"QUADERNI DI RICERCA IN DIDATTICA", N15, 2005.
G.R.I.M. (DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF PALERMO, ITALY)

LA TRISEZIONE DELL'ANGOLO CON RIGA E COMPASSO, OTTENUTA CON IL METODODELLE "EQUALIZZAZIONI SUCCESSIVE" ®.

Nunzio Romeo[1]

Abstract

La risoluzione del problema classico della "trisezione dell'angolo" con gli strumenti di riga e compasso ha avuto la sua risposta negativa già con Galois. Da un punto di vista strettamente epistemologico il problema interno alla Geometria Euclidea è stato analizzato in un linguaggio esterno alla Geometria e cioè l'algebra elementare. Nel linguaggio algebrico si riesce a dimostrare che il problema non si può risolvere e tutto finisce qui.

L'ing. Nunzio Romeo mi ha sottoposto il lavoro che è nato da una discussione con il suo nipotino. Il contesto è molto interessante. Abbiamo un problema concreto di dividere un angolo in tre parti uguali. Il suo primo schema di riferimento è quello di una metafora relativa alla possibilità di suddividere l'acqua in tre vasche d'acqua. Indubbiamente questo schema di riferimento è di tipo continuo. Si pensi alla metafora di Dehane per spiegare che il nostro cervello utilizza il continuo per poter valutare numeri sino al 4. Ma anche Archimede quando cerca di poter valutare il volume dei solidi si rifà ancora ad un metafora legata all'acqua.

Dalla metafora delle vasche viene fuori un procedimento per approssimazione che utilizza due differenti registri linguistici:

Approssimazioni di rappresentazioni geometriche con riga e compasso;

Approssimazioni numeriche attraverso il foglio elettronico excel.

Trovo interessante l'uso combinato dei due registri linguistici (geometria euclidea classica) e algoritmi ricorsivi attraverso il computer.

Naturalmente la trisezione viene risolta con un grado di approssimazione sufficientemente alto. Nella vita di tutti i giorni ci possiamo senz'altro accontentare di questo tipo di approssimazione. Ma la considerazione di fondo del lavoro di Nunzio Romeo è strettamente legata ai processi di modellizzazione. Il modello algebrico di una situazione/problema concreta è sempre una rappresentazione, non è mai la realtà. La non dimostrabilità della trisezione dell'angolo con riga e compasso è un problema strettamente legato agli strumenti algebrici utilizzati, cioè non possiamo risolvere il problema con questi strumenti. Naturalmente possiamo sempre risolvere il problema attraverso approssimazioni sempre più buone.

La dialettica continuo-discreto esce sempre fuori ogni qual volta ci si imbatte in situazioni/problema non risolvibili nell'ambito di un solo linguaggio matematico. *(F. Spagnolo)*

[1] Ing. Nunzio Romeo, Piazza Don Bosco 8/A, 90.143, PALERMO (091 6256848) nunzio_romeo@virgilio.it

Osserviamo il sistema di tre vasche schematizzato nella fig. 1/1: sono tre vasche che, per semplicità di dimostrazione, supponiamo di eguale dimensione, collegate tra loro con comunicazioni di fondo fornite di saracinesche di intercettazione - in partenza chiuse - e contenenti tre diverse quantità dello stesso liquido che raggiungono, ovviamente, tre diversi livelli: nello schema, rispettivamente, a quota 25, 30, 35. Agendo sulle due saracinesche possiamo raggiungere l'obiettivo di livellare i tre battenti nell'unica quota 30 in due diverse maniere: aprendo contemporaneamente le due saracinesche o eseguendo un certo numero di cicli, ciascuno composto delle seguenti operazioni: si apre la comunicazione A-B tenendo chiusa B-C; si chiude A-B e si apre B-C. Nella fig. 1/3 è rappresentata la fase finale del primo ciclo: i tre battenti si sono avvicinati a quello finale talché è ovvio dedurne che, proseguendo nella successione di un certo numero di analoghi cicli (che chiamo "di equalizzazione", mutuando dall'elettrotecnica il termine adottato per indicare il risultato dell'intervento volto a rendere pari l'intensità di segnali elettrici omogenei), alla fine si raggiungerà lo stesso obiettivo ottenibile – subito in unico ciclo – aprendo contemporaneamente le due comunicazioni.

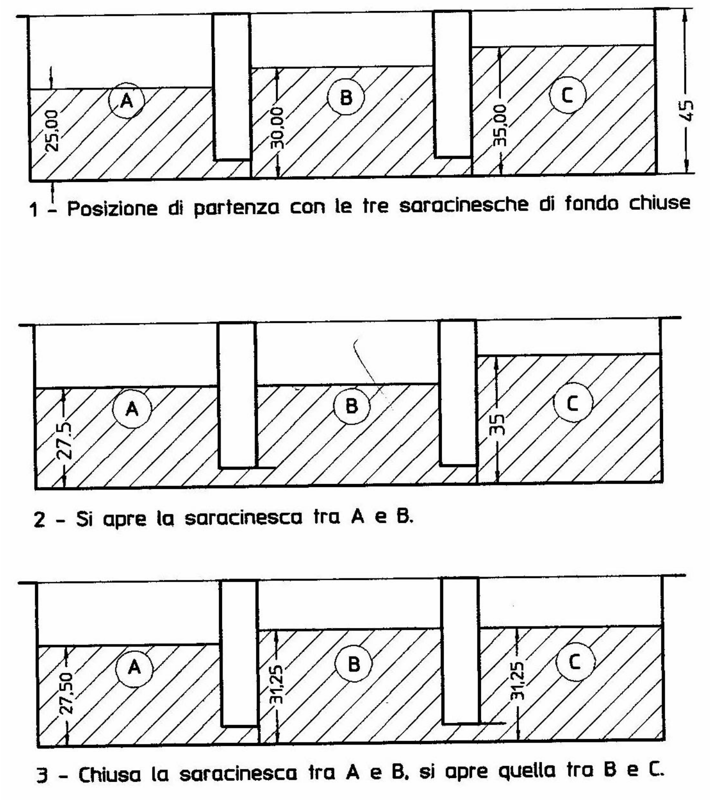
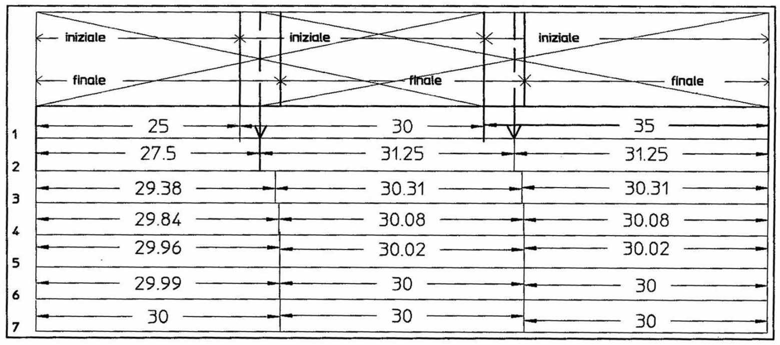


FIG. 1

Utilizzo i risultati di questa osservazione per ricavarne un modello geometrico, rappresentativo dello stesso fenomeno, ma che si presta ad un'esecuzione con strumenti, appunto, di disegno geometrico, così come categoricamente prescritto dallo storico problema della trisezione dell'angolo. La fig. 2 illustra i risultati di una serie di sette cicli atti a dividere un rettangolo di base 90 - inizialmente diviso in tre rettangoli di base rispettivamente 25, 30, 35 - in tre rettangoli uguali, di base 30. Il meccanismo, analogo a quello descritto nel caso delle vasche, è immediatamente rilevabile dal disegno e quindi non mi dilungo sulla sua descrizione; per completezza d'informazione debbo soggiungere che l'operazione non può essere considerata conclusa. Come vedremo meglio più avanti. infatti, la successiva divisione in due dei rettangoli adiacenti di base diversa si spinge sino a microfrazioni delle medesime, talché il raggiungimento della trisezione definitiva può accertarsi solo con misurazioni spinte sino alle 12-15 cifre decimali (e anche oltre), dopo una ventina di cicli.



Rettangolo di base 90: equalizzazione delle tre zone in cui è suddiviso, rispettivamente di base 25, 30, 35

FIG. 2

A questo punto possiamo estendere le esperienze sin qui acquisite alla soluzione del problema che ci interessa: la trisezione dell’angolo. La fig. 3 illustra un angolo qualsiasi, diviso in tre parti anch’esse qualsiasi. Il ciclo viene attuato in questo modo: si costruisce un settore circolare tracciando l’arco A D, e lo si divide verticalmente in due parti tracciando un secondo arco EH, ad esso concentrico. Le equalizzazioni successive si eseguono lavorando nel settore di corona ADHE, così come si operava nell’esempio precedente nell’intero rettangolo; è ovvio che le linee di divisione delle subcorone, questa volta, convergono verso il vertice V dell’angolo.

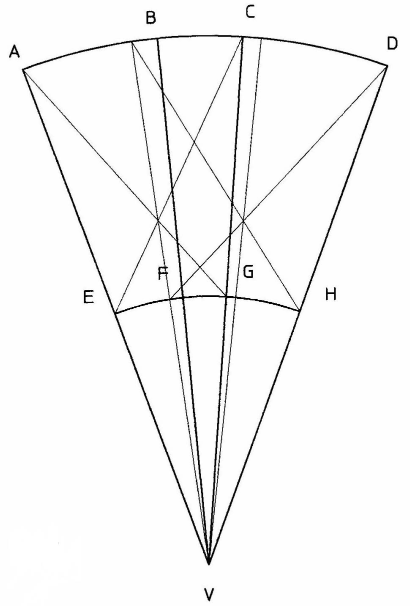


FIG. 3

Segue la serie dei disegni relativi alla trisezione di un angolo di 36,72°; vengono riportati tutti i 18 cicli occorrenti per ottenere il risultato finale, certificato dalla misurazione con 14 decimali. L’angolo dato viene inizialmente diviso in tre parti , secondo il criterio che illustreremo più avanti.

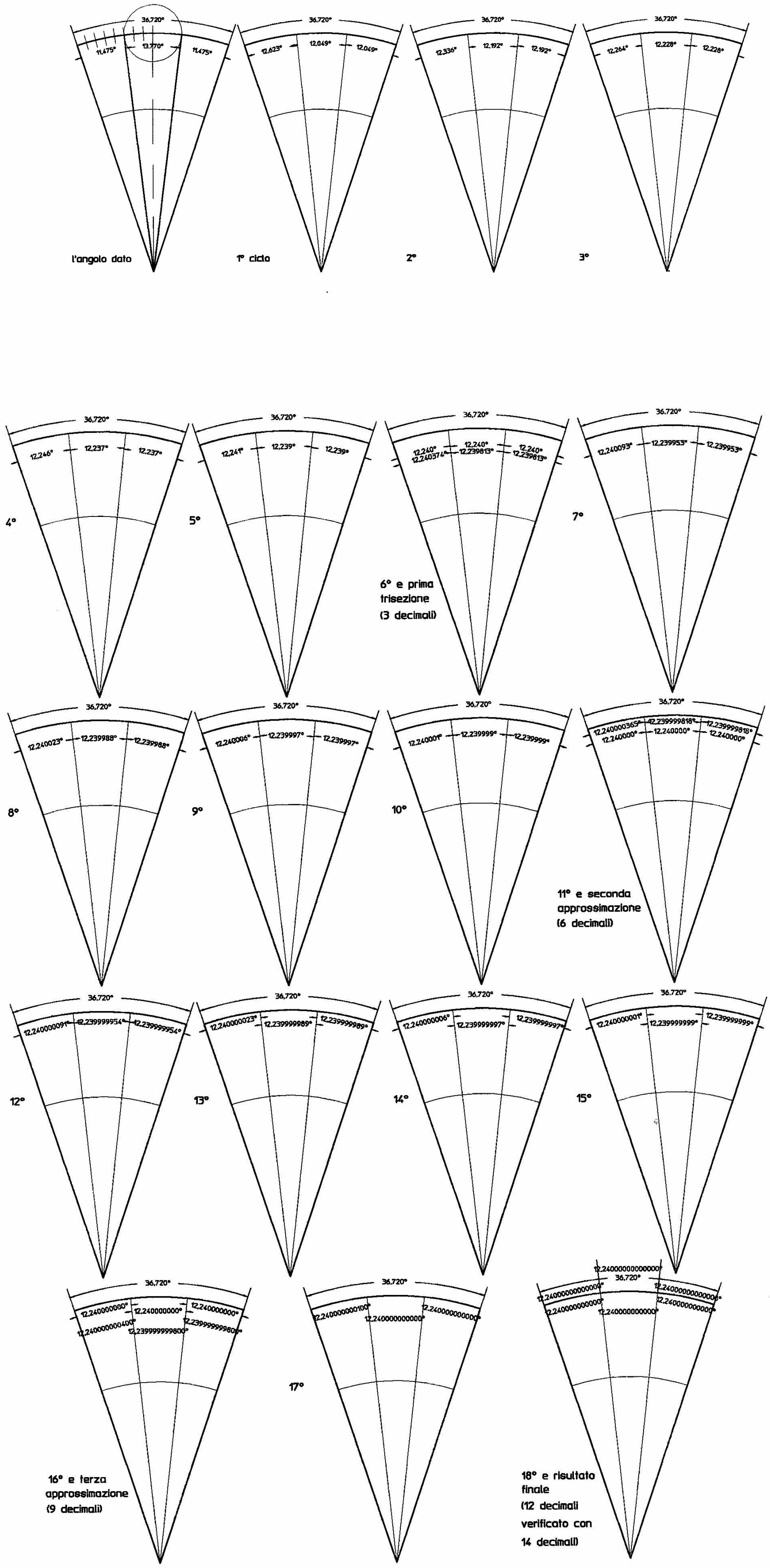

l'angolo dato
1° ciclo
2°
3°
4°
5°
6° e prima trisezione (3 decimali)
7°
8°
9°
10°
11° e seconda approssimazione (6 decimali)
12°
13°
14°
15°
16° e terza approssimazione (9 decimali)
17°
18° e risultato finale (12 decimali verificato con 14 decimali)

FIG. 4

Concludo: quanto precede dimostra, a mio parere, che è possibile dividere qualsiasi angolo in tre parti uguali, utilizzando soltanto riga e compasso, così come si opera quando lo si divide in due, ma con un maggior numero di fasi, o "cicli", come io li chiamo. I procedimenti da me adottati al computer sono serviti soltanto ad accertare, con un misuratore idoneo alla bisogna, l'esattezza del mio metodo che, appunto per la sua ovvietà, data l'evidente analogia con il principio dei vasi comunicanti, non ha bisogno di alcuna dimostrazione geometrica classica.

Il passaggio dal computer al semplice disegno manuale comporta invece ovvie difficoltà quando, ultimato un ciclo oltre il terzo o quarto, le linee di divisione originate dai successivi quasi coincidono e non si può, quindi, continuare a disegnare sopra di esse anche cancellandole successivamente. Penso che questo problema possa superarsi facilmente, disegnando ogni ciclo su un diverso foglio di carta trasparente, da sovrapporre a quello su cui è stato tracciato il ciclo precedente. Per l'esecuzione su carta consiglio di effettuare le divisioni in due con il metodo degli archi incrociati. Disegnando a mano, infatti, è più semplice servirsi del compasso che incrociando le diagonali. Altra difficoltà è costituita dall'impossibilità di eseguire le misurazioni spinte che può eseguire il computer.

Anche questa difficoltà è però superabile. Nelle numerose trisezioni da me sperimentate, sempre partendo da una prima divisione in tre assolutamente arbitraria, e quindi casuale, ho notato che al variare degli angoli corrispondeva una diversa quantità di cicli per raggiungere il risultato finale che, in generale, si otteneva con un massimo di 24 cicli. Ne dedussi, quindi, che operando a mano, e nell'impossibilità di controllare il risultato finale con misurazioni di precisione, bastasse fermarsi al 24° ciclo per essere sicuri di avere diviso in tre parti uguali l'angolo dato. A questo punto decisi di partire sempre da una divisione iniziale uguale per tutti gli angoli: basta tracciare con centro nel vertice dell'angolo, e raggio di lunghezza arbitraria, l'arco che conclude il corrispondente settore circolare, nel quale opereremo per l'esecuzione dei cicli. Per tracciare i due divisori delle terze parti iniziali dell'angolo, dividiamo quest'ultimo in 16 parti uguali e raggruppiamone sei in un angolo centrale. E' ovvio che così operando otterremo sempre due angoli estremi uguali di cinque parti ciascuno ed uno centrale di sei parti, ma il rapporto tra queste due grandezze diverse sarà sempre uguale a 1,20. Tale costante uguaglianza comporta, in pratica, che la trisezione di tutti gli angoli si completa nello stesso numero di cicli che, verificati nell'operazione al computer aumentando man mano i controlli di due o tre decimali, non supera mai il numero di 18 - 19 cicli, con verifica finale di 12 - 14 decimali al massimo. Tutto ciò è illustrato nella prima figura in basso di pagina 3 (preparazione della costruzione di partenza) mentre gli sviluppi pratici sono riportati nella successiva pagina 4.