Conceptions du hasard dans l'enseignement universitaire et secondaire français.

D. Lahanier- Reuter[1].

Abstract

Résume

[1] Equipe Théodile, Lille III, France.

Conceptions du hasard dans l'enseignement universitaire et secondaire français.

D. Lahanier- Reuter[2].

Introduction

Le but de ma recherche est de faire fonctionner une grille d'analyse théorique, développée par N. Balacheff, grille d'analyse dont le but est l'identification de conceptions relatives à des objets mathématiques. N. Balacheff[3] propose de lire une conception relative à un objet mathématique comme un quadruplet (P, O, C, L) dans lequel P désigne l'ensemble des problèmes que ce réseau de connaissances relatif à l'objet permet de résoudre, O l'ensemble des opérations mobilisées, C l'ensemble des procédures de contrôle mises en oeuvre et enfin L l'ensemble des systèmes symboliques susceptibles d'être employés.

Je propose de faire fonctionner ce modèle sur des savoirs enseignés. Ma démarche est la suivante : je tente d'isoler les problèmes auxquels l'enseignement se propose de répondre, les opérations qui sont indispensables à construire, le langage et les procédures de preuve mises en place. Je distingue dans cette analyse celle qui est relative à l'exposition théorique des objets mathématiques et celle qui concerne les problèmes, les exercices, plus généralement, les tâches proposés aux élèves, aux étudiants.

J'analyserai dans cet article des <u>savoirs enseignés</u>, qui se caractérisent par un concept commun, celui de hasard. J'ai choisi le savoir de la théorie probabiliste tel qu'il est enseigné dans les classes terminales du lycée et celui de la statistique inférentielle en Licence de Sciences de l'Education, par conséquent dans un enseignement universitaire. Je tenterai de décrire précisément les sens que revêt le concept de hasard, en tentant d'isoler des conceptions différentes de cet objet en montrant en quoi il est un concept délicat à construire, dans une perspective d'enseignement et d'apprentissage.

I Les savoirs enseignés: savoir probabiliste et savoir statistique. Remise en cause d'un enseignement "linéaire".

J'inscrirai ma démarche tout d'abord dans la perspective de recherche didactique que définit H. Steinbring[4] à propos de la modélisation mathématique de situations concrètes, expérimentales par des objets théoriques probabilistes. En effet, le hasard engagé dans les deux types d'enseignement qui constituent mon sujet d'étude, est, j'espère le montrer, un concept qui prend un sens particulier dans les situations de modélisation probabiliste.

Cet auteur met l'accent sur la nécessaire remise en cause d'une conception de type linéaire de l'enseignement de notions probabilistes. A ses yeux, considérer qu'un concept "de base" tel que celui de l'indépendance ou celui du hasard, peut faire l'objet d'une définition adéquate, efficace, définitive, relève de la conception selon laquelle le savoir mathématique, en tous cas le savoir probabiliste peut se déduire harmonieusement, linéairement à partir de définitions initiales. "Le paradigme prédominant et disséminé de la nature du savoir et de l'enseignement des mathématiques est celui d'une suite linéaire et déductive de phénomènes [...] en suivant cet ordre linéaire et logique, les processus d'enseignement et d'apprentissage devraient être organisés comme une suite linéaire de pas" (p.192) "Traditionnellement, l'enseignant des mathématiques cherche à partir de notions

---

[2] Equipe Théodile, Lille III, France.

[3] N.Balacheff,1995, "Conception, connaissance et concept", *Actes de l'Ecole d'été de Didactique des mathématiques*.

[4] [1]H. Steinbring, 1986 "L'indépendance stochastique", *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol 7 n°3, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble, p.5-50.

[2]H. Steinbring, 1989, "La relation entre modélisations mathématiques et situations d'expérience pour le savoir probabiliste", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Vol 2, IREM de Strasbourg, p.191-215.

fondamentales indubitables et de là il organise le processus d'enseignement et d'apprentissage sans jamais avoir besoin de reconstruire les fondements préalablement choisis" (p.194)

Dans l'enseignement des probabilités, tel qu'il fut quelque temps dispensé en France aux classes de 1ère et Te, c'est cette approche linéaire qui avait été retenue : les définitions initiales inspirées de l'axiomatique de Kolmogorov étaient présentées en premier lieu aux élèves. "Cela dit, le chapitre est simple : un vocabulaire de base une fois acquis, le contenu scientifique en est ramené à des problèmes très classiques de combinatoire et de dénombrement"[5] exposent les auteurs d'un célèbre manuel de mathématiques dans l'introduction au chapitre "Probabilités".

Dans le cas de l'enseignement des statistiques à l'Université, auprès d'étudiants de Sciences de l'Education, je n'ai pu jusqu'à présent relever la présence d'aucune définition de l'aléatoire ni du hasard. En étendant mes recherches à des textes destinés plus largement à des étudiants de Sciences humaines, j'ai pu distinguer deux attitudes différentes : celle qui consiste à apporter, dès l'introduction du polycopié, du manuel, une réflexion sur le sens du hasard, et celle qui, au contraire, ne définit le hasard qu'au travers de la définition des tests d'hypothèses et des situations de simulations.

La première attitude est bien illustrée par G. Mialaret, lorsqu'il écrit, au début du polycopié réalisé à partir de ses cours : "On a proposé de nombreuses définitions du hasard. Nous adopterons celle de Cournot : "Le hasard est le caractère d'un événement amené par le combinaison ou la rencontre de phénomènes qui appartiennent à des séries indépendantes dans l'ordre de la causalité." [...] : Fonctionnement du pantographe (déterminisme absolu : la prévision est parfaite; Phénomène astronomique (prévision mathématique possible dans le cas des éclipses mais nécessité d'examiner certains phénomènes stellaires statistiquement) ; Expérience de chimie (elle peut réussir mais d'autres séries de causalité peuvent intervenir) ; la prévision météorologique (une grande part d'inconnue) ; Allumer le feu (on applique certaines règles scientifiques mais il reste une grande partie de hasard) ; le tirage de la loterie nationale (le hasard "parfait")"[6].

La deuxième attitude est par exemple celle de H. Rouanet et de ses collaborateurs qui ne définissent de l'aléatoire que les situations de tirage au sort "mécanismes réels ou hypothétiques"[7], dont les exemples prototypiques sont "les dispositifs aléatoires : dés, roulettes, urnes" (idem, p.172) qui conduisent à une situation de tirage au sort "après les précautions d'usage : brassage des bulletins, extraction à l'aveugle". (idem, p.172).

A la différence de ce qui se passe au lycée, l'enseignement universitaire en Sciences de l'Education parait divisé quant à la présentation, quant à la définition du hasard : face à une population traditionnellement pensée comme "rebelle" aux concepts mathématiques, faut-il engager une réflexion sur l'aléatoire des phénomènes particuliers aux sciences de l'homme, ou au contraire ne le présenter qu'en tant qu'outil pratique?

La théorie défendue par H. Steinbring, qui, lui, s'intéresse à une définition mathématique du concept, est que le développement des connaissances et des savoirs théoriques des élèves s'accompagne de "définitions locales" des concepts de base que sont les concepts de probabilité, de hasard, d'indépendance, définitions locales sur lesquelles tout nouvel objet de savoir permet, en retour de s'interroger et de prolonger, en une rétroaction. "De nouveaux problèmes mathématiques

---

[5]Gautier, Girard, Gerll, Thiercé, Warusfel, 1974, *Aleph$_1$ Analyse / probabilités, 1ère CDE*, Hachette, p.102.
[6]G. Mialaret, ?, *Statistiques appliquées aux Sciences humaines*, Cours polycopié, Université de Caen, Fascicule I, p.9
[7]H. Rouanet, J.M. Bernard, B. Leroux,1990, *Analyse inductive des données*, Dunod, Paris,p.173.

et des situations d'application diverses exigent souvent des modélisations stochastiques et des interprétations probabilistes radicalement nouvelles" (p.194)

Je m'inscrirai dans cette ligne de pensée, en acceptant l'idée que le sens du hasard ne peut être appréhendé par des élèves, des étudiants, à partir de définitions initiales, mais au contraire que le sens du hasard est un sens qui s'élabore au fil des situations problématiques nouvelles auxquelles l'étudiant, l'élève se trouve confronté. J'examinerai par conséquent l'instant où apparaît une définition formelle du hasard (espaces probabilisés de loi équirépartie), mettrai en évidence que des nouveaux objets (les variables aléatoires par exemple) sont susceptibles de créer des situations nouvelles d'emploi, de recours au hasard.

II Description des situations dans les enseignements de T ES et de licence de Science de l'Education.

II.1 Les savoirs enseignés du point de vue de l'institution scolaire ou universitaire: les programmes.

Je relèverai dans un premier temps les savoirs enseignés au cours de l'enseignement en statistique en Licence de Sciences de l'Education, puis ceux qui figurent au programme de la classe de TES, sous le registre "probabilités".

L'enseignement des statistiques inférentielles en Licence de Science de l'Education en 1994, 1995 comprend l'étude de la loi normale, une approche de la théorie de l'estimation et de l'échantillonnage, l'établissement et l'utilisation de certains tests statistiques : le test du _^{2} et celui de Student. En particulier, le concept de hasard intervient de façon décisive lorsqu'il s'agit de construire la théorie de l'échantillonnage, puisqu'il gère à la fois la méthode pratique de tirage au sort et la modélisation d'un caractère statistique par une variable aléatoire.

L'enseignement des probabilités en TES en 1995 comprend le calcul de probabilités discrètes d'événements composés, la notion de probabilité conditionnelle, le schéma de Bernoulli.
Le programme officiel décrit cette partie du programme de mathématiques en ces termes:

"La première partie [du programme de mathématiques] inclut la statistique, les probabilités et des compléments concernant l'information chiffrée.[..] on insiste davantage que par le passé sur la distinction entre "l'absolu" et le "relatif" pour qualifier la notion de croissance utilisée dans plusieurs disciplines. Cette réflexion oriente le champ des exercices et permet de contrôler des conjectures auxquelles conduit l'intuition."

" On poursuit l'étude des <u>phénomènes aléatoires</u> en introduisant les notions de variable aléatoire et de probabilité conditionnelle."

Suit la définition des variables aléatoires, qui "ne prendront qu'un nombre fini de valeurs". "Cette notion pourra être introduite de la façon suivante : une variable aléatoire X est une **grandeur numérique associée à une expérience (ou à un phénomène) aléatoire**, susceptible de prendre un nombre fini de valeurs $a_1,...a_n$ et telle qu'une probabilité $p_k = p(X = a_k)$, k = 1,...,n.". Le programme comprend l'étude de quelques variables aléatoires et de leurs lois de répartition. Le programme de spécialité ajoute " la loi des grands nombres, dont la formulation est hors programme."

Le programme de cette section est le programme le plus complet au regard des probabilités. Il est plus important que celui des autres sections "classiques", S et L. Enfin, c'est la seule section à développer les probabilités dans un enseignement de spécialité et à posséder de plus un programme de statistique.

Phénomènes aléatoires d'une part, phénomènes statistiques d'autre part, les deux enseignements décrits semblent éloignés l'un de l'autre. Je vais à présent essayer de montrer que ces deux enseignements ont des objets et des problèmes communs.

II.2 Les objets mathématiques.

Je distinguerai les objets mathématiques selon le champ dans lequel ils sont définis : probabiliste et statistique. Je les présenterai dans l'ordre qui est l'ordre d'apparition "officiel", puis montrerai les liens qui les unissent.

II.2.1 Les objets mathématiques dans le savoir probabiliste de ces deux enseignements.

II.2.1.1 Le couple (épreuve / événement), l'algèbre des événements et les probabilités.

Le premier des concepts définis dans la théorie probabiliste est celui du couple (épreuve / événement), parfois nommé <u>expérience aléatoire</u>. Il consiste à définir une épreuve selon des règles toujours identiques, et l'ensemble des issues de cette épreuve : _ . Dans l'enseignement actuel des classes de Terminale, _ est toujours fini, les issues associée à une épreuve sont toujours en nombre fini. Traditionnellement, le jet d'un dé et les événements 1, 2, 3, 4, 5, 6, sont l'exemple prototypique d'un tel couple, où l'épreuve est constituée à la fois par le lancer du dé et les règles suivantes : ce n'est qu'une fois le dé immobilisé que l'observateur relève la numéro de la face supérieure du dé, si le dé est cassé, l'épreuve est annulée, etc.

Ce couple (épreuve / événement) consiste à restreindre l'attention portée à un phénomène : la définition de _ met en jeu la <u>notion de point de vue</u>[8]. On ne relève pas dans l'exemple cité la distance parcourue par le dé avant son immobilisation, ou les points indiqués sur deux des faces latérales, etc.

Mathématiquement, pour qu'une expérience puisse être modélisée en une expérience aléatoire (c'est à dire que l'on décide de parler de l'ensemble des issues possibles) il est exigé :

· que l'épreuve puisse être reproductible à volonté.
· que les épreuves successives soient *indépendantes.*

Certaines expériences, en ne répondant à la dernière exigence en particulier, ne peuvent être modélisées en expériences aléatoires : relever les tailles d'un même individu tous les jours ne peut être considéré comme une expérience aléatoire puisque les épreuves successives ne sont pas indépendantes.

A ce premier concept sont attachés nécessairement les concepts d'algèbre des événements et de probabilité. A chaque événement issu de l'épreuve est attaché une mesure qui est sa probabilité. Toute probabilité est donc un nombre réel, compris entre 0 et 1. Le couple (_ , P) est aussi dénommé <u>espace probabilisé</u> et enfin le concept d'algèbre munit d'une structure particulière l'ensemble des événements issus de cette épreuve.

Sont alors distinguées **les expériences aléatoires dites de tirage au sort ou de hasard** qui désignent les espaces probabilisé où P est la loi équirépartie, et les autres expériences aléatoires, où P n'est pas la loi équirépartie.

Par conséquent le triplet (_ , *A*, P) **donne un sens différent au mot hasard et au mot aléatoire**. L'aléatoire englobe les situations de hasard, les situations de hasard sont des situations

[8] J. Bonitzer, opus cité.

aléatoires particulières, associées à des expériences aléatoires où l'épreuve est dite : tirage au sort ou choix au hasard.

La plupart des manuels insistent alors sur le fait que dans le cas d'une expérience de hasard, la probabilité d'un événement A est le quotient du cardinal des événements élémentaires "qui réalisent A" et du cardinal de _ . Par contre, aucun à ma connaissance[9] ne tire comme conclusion, ou n'écrit que dans ce cas, **les probabilités de tous les événements sont des nombres rationnels**.

Les situations de hasard ne sont définies qu'en tant que catégorie particulière des situations aléatoires.

A ces concepts correspondent des théorèmes portant sur la détermination, le calcul de la probabilité d'événements composés que je ne détaillerai pas davantage.

II.2.1.2 Les variables aléatoires et les lois usuelles.

Le concept de variable aléatoire est le second concept clé. Il existe deux définitions utilisées dans le cadre des enseignements étudiés du concept de variable aléatoire, qui se distinguent par la présence ou l'absence de référence à un tirage au sort, **à une épreuve de hasard initiale.**

La première définition donne à une variable aléatoire le statut d'application de l'ensemble _ muni de la probabilité P, **où P est de loi équirépartie**, vers un ensemble numérique. **Une variable aléatoire est dans ce cas définie en tant que caractéristique intéressante d'événements issus d'une épreuve de tirage au sort.**

L'exemple le plus intéressant de variable aléatoire correspondant étroitement à cette définition est le suivant, qui décrit le rapport entre variable aléatoire et caractère statistique. Un caractère statistique est étudié, décrit sur une population d'individus. Il est une application de l'ensemble de ces individus, ensemble qui n'est muni a priori d'aucune structure particulière dans un ensemble constitués des modalités de ce caractère. Par exemple, le caractère statistique "taille" est l'application de la population dans l'ensemble des réels. La variable aléatoire associée à ce caractère statistique sera l'application qui à tout événement de l'ensemble _ des issues de l'épreuve de tirage au sort pratiquée sur les individus de la population étudiée fera correspondre la valeur du caractère statistique de l'individu tiré au sort. Modéliser un caractère statistique par une variable aléatoire est plus qu'une "traduction", mais bien une source de production de connaissances nouvelles, connaissances qui ne peuvent être produites qu'en effectuant une épreuve de hasard sur les individus qui constituent la population initiale. J'en reparlerai plus loin.

La deuxième définition d'une variable aléatoire permet de considérer comme variable aléatoire toute application **numérique** de l'ensemble _ muni d'une distribution de probabilité P, **où P n'est pas forcément équirépartie**.

Cette définition est celle qui est en vigueur dans les programmes de Terminale à l'heure actuelle. Elle se distingue de la première définition, et cette distinction prendra tout son sens dans les situations de modélisation, par l'absence de référence à une expérience aléatoire **de hasard** pour modéliser une caractéristique de la situation par une variable aléatoire.

En résumé, dans le cadre de la théorie des probabilités discrètes, le hasard est défini comme une situation aléatoire particulière. Cependant, cette définition formelle n'est pas l'unique sens dans lequel le mot hasard va apparaître. Comment définir en effet ce qu'est une situation aléatoire? On lit " Le lancer d'une pièce de monnaie, le lancer d'un dé[...] sont des expériences aléatoires, car avant de les effectuer, on ne peut prévoir avec certitude quel en sera le résultat, **résultat qui dépend en**

[9]Si ce n'est le *Aleph*, *Ière CDE*,1974, Editions Hachette, collection Classiques, Paris.

effet du hasard."[10] Le hasard agent de la situation, hasard non plus formel mais "physique", réapparaît. C'est, selon moi, une preuve du fait que des sens différents du hasard circulent dans le langage couramment employé dans le cadre de l'enseignement.

II.2.2 Les objets du savoir statistique.

Comme précédemment, j'adopterai comme ordre d'exposition l'ordre qui est celui des manuels ou des polycopiés en usage.

II.2.2.1 Les caractères ou variables statistiques.

Après avoir pu être défini comme "relation d'équivalence défini sur la population à observer"[11] un caractère statistique est à présent défini comme une application d'un ensemble P d'individus dans un ensemble numérique ou non dont les éléments sont les modalités de ce caractère, et les fréquences les pourcentages d'individus présentant la modalité fixée.

Cette définition est classique, mais ses conséquences ne sont pas évoquées. En effet, je ne connais pas de manuels ou de polycopiés où il est par exemple expressément signalé qu'une fréquence est un nombre rationnel, comme il a été dit plus haut de la probabilité.

L'ensemble des modalités du caractère est alors structuré par les lois auxquelles obéissent les fréquences. Par exemple, la fréquence de la réunion de deux modalités distinctes est la somme des fréquences de ces deux modalités.

Ces caractères ou variables statistiques sont soit qualitatives, soit quantitatives : "Une variable est dite quantitative si elle est numérique et si elle peut faire l'objet de calculs significatifs; elle est dite qualitative dans le cas contraire"[12]. Le projet statistique met donc sur un pied d'égalité ces deux types de variables, au contraire du projet probabiliste, qui ne s'intéresse, à partir d'un certain niveau qu'aux variables numériques.

II.2.2.2 Echantillons de taille n.

Je prendrai ici la définition proposée par C. Robert (son ouvrage est destiné explicitement aux étudiants) : "Lorsqu'une série statistique est composée des n résultats d'expériences identiques et indépendantes, nous dirons que la série statistique constitue un échantillon de taille n"[13]. La définition d'un échantillon repose par conséquent sur la donnée d'une **expérience statistique**.

Le recueil des modalités d'un caractère et de leurs fréquences est une expérience, constituée d'une épreuve et des issues associées à cette épreuve. Ces expériences ne sont pas forcément aléatoires, c'est à dire qu'elles ne sont pas forcément reproductibles et que les épreuves successives ne sont pas obligatoirement indépendantes. En effet, on peut recueillir des intentions de vote, situation par essence même non reproductible. C. Robert[14] donne comme exemple le recueil "de la température qu'il fait à la même heure au même endroit: [...] la température d'un jour dépend en partie de celle des jours précédents".

Tout échantillon statistique suppose la donnée d'une population P de référence, considérée comme inaccessible. Considérer une série statistique comme un échantillon implique d'interpréter cette série comme une suite de données "incomplète". Les définitions proposées dans les manuels en vigueur au lycée ne mettent en évidence que ce dernier point :"un échantillon est constitué de

---

[10] *Mathématiques T^{e}D*,1989, Editions Nathan, Collection Transmath, Paris, p.75.
[11] Par exemple dans : R. Cluzel, P. Vissio, 1970, *Statistique et probabilités 1ères ABCDE*, Editions Delagrave, Paris, p.9.
[12] *Mathématiques T^{e}.B*,1988, Editions Hachette, Collection *Lycées*, Paris. p.229.
[13] C. Robert, , 1995, *L'empereur et la girafe*, Editions Diderot, collection La règle et le compas, Paris, p.149.
[14] C. Robert, opus cité, p.148.

mesures portant sur une très petite partie de la [population]"[15], "un échantillon est un relevé de données portant sur une partie seulement de la population"[16].

Les définitions proposées dans des manuels ou polycopiés destinés à une population d'étudiants de sciences humaines sont assez voisines: "Quand on considère un groupe de N sujets, deux cas peuvent se présenter:
A) ou bien ces N sujets représentent une population complète [...]
B) ou bien ces N sujets ne représentent qu'une partie de cette population d'ensemble"[17]
ou encore "En statistique, une **population** est un ensemble fini d'individus ou d'observations; et un **échantillon d'une population** est une partie de cette population"[18].

II.2.3 Divergence et convergence des définitions proposées dans les théories probabiliste et statistique.

Les définitions relevées dans des manuels ou polycopiés effectivement utilisés dans l'enseignement, ne semblent pas toujours être établies dans un souci d'analogie des objets définis, analogie qui est à la base des situations de modélisation des situations statistiques par l'aléatoire; En effet :
-Les objets définis (ou plutôt tels qu'ils le sont dans l'enseignement étudié), sont définis dans un ordre d'exposition différent : dans la théorie probabiliste, on définit tout d'abord l'expérience aléatoire, puis les variables aléatoires. Dans la théorie statistique, c'est la variable statistique qui est définie avant que l'expérience statistique ne le soit.
-Si les propriétés des fréquences et des probabilités se ressemblent, il est à souligner que les propriétés des probabilités font l'objet de propositions, de théorèmes, au contraire des fréquences, sur lesquelles les manuels restent la plupart du temps muets. J'ai par ailleurs déjà insisté sur le fait que les probabilités sont des réels, compris entre 0 et 1, et que les fréquences sont des rationnels, compris entre 0 et1.
-Enfin je soulignerai le fait que les définitions des variables aléatoires et les variables statistiques divergent par l'accent mis sur le caractère numérique des premières et sur les caractères numérique ou qualitatif des secondes.

Les convergences entre les objets définis dans les deux champs théoriques sont, dans les manuels du programme actuel des lycées (1994) lettre morte. Cette attitude était plus partagée antérieurement. Les manuels cités plus haut, dont la date d'édition est antérieure à 1975, évoquent largement le problème de la modélisation de situations statistiques.

II.3 Les tâches mathématiques.

Mais mon but est d'éclairer les liens qui existent entre ces deux champs, et plus particulièrement en quoi le concept de hasard est un concept commun à ces deux problématiques.

C'est pourquoi je distinguerai les situations où aucun objet n'est commun aux deux champs : ce sont des situations de descriptions d'objets dans leur champ de référence, et celles où sont évoqués simultanément des objets empruntés à chacun des deux champs théoriques. Il s'agira dans ce cas, si une situation probabiliste requiert une "exemplification" statistique, d'une situation de simulation. Si une situation statistique exige un modèle probabiliste, d'une situation de modélisation.

---

[15]*Mathématiques 1ère A_1B*, EditionsNathan, Collection "Transmath", 1986, p.12.
[16]*Mathématiques 1ère $B.A_1$*, Editions Didier, Collection N. Dimathème, 1984, p.57.
[17]G. Mialaret, s.d., *Statistiques appliquées aux Sciences humaines*, Cours polycopié, Université de Caen, Fascicule II, p.31.
[18]H. Rouanet, J.M. Bernard, B. Leroux,1990, *Analyse inductive des données*, Dunod, Paris, p.91.

II. 3.1 Les situations de description, situations "homogènes" du point de vue des deux champs.

Dans ce cas, le hasard est entièrement du côté des probabilités. Tant qu'il n'y a aucun recours à des modélisations ou à des simulations, le hasard peut être défini comme une situation aléatoire particulière, et le concept prend alors un sens particulier, celui d'être associé à des catégories d'espaces probabilisés dont la loi de probabilité est simple, puisque les probabilités des événements envisagés sont des rationnels.

II.3.2 Les situations de modélisation.

Le problème dans ce cas est la modélisation d'un phénomène décrit ou appréhendé de façon statistique par des concepts probabilistes. Afin d'identifier les différentes situations de modélisation et de mettre en évidence le rôle crucial que joue le hasard dans ces modélisations, je vais les analyser selon les objets à modéliser, les objets de modélisation et le but que remplit cette modélisation.

Puisque ce phénomène est connu de façon statistique, j'interrogerai sa description dans ce champ : s'agit-il d'un caractère statistique décrit sur une population P de référence, ou s'agit-il d'un échantillon? La différence entre les deux descriptions tient ici à la référence à une expérience statistique, un mode de recueil des données, ou à la référence à une population initiale, déterminée.

Du point de vue probabiliste à présent, j'essaierai de dégager les objets probabilistes qui sont les outils de la modélisation : s'agit-il de modéliser par un couple (_ , P) ou plutôt d'attribuer à une variable de la situation statistique le statut de variable aléatoire?

Enfin, toute modélisation permet de produire des explications et des prévisions relatives au phénomène modélisé. Je me poserai par conséquent, dans chaque situation de modélisation, la question du rôle que remplit cette dernière : est-elle utilisée plutôt dans un souci de comprendre, d'expliquer des particularités observées de manière statistique, ou est-elle utilisée plutôt dans le but de produire des connaissances nouvelles sur le phénomène observé?

En retour, une fois le but de la modélisation identifié, il me faudra poser le problème de la justification de cette modélisation : est-elle toujours adéquate, quels sont les instruments de validation dont peut disposer un élève , un étudiant?

II.3.2.1 Caractère statistique.

Je commencerai par l'étude des situations de modélisation dans lesquelles sont donnés un caractère statistique, les différentes modalités de ce caractère, les fréquences associées et la population P d'individus sur laquelle est étudiée ce caractère.

Modéliser cette situation par un couple (_ , P) va exiger d'interpréter les différentes modalités du caractère comme des sous ensembles de _ , d'interpréter les fréquences de ces modalités comme les probabilités de ces sous ensembles. Par exemple, modéliser le caractère "sexe" étudié sur la population de la classe (28 élèves), et les fréquences observées de chacune des deux modalités de ce caractère (7/28 et 21/28) exige d'interpréter en terme de probabilité les nombres 7/28 et 21/28.

Cependant, probabilité et fréquence n'ont pas le même statut dans la situation, car elles n'y ont pas la même fonction : prédiction pour l'une, descriptive pour l'autre.

<u>Or, il n'y a correspondance entre les fréquences et les probabilités que dans le cas où l'ensemble _ est associé à une loi équirépartie</u>. En effet, si la loi associée est la loi équirépartie, la probabilité de tout événement est égale à des quotients de cardinaux. Si les fréquences et les

probabilités sont égales, la probabilité de tout événement peut s'interpréter comme étant le quotient de l'effectif de la modalité par l'effectif total.

Par conséquent, modéliser ce caractère statistique dans ce cas nécessite d'interpréter le recueil des données comme le tirage au sort des individus de la population initiale.

Le rôle du hasard, la fonction qui lui est attribuée dans ce cas, est de se substituer à un mode initial de recueil des données organisé : le recueil initial des données, exécuté dans un but de description de la population, est produit de façon organisée. Ce peut être par ordre alphabétique, par ordre de présentation, par ordre d'apparition etc. en tous cas, le recueil initial s'effectue selon un certain ordre, ordre qui, quel qu'il soit, doit être oublié par la suite.

Le hasard, en permettant d'indifférencier totalement les individus de la population, s'oppose à tout accès à l'information organisé. Le hasard est un moyen d'accès à l'information qui s'oppose à tout mode d'accès réfléchi.

Cette modélisation d'un caractère statistique par un couple (_ , P) est une modélisation qui n'apparaît pratiquement que dans l'enseignement des classes de lycée, pour disparaître dans l'enseignement dispensé en licence de Sciences de l'Education, voire dans l'enseignement de statistique en Sciences Humaines.

En effet, la modélisation d'un caractère statistique, étudié, connu sur une population finie, est bien davantage la modélisation de ce caractère par une variable aléatoire.

Dans ce cas, les différentes modalités du caractère doivent s'interpréter comme les différentes valeurs de la variable aléatoire, et les fréquences associées comme les probabilités attachées respectivement à ces valeurs. De même que précédemment, ces fréquences et ces probabilités ne coïncident qu'en cas de recours à une loi équirépartie sur _ , et je pourrai dire que le rôle du hasard dans la modélisation d'un caractère statistique par une variable aléatoire est exactement le même que celui qu'il revêt dans le cas de la modélisation de ce caractère par un couple (_ ,P).

En revanche, le fait qu'une variable aléatoire soit définie, dans les programmes du lycée, comme une application numérique et uniquement en tant que telle, prévient ce dernier type de modélisation lorsque le caractère est qualitatif. Les conséquences de ce choix, de cette définition restrictive, seront essentiellement d'ordre sémantique. En effet, si le caractère est modélisé par un couple (_ , P), les événements dont on recherche les probabilités continueront à être défini en compréhension : par exemple, au baccalauréat peut être posée la question suivante "Quelle est la probabilité qu'un ménage dont la personne de référence est dans la catégorie Ouvriers ait 2 enfants?"[19], dans le cadre d'un exercice que l'on peut dire typique de modélisation de caractères statistiques, puisque les données sont "un tableau présentant la répartition des ménages en France en 1982 par catégories socio professionnelles".(idem).

Si le caractère est modélisé par une variable aléatoire, les événements dont on recherche les probabilités sont écrits en langage symbolique : par exemple "Trente quatre élèves se présentent à un examen, la probabilité de réussite pour un élève est p=0,8. Quelle est la probabilité pour que trente élèves au moins soient reçus? [...] p(A) = p(30)+p(31)+p(32)+p(33)+p(34)".[20]

En résumé, la modélisation d'un caractère statistique est toujours possible qu'il le soit par un couple (_ ,P) ou par une variable aléatoire, et met en évidence dans ce cas un sens particulier au hasard : mode d'information opposé à tout recueil d'information organisé. Reste à savoir si ce sens particulier peut être construit par les élèves : la désorganisation effective, concrète des données recueillies est-elle imaginée, explicitée, décrite ou effectuée?

---

[19]Sujet Polynésie, Bac 1994.

[20]*Mathématiques T^e B*, Editions Hachette, Collection Lycées, 1988, Paris, p.156 157.

II.3.2.2 Echantillons de taille n.

La modélisation d'un échantillon de taille n est un point beaucoup plus important de l'enseignement universitaire que de l'enseignement du second cycle.

Comme dans le paragraphe précédent, je distinguerai les problèmes liés à la modélisation d'un échantillon par un couple (_ ,P) de ceux liés à la modélisation de cet échantillon par une variable aléatoire.

La modélisation d'un échantillon par un couple (_ ,P) requiert d'interpréter les modalités par des événements, les fréquences observées comme compatibles avec les probabilités de ces événements, et l'expérience statistique comme une expérience aléatoire.

C'est à dire qu'il est indispensable dans la modélisation de l'échantillon statistique de poser le fait que les n expériences réalisées sont des expériences identiques, relevant du même couple (_ ,P), et que ces n expériences sont indépendantes.

A la différence de la modélisation d'un caractère statistique, qui est toujours possible, grâce au recours au tirage eu sort, la modélisation d'un échantillon sera étroitement liée aux conditions de l'expérience qui permet de le produire : soit les conditions expérimentales sont jugées satisfaisantes au regard des exigences posées, soit elles ne le sont pas. Par exemple, une situation a été élaborée par une équipe de l'I.R.E.M. On jette en l'air une punaise qui peut retomber selon deux positions différentes : pointe en l'air, ou en appui sur sa pointe et son disque. L'expérience qui permet de produire les échantillons est constituée par le lancer en l'air de la punaise et l'observation de la position de la punaise une fois immobilisée. Le recueil des données est uniquement organisé par le temps. La modélisation de cet échantillon repose sur le fait qu'il est posé que les épreuves successives sont indépendantes et qu'elles relèvent toutes du même modèle. Ces hypothèses reposent sur des arguments d'ordre physique : il n'y a aucune raison de penser que les résultats des lancers consécutifs aient une influence les uns sur les autres, la punaise est sensée conserver la même forme, le même poids au cours des expériences.

Au contraire, l'échantillon constitué par le recueil chronologique également des températures observées en un même lieu, à une même heure, ne peut être modélisé directement par un couple (_ , P). En effet, les épreuves successives ne sont certainement pas indépendantes.
Le cas le plus fréquent, le cas concret, est celui où l'observateur ne sait pas si une telle modélisation est adéquate ou non.

Par conséquent, la modélisation d'un échantillon est donc une action qui doit être interrogée : certaines seront licites, pas d'autres. Mais en retour, la possibilité de modéliser un échantillon permettra, puisqu'il s'agit dans ce cas d'une certaine catégorisation des phénomènes, ceux qui sont modélisables et ceux qui ne le sont pas, de mettre en évidence le rôle explicatif et prédictif que joue ce modèle : explicatif par exemple, puisqu'il permet par la loi des grands nombres, d'expliquer la stabilisation des fréquences, prédictif, puisque par le théorème de la limite centrale, il permet de prévoir les intervalles dans lesquels doivent se trouver les fréquences observées des autres échantillons.

La modélisation d'un échantillon par une variable aléatoire implique l'interprétation des différentes modalités observées par les différentes valeurs prises par la variable et les fréquences observées comme des compatibles avec les probabilités de ces valeurs.

Encore une fois, les conclusions établies précédemment restent valables. La modélisation d'un échantillon par une variable aléatoire exige que l'expérience statistique produisant ces différentes valeurs présente les caractéristiques évoquées plus haut : indépendance des résultats successifs, permanence du modèle.

En conclusion, la modélisation d'un des objets statistiques étudiés est une tâche différente selon que les données sont appréhendées comme des données complètes, exhaustives sur une population déterminée, ou au contraire comme des échantillons, connaissances incomplètes.

Le sens du hasard qui est engagé dans ces tâches est celui d'être une fonction désorganisatrice du recueil des informations. C'est par conséquent une fonction relative à la structure des données de la situation, fonction qui assure un lien entre la variabilité locale des résultats alors obtenus et la stabilité des indicateurs qui résument ces résultats au niveau global. En revanche, si la modélisation d'un phénomène se trouve remise en cause, ce n'est plus seulement le désordre des données qui est interrogé, mais plutôt l'indépendance et la reproductibilité des épreuves qui ont permis de recueillir ces données.

II.3.3 Les situations de simulation.

Au contraire des situations de modélisation, les situations de simulation sont définies par des données de type probabiliste et la production de données statistiques. Il s'agit, connaissant un couple (_ , P) ou une variable aléatoire, de produire par le calcul un ou plusieurs échantillons de taille n, dont une modélisation serait ce couple (_ , P) ou cette variable aléatoire.

II.3.3.1 Simulation d'un couple (_ , P) où P est la loi équirépartie.

Il s'agit, et c'est le problème essentiel, de tirer au sort n éléments à prendre dans un ensemble de k valeurs possibles, de façon à ce que les k valeurs prises le soient avec une probabilité uniforme.

Les résolutions possibles sont soit le recours à un dispositif matériel, soit le recours à une table de nombres au hasard. La polémique entre M. Glaymann et P.L. Hennequin[21] est une illustration du sens que confèrent au hasard le choix de l'un ou l'autre de ces dispositifs.

En effet, M. Glaymann s'interroge, face à une table de chiffres au hasard si l'on peut construire un test "qui permet de juger si une suite de chiffres se comporte comme une suite donnée par une machine aléatoire". Il pose comme hypothèse le fait que l'équirépartition des chiffres, condition nécessaire, n'est pas une condition suffisante pour être une suite de chiffres aléatoires, en donnant comme exemple "la suite formée par p zéros suivis de p un, etc." qui n'est pas une suite aléatoire. Puis M. Glaymann introduit la notion d'enchevêtrement des chiffres de la suite, qui est l'étude de la probabilité d'apparition des sous suites de type $(a, b_1, b_2,..b_n, a)$.

En revanche, P.L. Hennequin rétorque que, devant une tables de chiffres aléatoires, il n'y a que deux attitudes possibles : soit "le fabriquant me dit qu'il a effectivement utilisé un dispositif physique[...] suffisamment étudié pour que le modèle d'indépendance des tirages successifs soit justifié" soit il s'agit d'une suite finie de chiffres "sur laquelle on a effectué un certain nombre de tests dont aucun ne permet de rejeter l'hypothèse qu'il s'agit de chiffres au hasard". Dans ce dernier cas, conclut-il, il est impossible d'être satisfait, puisqu'il "n'existe aucun moyen de vérifier qu'une table est une table de chiffres au hasard [si ce moyen] n'utilise que les chiffres de cette table". P.L. Hennequin transporte alors le problème dans des suites infinies de chiffres.

---

[21]M. Glaymann,1975, "L'enchevêtrement des chiffres d'une table de chiffres aléatoires", dans *Hasardons nous*, Brochure A.P.M.E.P. n°17,p.125-138.
P.L. Hennequin ,1975, "Quelques remarques sur l'article précédent", dans *Hasardons nous*, Brochure A.P.M.E.P. n°17, p.139-144.

Je soulignerai ici la différence reconnue par les deux auteurs entre le recours au dispositif mécanique et le recours aux tables pseudo aléatoires. J'ajouterai également, car la situation de ce point de vue n'est plus la même qu'en 1975, le recours au fonctions RND des calculatrices, ou aux fonctions de randomisation des ordinateurs. Le sens du hasard est par conséquent différent lorsqu'il est demandé de recourir à un processus mécanique dans une tâche de simulation et lorsqu'il est demandé de recourir à une suite préétablie de chiffres au hasard.

En effet, dans le premier cas, la justification du caractère aléatoire des suites produites repose sur des <u>arguments absolument extérieurs aux suites produites</u> : la parfaite symétrie du dé, le brassage des billes dans l'urne, le mélange des jetons, l'indiscernabilité des boules dans une urne. Le hasard est appréhendé par des caractéristiques physiques de phénomènes, caractéristiques qui assurent l'**indifférenciation** des objets tirés, l'**indépendance** des tirages successifs.

Dans le deuxième cas, la justification du caractère aléatoire des suites produites repose sur des <u>arguments de structure de ces suites, sur des arguments internes à ces suites produites</u>. En particulier, le **désordre** apparent de ces chiffres, l'**absence de toute loi** mathématique directement identifiable[22].

Les situations de simulation de tirage au sort permettent par conséquent de débattre des exigences auxquelles doit obéir une situation de tirage au sort, de choix au hasard sous un double point de vue, celui de la production pratique des données du tirage au sort et celui des objets produits.

Il est intéressant de noter, que soit les manuels utilisés au lycée présentent des situations de simulation qui dans ce cas sont des situations qui utilisent tous les procédés accessibles aux élèves, mécaniques, tables de chiffres au hasard, calculatrice, soit restent muets sur la question.

Le sens que revêt le hasard lorsqu'il est engagé dans ces situations de simulation est avant tout celui d'être **un outil pratique**, et non plus uniquement théorique, de production de connaissances. Quant à ces connaissances, il peut s'agir :

- "de vérifier l'étonnante adéquation entre les calculs probabilistes et les résultats expérimentaux."[23]
- de produire des connaissances sur un processus aléatoire dont "le traitement direct dépasse nos forces"[24].
- de constituer des échantillons en vue de sondages.

II.3.3.2 Simulation d'un couple (_ , P) où P n'est pas la loi équirépartie, simulation d'une variable aléatoire.

Lorsque P n'est pas la loi équirépartie, l'habitude est de simuler une variable aléatoire dont la loi de distribution serait P. Les deux problèmes n'en font qu'un tout au moins au niveau de l'enseignement universitaire décrit. Il n'est pas évoqué, à ma connaissance, au lycée.

La seule différence avec le cas précédent réside dans le traitement subi par les probabilités théoriques, nombres a priori irrationnels. Au niveau adopté, il est d'usage de traiter ces nombres par leurs approximations décimales (d'ordre 2 ou 3), ce qui permet de revenir au cas précédent, c'est à dire à une simulation de tirage au sort, de choix au hasard. Les sens attribués au hasard dans les situations de simulation de variables aléatoires seront donc pour moi identiques.

---

[22]Alors qu'il existe une loi mathématique qui explique la production de ces chiffres, loi parfois donnée par le fabriquant des calculatrices.
[23]C. Robert, opus cité, p.175.
[24]A. Engel, 1990, *Les certitudes du hasard*, Aléas Editeur, Lyon, p.151.

II.4 Résumé

Dans l'enseignement des probabilités et des statistiques, tels qu'ils sont annoncés, décrits dans les programmes institutionnels, et dans leur expression que constituent les manuels autorisés, le hasard est bien un objet commun à ces deux enseignements, dès qu'il est engagé dans des situations de modélisation ou de simulation.

L'analyse de ces tâches différentes, mais complémentaires, a été faite en tenant compte le plus possible des contraintes qu'imposent ces programmes aux objets mathématiques : par exemple, le fait que les ensembles probabilisés soient finis, que les variables aléatoires ne soient parfois que des applications numériques, etc.

Il ressort de ce type d'entrée par les objets mathématiques enseignés que si la définition des situations de hasard est liée à celle des lois de probabilité équiréparties, le sens et le rôle du hasard peuvent être organisés selon plusieurs axes en des pôles opposés :

L'axe outil / objet : selon la tâche, le hasard sera tantôt un objet de connaissance, tantôt un outil, et j'ajouterai outil théorique parfois, outil pratique le reste du temps.

L'axe production / produit : le hasard est essentiellement perçu comme mode de production de données ou mode d'organisation de données déjà-là, mode de production opposé à tout mode de production organisé, à tout mode d'organisation rationnelle.

Cependant, cette opposition est parfois lue dans les caractéristiques de la production de cette désorganisation (indépendance des résultats successifs en particulier) et parfois lue dans les caractéristiques structurelles de cette production (absence de loi mathématique apparente, variabilité des résultats successifs).

III Entrée par les situations effectivement proposées aux élèves.

Après avoir interrogé les objets mathématiques, il me faut conformément au chemin que j'ai choisi de suivre, interroger les situations dans lesquelles le hasard est engagé : dans les exercices, les problèmes proposés, quelle fonction est attribuée au hasard?

J'ai cité plus haut des exemples de situations problématiques d'enseignement comme celle du jet d'une punaise. Ce sont des situations intéressantes, mais qui peuvent masquer, si je ne prends qu'elles en considération, ce que sont les situations "classiques" auxquelles les élèves sont confrontés, et que l'institution décrit comme celles auxquelles ils doivent être confrontés.

Mon but est d'essayer de décrire les conceptions du hasard à partir de documents institutionnels. Or les situations les plus institutionnelles sont celles des exercices du Baccalauréat.

L'analyse qui suit est celle effectuée à partir des exercices de probabilité du Baccalauréat de 1994. Traditionnellement, ces exercices sont proposés aux élèves de Terminale les années suivantes. Sur 19 sujets, 17 comportaient des exercices de probabilité.

J'adopterai comme caractéristiques de l'exercice tout d'abord les données du texte, puis les questions posées, et enfin les réponses correctes qui devaient être apportées.

En ce qui concerne les données du texte, je me suis attachée aux personnages mis en jeu et leurs fonctions par rapport au tirage au sort, par rapport au hasard, puis aux épreuves et aux événements décrits, en interrogeant les actions menées et les attributs qui définissaient les événements.

En ce qui concerne les questions posées, je prendrai en considération les motifs ou l'absence de motif à ces questions ainsi que le type de tâche à réaliser : s'agit-il d'une tâche de modélisation ou de simulation?

Enfin, lorsque les réponses (et c'est pratiquement toujours le cas) sont constituées de calculs de probabilité d'événements, je me suis interrogée sur le degré de signification des événements : s'agit-il de probabilités inférieures à 0,10 ou non?

III.1 Analyse globale.

III.1.1 Les personnages : acteurs et objets.

Je distinguerai les personnages engagés dans une action (choisir, recopier, répondre) et ceux qui ne sont décrits dans le texte que par des attributs, et sur lesquels des actions sont exercées : les objets.

Les acteurs mis en scène sont soit des êtres humains masculins soit des êtres indéfinis : le magasin, "on". Leurs identifications sont brèves : le jeune enfant, l'entraîneur, un joueur de tennis et ils sont solitaires.

Les objets évoqués seront soit de petits objets, susceptibles d'être manipulés, de forme identique : des oeufs, des billes, des bouts de carton, soit des "objets" peu susceptibles d'être manipulés : des mots, des voyageurs, des cases fixes d'un tableau. Ces objets sont toujours nombreux, et leur quantité est invariablement une donnée de l'énoncé, mais je distinguerai les cas où ce nombre est relativement peu élevé (inférieur à 30) de ceux où ce nombre est relativement grand (plus de 400) et enfin de ceux où le nombre d'objets est dit "très grand".

Enfin, ces objets sont regroupés soit physiquement dans un lieu clos (ferme, gare, coffre, urne) soit dans une organisation structurée : équipe de basket, chanson, poème.

En étudiant chacun des exercices sous l'angle du nombre d'acteurs et du nombre de type d'objets différents qui sont mentionnés, je distinguerai des situations fréquentes de situations plus exceptionnelles : un seul de ces 17 exercices met en scène un acteur sans qu'il soit fait référence à un groupe précis d'objets. Dans la majorité des cas, la situation ne fait apparaître qu'un couple, celui constitué d'un acteur et d'un groupe d'objets : candidat/billets, on/ voyageurs par exemple. Dans ce cas, la situation est une situation de tirage au sort où est mis en scène un acteur qui tire au sort des objets. Dans quelques exercices apparaissent des triplets de personnages : jeune enfant/ on / touches par exemple ou on/mots/cartons. Il peut s'agir d'un observateur ("on") et d'un couple formé d'un acteur ("le jeune enfant") et d'objets ("touches), ou d'un couple acteur ("on") et objets("mots"), le troisième élément du triplet étant alors des objets ("cartons"). Ces deux situations pourront s'interpréter comme une observation de dispositif aléatoire par un observateur ou comme une construction de dispositif aléatoire.

L'intérêt de cette catégorisation est de pouvoir différencier les situations de tirage au sort en situations de couples où le tirage au sort est une action décrite par l'acteur qui l'effectue, et en situations de triplets où un observateur examine une action menée par un autre personnage, et où cette identification de l'action menée en un choix au hasard constitue déjà une interprétation de ce qu'est un choix au hasard.

III.1.2 Les acteurs et le tirage au sort.

Dans 14 exercices sur 17, un tirage au sort ou un choix au hasard est explicitement évoqué. L'action est engagée par l'un des acteurs et peut être physique, en correspondant à une manipulation effective : "on prend un oeuf au hasard, on remplit au hasard une boîte, une personne tire un billet (une boule) au hasard".

Cette action peut être au contraire mentale, sans support concret mentionné : "on choisit au hasard un des voyageurs, l'entraîneur choisit au hasard 5 joueurs, le candidat répond au hasard". La distinction entre les deux types d'action est bien sûr induite par la capacité des objets à être manipulés ou non.

Cette différence a pour conséquence que dans le premier cas, il y a retrait physique d'un des objets de l'ensemble des objets et donc modification par ce retrait de l'ensemble initial des objets.

Tandis que, dans le deuxième cas, la désignation (gestuelle par exemple) ne modifie pas cet ensemble d'objets par un retrait : l'ensemble reste intact. Ce problème touche à la reproductibilité de l'épreuve et à la détermination des fréquences et il est assez important pour que dans certains exercices il soit soulevé : "Dans tout le problème, on suppose que le nombre d'oeufs est suffisamment grand pour que le fait de prélever un oeuf ne modifie pas ces proportions". Lorsqu'il n'est pas soulevé, charge est à l'élève de le supposer : par exemple dans un des exercices, tout acheteur d'un appareil ménager tire un billet de loterie au hasard. Ce tirage dure quinze jours, et tous les billets sont distribués. Il faudra donc supposer que la personne qui tire le dernier billet se trouve exactement dans les mêmes conditions que celle qui tire le premier des 500 billets.

L'action engagée est donc différente selon qu'il s'agit d'une manipulation concrète ou d'une désignation des objets choisis au hasard.

III.1.3 Les objets et le tirage au sort.

Comme je l'ai déjà dit dans le premier paragraphe, les objets, qu'il s'agisse d'êtres humains ou non, sont présentés regroupés soit physiquement, soit dans une organisation. Les informations donnés sur ces objets, ou plutôt sur la structure qui organise le groupe d'objets sont soit de type statistique (sans que le mot de statistiques apparaisse) c'est à dire sont des fréquences ou des cardinaux, soit "non mathématiques" : la structure est celle d'une chanson, d'une équipe de basket, d'un poème. Les objets du groupe sont liés entre eux par une organisation qui n'a rien de numérique.

Le tirage au sort effectué parmi ces objets aura des conséquences différentes sur les informations présentées comme connues sur le groupe des objets selon que ces informations structurelles seront de registre mathématique ou non.

En effet, le tirage au sort a pour conséquence de confirmer les informations numériques de type statistique (répartitions numériques, fréquences) : si la proportion d'oeufs moyens est de 50%, le choix au hasard d'un oeuf permet d'affirmer que la probabilité que cet oeuf soit moyen est de 0,5.

Les données numériques changent de statut par la modélisation : de fréquences elles deviennent probabilités, mais les liens qui les unissaient initialement ne sont pas modifiés.

En revanche, le tirage au sort a pour conséquence de bouleverser les données non mathématiques émises sur le groupe des objets : il n'y a plus de poème, les règles du sport collectif qui sont à l'oeuvre dans une équipe de basket, qu'elles soient établies sur le mérite personnel, ou sur une rotation continue des joueurs, sont mises en défaut, oubliées par le tirage au sort.

Ceci permet de catégoriser les situations analysées, selon le sens que le hasard revêt : confirmation, reprise des données connues sur le groupe des objets, ou au contraire, oubli désorganisation, de ces mêmes données : le hasard du tirage au sort ne laisse subsister que les informations statistiques, ces informations sont les seules à sélectionner.

III. 1.4 Le déroulement des actions.

Dans la majorité des exercices, le temps utilisé est le présent, qu'il s'agisse de la présentation des données, du récit du tirage au sort ou des questions posées. Dans ce cas, l'ordre du récit est le plus souvent linéaire : présentation de l'acteur et des objets, informations sur le groupe des objets, description du tirage au sort et questions. Le résultat du tirage au sort n'est jamais donné, il faut donc supposer que l'action s'interrompt, que l'on répond à la question durant le temps de la réalisation du tirage au sort, ou bien que ce tirage au sort n'est qu'une action fictive, qui n'est évoquée que pour assurer la modélisation de la situation. Il n'est question que des situations de modélisation, jamais de situation de simulation.

Quelques cas particuliers subsistent cependant : ceux des textes qui jouent sur plusieurs temps : passé composé/présent ou présent/futur. "Des voyageurs ont retiré des billets", "Un tirage au sort désignera l'équipe adverse". Ces différences de temps matérialisent les différentes étapes du récit en les séparant : recueil des données / élaboration de l'épreuve ou calcul des probabilités, modélisation / tirage au sort effectif. Cette diversité des temps assure au tirage au sort deux fonctions différentes : celle de permettre une modélisation probabiliste de la situation et celle de simuler la situation probabilisée, tandis que l'usage d'un seul temps (le présent) semble davantage mettre en évidence la première des fonctions, celle de modélisation.

III.1.4 Pourquoi le tirage au sort, le choix au hasard?

IV.1.4.1 Les raisons invoquées ou déchiffrées dans le texte de l'exercice.

Si les acteurs ont recours au tirage au sort dans les 14 exercices étudiés, ils ne le font pas toujours sans raison. En effet dans cinq cas au moins, le tirage au sort est imposé par la situation, qui est celle d'un jeu de hasard. Le tirage au sort est une règle du jeu.

Dans d'autres cas, le tirage au sort, le choix au hasard est une décision stratégique. L'acteur dispose de plusieurs stratégies de choix des objets, et adopte le hasard comme stratégie : le candidat choisit au hasard par manque de connaissance, l'entraîneur décide de former un "cinq" de manière aléatoire. Mais si l'exercice met en scène un triplet formé d'un observateur et d'un couple (acteur/objet), c'est l'observateur qui décide de dénommer le choix de l'acteur comme étant un choix au hasard: le jeune enfant tire des jouets au hasard, l'enfant (il a trois ans) tape sur les touches du Minitel au hasard. Il semble bien que le choix au hasard, en tant que décision stratégique, s'impose comme opposés à des stratégies de désignation ou d'action plus rationnelles, et soit induit par un manque de connaissances, de maîtrise de la situation.

Si je considère à présent les exercices où le tirage au sort n'est pas imposé, où il ne constitue pas une stratégie parmi d'autres, je commencerai par souligner que dans ces exercices restants, le recours au tirage au sort n'est pas expliqué, ni motivé. Il s'agit des exercices où "on" tire au hasard des oeufs, des mots, des voyageurs, des ménages, des boules. Invariablement en effet, dans ce type d'exercice, l'acteur est anonyme, impersonnel, désigné par le pronom "on" et une fois par les mots "dispositif aléatoire".

Dans ces situations résolument impersonnelles, je propose de voir le recours au tirage au sort vécu comme expérience scientifique, mathématique : "on" tire au hasard, sans raison apparente, et "on" s'interroge. Ce n'est pas un hasard si deux de ces cinq exercices sont des exercices où apparaît un caractère statistique présenté comme résultat d'enquête.

Une fois cette catégorisation admise, situation de jeu de hasard, élaboration d'une stratégie performante, expérience scientifique, il me faut remarquer tout d'abord que cette catégorisation recouvre des problématiques importantes dans l'élaboration purement mathématique du concept de hasard, comme je l'ai souligné dans le premier chapitre. Cependant, je souhaiterai m'interroger sur la cohérence de cette catégorisation (implicite), en étudiant les questions qui correspondent à chacune de ces catégories.

III.1.4.2 A quelles questions le recours au hasard permet-il de répondre?

Les questions qui accompagnent les textes sont invariablement des questions portant sur le calcul de probabilité d'événements. Après avoir effectué ces calculs, j'ai regardé si les probabilités à calculer étaient faibles (en adoptant le seuil habituel de 10%) et par conséquent si les événements pris en considération, intéressants, étaient des événements "rares" ou non.

Même si la très faible étendue de l'échantillon considéré interdit toute généralisation, (il ne s'agit que de 14 exercices), il apparaît une cohérence intéressante à souligner entre le type d'événements dont on calcule les probabilités (rares ou non) et le type de fonction qu'assure le recours au tirage au sort : expérience scientifique, élaboration de stratégie, jeu de hasard.

En effet, les expériences scientifiques donnent lieu à des interrogations sur des événements pour la plupart "non rares", non exceptionnels : les probabilités de ces événements dépassent le plus souvent le seuil de 10%. Les loteries et autres jeux de hasard sont accompagnés de questions portant davantage sur des événements rares, dont la probabilité est inférieure à 10%, lorsque les questions ne visent pas à une description presque exhaustive des probabilités des issues possibles du jeu.

Enfin, les situations de "stratégie" donnent lieu à des interrogations équilibrées de ce point de vue : apparaissent pratiquement autant de demandes de calcul de probabilités d'événements rares (inférieures à 10%) que de demandes de calcul de probabilité d'événements "non rares" de probabilité supérieure à 10%.

Ces résultats permettent de considérer la proposition de catégorisation comme pertinente, au regard des questions induites par le type de situation considérée. Le recours au hasard dans une situation d'expérience scientifique a pour fonction de "prédire" l'ordinaire, le normal, les loteries, les jeux de hasard induisent des questionnements sur l'extraordinaire, et les situations de décision, de choix stratégique mettent en jeu des questions portant sur la capacité à départager ce qui est ordinaire, normal, prédictible et sur ce qui ne l'est pas.

Cependant, si ces analyses mettent en évidence une cohérence de l'exercice, ou tout du moins une cohérence au recours au tirage au sort, au recours au hasard, il faut constater que cette cohérence n'apparaît jamais explicitement : le texte de l'exercice en lui même ne propose pas de "fil directeur" au questionnement (comme pourrait l'être une indication du genre : recherchons si la stratégie de réponse au hasard du joueur est une stratégie qui peut être efficace) et aucune question ne constitue un retour sur les informations "nouvelles" apportées par la modélisation probabiliste de la situation. **L'intérêt de la modélisation de la situation est à reconstruire par l'élève, puisque la synthèse des informations nouvelles que permet cette modélisation n'est jamais ni proposée, ni demandée.**

III.1.5 Résumé de l'analyse globale.

En résumé, il apparaît que les sens et les fonctions du hasard mis en jeu des ces exercices du Baccalauréat sont à interpréter selon plusieurs axes :

- le devenir des objets tirés au sort : le tirage au sort peut détruire le groupe initial des objets en constituant soit un retrait physique des objets, soit une désorganisation des liens qui définissaient ce groupe. Au contraire, le tirage au sort peut soit laisser le groupe intact, par désignation mentale des objets tirés, soit transcrire, en conservant leurs valeurs, les liens numériques qui définissaient ce groupe.

La transformation du groupe des objets par le tirage au sort peut être une destruction de ce groupe ou une permanence de ce groupe.

- les raisons du recours et l'élaboration du questionnement : Les remarques précédentes permettent de supposer que les situations de hasard mises en scène dans ces exercices se différencient en trois grands types de situations : **Les situations de jeux où l'intérêt se porte sur les événements extraordinaires, les situations de stratégie où la part doit être faite entre le probable et l'improbable, et enfin les situations d'expérience, où la recherche porte en priorité sur les événements "normaux".**

III.2 Analyse d'une situation particulière

Comme je l'ai signalé plus haut, parmi les 17 exercices de probabilité présentés au Baccalauréat de 1994 et soumis par la suite aux candidats de section ES, figurent 3 exercices dans lesquels aucune référence à un tirage au sort, à un choix au hasard n'est mentionné. Deux de ces exercices sont en fait particularisés par le fait que le mot hasard ou le terme "tirage au sort" n'est pas employé. Il s'agit des exercices qui débutent ainsi : " Une urne contient 3 boules vertes portant le numéro 0, deux boules rouges portant le numéro 5 et une boule noire portant le numéro a. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. Un joueur tire simultanément trois boules de l'urne." et "On veut ranger trois boules distinctes numérotées de 1 à 3 dans deux cases A et B. On suppose que chacune des cases peut contenir de zéro à trois boules. La place des boules dans les cases est supposée sans importance . [...] On suppose que tous les rangements ont la même probabilité de se réaliser".

A la place du tirage au sort, du choix au hasard apparaissent les expressions "On suppose que tous les rangements ont la même probabilité de se réaliser", "Un joueur tire simultanément trois boules de l'urne , les boules sont indiscernables au toucher". A cette différence près, les deux exercices en question peuvent se ranger dans la catégorie expérience scientifique et jeu de hasard.

Beaucoup plus particulier se trouve être le premier exercice recensé, que j'appellerai "le joueur de tennis". Cet exercice est un exercice particulier au sein du groupe étudié, mais il n'en demeure pas moins un exercice classique : non seulement il se retrouve sous des formes voisines dans la plupart des manuels de terminale, mais il fut à l'époque proposé dans toutes les académies constituant "le groupe I", c'est à dire à un nombre considérable d'élèves de la métropole. Cet exercice se particularise par le fait de mettre en scène un acteur, le joueur de tennis, qui n'effectue pas de tirage au sort, de choix au hasard. De plus le texte ne décrit pas de groupe d'objets. En fait, le joueur de tennis effectue une mise en jeu, mise en jeu qu'il réussit du premier coup avec une probabilité de 2/3.

La situation est par conséquent une situation déjà modélisée, et la loi de probabilité décrite n'est pas la loi équirépartie. Cette modélisation exige d'interpréter la mise en jeu effectuée par le joueur de tennis comme une épreuve aléatoire. Par conséquent, de considérer que cette épreuve est reproductible, que chaque épreuve relève de la même modélisation, en particulier que les probabilités données restent identiques, et que les épreuves successives sont indépendantes les unes des autres. A la différence des autres exercices du groupe étudié, l'épreuve aléatoire est non plus décrite comme telle (on tire au hasard) mais est à interpréter dans des gestes (le service effectué par le joueur de tennis) qui ne sont en rien aléatoires.

Les données du texte sont brèves, comme elles le sont dans les autres textes. Je m'arrêterai sur les données numériques, qui sont les probabilités de réussite des services. Ces nombres sont des rationnels, présentés sous forme fractionnaire, et non sous forme de pourcentage. Le joueur de tennis réussit son service du premier coup avec une probabilité de 2/3. Je risquerai ici l'hypothèse que la petitesse de ces nombres, et leur écriture fractionnaire est une caractéristique importante de cet exercice : 2/3 pourrait évoquer le "deux chances sur trois" en glissant au "deux fois sur trois" alors que 66%, s'il évoque "66 chances sur 100" me semble courir de moins grand risque de devenir "66 fois sur 100". En revanche, si ce nombre provient de la modélisation probabiliste d'un caractère statistique, il faut reconnaître que le texte ne dit rien quant à son obtention, et la petitesse de ces nombres, 2 et 3, est peut être un obstacle à imaginer qu'il a fallu un très grand nombre d'observations statistiques pour le construire en tant que probabilité.

Toujours est-il que la question posée, qui gère la situation de l'exercice est celle d'un pari : le joueur de tennis parie sur la réalisation d'un certain nombre de services. Il apparaît, une fois les calculs faits, que les conditions choisies par le joueur lui sont avantageuses. La modélisation par l'aléatoire a donc un but, une raison d'être, celle d'estimer les conditions d'un pari. Cependant, mais c'est là une constante dans ces exercices, cette raison d'être n'est jamais explicitement donnée à l'élève, que ce soit dans le texte lui même ou par le biais d'une question finale : le recours à la modélisation par l'aléatoire n'est jamais validé.

III .3 Conclusion : les sens du hasard dans les exercices du Baccalauréat.

En conclusion, le hasard est mobilisé dans les exercices du Baccalauréat dans des situations qui sont sans exception des situations de modélisation. Les conditions de modélisation diffèrent : elles peuvent être de consensus, dans le cas des jeux de hasard, testées, éprouvées, dans le cas des situations de stratégie, hypothèses d'expérimentation dans le cas d'expérience scientifique. Mais si les questions posées semblent cohérentes par rapport à cette classification, il faut souligner que les fonctions modélisatrices du hasard ne sont jamais explicitement décrites, et que par conséquent elles sont à la charge de l'élève. De même les questions s'enchaînent, des calculs sont demandés, des informations nouvelles sont produites, sans que les auteurs de ces exercices ne demandent, ne présentent ou n'exigent un retour de ces productions sur la situation initiale: la fonction du recours au hasard, à l'aléatoire ne reste-t-elle pas alors entièrement à construire par les élèves, et peut-on prendre le risque d'affirmer qu'elle l'est?

IV Le hasard, objet d'enseignement pré universitaire ou non?

Je voudrais dans un dernier paragraphe sur l'enseignement tel qu'il existe à l'heure actuelle en France, me faire l'écho d'une polémique importante au sujet de l'enseignement des probabilités et statistiques. A l'heure actuelle (1997), en France, les probabilités, et le concept scientifique, mathématique du hasard sont enseignés dans le secondaire et plus précisément dans les classes de première et terminales, donc auprès d'élèves dont l'âge varie théoriquement entre seize et dix neuf ans. Des discussions intéressantes, et passionnées, ont eu pour thème le choix de ce niveau, le choix de cette "classe" d'âge : le concept de probabilité, le concept de hasard ne peut-il être abordé avec succès auprès d'élèves plus jeunes?

Je vais présenter les positions des deux camps, en m'appuyant non seulement sur des textes et des expériences françaises, mais également sur des réflexions et des propositions d'auteurs étrangers. J'ai choisi de me limiter à l'expérience italienne, par les contrastes qu'elle présente, et les réflexions intéressantes sur les conceptions du hasard qu'elle m'a permis de mettre en évidence.

Mais avant tout, je présenterai également l'apport des psychologues sur de thème, en faisant référence aux travaux de J. Piaget.

IV. 1 L'âge est-il une variable pertinente dans l'élaboration du concept de hasard?

IV.1.1 Les travaux de J. Piaget

Dans ce paragraphe, je m'appuierai essentiellement sur l'ouvrage de J. Piaget et de B. Inheldder "La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant".

La genèse de l'idée de hasard suppose la pratique de la causalité. Or la construction de la causalité est longue. Wallon[25] en particulier consacre un chapitre à l'étude de la construction de la causalité par l'enfant, et n'identifie aucune forme de cette causalité au recours au hasard. Le hasard est une construction "tardive" de la pensée.

Le projet de Piaget est de répondre à deux questions: "L'intuition de la probabilité est elle primitive, ou ne se construit-elle qu'à un certain niveau mental, et si elle se construit, quel est le mécanisme de son acquisition?"(p.8)

[25]Wallon, 3ème édition 1963, *Les origines de la pensée chez l'enfant*, P.U.F., Paris.

Je soulignerai tout d'abord que le hasard étudié dans l'oeuvre de Piaget est un hasard particulier: c'est celui qui est défini comme étant le hasard de Cournot, c'est à dire un hasard résultant de l'interférence de séries causales indépendantes. Ce n'est pas par conséquent le hasard, en tant que loi équiprobable qui est désigné comme référence.

Ce choix de définition a pour conséquence que la première condition expérimentale va être la possibilité de rejeter toute "interprétation intentionnaliste".(p.13) L'emploi du terme hasard est ici décrit par Piaget et son équipe dans un emploi particulier, celui qui correspond au rejet de toute explication nomologique.

Il est intéressant de souligner que Piaget propose comme première expérience "un brassage ou un mélange[26] d'éléments en nombre suffisant [qui] semble fournir une image favorable à l'intuition de séries causales à la fois interférentes et indépendantes, puisque le rôle des chocs est aisé à constater sans que rien ne pousse à l'imaginer comme intentionnel dans le détail." (p.14)

L'intuition de l'interférence et de l'indépendance de séries causales est donc, défend Piaget une condition nécessaire à la construction de la notion de hasard chez l'enfant. Il poursuit en affirmant que cette intuition ne peut s'effectuer qu'avec la construction chez l'enfant des opérations réversibles, dont le pendant est la causalité mécanique, puisque la notion de hasard suppose la découverte de l'impossibilité d'effectuer ces opérations réversibles, de découvrir l'irréversibilité et l'indétermination. Les expériences menées établissent d'ailleurs la corrélation entre la construction de ces opération réversibles et la construction de la notion de hasard et permettent, selon la théorie Piagétienne, de distinguer des stades d'acquisition de l'idée de hasard.

Piaget peut donc décrire les différentes étapes de la construction de l'idée de hasard chez l'enfant en décrivant les opérations logiques, réversibles, qui sont successivement remises en cause. "Remises en cause" signifiant ici que la situation "bloque" ces opérations c'est à dire que l'enfant découvre que la situation ne permet pas l'utilisation déductive de ces opérations.

- Premier stade, avant 7-8 ans. C'est la période caractérisée par "l'absence d'opérations réversibles"(p.196) pendant laquelle "l'enfant ne distingue pas le possible du nécessaire[..] Il n'y a dès lors ni hasard, ni probabilité, faute d'un système de référence consistant en opérations déductives." (p.197)
- Deuxième stade, de 7-8 ans à 11-12 ans. L'indétermination concerne les opérations logico-arithmétiques, puisque ce stade est caractérisé par "la construction des groupements opératoires d'ordre logique et des groupes numériques" (p.196) "Le hasard se réduit à une indétermination logique" (p218). Il intervient dans les situations où une implication est impossible. Par exemple, "tout qualité attribuée à un être logique sans qu'elle soit impliquée par lui peut être considérée comme fortuite. [...] La blancheur est pour le cygne une qualité fortuite, puisqu'il y a des cygnes noirs" (p.218). Si l'indétermination concerne les opérations spatio-temporelles, Piaget pose que c'est alors le hasard physique qui est construit, particulièrement dans le mouvement: "la trajectoire d'une boule échappe à toute déduction si des heurts avec d'autres boules modifient en cours de route les itinéraires, les vitesses et les durées" (p.205)C'est durant ce stade que "dès que plusieurs facteurs interfèrent l'enfant devenu capable de déduire prend donc conscience de l'indétermination, et c'est cette indétermination qui est à la source de l'idée de hasard" (p.206).
- Troisième et dernier stade, après 11-12 ans. Au cours de ce dernier stade, "il y a synthèse entre le hasard et les opérations"(p.198). La découverte des combinaisons, des permutations, des proportions permet à l'enfant de concevoir une intuition de la loi des grands nombres, donc des premières "lois du hasard", en concevant des dispersions proportionnelles au nombre de combinaisons, de permutations amenant la réalisation de l'événement. Echappe à cette

[26]C'est moi qui souligne.

construction la double indétermination: à la fois logico-arithmétique et spatio-temporelle, que Piaget propose comme l'indétermination absolue, qui concerne les objets de la micro physique, qui dénote un hasard plus essentiel.

Mais, il semble, bien que Piaget ne fasse que le mentionner (p.112), que "la notion verbale du hasard" soit également trace des stades de la construction de l'idée de hasard. Piaget note à ce propos trois types de réaction: ceux des enfants qui ne comprennent pas le mot (jusque vers 6-7 ans), ceux qui lui donnent le sens d'un événement exceptionnel (6-9 ans) et "enfin la réaction correcte[27] qui définissent le hasard par l'interférence de séries causales indépendantes". (p.112) La technique adoptée, pour lire le sens accordé à la notion verbale est dans ce cas, soit de proposer à l'enfant une courte histoire, et de lui demander s'il s'agit selon lui de hasard ou non, soit de demander à l'enfant d'inventer, ou de raconter un événement qu'il attribue au hasard.

J'insisterai sur ce dernier point: Piaget souligne bien que, pour lui, la notion verbale du hasard "est une prise de conscience plus ou moins adéquate des opérations", et que par conséquent, il pense que " [la notion verbale] est toujours en retard sur les opérations, mais [que] son évolution reproduit souvent, en partie et avec décalage, celle des opérations elles mêmes." (p.112)

Sans discuter ici la conception de l'apprentissage dans la théorie piagétienne, ni le rôle qui est attribué au langage dans cette théorie, il reste que la notion de hasard semble pouvoir être appréhendée par des enfants sensiblement plus jeunes que ne le sont les adolescents de première et terminale.

Si j'admets cette hypothèse, il me faut par conséquent m'interroger sur le choix qui est celui de l'institution Education Nationale, en France.

IV.1.2 Des situations aléatoires proposées à des élèves "jeunes".

Je commencerai par évoquer les propositions de situations probabilistes destinées à un public dont l'âge est sensiblement moins élevé que celui des élèves de Première et Terminale. Ces travaux, ou tout du moins ceux que j'ai pu relever, sont des travaux d'I.R.E.M., d'équipes de chercheurs. Je citerai ceux de M. Glaymann [28](I.R.E.M. de Lyon), de P.L. Hennequin[29], de G. Brousseau, de D. Gilis et B. Heraud[30] (Quebec)et enfin ceux de A. Barbanera et L. De Luca[31]. Ces travaux, sauf les derniers, datent des années 70. Ils ont pour particularité d'être invariablement des situations concrètes, de manipulation effective de balles, de jetons, de cartes etc., c'est à dire des situations au départ expérimentales: il s'agit pour les enfants (dont l'âge varie entre 9 et 12 ans) de jouer, d'expliquer des phénomènes statistiquement décrits, et de construire des simulations.

Par exemple, les enfants d'une même classe doivent organiser une loterie, et disposent de lots de valeurs différentes. Pour désigner les gagnants, la maîtresse fournit deux roues identiques, partagées en dix secteurs égaux et propose, qu'en faisant tourner ces deux roues, on retienne comme numéro gagnant issu de l'épreuve le numéro qui est "le chiffre des unités du produit des deux nombres ainsi obtenus". A quel numéro doit correspondre le lot le plus cher?

Ces activités mêlent par conséquent des situations de simulation et de modélisation. Comme le dit M. Glaymann "Face à une situation aléatoire, plusieurs voies se présentent : on dispose d'un

---

[27]C'est moi qui souligne.

[28] M. Glaymann, 1975, "Les probabilités à l'école élémentaire", *Hasardons nous*, A.P.M.E.P. n°17, p.34 -41.
M. Glaymann, 1975, "Où le premier n'est pas toujours le dernier", *Hasardons nous*, A.P.M.E.P., n°17, p.41-51.

[29]P.L. Hennequin, 1975, "Propos autour d'un jeu d'urnes", *Hasardons nous*, A.P.M.E.P., n°17, p.51-73.

[30]D. Gilis, B. Heraud, 1972, "Introduction des probabilités à l'Elémentaire", *La mathématique à l'école élémentaire*, A.P.M.E.P., p; 414-428.

[31]A. Barbanera, L. De Luca, 1990, *Progetto Pitagoria La nuova educazione matematica per la scuola elementare*, Editions Giunti Lisciani, Firenze.

modèle combinatoire et dans ce cas tout le problème se réduit à des calculs; ou bien, on ne dispose pas d'un modèle combinatoire [...] on peut aborder l'étude par une analyse statistique, voire même imiter le hasard en faisant une *simulation* de la situation"[32]

En ce qui concerne les propositions de travaux de l'école italienne, les situations ne sont pas expérimentales, mais sont essentiellement langagières. Elles sont destinées à des élèves encore plus jeunes que ceux dont il a été fait mention précédemment, puisqu'il s'agit d'enfants de la classe "seconde", qui correspond à notre C.E. actuel : il s'agit, face à des situations empruntées à la vie courante de l'enfant, de décider si "l'événement" décrit est certain, impossible, probable.

Par exemple, il faut entourer la bonne réponse (c'est sûr, c'est impossible, c'est probable) pour les phrases suivantes : "Les chats ont quatre pattes, Je suis en première classe (C.P.), Demain j'irai voir le cirque, Cet été j'irai à la mer, Les animaux du zoo souffrent".[33]

Ces situations ont été toutes l'objet d'expérimentation, et si l'on en croit les auteurs, d'expérimentation fructueuses.

Tout en remarquant qu'elles confirment dans ce cas les thèses soutenues par Piaget, que ce soit au point de vue de l'âge "requis" pour quantifier les probabilités, aborder les opérations de permutation, ou que ce soit au niveau du langage, il faut bien constater que ces propositions n'ont pas réussi à faire que l'institution bouleverse les programmes établis : les probabilités restent enseignées dans les dernières classes de lycée.

Peut-on émettre des hypothèses expliquant cette résistance?

IV.2 La fonction sociale de ces connaissances particulières.

Afin de comprendre le maintien de l'apprentissage des situations aléatoires dans les dernières classes des lycées, j'ai confronté les descriptions de l'enseignement de l'aléatoire que présentaient les auteurs des situations probabilistes destinées à des enfants de l'Ecole élémentaire et celles des auteurs "institutionnels".

Les tenants de l'introduction à l'Ecole élémentaire des probabilités exposent leur objectifs en insistant en particulier sur celui qui consiste à lutter contre l'intuition commune, la superstition. A. Barbanera et L. De Luca insistent sur le fait que la notion de fortuit n'est sans doute pas encore construite "rationnellement" par un grand nombre d'adultes, qui lui associent la prémonition, le sort, la foi dans le surnaturel etc. Pour eux, le premier objectif à poursuivre est de construire, ou de permettre à l'enfant de construire une autre signification au hasard, aux événements fortuits, à l'aide du langage commun. C'est pourquoi leurs propositions de situations sont basées sur des choix entre certain, impossible et probable. De même, M. Glaymann, en reconnaissant dans la pensée rationnelle les deux courants, déterministe et stochastique, déplore que "l'humanité a su beaucoup plus facilement maîtriser la composante déterministe que la composante aléatoire."[34] Selon lui, l'introduction des probabilités à l'école élémentaire est destinée à "éviter aux enfants de suivre, à l'instar de l'humanité, une lente évolution", à éradiquer les superstitions et à construire plus efficacement une appréhension rationnelle des phénomènes.

Il semble bien que la décision d'introduire le plus tôt possible l'étude de phénomènes aléatoires soit l'expression d'une conception de la fonction sociale que revêt cet enseignement.

Maîtriser l'aléatoire, que ce soit par le langage ou par la quantification probabiliste permet d'aller contre l'esprit de superstition, contre les croyances communes attachées aux phénomènes de hasard, et sans doute contre certaines pratiques non rationnelles. C'est aussi disposer d'un esprit critique à l'égard des informations délivrées par les médias.

[32]M. Glaymann, opus cité, p.34.
[33]A. Barbanera, L. De Luca, opus cité, p.145.
[34]M. Glaymann, 1975, "Les probabilités à l'école élémentaire", *Hasardons nous,* A.P.M.E.P. n°17, p.31.

En revanche, la décision de n'introduire l'étude de certains phénomènes aléatoires que dans les dernières classes de lycée me semble trace d'une toute autre conception de la fonction sociale de cet apprentissage. L'enseignement des probabilités que j'ai pu décrire dans ce chapitre me paraît davantage être organisé comme un enseignement théorique, ou plutôt comme un enseignement préalable à un enseignement théorique des probabilités: il est constitué de définitions "élémentaires" des "concepts de base" : les ensembles sont finis, les variables aléatoires sont discrètes, les lois de probabilité réduites à la loi binomiale etc. J'ajouterai qu'il me semble, d'après l'étude des exercices que j'ai menée plus haut, que cet enseignement à pour but essentiel de faire fonctionner les outils probabilistes définis dans des calculs précis, bien plus que de donner un sens à ce qui constitue une problématique probabiliste.

Cet enseignement des probabilités, de part les caractéristiques décrites, me paraît bien davantage être conçu en tant qu'enseignement "pré universitaire" d'un savoir théorique, scientifique encore inaccessible. La fonction sociale de cet enseignement de l'aléatoire est une fonction qui inscrit ces connaissances dans un cursus scolaire.

En conclusion, j'ai pu isoler deux conceptions divergentes sur l'enseignement de l'aléatoire, conceptions qui sont les traces de ce que peuvent être les fonctions sociales d'un tel enseignement : soit un enseignement utile en ce que les apprentissages visés seront des apprentissages utiles à détourner, à affaiblir la force des connaissances "vulgaires", considérées comme dangereuses socialement (pratiques des jeux de hasard, croyances et superstitions), soit un enseignement qui envisage ces apprentissages comme des "gammes" nécessaires, comme d'indispensables préliminaires à tout enseignement supérieur (universitaire) théorique.

IV.3 Fonction épistémologique de ces connaissances.

Je terminerai ce chapitre par l'étude des fonctions épistémologiques des connaissances ainsi décrites, telles qu'elles apparaissent dans l'enseignement à l'heure actuelle.

Bâtir un système de pensée à partir de l'aléatoire, prendre en compte le hasard représente un bouleversement épistémologique dans le cadre de l'enseignement. L'appréhension de ce que Bachelard nomme "le nouvel esprit scientifique"[35] s'accompagne en effet de questions nouvelles, de systèmes nouveaux de validité ainsi que de nouvelles opérations intellectuelles.

IV.3.1 Les questions.

Il y a deux types de questions qui apparaissent et qui constituent des ruptures avec l'ancien cadre épistémologique du déterminisme. Tout d'abord apparaissent des questions nouvelles vis à vis de phénomènes anciens, jusque là appréhendés de façon déterministe. Le déterminisme élimine les fluctuations, fait abstraction des déviances observées dans les mesures. Le recours à la théorie de l'aléatoire permet de prendre en compte et de rendre compte, par exemple avec le théorème dit de la loi des erreurs de Laplace-Gauss, de ces fluctuations jusque là négligées.

Mais des questions nouvelles peuvent également se poser vis à vis de phénomènes jusque là non abordés par le déterminisme, en particulier les "phénomènes désordonnés".

Dans l'enseignement tel qu'il est conçu à l'heure actuelle apparaît le projet de s'intéresser à des phénomènes qui ne relèvent pas du déterminisme (les jeux de hasard) ou dont il est fructueux de faire l'hypothèse qu'ils n'en relèvent pas (par exemple les phénomènes étudiés en Sciences Humaines, et plus particulièrement les phénomènes éducatifs qui constituent l'essentiel de l'intérêt des étudiants en Sciences de l'Education).

[35] G. Bachelard, 1ère éd. 1934, 17ème éd.1987, *Le nouvel esprit scientifique*, P.U.F., Collection Quadrige, Paris.

IV.3.2 Le système de validité.

Dans ce système de pensée, ce sont désormais les mesures en probabilité des événements qui sont décrétées vraies ou fausses, qui sont soumises à la vérification : "la probabilité d'amener un double six avec deux dés est de 1/36" est une proposition sujette à un contrôle de validation théorique, à la différence de la proposition "l'expérimentateur va amener un double six avec deux dés".

Dans le système de pensée en usage dans l'enseignement des mathématiques autres que la théorie des probabilités et la statistique inférentielle, ce sont davantage les événements, ou plutôt la description des événements qui est soumise à la validation : "36 est une solution de l'équation" est ainsi une phrase vraie ou fausse.

IV.3.3 Les opérations.

Les opérations mobilisées dans les mathématiques enseignées dans le système scolaire sont essentiellement des opérations de descriptions, d'analyses et de déductions non inductives. Il me semble que les opérations les plus nouvelles soient les opérations de déduction par induction, caractéristiques de la statistique inférentielle.

C'est donc un nouveau cadre épistémologique qui est proposé aux élèves et aux étudiants. L'accès à ce nouveau cadre suppose un découpage nouveau du réel par la prise en compte de phénomènes jusque là laissés pour compte, ou par le changement de regard sur des phénomènes déjà étudiés. Il suppose également un changement des habitudes de pensée, puisqu'il s'accompagne d'opérations de pensée nouvelles et de systèmes de validation nouveaux.

Il me semble par conséquent que ce regard neuf à porter sur le monde est un regard en tout point riche et nécessaire, puisqu'il est désormais inséparable des découvertes scientifiques de ce siècle dans quelque domaine que ce soit : biologie, physique, sciences humaines. Mais s'approprier ce nouveau regard, ce nouvel état d'esprit me paraît également, au vu des bouleversements évoqués, devoir faire l'objet d'un intérêt didactique tout particulier.

Bibliographie

G. Bachelard, 1ère éd. 1934, 17ème éd.1987, *Le nouvel esprit scientifique*, P.U.F., Collection Quadrige, Paris.

Balacheff N.,1995, "Conception, connaissance et concept", *Actes de l'Ecole d'été de Didactique des mathématiques*.

Barbanera A., De Luca L., 1990, *Progetto Pitagoria La nuova educazione matematica per la scuola elementare*, Editions Giunti Lisciani, Firenze.

Bonitzer J., 1984, *Philosophie du hasard*, Editions Sociales, Paris.

Engel A., 1990, *Les certitudes du hasard*, Aléas Editeur, Lyon.

Gilis D., Heraud B., 1972, "Introduction des probabilités à l'Elémentaire", *La mathématique à l'école élémentaire*, A.P.M.E.P., p. 414-428.

Glaymann M., 1975, "Les probabilités à l'école élémentaire", *Hasardons nous*, A.P.M.E.P. n°17, p.34 -41.

Glaymann M., 1975, "Où le premier n'est pas toujours le dernier", *Hasardons nous*, A.P.M.E.P., n°17, p.41-51.

Glaymann M.,1975, "L'enchevêtrement des chiffres d'une table de chiffres aléatoires", dans *Hasardons nous*, Brochure A.P.M.E.P. n°17,p.125-138.

Hennequin P.L.,1975, "Quelques remarques sur l'article précédent", dans *Hasardons nous*, Brochure A.P.M.E.P. n°17, p.139-144.

Hennequin P.L., 1975, "Propos autour d'un jeu d'urnes", *Hasardons nous*, A.P.M.E.P., n°17, p.51-73.

Mialaret G., s. d., *Statistiques appliquées aux Sciences humaines*, Cours polycopié, Université de Caen, Fascicule I.

Piaget J., Inhelder B. 1ère édition1951, 2ème édition 1974, *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, P.U.F., Paris.

Robert C., 1995, *L'empereur et la girafe*, Editions Diderot, collection La règle et le compas, Paris, p.149.

Rouanet H., Bernard J.M., Leroux B.,1990, *Analyse inductive des données*, Dunod, Paris.

Steinbring H., 1986 "L'indépendance stochastique", *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol 7 n°3, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble, p.5-50.

Steinbring H., 1989, "La relation entre modélisations mathématiques et situations d'expérience pour le savoir probabiliste", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Vol 2, IREM de Strasbourg.

Wallon H., 3ème édition 1963, *Les origines de la pensée chez l'enfant*, P.U.F., Paris.

Manuels consultés.

Cluzel R., Vissio P., 1970, *Statistique et probabilités 1ères ABCDE*, Editions Delagrave, Paris.

Gautier, Girard, Gerll, Thiercé, Warusfel, 1974, *Aleph$_1$ Analyse / probabilités*, *1ères CDE*, Hachette, Paris.

Mathématiques Ière B. A$_1$., 1984, Editions Didier, Collection N. Dimathème, Paris.

Mathématiques Te.B, 1988, Editions Hachette, Collection *Lycées*, Paris.

Mathématiques 1ereB,1986, Editions Nathan, Collection "Transmath", Paris.

Mathématiques TeD.,1989, Editions Nathan, Collection "Transmath", Paris.

Annales du baccalauréat.

Les Sujets Nathan 95 BAC Maths obligatoire et spécialité ES spécialité L, 1994, Editions Nathan, Paris.