i momenti di grande interesse didattico. (Ingegnerie didattiche, Situazioni a-didattiche).
Sapere	consideriamo i paradossi, la crisi dei fondamenti, le nuove generalizzazioni, i nuovi modelli, le nuove applicazioni.
Un campo semantico	consideriamo la nuova sistemazione con la nuova sintassi e con le soluzioni

¹³ concezione = concetto matematico nella sua interpretazione

- *SEMANTICO* = con tutti i suoi significati nei vari contesti, le situazioni-problema che danno senso al concetto.
- *SINTATTICO* = come è stato definito, le regole e gli strumenti tecnici specifici per il trattamento del concetto.
- *PRAGMATICO* = nella comunicazione, immagini mentali, espressioni simboliche, ...
- *STORICO* = genesi storica del concetto, nei testi, nei libri, nei manuali, nella collettività scientifica.

di una certa epoca con dei vecchi problemi.
una sua sintassi che
risolve una certa clas-
se di problemi

La cultura precedente l'evoluzione storica.

Concezione (adatta ad un contesto) consideriamo la nuova concezione che contiene la precedente, che ne amplia l'applicabilità e la sua interpretazione nel contesto nuovo.

Pertanto analizzeremo la storia dell'affermazione di una conoscenza, e storia degli errori che compaiono con insistenza.

Per concludere diamo una recente definizione di *Ostacolo Epistemologico*, in cui si privilegia una *interpretazione semiotica* delle Matematiche [18]:

Gli Ostacoli Epistemologici sono gli "oggetti matematici" dei campi semantici precedenti che potrebbero servire per la costruzione sintattica (nei fondamenti del nuovo linguaggio) della matematica e che si ripresentano nel percorso di apprendimento di essa.

Rimandiamo all'appendice 1 lo schema del modello teorico-sperimentale per l'individuazione degli ostacoli epistemologici con un esempio relativo al Postulato di Eudosso-Archimede.

4.0 SUPERAMENTO DI UN OSTACOLO

Bisogna creare una interazione tra alunno e ambiente, proponendo una situazione¹⁴ suscettibile di fare evolvere l'alunno secondo una dialettica conveniente (*conoscenza-azione, a priori-a posteriori, la conoscenza è il frutto di una interazione dell'alunno con il suo ambiente e precisamente con una situazione che renda questa conoscenza interessante*) e che crei problematiche alle quali l'allievo possa dare soluzioni costruibili nel sistema delle sue conoscenze.

Non si devono dare informazioni, ma mettere l'allievo in una situazione per cui il risultato da ottenere venga da una dialettica in cui entri in gioco la sua conoscenza del momento; anche se il tentativo fallisse, la situazione sarà comunque rinviata ad un'altra in cui la sua conoscenza sarà cambiata intrinsecamente.

Un problema che non si può risolvere nel contesto concettuale che si riteneva applicabile, provoca *conflitto cognitivo*.

Uno studente fa "Matematica" se si pone il problema, se *risolve* il problema.

La questione è

Quali problemi si deve porre?

Chi glieli deve porre?

In che modo si devono porre?

Domande alle quali Brousseau ha risposto studiando le attività didattiche che hanno per oggetto l'insegnamento della Matematica (ritiene che si possono legare i diversi problemi della terna S.A.I. secondo una struttura a reticolo, a condizione di avere un Paradigma della ricerca in didattica). Egli ritiene che si possano descrivere e spiegare in maniera razionale i fenomeni di insegnamento, fenomeni che generalmente vengono vissuti fuori da ogni schema razionale¹⁵.

Nella *Teoria delle Situazioni*, Brousseau introduce il modello di situazione *a-didattica/situazione didattica*, cioè una situazione tale che gli alunni costruiscano il rapporto con

¹⁴situazione = Insieme di circostanze, ambiente, gruppo, relazioni che caratterizzano l'evoluzione dell'allievo.

¹⁵ Suscitano in generale più l'empirismo o l'opinione che il discorso razionale.

l'oggetto della conoscenza o modificano questo rapporto come risposta alle esigenze dell'ambiente.⁴ In tal modo ciò che l'allievo fa, assume un carattere di necessità in rapporto al sapere. Ciò, non per esigenze arbitrarie o per esigenze didattiche. Anzi le esigenze didattiche devono essere rese dall'insegnante non manifeste, la risoluzione del problema per l'alunno deve essere indipendente dal desiderio dell'insegnante, deve contestualizzare, personalizzare, temporizzare il sapere.

Compito dell'insegnante é analogo a quello del ricercatore, ma nel senso inverso; infatti egli deve contestualizzare, cioè dare senso al sapere che deve insegnare, deve rendere responsabile l'allievo in rapporto al sapere, deve, in poche parole, renderlo protagonista. Perché una situazione possa essere vissuta come a-didattica dall'allievo, sono necessarie *almeno tre* fra le condizioni:

- *l'alunno deve poter immaginare una risposta, ma questa risposta non deve essere quella che si vuole insegnare: se la risposta fosse già conosciuta, questa non sarebbe una situazione d'apprendimento,*
- *l'alunno deve essere costretto a fare degli accomodamenti, delle modifiche del suo sistema di conoscenza,*
- *deve esistere un ambiente per cui si abbia la conferma dell'efficacia di un risultato ottenuto, la conferma della verità o falsità di un risultato ottenuto (validazione),*
- *l'alunno deve operare delle scelte che non siano obbligate (cioè che non siano ovvie),*
- *che la conoscenza a cui si mira sia logicamente richiesta per passare dalla strategia di base alla strategia ottimale,*
- *che l'alunno sia interattivo con l'ambiente, nel senso che sia capace di accettare o di respingere le influenze provenienti da esso,*
- *che la situazione (gioco) sia ripetibile.*

La Teoria delle Situazioni è una teoria didattica nel senso che il sistema minimo preso in considerazione è il sistema S.A.I. e vengono prese in considerazione le interazioni tra insegnante e alunni relative al sapere, in una situazione avente finalità didattica¹⁶. Le posizioni "insegnante" e "alunno" vengono definite dalla finalità del sistema educativo che consiste nel dover passare da uno stato iniziale ad uno stato finale nei confronti del sapere, oggetto dell'apprendimento. Si suppone che l'allievo nella condizione iniziale abbia una relazione poco o niente adeguata al sapere prima dell'insegnamento (ipotesi necessaria perchè il sistema didattico abbia modo di esistere). L'insegnante si distingue dall'allievo in quanto è "supposto sapere" e anche è "supposto capace" di anticipare ciò che l'alunno apprenderà. Inoltre se l'insegnante riesce nel suo compito, deve potersi ritirare, e l'alunno deve poter mantenere la sua relazione al sapere senza la presenza dell'insegnante.

Tema centrale di queste teorie è il tentativo di individuare la *meta-struttura* che descriva tutte le fasi di creazione, di trasformazione e di trasferimento del "sapere" e delle condizioni in cui esso si realizza; questo infatti, secondo Y.Chevallard (1989), non esiste da solo, in quanto è vincolato ad una o più istituzioni. In particolare:

Ogni sapere è il sapere di una istituzione.

Uno stesso sapere può vivere in istituzioni diverse.

La trasposizione didattica, rappresentata dallo schema,

oggetto di sapere → **oggetto da insegnare** → **oggetto di insegnamento**

è una *manipolazione* del sapere che permette ad un sapere di vivere in una istituzione.

¹⁶situazione didattica = gioco = situazione a-didattica ≠ situazione non didattica.

L'insegnante e gli allievi stipulano un *contratto didattico*¹⁷, cioè l'intesa di raggiungere uno stesso sapere, con modalità differenti. Diversi sono i fenomeni analizzabili come effetto del contratto didattico.

- ***Ingiunzione paradossale per l'insegnante*** (*Effetto Topazio, Effetto Jourdain*): se il maestro dice ciò che egli vuole, non può più ottenerlo dall'allievo.
- ***Ingiunzione paradossale per l'alunno***: se l'allievo accetta che il maestro gli insegni i risultati, non li stabilisce da sé e quindi non apprende; se rifiuta tutte le informazioni del maestro allora rompe il contratto didattico.

Apprendere implica, per l'allievo, che egli *accetti il contratto didattico*, ma che lo consideri come provvisorio e si sforzi di rigettarlo.

Il progetto dell'alunno è quello di apprendere, il progetto dell'insegnante è quello di creare le situazioni, le condizioni della possibilità dell'apprendimento; non è suo compito quello di ottenere che gli alunni apprendano, ma piuttosto che essi possano apprendere.

- Per poter comprendere la situazione didattica, e in particolare l'apprendimento, dell'alunno è necessario introdurre un'altra variabile alla terna, cioè l'ambiente¹⁸ (le *milieu*), così la terna S.A.I. diventa la quaterna S.A.I.M. e l'alunno apprende adattandosi (*assimilazione e accomodamento*) ad un ambiente che è produttore di contraddizioni, di difficoltà e di squilibri. Un ambiente senza intenzioni didattiche (cioè senza un volere organizzato per insegnare un sapere) è insufficiente a provocare nell'allievo tutte le conoscenze che l'istituzione desidera trasferirgli.

L'insegnante deve quindi provocare negli alunni gli adattamenti desiderati attraverso una scelta delle situazioni *ad hoc*. Il senso di una conoscenza per l'alunno viene essenzialmente dalle situazioni dove la conoscenza interviene o è intervenuta come adattamento giustificato.

L'alunno "sa" quando è capace di *decontestualizzare* e *depersonalizzare* la conoscenza che ha prodotto al fine di riconoscere in ciò che ha fatto un *carattere universale*; ha reso quindi il sapere *riutilizzabile*.

Il ruolo dell'insegnante deve essere, in questa fase, quello di guidare l'alunno nella *ridecontestualizzazione* e nella *ridepersonalizzazione* dei concetti.

Per apprendere, l'alunno deve quindi risolvere un problema di cui ha responsabilità; ma quando siamo sicuri che il problema posto è veramente pertinente in rapporto al sapere?

Esiste per ogni sapere (matematico) una famiglia di situazioni suscettibili di dargli un senso corretto in rapporto alla sua storia, in rapporto al contesto sociale e in rapporto alla comunità scientifica?

A questa domanda risponde il Brousseau: per alcune conoscenze, esistono situazioni fondamentali, cioè modellizzazioni di una famiglia di situazioni specifiche del sapere da acquisire che possono essere realizzate nel momento desiderato e che permettono di costruire una concezione corretta della conoscenza. Altre conoscenze non posseggono situazioni fondamentali accessibili. Allora l'alternativa che propone Brousseau è *l'apprendimento per adattamento* ad un ambiente di un sapere che risulterà provvisorio e approssimato, anche in parte falso ed inadeguato; ciò impone un processo di *rotture cognitive*, cioè di rimessa in causa delle conoscenze vecchie; la nozione di rottura cognitiva è legata alla nozione di ostacolo epistemologico.

Chi incontra e supera un ostacolo epistemologico ha una conoscenza diversa rispetto a colui che non si è scontrato con esso.

¹⁷contratto didattico = regola del gioco = strategia del gioco.

¹⁸) - ambiente (G.Brousseau) = Il sistema antagonista dell'alunno nella situazione didattica.

Riferimenti Bibliografici

- [0]AA.VV., *Che cos'è una dimostrazione?*, Nucleo di Ricerca Didattica C.N.R., Insegnamento e cultura, Milano, vol.1,1996.
- [1]Bessot A., *Panorama des cadres théoriques de la didactique des Maths en France*, L'educazione Matematica, 1994, 1.
- [2]Bologna V., *Esperienze francesi sulla dimostrazione*, Quaderni GRIM, n.3, Palermo, 1992, pp.5-23.
- [3]Brousseau G., *Théorie des situations didactiques (didactique des mathématiques 1970-1990)*, 1998, Grenoble, ed. la Pensée Sauvage
- [4]Brousseau G., *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en Maths*, RDM, 1983, Grenoble, ed. la Pensée Sauvage, Vol.4.2.
- [5]Brousseau G., *Fondements et méthodes de la didactique de mathématiques*, RDM, 1986, Grenoble, ed. la Pensée Sauvage, Vol.7.2.
- [6]Brousseau G., *Theorisation des Phénomènes d'Enseignement des Maths*. These d'état, Bordeaux, 1986.
- [7]Brousseau G., *Le contrat didactique: Le milieu*, RDM, 1988, Grenoble, ed. la Pensée Sauvage, Vol.9.3.
- [8]Chevallard Y., *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*, 1991, Grenoble, ed. la Pensée Sauvage.
- [9]Dieudonné J., *L'arte dei numeri*, Milano, Mondadori, 1989.
- [10]Di Leonardo M.V.-Marino T.-Spagnolo F., *Alcune osservazioni didattiche ed epistemologiche sul postulato di Eudosso-Archimede ed il metodo di esaurimento*, 1994, Bologna, La Matematica e la sua didattica, ed. Pitagora, n. 1, pp.25,37.
- [11]Ferreri M., *L'evoluzione come apprendimento*, 1991, Palermo, Quaderni GRIM n.2, pp.87,149.
- [12]Ferreri M., *L'apprendimento come evoluzione*, 1992, Palermo, Quaderni GRIM, n.3, pp.97,153.
- [13]Freudenthal H., *Ripensando l'educazione matematica* (a cura di F.Manara), 1994, Brescia, ed. La Scuola.
- [14]Goleman D., *Intelligenza emotiva, che cos'è, perchè può renderci felici*, 1996.
- [15]Kline M., *Matematica :la perdita della certezza*, 1985, Milano, ed Mondadori.
- [16] Kline M., *Storia del pensiero matematico*, 1991, Torino Einaudi.
- [17]Lo Verde D., *La dimostrazione Euclidea: Tradizione classica, metodi automatici, applicazioni didattiche*, 1992, Palermo Quaderni GRIM, n.3, pp.25,54.
- [18]Marino T.- Spagnolo F., *Gli ostacoli Epistemologici: Come si individuano e come si utilizzano nella ricerca in Didattica della Matematica*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol.19B, n.2, Aprile 1996.
- [19]Rota G.C., *Matematica e Filosofia: Storia di un malinteso*, 1990, BUMI, Serie VII, vol.IV-A, n.3, p.301.
- [20]Sierpinska A., *La notion d'obstacle épistémologiques dans l'enseignement des Maths.*, RDM, 1981, Grenoble, ed. la Pensée Sauvage, Vol.6/1.
- [21]Stabler E., *Il pensiero matematico*, 1970, Torino, ed. Boringhieri.
- [22]Spagnolo F., *L'apprendimento tra emozioni ed ostacolo*, 1994, Palermo, Quaderni GRIM n.4.
- [23]Spagnolo F., *Obstacles Epistémologiques: Le Postulat d'Eudoxe-Archimede*, (Tesi di Dottorato di Ricerca, Università di Bordeaux I (Francia), Luglio 1995. ed. Atelier National de Reproduction des Thèses Microfiches (BP - 38040 Grenoble Cedex 9 - Francia) e in Quaderni GRIM di Palermo per la diffusione in Italia (Supplemento al n.5, 1995).
- [24]Spagnolo F., *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*, 1998, Milano, ed. La Nuova Italia.

- [25]Spagnolo F. - Valenti S., *Errori matematici: un'occasione didattica, L'insegnamento della matematica*, 1984, 7/1.
- [25]Watzlawick P. et alii, *Pragmatica della comunicazione umana*, 1971, Astrolabio, Roma.

Il modello che si propone per la verifica sperimentale di individuazione di un ostacolo epistemologico è costituito da 7 *steps*.

	L'Ostacolo	Occorre effettuare una
I	ha un ruolo nel sapere (è un fondamento).	ricerca storico-epistemologica.
II	è una conoscenza.	ricerca storico-epistemologica.
III	è una conoscenza che produce risposte adatte in un certo contesto e che si accumula attorno a delle concezioni.	verifica sperimentale (conoscenze spontanee).
IV	è una conoscenza che non produce risposte adatte fuori dal contesto (resiste al transfert) quando si cambia punto di vista.	verifica sperimentale (conoscenze, temporalizzate, contestualizzate, personalizzate)
V	è una conoscenza che non produce risposte adatte fuori dal contesto (resiste al transfert) quando se ne considera uno più generale.	verifica sperimentale (conoscenze generalizzata in un contesto coerente alle concezioni dell'allievo)
VI	è una conoscenza che nel contesto più generale produce contraddizioni rispetto alle conoscenze accettate dall'allievo.	verifica sperimentale (situazione conflittuale)
VII	è una conoscenza-ostacolo che permane anche dopo la presa di coscienza del suo ruolo nei fondamenti del nuovo linguaggio allargato, che mantiene le sue concezioni relative ai fondamenti del linguaggio precedente e costituisce un ostacolo all'acquisizione del nuovo.	verifica storico-epistemologica (verificare il grado di consapevolezza).

Il seguente elenco di lavori evidenzia il percorso fatto per stabilire che il *Postulato di Archimede* è un *ostacolo epistemologico*:

ARTICOLO	SUMMARY	PROBLEMATICIA	MODELLO
Camarda S., Spagnolo F. -Angoli di contingenza e analisi non standard (La matematica e la sua didattica, 1989)	Un'interpretazione geometrica degli iper-angoli attraverso gli angoli tra due curve.	Inquadramento del problema, inserimento nella storia. Studio intrapreso per analizzare le difficoltà sull'assimilazione del concetto di limite.	Step 7 infinito e infinitesimo
Margolinas C., Spagnolo F. -Un ostacolo epistemologico rilevante per il concetto di limite: Il postulato di Archimede (1993)	Situazione didattica (nel senso conflittuale di Brousseau) tra il Postulato di Archimede e l'angolo di contingenza.	Ricerca storica per la costruzione di situazioni didattiche. Interpretazione storica del Postulato di Archimede.	Steps 1, 2,5 fondamento e conoscenza
Di Leonardo M.V., Marino T., Spagnolo F. -Alcune osservazioni didattiche ed epistemologiche sul postulato di Eudosso-Archimede ed il metodo di esaurimento. (La matematica e la sua didattica, 1994)	Situazione didattica (Brousseau) conflittuale con grandezze non archimedee.	Naturale avvicinamento all'introduzione del metodo di esaurimento.	Steps 1 ÷ 6 Punto di vista generalizzazione
Ferreri M., Spagnolo F. - L'apprendimento tra emozioni ed ostacolo. (Quaderni GRIM, 1994)	L'errore nella comunicazione delle matematiche, intersezione tra problemi dell'apprendimento/insegnamento e la neurofisiologia	ostacolo = conflitto	Steps 1, 2 sapere e conoscenza
Marino T., Spagnolo F. -Gli ostacoli epistemologici. (L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 1996)	Come si individuano e come si utilizzano gli ostacoli epistemologici nella Ricerca in Didattica della Matematica	Modello	Steps 1 ÷ 7 consapevolezza
Spagnolo F. Obstacles épistémologiques: le Postulat de Eudoxe-Archimede. (tesi di dottorato 1995)	Sintesi finale (o quasi.)	Inquadramento dell'ostacolo epistemologico nella Ricerca in Didattica e nella Semiologia.	Steps 1 ÷ 7