UN ITINERARIO MATEMATICO-ESTETICO: DALLA PROSPETTIVA ALLA GEOMETRIA PROIETTIVA

Alessandra Pucci[1]

"Con i punti di fuga, l'infinito diviene rappresentabile, e, in un certo contesto in qualche modo realista (platonista), se è rappresentabile diviene anche esistente." [F. Speranza]

ABSTRACT: Projective Geometry is a meaningful example of the deep and complex connection between pictorial techniques and mathematical theories. The Euclidean Geometry did not describe satisfactorily the practical rules which in the past centuries were developed for represent a three dimensional object with a two dimensional figure in the canvas. This problem gave an important improvement to the growth of Projective Geometry, and inspired the introduction of new abstract elements, the improper points, which are the main idea of the theory.

LA PROSPETTIVA

Arte e Matematica: due mondi solitamente considerati molto diversi, che hanno invece, in molti casi, addirittura una storia comune. Un caso significativo è quello della Prospettiva, tecnica pittorica, e della Geometria Proiettiva, teoria geometrica.

La prospettiva è stata il filo conduttore che ci ha fatto passare di secolo in secolo svelandoci le diversità e le novità non solo dal punto di vista pittorico, ma anche filosofico e matematico.

Quando facciamo riferimento alla prospettiva dobbiamo distinguere i diversi periodi che l'hanno contraddistinta: infatti ogni epoca è contraddistinta da "**una sua**" prospettiva;

"*in questo senso diventa essenziale, per le varie epoche e province d'arte, chiedersi non soltanto se conoscano la prospettiva, ma di quale prospettiva si tratti*." [Panofsky]

[1] **laureata in Matematica presso l'Università di Parma con relatore F. Speranza.**

Per tal motivo parleremo di:
Prospettiva di tipo naturale (o ***naturalis***) per l'Antichità;
Prospettiva di tipo metafisico (***perspectiva***) per il Medioevo;
Prospettiva di tipo matematico (o ***artificialis***) per il Rinascimento.

Antichità

Le radici storiche della prospettiva si possono far risalire ai primi tentativi di riflessione sulle modalità della visione, agli studi dell'ottica "geometrica" dei matematici della Grecia classica, che trovarono esposizione sistematica nell' "Ottica" di Euclide.

Tra le dodici *supposizioni*[2] dell'Ottica di Euclide ritengo opportuno citarne alcune:

- La figura compresa dai raggi visivi è un cono[3] che ha il vertice nell'occhio e la base al margine dell'oggetto visto;
- Quegli oggetti che si vedono sotto angoli maggiori appaiono maggiori;
- Quegli oggetti che si vedono sotto angoli minori appaiono minori;
- Quegli oggetti che si vedono sotto angoli uguali appaiono uguali;

Citiamo qualche Proposizione:

Proposizione IV: uguali lunghezze poste su di una medesima retta, quelle che si vedono a distanza maggiore appaiono minori. [fig.1a]

Proposizione V: oggetti uguali, ma ugualmente distanti (dall'occhio) appaiono ineguali e maggiore quello più vicino all'occhio. [fig.1b]

Proposizione VI: rette parallele viste da lontano, appaiono non equidistanti. [fig.1b]

---

[2] Supposizioni, come le cita Egnazio Danti in "La prospettiva di Euclide", edizione del 1573.

[3] L'Ottica Greca di Euclide e di Tolomeo (I sec. d.C.) aveva spiegato che la visione di un oggetto avviene secondo un cono, o piramide luminosa, costituito da una molteplicità di raggi che hanno il vertice nell'occhio e la base su tutta la superficie del corpo veduto. Tolomeo però parla di ***piramide*** invece che di ***cono*** e distingue il ***raggio principale***, o quello che partendo da un punto dell'oggetto visto entra perpendicolarmente e che costituisce l'asse della piramide visuale, dagli altri raggi più o meno obliqui e stabilisce che questo raggio perpendicolare è il raggio visibile o quello secondo cui si vedono più chiaramente le cose.

Proposizione VIII: segmenti uguali e paralleli, distanti dall'occhio in modo diseguale, sono visti sotto angoli che non sono proporzionali alle distanze relative.

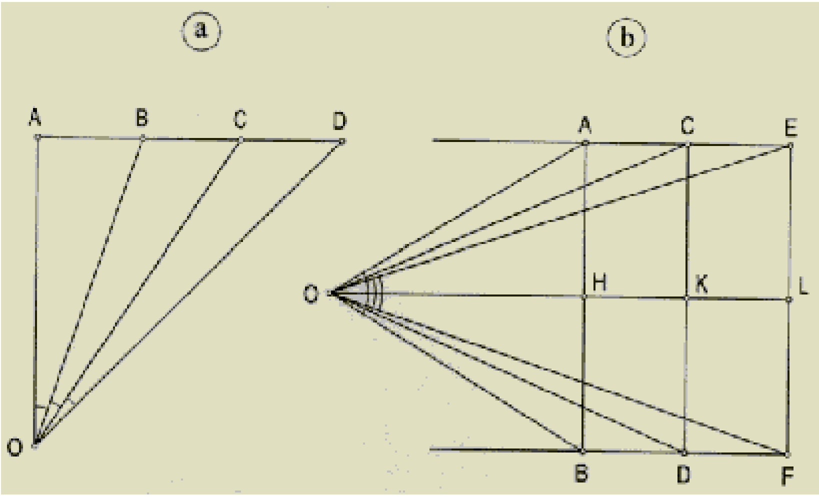

Figura 1: Proposizioni IV, V e VI.

Euclide parla in termini di grandezze di angoli visivi e non di grandezza di immagini; infatti

"*l'ottica antica era ormai salda sul presupposto che le grandezze visive in quanto proiezioni delle cose sulla sfera oculare non sono determinate dalla distanza degli oggetti dall'occhio, bensì esclusivamente dall'ampiezza dell'angolo visivo*." [Panofsky]

Panofsky sostiene che gli antichi, particolarmente nell'età ellenistica e romana, puntualizzarono un loro sistema prospettico, e precisamente una prospettiva "*curva*[4]", con asse di fuga unico la quale corrisponde alla nozione classica dello spazio come entità discontinua, luogo di conflitto tra i corpi e il vuoto, così come la prospettiva piana è in rapporto con la concezione moderna di uno spazio infinito, omogeneo, vera "sostanza estesa".

[4] Prospettiva di tipo curvo o a lisca di pesce, Fig.2.

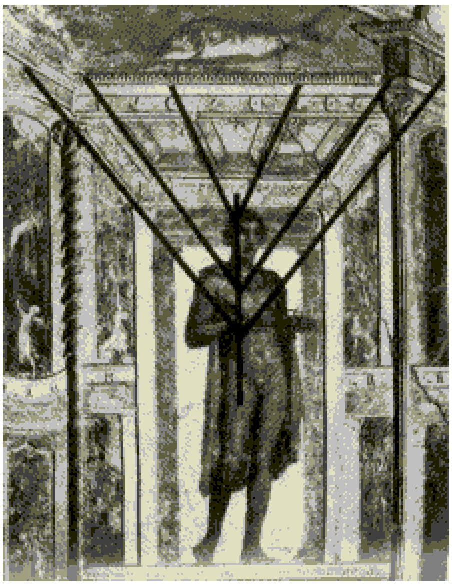

Figura 2: Frammento di pittura murale; I sec. d.C.

Si può azzardare che la teoria del punto di fuga unico è legata al possesso del concetto di infinito, o anche di limite, cioè alla possibilità d'immaginare che, data un'estensione infinita di rette, la reciproca distanza e perciò l'angolo visivo sotto il quale vengono visti i punti più lontani, diventi uguale a zero.

Con il punto principale (punto di fuga) l'infinito diviene rappresentabile, e, in un contesto in qualche modo platonista, se è rappresentabile "diviene anche esistente". Se l'arte aveva così raggiunto la vera rappresentazione prospettica: toccherà ora alla matematica trovare le leggi per una corretta rappresentazione dello spazio.
A quel tempo non è ancora noto il concetto matematico di "*punto di fuga*", soltanto con Guidobaldo dal Monte (1545-1607) se ne avrà una precisa definizione.

Medioevo
Nel mondo arabo a partire dal IX secolo fino alla metà del XI c'è un decisivo progresso sulle problematiche della rappresentazione prospettica. Il primo studioso che intraprende degli studi inerenti all'ottica è Al-Kindi (IX sec.),

colui che invece ha maggiormente influenzato gli studi medievali è stato Alhazen (XI sec.): la sua "*Ottica*" è stata studiata dai prospettici medievali, in particolare da quelli della Scuola di Oxford.
La '*perspectiva*' medioevale nasce in Europa nel XIII sec. con la diffusione delle opere greche e arabe. Il pensiero medioevale si fissa sui problemi della luce che si trovano discussi in trattati che per lo più portano i titoli di '*Perspectiva*', '*De visu*', '*De aspectibus*'.
La prospettiva medioevale tratta della visione *communis* o *naturalis* (in contrapposizione con la prospettiva *artificialis* del Rinascimento, creazione più di artisti che di filosofi): ma è *naturalis* in senso tutto particolare.

"È infatti un'ottica fisiologica, cioè spiega la visione mediante il funzionamento dell'organo visivo, l'occhio; inoltre si basa su dottrine metafisiche che spiegano la natura della luce da un lato e quelle gnoseologiche del conoscere visivo, dall'altro". [Federici Vescovini]

La '*perspectiva*' quindi è in stretta connessione con la metafisica e la fisica, piuttosto che con l'arte.
La prospettiva medioevale, quale scienza ausiliaria della teologia e della metafisica è frutto di diverse riflessioni filosofiche: partendo dal fondatore della scuola prospettica di Oxford, Roberto Grossatesta (1175-1253), le cui opere costituiscono una fase iniziale del processo di assimilazione delle conquiste dei Greci e degli Arabi nel settore dell'ottica; continuando per il filosofo francescano inglese Ruggero Bacone (1214-1294), il quale manifesta invece una notevole famigliarità con gli scritti specifici sull'ottica degli Arabi, ma anche con le opere antiche di Euclide e Tolomeo; proseguendo attraverso il monaco polacco Vitellione (Witelo, 1230-1314), a cui spetta il merito di aver scritto il primo trattato di prospettiva ("*Perspectiva Vitellionis Thiringopoloni opticae libri X*", 1270), per poi arrivare alla definitiva riformulazione dell' "*assioma degli angoli*[5]" da parte di Biagio Pelacani da Parma (XIV sec.) nelle sue "*Quaestiones Perspectivae*": le grandezze visive sono determinate ***non solo*** dall'ampiezza dell'angolo visivo ***ma anche dalla distanza degli oggetti dall'occhio.***

Parallelamente a questa diffusione teorica sui trattati della visione, si avvertono le prime consistenti variazioni nel campo della rappresentazione

[5] Sono così chiamate le supposizioni 4) 5) 6) dell'Ottica di Euclide da parte di Panofsky.

pittorica: intenzioni di profondità spaziale. Cambiamenti significativi nella rappresentazione dello spazio si sono avuti solo nell'attività pittorica del XIV sec, con Duccio da Boninsegna (1287-1318), Giotto (1297-1337) e fratelli Lorenzetti Ambrogio e Pietro: il piano pittorico si è trasformato rapidamente in un ambiente illusorio tridimensionale, adatto ad ospitare tutto ciò che ha volume e massa.

Rinascimento

L'arte aveva così raggiunto la vera rappresentazione prospettica: toccherà ora alla matematica trovare le leggi per una corretta rappresentazione dello spazio; siamo giunti quindi ai primi trattati matematici sulla prospettiva.
Fra tutti i pittori del '300 il passo decisivo è compiuto dal senese Ambrogio Lorenzetti con l'Annunciazione del 1344, caratterizzata dalla rigorosa convergenza matematica delle otogonali al quadro, verso un unico punto (punto centrico) coincidente col centro della raffigurazione. [Fig.3].

Figura 3: A. Lorenzetti, Annunciazione, 1344.

Tuttavia manca ancora un metodo per misurare con la stessa precisione gli intervalli in profondità delle cosiddette "*trasversali*"; e se dobbiamo credere all'Alberti era diffusa ancora al suo tempo una regola empirica che

consisteva nel diminuire di una quantità costante ogni striscia del pavimento, rispetto alla precedente.
In un epoca “innamorata” della proporzione una delle idee che poteva venire in mente era di ricorrere a delle progressioni numeriche conosciute, come quelle di scarto o di rapporto dato. E’ per ciò che molti pittori utilizzarono una regola empirica fondata sulla riduzione da un rapporto costante, il più usato è “2/3”. Le tavole usate con l’aiuto della regola dei “*due terzi*” sono facilmente riconoscibili: le immagini delle diagonali del pavimento formano delle specie di spirali [Fig.4] mentre dovrebbero essere rette. Il punto di fuga principale è stato scelto a piacere nel quadro, lo scarto (*a*), situato tra la linea di terra e la prima trasversale è stato scelto arbitrariamente; la regola dei “*due terzi*” consiste nell’applicazione sistematica di questo rapporto di riduzione per determinare gli scarti successivi da collocare tra le linee trasversali, immagini di linee equidistanti nella realtà, parallele alla linea di terra.

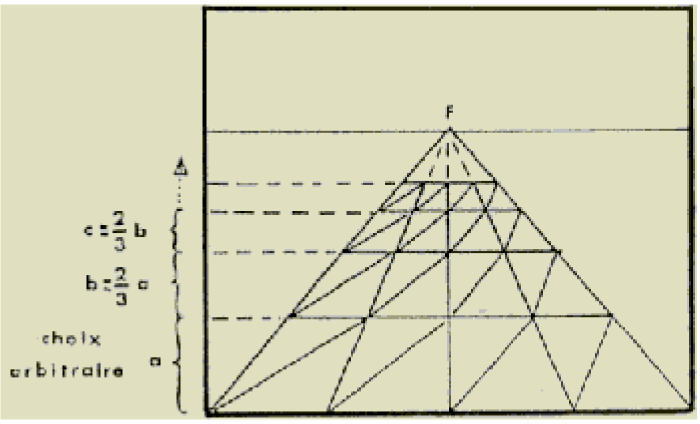

Figura 4: Regola dei "due terzi"

Questo metodo non tentava di render conto di una realtà spaziale globale nella quale doveva inserirsi la geometria *perspectiva*: essi cercavano solamente, attraverso delle costruzioni geometriche nel piano, di render conto del visibile il più fedelmente possibile.
Probabilmente il “*procedimento con punto di distanza*”, corretto e molto elaborato, di Vignola (1505-1573)-Danti (1536-1586)[6], come la “*costruzione legittima*” di L. B. Alberti (1404-1472), è una versione depurata e

[6] E. Danti oltre a curare una traduzione commentata dell’Ottica di Euclide, cura e completa uno studio sulla prospettiva di Jacopo Barozzi, detto il Vignola.

sistematizzata di una più antica pratica artigianale; nel primo caso ci si ricollega alla pittura nordica, nel secondo invece all'eredità della tradizione trecentesca italiana.

E' solo col Rinascimento che il termine "*perspectiva*" assume il significato che gli attribuiamo oggi, e che, patrimonio di filosofi, matematici ed artisti, da scienza della visione diventa essenzialmente scienza della rappresentazione artistica.

"*Il Rinascimento era giunto a razionalizzare pienamente anche sul piano matematico quell'immagine dello spazio che esteticamente era stata già da tempo unificata.[...] Era giunto così a costruire un'immagine spaziale unitaria, scevra di contraddizioni di estensione infinita, all'interno della quale i corpi e i loro intervalli costituiti dello spazio libero apparivano uniti secondo determinate leggi.*" [E. Panofsky]

Leon Battista Alberti, Piero della Francesca (1410-1492) e gli altri trattatisti non sono interessati alle regole, in parte già note, che dovevano dare in pratica una buona rappresentazione, essi hanno invece deciso di puntare verso una rappresentazione rigorosamente geometrica e teoricamente esatta della realtà sensibile[7].

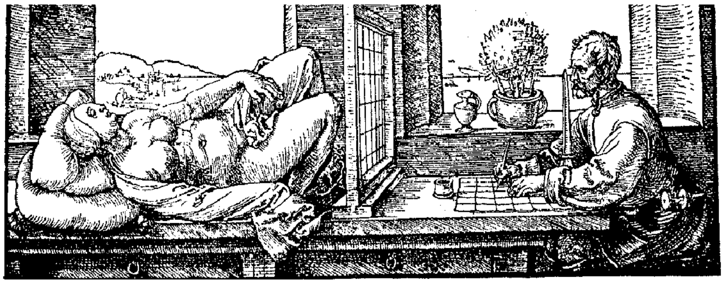

Figura 5: A. Durer, disegnatore della donna sdraiata.

[7] L'idea fondamentale nel sistema di prospettiva creato dai pittori è il principio di proiezione e sezione: i raggi di luce che vanno dai vari punti della scena all'occhio costituiscono una "proiezione" (o meglio una piramide). Secondo il sistema, il quadro deve contenere una sezione di quella proiezione: la sezione è ciò che risulta contenuto in un piano passante attraverso la proiezione. [Fig.5]

Dietro questa tendenza si può leggere una precisa scelta filosofica, arte e scienza si fondono nel segno di una filosofia razionalista e neoplatonica: il vero Essere è quello del mondo delle idee, quindi i concetti matematici sono precedenti e superiori alla realtà sensibile. La rappresentazione pittorica deve rifarsi a concetti matematici prima che alla realtà sensibile o reinterpretare quest'ultima in termini puramente geometrici.
Tutto ciò valorizza i trattati di pittura del '400 in quanto opere matematiche, in cui si affrontano problemi di geometria; le dimostrazioni sono basate sulla geometria euclidea, in particolare sulla teoria delle proporzioni, però gli argomenti (come l'introduzione dei punti di fuga) sono propri della nuova geometria: la geometria proiettiva. In questo senso si può dire che essi hanno preceduto di circa duecento anni le prime opere di geometria proiettiva.

A partire da Federico Commandino (1509-1575) e Guidobaldo dal Monte (1545-1607) la prospettiva passa da piano tecnico-pittorico ad un piano teorico-matematico.
Viene enunciata una regola nuova, che sarà poi essenziale per gli sviluppi della geometria proiettiva: non sono solo le ortogonali al piano del quadro che "fuggono" verso dei punti privilegiati dell'orizzonte.
Si riprendono in esame tecniche e accorgimenti già utilizzati dagli artisti, al fine di darne un'esauriente dimostrazione. Sarà proprio Guidobaldo che nel primo libro del suo "*Perspectiva libri sex*" (pubblicato nel 1600) darà una dimostrazione (per tappe, dal caso più semplice a quello più complicato) della seguente proposizione:

"*un fascio di rette parallele dello spazio si rappresenta nel quadro attraverso un sistema di rette parallele o concorrenti* ***nel punctum concursus***"[8].

Con Guidobaldo la prospettiva assume carattere di scienza autonoma dalla pittura e si avvia a diventare oggetto della speculazione matematica, nucleo primitivo dell'astratta Geometria Proiettiva.

---

[8] Il matematico ora si occupa di prospettiva in termini puramente geometrici, ricercando le dimostrazioni di ogni proprietà enunciata, comprese quelle regole più evidenti che, come tali, sono stabilmente accettate dagli artisti.

LA NUOVA GEOMETRIA

La *geometrizzazione* della prospettiva, come osserva Freguglia, avviene almeno secondo due direzioni chiaramente interdipendenti: da un lato l'introduzione implicita di *elementi ideali* nuovi, cioè del punto improprio e della retta impropria; dall'altro lato l'innesto delle nuove proprietà, connesse alla stessa introduzione dei predetti elementi ideali, nel contesto ideale.

G. Desargues (1591-1661) per teorizzare sul piano geometrico le tecniche della prospettiva, introduce elementi ideali (punto e retta impropri) compatibili con quegli elementi fondamentali (punto e retta) che sono alla base della geometria euclidea.

Così le rette A′B′ e CD′ che corrispondono alle rette parallele AB e CD, devono, secondo il principio di proiezione e sezione, incontrarsi in un punto O′. [Fig.6]

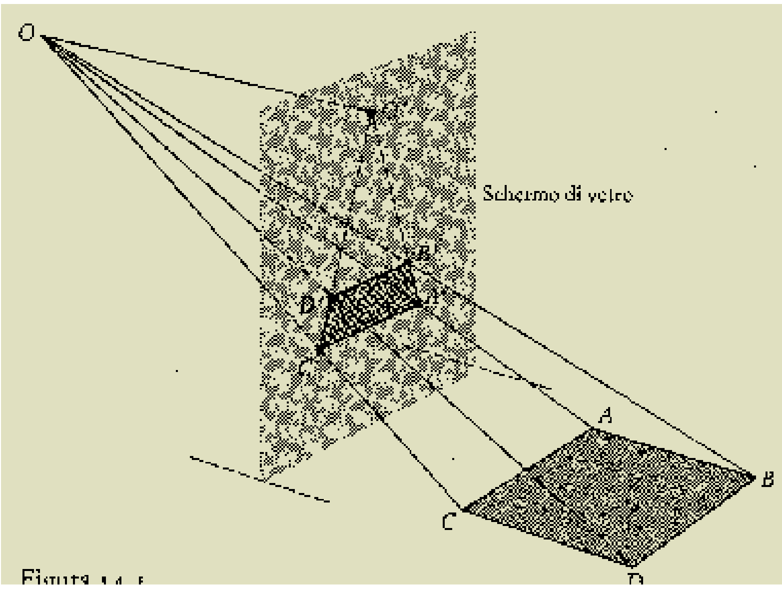

Figura 6: Principio di proiezione e sezione.

Otterremo così un vero e proprio ampliamento della visione euclidea nonché il superamento metodologico della stessa posizione euclidea.

Tra i primi enti che Desargues introduce (*Brouillon projet.*.) abbiamo il "*fascio di rette*" e il "*centro*":

Ordine di linee rette: “diremo che più linee rette sono tra loro di uno stesso ordine se o sono fra loro tutte parallele oppure tutte s’incontrano in un medesimo punto. Sia nell’uno che nell’altro caso esse rette tendono ad un punto.”

Punto traguardo di rette di uno stesso ordine: “Il punto a cui tendono le rette nei due casi sopra visti è detto punto traguardo.”

Il centro del fascio esiste sempre; esso può trovarsi al finito o all’infinito, da cui la denominazione di punto proprio e punto improprio.
L’infinito geometrico viene reso accessibile e finalmente si scopre che esso è fatto di punti e di rette: questi punti e queste rette hanno le stesse caratteristiche dei corrispondenti enti al finito, inoltre tutta la teoria e le relazioni tra questi enti, l’involuzione e la sua peculiare proprietà di essere invariante per proiezione e sezione, trova valida applicazione nello studio delle coniche.

La trattazione delle sezioni coniche rappresenta una delle grandi conquiste dell’antichità; già i geometri anteriori ad Apollonio (225 a.C.) considerarono le coniche come sezioni di coni e di cilindri retti. Apollonio le considerò più in generale come sezioni di un cono obliquo a base circolare, cioè come proiezioni arbitrarie del cerchio.
Anche Desargues definisce le coniche come proiezioni del cerchio, ma a differenza dei Greci seppe “vedere all’infinito” e isolare alcune delle proprietà competenti a tutte le coniche: proprietà che oggi chiamiamo proiettive.
Le coniche vengono così generate: quando una retta avente un punto immobile si muove lungo una circonferenza, può dar luogo ai seguenti casi:

- il punto immobile è nel piano della circonferenza, allora la retta, con le sue posizioni successive, descrive un fascio che può essere proprio o improprio a seconda che il punto immobile sia a distanza finita o infinita;
- il punto immobile è fuori dal piano del cerchio a distanza finita o infinita, allora otteniamo una figura solida che viene chiamata cono se il punto è a distanza finita, cilindro se è a distanza infinita.

Le sezioni coniche sono allora le intersezioni di questi coni o cilindri con un piano.
L’introduzione delle coniche fatta da Desargues ricalca quella di Apollonio, ma a differenza di questi che divideva queste curve in aperte e chiuse, egli,

grazie all'ampliamento dello spazio euclideo mediante l'aggiunta dei punti impropri, riesce a vedere tutte le coniche come curve chiuse che possono essere ottenute con continuità le une dalle altre.

Pascal (1623-1662), Poncelet (1788-1867), Gergonne (1771-1859) saranno i continuatori e sistematori della nuova geometria.

Principio di dualità

Da ogni proposizione di geometria piana può esserne ricavata un'altra, caratterizzata dalla stessa struttura logica della prima, mediante lo scambio dei termini "punto" e "retta".

Teorema di Pascal	**Teorema di Brianchon**
Condizione necessaria e sufficiente affinchè i vertici di un esagono stiano su di una conica è che i punti comuni alle tre coppie di lati opposti appartengano alla stessa retta.	Condizione necessaria e sufficiente affinchè i lati di un esagono stiano su di una conica (siano tangenti ad una conica) è che le rette comuni alle tre coppie di vertici opposti abbiano in comune lo stesso lato.

Fu Gergonne che dichiarò la generalità del principio e lo applicò a tutti gli enunciati e a tutti i Teoremi di Geometria Proiettiva.
Introdusse poi il termine di "*dualità*", per denotare la relazione che intercorre fra il nuovo Teorema e quello originario. Inventò lui stesso la maniera di scrivere i Teoremi duali in doppia colonna (come sopra) con la proposizione duale affiancata a quella originale.
Staudt (1798-1867) in *Geometrie der Lage* (Geometria di posizione, 1847),introduce su basi proiettive un concetto analogo a quello di lunghezza in modo tale da dichiarare la geometria proiettiva una disciplina indipendente dalla distanza. Lo schema che segue per conseguire il suo intento è detto "algebra dei getti". Staudt aveva così gli strumenti fondamentali per costruire la geometria proiettiva senza la dipendenza dalle nozioni di lunghezza e di congruenza.

Solo col 1872 (Programma di Erlangen) F. Klein (1849-1925) dichiara l'importanza della nuova geometria: la geometria proiettiva assume ruolo fondante delle altre geometrie classiche.
Specializzando il Gruppo Proiettivo otteniamo tutte le geometrie:

"*Ora vi sono nello spazio delle trasformazioni che non alterano affatto le proprietà geometriche dei corpi. Infatti, per la natura del concetto di proprietà geometriche, queste sono indipendenti dalla posizione che la figura da studiare occupa nello spazio, dalla sua grandezza assoluta, e finalmente anche dal senso in cui sono disposte le sue parti. ... Il complesso di tali trasformazioni lo chiameremo* ***gruppo principale*** *di trasformazioni dello spazio: le proprietà geometriche non si alterano nelle trasformazioni del gruppo principale. Viceversa le proprietà geometriche sono caratterizzate dalla loro invariabilità rispetto alle trasformazioni del gruppo principale.*"

Bibliografia

1. Alberti L. B., "Della Pittura", edizione critica a cura di Luigi Mallè. Sansoni, Firenze 1950.
2. Bagni T.-D'Amore B., "Alle radici storiche della prospettiva", Franco Angeli, Milano 1994.
3. Castelnuovo G., "Lezioni di geometria analitica e proiettiva", ed. Dante Alighieri, Venezia 1905.
4. Emmmer M., "La perfezione visibile". Edizione Theoria 1991.
5. Enriques F., "Lezioni di Geometria Proiettiva"; Edizione Zanichelli, Bologna 1926.
6. Euclide: "Euclidis Optica & Catoptrica", Edizione greca di Ioannis Penae, Parigi 1557.
7. Euclide: "La prospettiva di Euclide", tradotta da Egnazio Danti.Ed. Giunti, Firenze 1573.
8. Fano G., "Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti" (di Felix Klein), in 'Annali di Matematica' sez.II, tomo XVII (1889-90).
9. Federici Vescovini G., "Le questioni di 'Perspectiva' di Biagio Pelacani da Parma", pubblicato in 'Rinascimento' XII Vol. 1. Sansoni, Firenze 1961.
10. Federici Vescovini, "Studi sulla prospettiva Medievale", Torino 1965.

11. Frajese A., “Alle origini della geometria proiettiva”, Bollettino UMI (2) 2 1940.
12. Freguglia P., “Fondamenti storici della geometria”, Feltrinelli, Milano 1982.
13. Freguglia P., “I trattati di prospettiva nell’età rinasimentale”, in Arte e Matematica: un binomio sorprendente; realizzato in onore del Convegno Nazionale nella città di Vasto. Marzo 1997.
14. Ghione F., “Breve introduzione sul contenuto matematico del De Prospectiva Pingendi di Piero della Francesca”, tratto da L’occhio di Horus: itinerari nell’immaginario matematico. Enciclopedia Italiana.
15. Kline M., “Storia del pensiero matematico”, vol.I e vol.II, Einaudi, Torino 1991.
16. Leonardo da Vinci, “Trattato della Pittura” dal Codice Urbinate Vaticano; Le Bibliophile-Neuchatel.
17. Martin-Kemp, “La scienza dell’Arte”, Prospettiva e percezione visiva da Brunelleschi a Seurat. Giunti, Firenze 1994.
18. Panosfky E., “La prospettiva come forma simbolica”, Feltrinelli, Milano 1995.
19. Piero della Francesca, “De prospectiva pingendi”, edizione critica a cura di Nicco-Fasola, con XLIX tavole fuori testo, Sansoni, Firenze 1942.
20. Pucci A., “Un itinerario Matematco-Estetico: dalla prospettiva alla geometria proiettiva”; tesi di laurea in Matematica (1997 Parma).
21. Severi F., “Geometria Proiettiva”; Padova 1921.
22. Speranza F., “Alcuni nodi concettuali a proposito dello spazio”, pubblicato in Educazione Matematica 5.IV, A.1, 95/115, 1994.
23. Speranza F., “Dallo spazio alla geometria” dagli atti del Convegno tenutosi nella città di Salsomaggiore del 10/11 Aprile 1997.
24. Speranza F., Vighi P., “Spazio dell’arte, spazio della matematica”, in Arte e Matematica: un binomio sorprendente; realizzato in onore del Convegno Nazionale nella città di Vasto. Marzo 1997.
25. Staudt C. G. C. V., “Geometria di Posizione”; edizione Fratelli Bocca, Napoli 1889.
26. Tea E., “Witelo prospettico del secolo XIII” in ‘L’Arte’ 1927.
27. Wiedemann, “sull’ottica degli Arabi” (traduzione dal tedesco di A. Sparagna) in ‘Bullettino di bibliografia e storia delle matematiche’, Modena vol.XIV, 1881.