Il Principio del minimo intero è equivalente al Principio di induzione completa?

Di Leonardo M.V., Marino T.[1]

Riassunto

Viene proposta una rilettura della nota di Pieri " Sopra gli assiomi aritmetici" allo scopo di evidenziare che l'autore dimostra soltanto l'equivalenza tra il suo sistema assiomatico e quello di Padoa, e non quella tra il Principio del minimo ed il Principio di induzione.

Abstract

A rereading of the Pieri's work " Sopra gli assiomi aritmetici" it's proposed to evidence that the author proves only the equivalence between his axiomatic system and Padoa's one, and not the equivalence between the Principle of the least and the Principle of induction.

Introduzione

Questa nota nasce dall'esigenza di mettere in evidenza alcune considerazioni che agli addetti ai lavori sono note, ma che spesso vengono presentate in maniera concisa e a volte vengono fraintese dai "non addetti" e riportate perciò non correttamente.

Si potrebbero forse eliminare alcune inesattezze che crediamo siano entrate nella divulgazione scientifica non specialistica del settore .

Infatti è prevalso l'uso di affermare che il Principio del minimo è equivalente al Principio d'induzione completa senza specificare rispetto a quale gruppo di assiomi, questo forse perché diverse presentazioni dei numeri Naturali, pur riferendosi al sistema assiomatico di Peano, modificano alcuni assiomi o danno proprietà caratterizzanti il sistema dei numeri Naturali, quindi sostanzialmente[2] forniscono una assiomatica completamente diversa da quella di Peano.

---

[1]- Componenti del G.R.I.M. (Gruppo di Ricerca sull'insegnamento delle Matematiche), Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università di Palermo.Lavoro eseguito nell'ambito del MURST

[2]- Vedi Prodi G.*Analisi Matematica*, 1970, Torino ed. Boringhieri; Bazzini L.- Ferrari M.*Il mondo dei Numeri Naturali*, 1987, ed. S.E.I.

Al fine di evidenziare la diversa natura dei principi sopra citati, abbiamo scelto in questa lavoro di ripercorrere la nota di Pieri [17] in quanto riteniamo che proprio da quest'articolo siano nate diverse ambiguità.

La nota del Pieri viene sempre citata in quanto presenta un sistema assiomatico per i Naturali che si differenzia sia da quello di Peano [13],[14], che da quello di Padoa [9], in quanto sostituisce il Principio di induzione con il seguente:

"In qualsivoglia classe non illusoria di *numeri* esiste almeno un *numero*, che non è *susseguente* di alcun *numero* della classe."

Tale postulato spesso viene detto "Principio del minimo" forse perché Cipolla[3] così riporta:

…Questo equivale all'affermazione dell'esistenza del minimo in una qualsiasi classe esistente di numeri (naturali), principio detto di Campano, perché fu già enunciato…

Pieri dimostra che dal suo sistema deriva quella di Padoa, lasciando al lettore l'implicazione inversa da cui discende l'equivalenza tra i due sistemi.

Pieri nell'articolo non ha dimostrato però l'equivalenza tra questi due principi[4], mentre alcune presentazioni, non utilizzando il sistema assiomatico di Pieri,[5] evidenziano l'esistenza, per ogni n Naturale del precedente e del successivo; dimostrano l'equivalenza tra i due principi incorrendo in un sottile errore logico, dato che per dimostrare l'esistenza del precedente, per ogni n, e quindi quella del minimo per un insieme bisogna utilizzare il Principio d'induzione.

Altre presentazioni in chiave più moderna inoltre, modificano gli assiomi di Peano, per esempio sostituendo i primi quattro assiomi con uno che postula l'esistenza di una corrispondenza biunivoca (la funzione *successivo*), tra l'insieme dei Naturali e l'insieme che se ne ottiene privandolo del primo elemento (uno o zero)[19],lasciando inalterato il quinto (Principio di induzione); tale sostituzione non risulta corretta dato che nel sistema di Peano il terzo assioma garantisce solamente l'iniettività di detta funzione e la surriettività è dimostrata a partire dal Principio di induzione .

3- Cipolla M. *La Matematica elementare*, 1962, Palermo ed. Palumbo; Chellini A.- Giannarelli R. *L'esame orale di matematica*, 1954, Roma ed.Libreria Eredi V. Veschi.

4- Palladino D. *Il Principio di Induzione e l'Aritmetica formalizzata*, 1993, Quaderno 14 C.N.R., nota 21 pag. 172

5- Palladino D. *Il Principio di Induzione e l'Aritmetica formalizzata*, 1993, Quaderno 14 C.N.R.,pag.164

Nell'affrontare la lettura dell'articolo di Pieri, abbiamo scelto di trascrivere e di usare gli stessi simboli da Lui usati.

Quando inseriremo commenti, dimostrazioni non presenti e riscritture più agili di dimostrazioni presenti nell'articolo, useremo metterli in carattere maggiore in maniera da essere immediatamente riconosciuti.

Pieri dapprima analizza il sistema di Padoa e lo mette a confronto con il suo; in entrambi i sistemi vengono assunti come concetti primitivi "numero" (intero, positivo o nullo) e "susseguente di un numero" e vengono formulati i seguenti assiomi:

α) Il susseguente di un numero è un numero

β) Due numeri, che abbian per susseguente un medesimo numero, sono uguali fra di loro

γ) Esiste almeno un numero, che non sussegue alcun numero

δ) Se una classe (di numeri) contiene un numero non susseguente di alcun numero, e se il susseguente di ciascun numero della classe appartiene alla classe; allora ogni numero appartiene alla classe.(Principio *d'induzione completa*)[6]

(Indicheremo in seguito i quattro postulati di Padoa rispettivamente con P_d1), P_d2), P_d3) e P_d4))

Pieri riporta che Padoa deriva da α) e da δ) il seguente teorema :

e) Due numeri, nessuno dei quali sia susseguente di un numero, sono sempre uguali tra loro.

Una possibile dimostrazione è la seguente:

Dim.: Siano x e y due numeri diversi tra loro, nessuno dei quali sia susseguente di un numero, denotiamo con I la classe di tutti i numeri diversi da y; allora $x \in I$ e per ogni $t \in I$ *suc* $t \in I$ (*suc* sta per "susseguente"), dato che y non è susseguente d'alcun numero, pertanto per P_d4) I contiene ogni numero e y non è un numero, ma ciò è assurdo.

[6]- pag. 449 di [17]

Pieri riporta quindi che, da questo teorema, Padoa dà la seguente definizione:

> *f*): Si da il nome di zero ("0") a quel numero determinato e unico, grazie alle γ) ed *e*) che non è susseguente di un numero.
>
> Per la qual cosa il principio δ) viene a dire in sostanza che:
> "Se una proposizione è vera per lo zero; e se con l'ammettere che essa abbia luogo per un numero n, si può dimostrare qualunque sia n , che deve sussistere ancora nel susseguente di n; allora essa è vera per tutti i numeri."

Pieri mette in evidenza la complessità della forma di questo giudizio δ) relativamente agli altri, e pone la questione se sia il caso di sostituire tale principio con un'altro più spedito e più liscio modificando in tal modo sostanzialmente il sistema assiomatico di Padoa.

Pieri propone quindi il seguente sistema assiomatico:

- *I* Esiste almeno un *numero*.
- *II* Il *susseguente* di un *numero* è un *numero*.
- *III* Due *numeri*, nessuno dei quali sia *susseguente* di un *numero*, sono sempre uguali tra loro.
- *IV* In qualsivoglia classe non illusoria di *numeri* esiste almeno un *numero*, che non è *susseguente* di alcun *numero* della classe. ("Principio del minimo")

(Indicheremo in seguito i quattro postulati di Pieri rispettivamente con P_i1), P_i2), P_i3) e P_i4))

Egli fa notare dapprima, che i suoi assiomi *II* e *III* coincidono rispettivamente con α) e *e*) e che γ) segue immediatamente da *I* e da *IV*

Quindi Pieri mette in evidenza che il *IV* è molto importante per la verità di δ) e dice inoltre che può quindi aversi come un surrogato del principio *d'induzione*; questa frase può avere indotto erroneamente a dire che i due principi sono sostituibili e pertanto equivalenti.

Dice inoltre che, questo giudizio esistenziale *IV* è preferibile a δ) come più facile e piano.

Deriva quindi da *IV* che:

g): Nessun numero è susseguente di sé medesimo.

O, in altri termini:

"Qualunque sia il numero n, i due numeri n e suc n sono diversi fra loro"

Una possibile dimostrazione è la seguente:

Dim.: Se esistesse un numero x susseguente di x stesso (x=*suc* x), nella classe dei numeri costituita dal solo x ($I=\{x\}$) non esisterebbe alcun numero che non è susseguente d'alcun altro della classe , contro P_i4).

Fatte queste premesse Pieri dimostra, che dal suo sistema assiomatico segue il Principio d'induzione completa, scrivendo che P_d4) è conseguenza dei nuovi postulati *I)…IV),*provando la seguente proposizione:

"Se *s* è una classe, alla quale appartenga 1) lo zero e 2) il susseguente di ciascun numero che spetti ad *s*; allora qualunque numero è un *s* ."[7]

Per fare vedere che dal suo sistema assiomatico si può dedurre quello di Padoa, Pieri deve infine dimostrare la P_d2); a tale scopo fa alcune premesse per definire un ordinamento totale nella classe dei numeri.

Premesso che: (P_i2))

1=*suc* 0, 2=*suc* 1, 3=*suc* 2,… e (per ogni numero n) n+1=*suc* n ;

porremo, essendo *x* un numero qualsivoglia:

$suc^1x=suc\ x$, $suc^2x=suc(suc^1x)$, $suc^3x=suc(suc^2x)$,…e (nell'ipts. che suc^nx sia un numero) $suc^{n+1}x=suc(suc^nx)$[8];

da ciò per induzione (P_d4)) sarà definito l'"n-esimo seguente" o il "seguente di n-esimo ordine" del numero x [9].

---

[7]- Per una dimostrazione in chiave moderna vedi Appendice 2,I- *iii).*

[8]- Questa definizione la indicheremo con (D_1)

[9]- Pieri precisa che:"…la locuzione "seguente x" denota seguenti di qualsiasi ordine ed ha lo stesso significato di "maggiore di x"…", pertanto n+1 è maggiore di n

In virtù di P_d4) si hanno i seguenti teoremi:

h) "Se y è un seguente di x e z è un seguente di y , sarà z un seguente di x".

Si può dare la seguente dimostrazione:

Dim.: Per ipotesi esistono due numeri m e n diversi da zero tali che $y=suc^m x$ e $z=suc^n y$, quindi $z=suc^n(suc^m y)=suc(suc^{n-1}(succ^m x))$ con $n=suc(n-1)$ cioè z è un seguente di x.

i)"Non si può dare ad un tempo, che y sia un seguente x ed x un seguente y".

Dim.: Infatti se così non fosse per *h)* si avrebbe che y è un seguente di se stesso contro *g*).

k) "Di due numeri, pur che diversi fra loro, uno è certo seguente dell'altro".

O, in altri termini, che:

"Se x e y sono numeri, delle tre cose l'una : o 1) y è uguale a x, o 2) y è maggiore di x, o 3) x è maggiore di y".

Dim.: Il teorema è vero se y=0, dato che 0=0, E se n>0 per h) e (D_1) si ha n+1>0, quindi per P_d4) ogni numero x è maggiore o uguale a zero (casi 1 o 3).
Posto ora che il teorema sia vero per y uguale ad un numero m si ha che il teorema è vero per y=m+1; dato che dalle ipotesi (di induzione) x=m, x>m, m>x segue rispettivamente per h) e D_1 che *suc* m=m+1>x (caso 2),$x\geq m+1$ (casi 1 o 3) m+1>x (caso 2)[10]. Dunque il teorema è vero (per induzione) qualunque sia y.[11]

Da quanto detto risulta chiaramente , che soltanto grazie al Principio di induzione completa Pieri introduce un ordinamento totale nella classe dei numeri (interi, positivi o nulli)

---

[10] - Se x>m allora o x=*suc* m=m+1 o x è un seguente di m, quindi x>*suc* m=m+1

[11] - Nella dimostrazione di Pieri manca l'unicità, si osserva che i casi 2) e 3) sono incompatibili per *h)*, il caso 1) è incompatibile sia con 2) che con 3) per *g)*

Dopo questa lunga premessa Pieri dimostra per assurdo $P_d2)$[12], suppone cioè che i numeri a e b , diversi tra di loro, abbiano entrambi lo stesso susseguente (diverso da a e da b per *g*) e ricava da ciò un assurdo (una contraddizione).

Dim.: Infatti se a e b sono diversi per *k)* o a >b o b>a.
Se b>a, dato che per ipotesi *suc* a=*suc* b e per *g)* b è diverso da *suc* b e quindi da
suc a, b sarà un seguente di *suc* a, d'altra parte dall'ipotesi *suc* a=*suc* b risulta che *suc* a è un seguente di b e ciò è assurdo per *i)*.
Analogamente dall'ipotesi a>b seguirebbe che a è un seguente di *suc* b =*suc* a che è un seguente di a. Da ciò si conclude che deve essere a=b e quindi $P_d2)$.

Pieri lascia quindi al lettore la dimostrazione dell'implicazione inversa e cioè che il sistema assiomatico di Padoa implica il suo [13].

Dopo questa lettura guidata si può osservare innanzi tutto che, anche se Pieri riferendosi al suo quarto assioma afferma che :

> "… e non parlo dell'evidenza; perché si tratta insomma della comune notizia, che tra i numeri (interi, positivi o nulli) d'una classe effettivamente esistente ce ne dev'essere qualcuno che non sia maggiore di nessun altro…"

tale assioma non può essere detto Principio del minimo dato che assicura solo l'esistenza di un numero che non è successivo di alcun altro ma non l'unicità[14];

inoltre per poter parlare di minimo o come dice Pieri di "non maggiore", egli definisce , come già visto, un ordinamento totale partendo dai suoi assiomi e dal Principio di induzione ($P_d4)$).

Pertanto non si può affermare che nel sistema assiomatico di Pieri, quello che oggi viene chiamato Principio del minimo sia equivalente al Principio di induzione completa.

---

[12] - Per una dimostrazione in chiave moderna, in cui non si fa uso dell'ordinamento, si veda Appendice 2, I- *iv)*.
[13] - Vedi Appendice 2, II.
[14] - Ad esempio considerato l'insieme dei naturali, che verifica gli assiomi di Pieri, interpretando nella maniera solita suc n come n+1 nel sottoinsieme A{2,5,9} non vuoto di N tutti gli elementi non sono successivi di alcun altro in A

Anche se consideriamo il P_i4) come "Principio del minimo", esso da solo non è equivalente al Principio d'induzione; infatti si è dimostrato che tale principio è equivalente[15] alla congiunzione logica delle seguenti proposizioni:

a) Esiste un solo numero che non è successivo di alcun altro numero.
b) In qualsivoglia classe non illusoria di numero esiste almeno un numero che non è successivo di alcun numero della classe. ("Principio del minimo")

[15] -Vedi Appendice 2.

Appendice 1

Assiomi di Peano

²Formulario² (1891)

Concetti primitivi.

Numero (intero positivo), unità e *suc*cessivo, indicati rispettivamente dai simboli: N, 1 e + .

Assiomi

P1) L'unità è un numero.
P2) Il *suc*cessivo di un numero è un numero.
P3) Se i *suc*cessivi di due numeri sono uguali, i numeri sono uguali.
P4) L'unità non segue alcun numero.
P5) Se una classe I di numeri contiene l'unità e il *suc*cessivo di ogni suo numero, allora contiene ogni numero.
(Principio di induzione completa)

²Formulario² (1898)

Concetti primitivi.

Numero (intero assoluto), zero e *suc*cessivo, indicati rispettivamente dai simboli: N_0 , 0 e + .

Assiomi

$P_0$1) Zero è un numero.
$P_0$2) Il *suc*cessivo di un numero è un numero.
$P_0$3) Se i *suc*cessivi di due numeri sono uguali, i numeri sono uguali.
$P_0$4) Zero non segue alcun numero.
$P_0$5) Se una classe I di numeri contiene lo zero e il *suc*cessivo di ogni suo numero, allora contiene ogni numero. (Principio di induzione completa)

I-Dal sistema assiomatico di Pieri si deduce quello di Padoa

Infatti si ha:

i) **P_i2) º P_d1)**
ii) **P_i1)ÙP_i4) Þ P_d3)**
iii) **P_i3)ÙP_i4) Þ P_d4**

Dim.- Sia I una classe di numeri contenente un numero x che non è *suc*cessivo di alcun altro e i *suc*cessivi dei suoi elementi, supponiamo per assurdo che I non contenga tutti i numeri, esiste cioè un numero $y\notin I$ con $y\neq x$.
Sia J la classe dei numeri che non appartengono ad I, poiché $y\in J$, la classe non è vuota e per P_i4) esiste almeno un numero $z\in J$ tale che $z\neq$ *suc* t $\forall t\in J$, inoltre da $z\neq x$ per P_i3) deve esistere almeno un numero w tale che $z=$ *suc* w con $w\notin J$ e quindi $w\in I$, per ipotesi allora $z\in I$, ma ciò è assurdo poiché I e J non hanno elementi in comune, perciò I deve contenere ogni numero.

iv) **(P_i3)ÙP_i4)Ù P_d4)) Þ P_d2)**

Dim.- Sia *suc* m=*suc* n, supponiamo per assurdo che sia $m\neq n$ e denotiamo con I la classe che contiene tutti i numeri diversi da n con i rispettivi *suc*cessivi.
I non è vuota poiché $m\in I$, allora per P_i4) esiste almeno un $x\in I$ tale che $x\neq$ *suc* y $\forall y\in I$, da ciò segue che $x\neq$ *suc* m e quindi per ipotesi $x\neq$ *suc* n.
Consideriamo adesso la classe di tutti i numeri $N=I\cup\{n\}$, N non è vuota e per P_i3) e P_i4) esiste ed è unico $z\in N$ tale che $z\neq$ *suc* y $\forall y\in N$; inoltre poiché $x\neq$ *suc* y $\forall y\in I$ e $x\neq$ *suc* n, per l'unicità di z, sarà x=z, pertanto $z\in I$; da ciò segue che I contiene un numero che non è *suc*cessivo di alcun altro (z) e per ipotesi i *suc*cessivi di tutti i suoi elementi, quindi per P_d4) contiene ogni numero, ma questo è assurdo perché per ipotesi $n\notin I$.

II-Dal sistema assiomatico di Padoa si deduce quello di Pieri

Infatti si ha:

v) **P_d3) Þ P_i1)**
vi) **P_d1) º P_i2)**
vii) **P_d1)ÙP_d4) Þ T_1 º P_i3)**
viii) **P_d4) Þ P_i4)**

Dim.-Sia I una classe non vuota di numeri, se I contiene quell'unico numero x che non è *suc*cessivo di alcun altro P_i4) è provato, altrimenti sia J la classe dei numeri che non appartengono ad I e supponiamo che per I non valga P_i4). Dato che $x\in J$ ed ogni volta che $n\in J$, *suc* $n\in J$ (perché se così non fosse *suc* $n\in I$ ed I conterrebbe un numero che non è *suc*cessivo di alcun numero di I), allora per P_d4) J contiene ogni numero ed I è vuota contro l'ipotesi.

Da quanto precede si deduce che, il sistema assiomatico di Pieri è equivalente a quello di Padoa e quindi a quello di Peano.

Bibliografia

[1] Bazzini L.-Ferrari M. *Il mondo dei Numeri Naturali*, 1987, ed. S.E.I.
[2] Cipolla M. *La Matematica elementare,* 1962, Palermo ed. Palumbo.
[3] Chellini A.-Giannarelli R. *L'esame orale di matematica*, 1954, Roma ed.Libreria Eredi Veschi.
[4] Enriques F. *Questioni riguardanti le Matematiche Elementari,* 1900, Bologna Vol.1, parte 8.VI, Zanichelli, (ristampa 1983).
[5] Ferrari M. *I nuovi programmi per la Scuola Elementare: ARITMETICA,* 1985 Paderno del Grappa L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate, vol 8, N 14, Agosto, pp.5, 15.
[6] Gigli D. *Aritmetica generale*, Enciclopedia delle Matematiche Elementari (a cura di Berzolari, G. Vivanti e D. Gigli), Vol.I, parte I, 1930, Milano, Hoepli, pp.81, 212.
[7] Landau E. *Foundations of Analysis,* 1966 New York Chelsea Publishing,Company.
[8] Natucci A. *Il concetto di numero e le sue definizioni*, 1923 Torino ed. Bocca.
[9] Padoa A. *Théorie des nombres entiers absolus*, 1902, Torino Revue de Math.Vol. VIII, ed. Bocca, pp.45, 54.
[10] Palladino D. Il Principio di Induzione e l'Aritmetica formalizzata, 1993, Quaderno 14 C.N.R.
[11] Palladino D. *Elementi di Algebra*, 1995, Brescia, La Scuola.
[12] Peano G. *Arithmetices Principia nova methodo exposita,* Opere scelte, U.M.I., 1959, Roma ed. Cremonese, Vol.II, pp20, 55.
[13] Peano G. *Sul concetto di numero,* Opere scelte, U:M:I:, 1959,Roma ed. Cremonese, Vol.III, pp.80, 109.
[14] Peano G *I fondamenti dell'Aritmetica nel Formulario del 1898,* Opere scelte, U.M.I., 1959, Roma ed. Cremonese, Vol.III, pp.215, 231.
[15] Peano G. *Aritmetica generale e algebra*, 1902,Torino, ed. G.B. Paravia & C.
[16] Peano G. *Sui libri di testo per l'aritmetica nelle scuole elementari*, Opere scelte U.M.I. 1959, Roma ed. Cremonese, Vol.III, pp.441, 446.
[17] Pieri M. *Sopra gli assiomi aritmetici,* Opere sui fondamenti della Matematica ,U.M.I. 1980, Bologna ed. Cremonese, pp.449, 453.
[18] Prodi.G. *Analisi Matematica*, 1970, Torino ed. Boringhieri.
[19] Valenti S.*Le tavolette assire e il principio di induzione*, 1995, Milano, Lettera Pristem 18.