"Quaderni di Ricerca in Didattica", n14, 2004.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

L'uso didattico del materiale virtuale presente in rete: un caso i frattali

Adalberto Codetta Raiteri, OPPI Milano, adalberto@codetta.it
Renza Cambini, OPPI Milano, renza.cambini@formain.it

Riassunto
Questo laboratorio esplora la possibilità che alcuni oggetti virtuali presenti nel web possano essere proposti agli studenti facendo uso dei ben noti metodi di modellizzazione matematica dei problemi di realtà. Nella prima parte il metodo della modellizzazione matematica verrà brevemente illustrato per mezzo di un esempio. Nella seconda parte di discuterà la possibilità di utilizzare lo stesso metodo per interpretare e comprendere alcuni degli oggetti presenti nel web. In particolare ci si riferirà allo studio dei frattali.
.

1. Introduzione

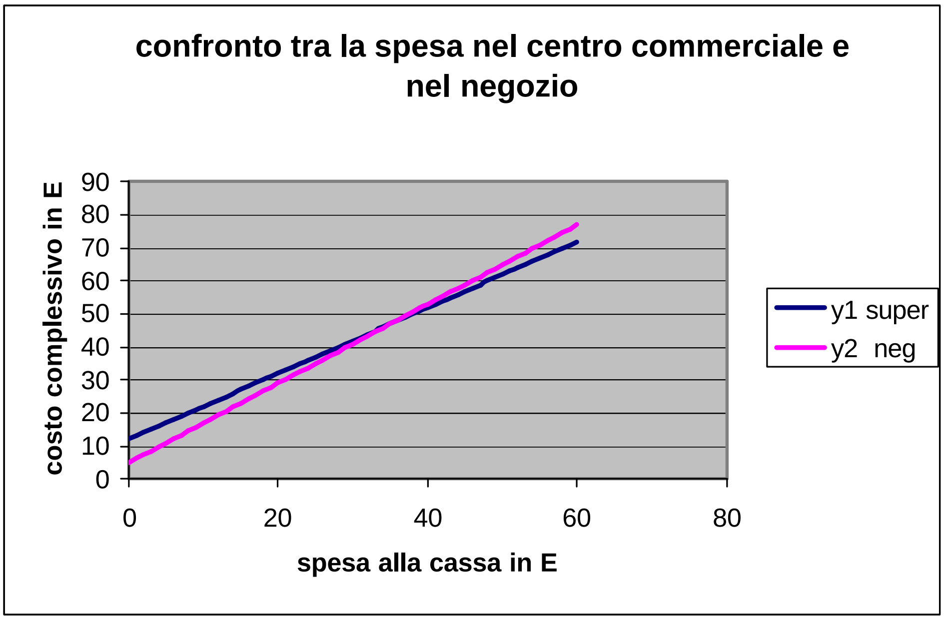
Il Web propone una varietà quasi illimitata di materiali didattici per sviluppare le attività matematiche degli studenti. Numerose università e centri di ricerca didattica mettono a disposizione degli insegnanti un gran numero di percorsi didattici corredati da animazioni Java spesso stimolanti e suggestive. Numerosi altri ambienti di apprendimento della matematica possono essere acquistati e installati nei laboratori di informatica. Efficaci e semplici programmi possono essere anche realizzati direttamente dagli insegnanti e dagli allievi. Anche in matematica quindi i materiali didattici tendono a diventare "virtuali"! Quale ruolo assegnare a questi nuovi oggetti? Come utilizzarli nel processo di insegnamento apprendimento? Gli autori ritengono che anche i nuovi oggetti virtuali debbano essere utilizzati, conservando i principi e gli scopi per cui si usano quelli reali, ritengono di utilizzare gli stessi metodi già in uso per la costruzione e l'approfondimento di concetti e strumenti matematici: la modellizzazione di problemi reali. Questi metodi, ampiamente diffusi in Italia da Emma Castelnuovo, possono essere sinteticamente rappresentati con una mappa costruita dagli insegnanti che hanno partecipato al corso di aggiornamento organizzato dal Ministero della Pubblica Istruzione a Città di Castello nel 1978.

Il nuovo contesto tecnologico fornisce nuove opportunità di elaborazione dei modelli anche con modesti strumenti matematici. Ciò consente di utilizzare più ampiamente il metodo della modellizzazione di problemi reali a tutti i livelli scolari. I frattali, oggetti matematici molto frequenti in Internet, consentono un approccio interdisciplinare e si prestano ad essere studiati a differenti livelli scolari per la costruzione e l'approfondimento di numerosi concetti e strumenti matematici: geometria della natura, autosomiglianza, nelle scuole di base; logaritmi, campo complesso, funzioni ricorsive, nelle secondarie

2. Un esempio di sviluppo dei concetti matematici attraverso la modellizzazione matematica dei problemi di realtà

Esaminiamo le operazioni della mappa in un caso particolare per verificare successivamente se le stesse operazioni si possono applicare nello studio di un oggetto frattale

Problema di realtà	E’ stato aperto un ipermercato nel nostro territorio
semplificazione	*La situazione reale genera un universo problematico che l’insegnante ha la responsabilità di indirizzare verso l’individuazione di un problema appropriato agli obiettivi del percorso didattico: ciò porta inevitabilmente ad approfondire un particolare aspetto della situazione reale*
Situazione schematizzata	E' più conveniente fare acquisti nei piccoli negozi sottocasa oppure nell'ipermercato più lontano? (modelli algebrici)

(traccia del problema)	Quale sarà il destino dei piccoli negozi (modelli statistici)
analisi	*Gli studenti, alternando lavori di gruppo e lavori individuali a casa, individuano, fra le molte possibili, alcune variabili:* • *la distanza dalla casa all'ipermercato* • *il conto pagato all'ipermercato* • *il tempo impiegato per gli acquisti nell'ipermercato* • *il tempo impiegato per gli acquisti nei piccoli negozi vicino a casa* • *il valore del tempo del cliente* • *le spese di viaggio (solo nell'ipermercato)* • *la differenza percerntuale dei prezzi*
Testo del problema	Una famiglia deve scegliere tra l'ipermercato e i piccoli negozi vicini a casa per la spesa settimanale. Conoscendo • le spese di viaggio (solo per l'permenrcato): 2 euro • il tempo richiesto per gli acquisti nell'ipermercato 2 ore • il tempo richiesto per gli acquisti nei negozi 1 ora • il valore del tempo del cliente 5 euro/ora • differenza percentuale nei prezzi 20% trova il prezzo minimo per scegliere l'ipermercato
Sintesi	*Gli studenti utilizzando le loro precedenti conoscenze elaborano il testo del problema*
Modello matematico	con x => il conto pagato all'ipermecato $y_1 = x + 12$ y_1 => il costo complessivo della spesa all'ipermenrcato $y_2 = 1{,}2x + 5$ y_2 => il costo complessivo della spesa nei negozi
Conoscenza e comprensione del modello matematico	*Gli studenti sono invitati a studiare e "scoprire" metodi di soluzione dei sistemi lineari in due equazioni e due incognite*
Risultati matematici	X=35 Y=47
interpretazione	

valutazione	E' importante gli studenti siano invitati a esaminare l'effettiva corrispondenza della soluzione trovata con la realtà magari anche con controlli operativi
Problema di realtà	

Un buon problema di realtà consente di riesami nanare la realtà che lo ha generato con nuovi e più potenti strumenti

Problema di realtà	Ora é possible applicare il modello personalizzandolo per ciascuno studente della classe
semplificazione	*Gli studenti cambiando i parametri del problema risolvono numerosi sistemi numerici. Ciò da un lato comporta non necessariamente inutili esercizi ripetitivi, dall'altro pone l'esigenza di una generalizzazione.*
Situazione schematizzata (traccia del problema)	E' possible risolvere il problema per tutti gli abitanti del territorio, senza dover fare i calcoli per ciascuno di essi?
analisi	*Gli studenti, alternando lavori di gruppo e lavori individuali a casa, individuano, fra le molte possibili, alcune variabili.*
Testo del problema	Molte persone dello stesso territorio devono decidere se é più conveniente recarsi per gli acquisti in un ipermercato o nei piccoli negozi sottocasa. Per trovare il prezzo minimo che rende conveniente la spesa nell'ipermercato essi prendono in considerazione: - le spese di viaggio all'ipermenrcato **g** € - il valore del tempo di un cliente **c** €/ore - la differenza del tempo di spesa **t** ore - la differenza percentuale nei prezzi **p** %

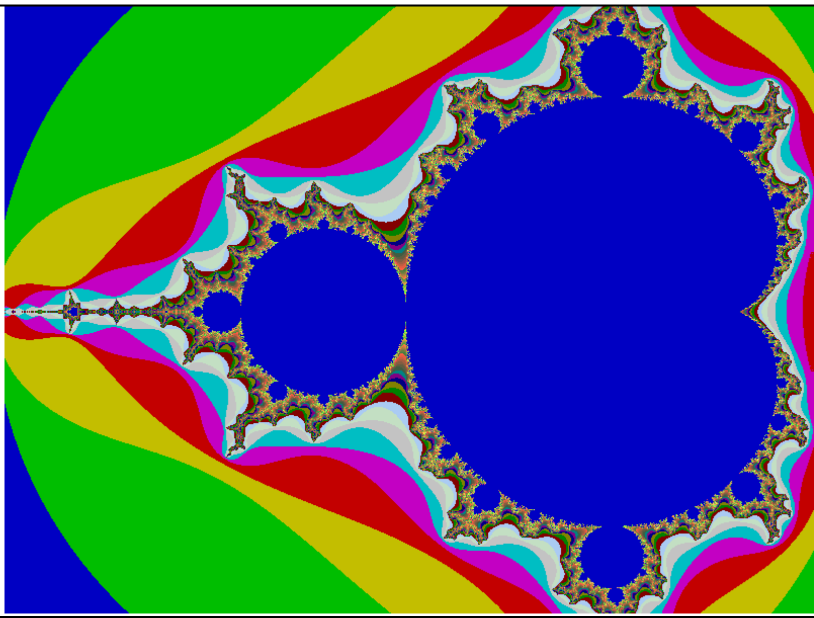
Il lettore può immaginare la prosecuzione della tabella. E' importante osservare che la soluzione del problema, una volta interpretata e valutata si presta a costruire numerosi altri problemi. E' ancora più importante osservare che, continuando a lavorare con lo stesso metodo, il problema di realtà diventa più astratto, legato alle precedenti rappresentazioni e anche la matematica più formalizzata. La scelta di un problema di realtà è quindi legata alle opportunità che il problema offre di percorrere più volte il percorso di matematizzazione. Lo stesso problema di realtà può quindi generare una grande varietà di problemi.

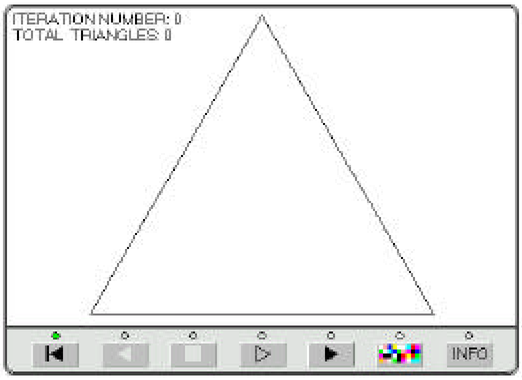
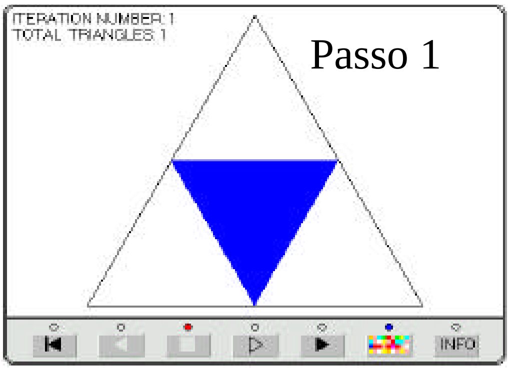
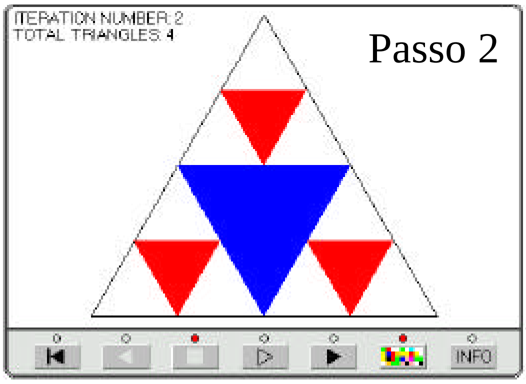
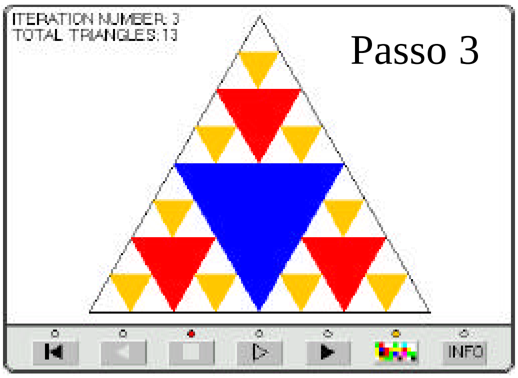
2) Ipotesi di un percorso di studio dei frattali

Nello studio scolastico dell'energia elettrica è possibile abbandonare gli approcci deduttivi che prevedono la conoscenza dell'elettrone, dell'elettrostatica, delle macchine elettriche per poter studiare e conoscere le proprietà la corrente elettrica. Infatti la corrente elettrica fa parte della nostra realtà quotidiana è può essere opportuno studiarla sulla base di ipotesi parziali, legata agli strumenti di misura quotidiani. A partire da queste ipotesi parziali sarà possibile estendere e approfondire la compressione di tutti i fenomeni elettrici.
Allo stesso modo i frattali sono oggetti ampiamente utilizzati e divulgati dai media. Sul web sono presenti molti strumenti che consentono di studiarne le proprietà. Nella nostra ipotesi studieremo alcune proprietà degli oggetti frattali a partire dalle quali sarà possibile estendere e approfondire la comprensione e la generazione dei frattali.

3) Applicazione del modello ai frattali

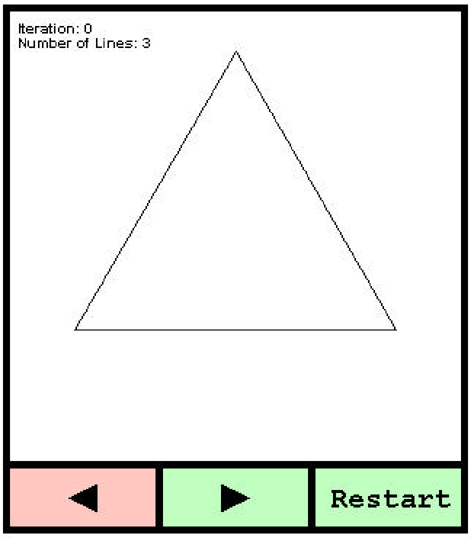
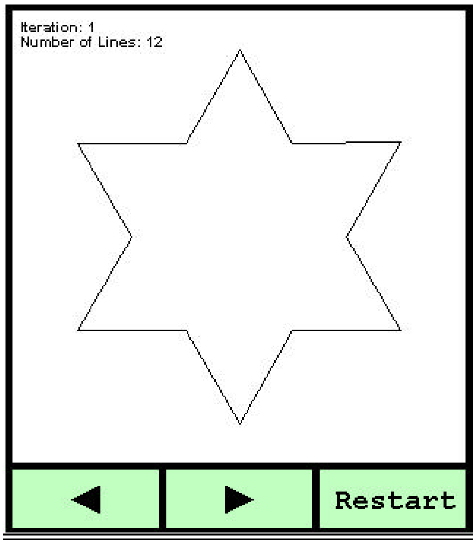
Applichiamo ora il modello allo studio dei frattali. Il laboratorio di istituto disporrà del software Fractint scaricabile gratuitamente dal Web. Gli studenti, preliminarmente avranno cercato sul giornali e riviste le fotografie di noti frattali.

Problema di realtà	Il software Fractint scaricabile da internet (http://spanky.triumf.ca/www/fractint/getting.html) genera oggetti frattali objects Studiamo i frattali di Mandelbrot	
semplificazione	*Gli studenti utilizzando lo strumento " zoom" del programma Winfract esplorano più frattali e ne descrivono la caratteristica più evidente. Ci si aspetta che gli studenti la descrivano con frasi come "I frattali riproducono al loro interno la loro forma su scala sempre più piccola"* *L'insegnante come nel caso precedente propone all'attenzione dei ragazzi situazioni più semplificate.. Cinzia Lanius (http://math.rice.edu/~lanius/fractals/sierjava.html) offre una simpatica applicazione Java che riproduce il triangolo di Sierpinski*	
Situazione schematizzata	IL software proposto da C. Lanius riproduce all'interno di un triangolo, ulteriori triangoli su scala sempre più piccola	

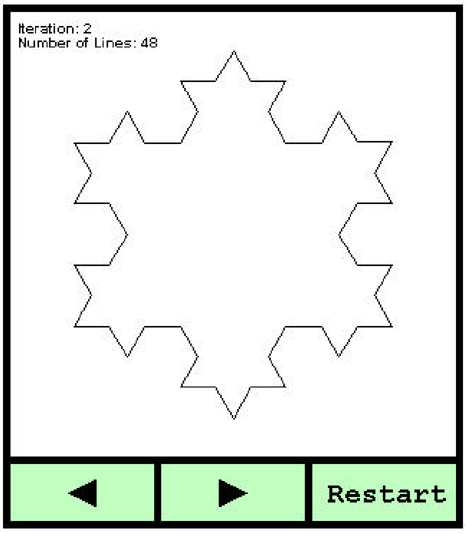
analisi		
		

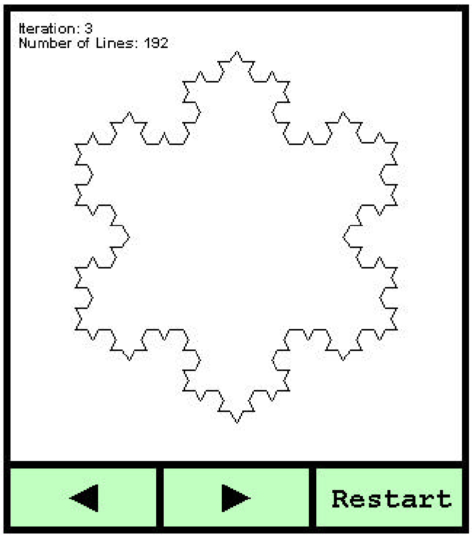
Testo del problema	1. Nel primo passo quale frazione del triangolo non é colorata 2. Nel secondo passo che frazione del triangolo non é colorata? 3. Hai trovato una regola? Sei in grado di prevedere quale frazione del triangolo non é colorata? 4. Cerca di scrivere la fomula che consente di calcolare la frazione del triangolo che non é colorata dopo ***n*** passi 5. Confronta le prime tre figure. Cosa osservi? 6. Descrivi una procedura per costruire le figure		
Sintesi	*Gli studenti secondo il differente livello scolare sviluppano esperienze nel passaggio dal linguaggio naturale alla scrittura simbolica, dal controllo semantico alla correttezza sintattica*		
Modelli matematici	$\mathbf{Sn = (3/4)^n}$ $\mathbf{a_0 = 1}$ $\mathbf{a_n = (3/4)\, a_{n-1}}$	similitudine autosomiglianza dimensione frattale	algoritmo algoritmo iterativo algoritmo ricorsivo
Conoscenza e comprensione del modello matematico	*Gli studenti studiano le successioni assegnate per ricorrenza collegandole ad algortimi ricorsivi. Utilizzando il linguaggio Logo (vi sono numerose versioni gratuite sul WEB) possono scrivere un programma ricorsivo che realizza il triangolo di Sierpinski e risolve il problema n.6*		
Risultati Matematici	to sierp :L triangle :L repeat 3[fd :L/2 lt 120 if :L>10 [sierp :L/2] rt 120 fd :L/2 rt 120] end	to triangle :L fd :L rt 120 fd :L rt 120 fd :L rt 120 riempi end	to riempi pu rt 30 fd 3 fill bk 3 lt 30 pd end
interpretazioni	*Algoritmi ricorsivi codificati in Logo (senza preoccupazioni di approfondire la gestione delle variabili sullo stak di memoria) possono essere accessibili a studenti molto giovani e consentono di comprendere gli aspetti ricorsivi dell'autosomiglianza*		
Possible solution	Al termine di questa indagine gli studenti dispongono di una soluzione che consente di interpretare il frattale di Mandelbrot con due nuovi concetti: autosomiglianza e ricorsività		
valutazione	*Può essere opportuno far osservare agli studenti anche dal solo punto di vista sintattico (senza entrare nel merito del calcolo dei numeri complessi) che l’algoritmmo che genera il frattale di Mandelbrot ha caratteristiche analoghe a quelle studiate per descrivere il triangolo di Sierpinski*		**z(0) = c = pixel;** **z(n+1) = z(n)^2 + c.**
problema di realtà	Gli studenti hanno acquisito stumenti semantici e sintattici utili per comprendere e interpretare il frattale di Mandelbrot generato dal software Fractint e modificare consapevolmente alcuni parametri (per esempio il numero massimo di iterazioni)		

Un percorso del tutto analogo si può realizzare partendo dal quesito, ormai famoso, formulato da Mandelbrot per introdurre il concetto di dimensione frattale. Con un problema di questo tipo gli oggetti frattali vengono presentati non solo per gli aspetti estetici ma come veri e propri modelli per interpretare aspetti della natura che si presentano che si presetano la natura

problema di realtà	Quanto é lunga la costa d'Inghilterra?
semplificazione	*Gli studenti hanno facilmente modo di accorgersi anche con lavori su carte geografiche (ma potrebbe essere utile un cercare di misurare un tratto di fiume su tratto di un fiume) che la lunghezza di una linea così irregolare dipende dal "passo" con cui la si misura. Nuralmente questo concetto può essere approfondito con animazioni disponibili sul web*
situazione schematizzata	Il fiocco di Kock nel sito di Cinthia Lanius ci presenta figure il cui perimetro, come quello delle coste d'Inghilterra, non é facilmente misurabile
analisi	 

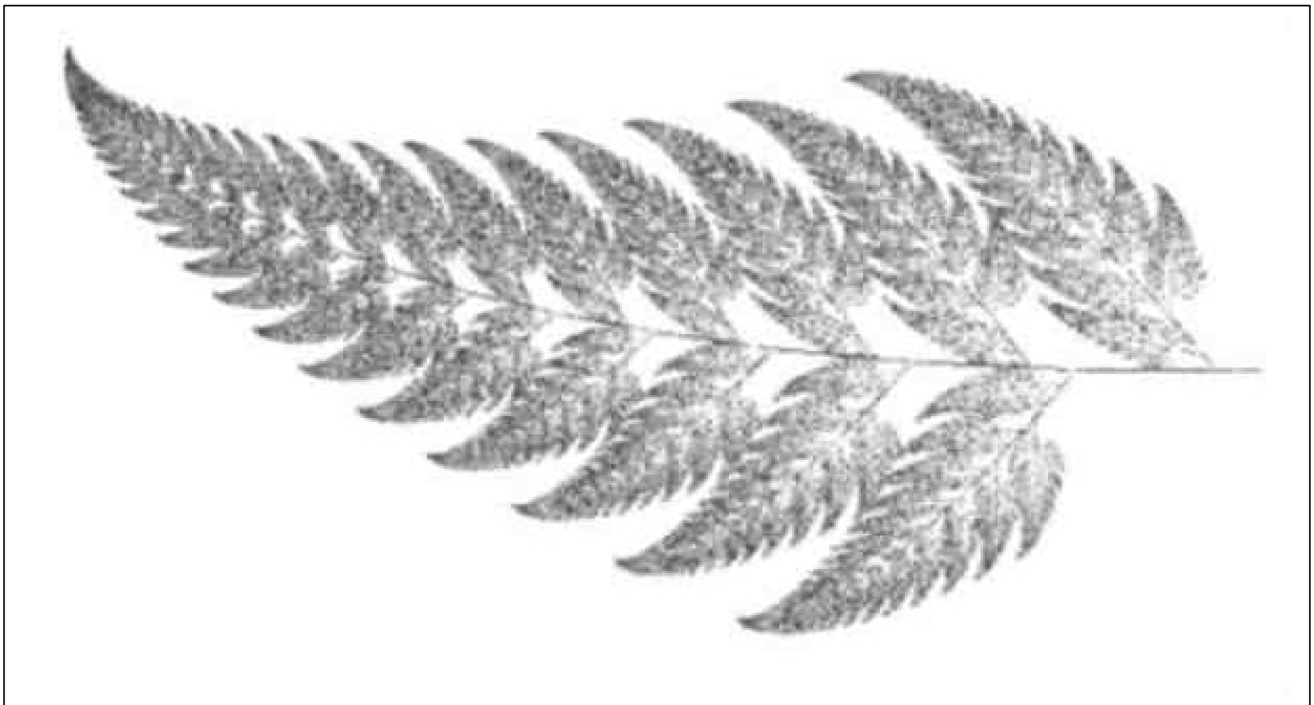
analisi



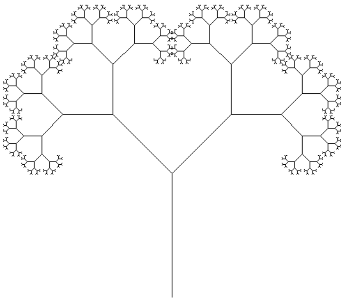


Il testo del problema potrà essere formulato, secondo i differenti livelli scolari, con gli stessi criteri con cui si sono impostati quelli relativi al triangolo di Sierpinski. Naturalmente l'attenzione in questo caso va posta sul fatto che ora il perimetro tende all'infinito mentre nel caso precedente la superficie del triangolo di Sierpinski tendeva a zero

La felce é altro frattale che può essere studiato come un problema di realtà



Sempre con lo stesso metodo di lavoro gli studenti potranno confrontare la felce reale con quella frattale, esplorare l'affascinante tema collega la ricorsività, la frattalità e le forme viventi. Potranno scrivere semplici programmi LOGO che emulano forme viventi.

to albero :L fd :L lt 45 if :L>3 [albero :L*3/5] rt 90 if :L>3 [albero :L*3/5] lt 45 bk :L end	

4**) Conclusioni**

Vi sono molti motivi che suggeriscono di proporre gli oggetti frattali all'attenzione degli studenti, ai differenti livelli scolari:

- la ricchezza di aspetti estetici ed emotivi;
- la varietà di ambiti che stanno utilizzando in maniera produttiva i modelli frattali (dalla medicina alla cinematografia), ciò consente approcci intedisciplinari
- la presenza di una vasta letteratura, anche su internet, offre la possibilità quindi di esplorare i frattali attraverso linguaggi differenti anche in ambito didattico
- l'utilizzo del calcolatore consente di vedere e manipolare oggetti che, un tempo potevano essere concepite solo dai grandi matematici
- la natura dei frattali favorisce la percezione che, anche in ambito matematico e scientifico, si fanno invenzioni piuttosto che scoperte

Il metodo proposto (applicare la modellizzazione matematica a un oggetto che é già per se stesso un oggetto matematico e "scoprire" le sue caratteristiche come fosse un oggetto reale) può forse sembrare paradossale. Tuttavia questo paradosso assume altro aspetto quando si ricordi che Galileo riteneva la natura scritta con il linguaggio della matematica.

References

F. Capra, *The web of life,* Doublrday-Anchor Book, NY 1996
E. Castelnuovo, *Fractals: an interdisciplinary subject,* Cieaem 38 proceedings, Southampton 1986
H. Freudenthal, *The great problem of mathematic education"* Proceeding ICMI 4, 1980
D.R. Hofstaadter, *Godel, Escher, Bach,* Basic Books, 1979
B. B. Mandelbrot, *Gli oggetti frattali*, Einaudi, Torino, 1987. (*Les object fractales*)
N. Negroponte, *Being digital,* Alfred A. Knopf, 1996
G. Trentin, *Didattica in rete,* Garamod, Roma, 1996

Web references

fractals galleries

http://www.fractalus.com/ifl/list.htm
http://www.ba.infn.it/~zito/project/gallerie.html

shareware software to create fractals

http://spanky.triumf.ca/www/fractint/getting.html
http://www.fractaldomains.com/html/sites.html
http://classes.yale.edu/99-00/math190a/Support.html
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/cgi-bin/mille.cgi

recoursive languages

http://el.media.mit.edu/logo-foundation/products/software.html

didactical proposals

http://math.rice.edu/~lanius/frac/
http://polymer.bu.edu/ogaf/
http://classes.yale.edu/99-00/math190a/index.html
http://www.vanderbilt.edu/AnS/psychology/cogsci/chaos/workshop/Fractals.html
http://www.miorelli.net/frattali/introduzione.html
http://www.geocities.com/CapeCanaveral/2854/

portals

http://dir.yahoo.com/Arts/Visual_Arts/Computer_Generated/Fractals/

Appendice

Ricerca-azione proposta a insegnanti delle scuole elementari, medie, secondarie
Metodi per lo studio dei frattali e di altri materiali didattici disponibili sul WEB

Il Web propone una varietà quasi illimitata di materiali didattici per sviluppare le attività degli studenti. Numerose università e centri di ricerca didattica mettono a disposizione degli insegnanti un gran numero di percorsi didattici corredati da animazioni Java spesso stimolanti e suggestive. Numerosi ambienti di apprendimento della matematica e delle altre le discipline scientifiche possono essere acquistati e installati nei laboratori di informatica. Efficaci e semplici programmi possono essere anche realizzati direttamente dagli insegnanti e dagli allievi. Anche in matematica e nelle discipline scientifiche i materiali didattici tendono a diventare "virtuali"!

Come utilizzare questi nuovi oggetti nel processo di insegnamento apprendimento?
Un'ipotesi (si veda allegato) di utilizzazione degli oggetti matematici e scientifici presenti nel WEB, riferita allo studio dei frattali, é stata presentata e discussa nei seguenti convegni:

- **Riflessione sull'uso dei materiali didattici per l'insegnamento della matematica**, IRRE Piemonte, Torino, 15 05 03
- **The use of didactic materials for developing pupils' mathematical activities** CIEAEM 55 Plock (Polonia) 28 07 03
- **Matematica e scuola facciamo il punto**, IRRE Lombardia Milano 10 10 03,

Questa ipotesi prevede di studiare oggetti complessi come i frattali con gli stessi metodi utilizzati per lo studio dei problemi di realtà. Si intende ora sperimentare l'ipotesi in differenti livelli scolari: elementari, medie, secondarie.

Calendario della ricerca

Gennaio-Febbraio 2004 - costituzione dell'équipe di coordinamento della ricerca, del Comitato scientifico, individuazione dei docenti sperimentatori.

Marzo-Settembre 2004 - studio dell'ipotesi di ricerca e formulazione di percorsi da sperimentare nelle classi

Ottobre 2004- inserimento della ricerca nel POF d'Istituto, a cura dei docenti sperimentatori

Novembre 2004- Maggio 2005 sperimentazione dei percorsi nelle classi

Luglio 2005 presentazione dei risultati della ricerca

Le operazioni di condivisione dell'ipotesi, di formulazione dei percorsi, di assistenza alla sperimentazione in classe, di preparazione dei report conclusivi, saranno gestite attraverso strumenti di comunicazione a distanza: forum, gruppi, chat.....

L'OPPI, ente accreditato presso il MIUR, rilascerà a ciascun ricercatore un attestato di partecipazione alla ricerca.

Il coordinatore della ricerca, Adalberto Codetta Raiteri, adalberto@codetta.it, invita gli insegnanti interessati a prendere contatto l'équipe di ricerca.