"Quaderni di Ricerca in Didattica", n15, 2005.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

EMIL MÜLLER – IL PIÙ GRANDE RAPPRESENTANTE DELLA SCUOLA GEOMETRICA DI VIENNA

Zita Sklenáriková[1]

Riassunto. *Nell' articolo sono descritti in brève la vita e il lavoro di Emil Müller – uno dei più grandi rappresentanti della scuola geometrica di Vienna, specialmente nel contesto della modernizzazione dell' istruzione nella geometria descrittiva in occasione della riforma generale dell' educazione in matematica all' inizio del secolo scorso. Senza esitazione possiamo dichiararlo il metodologo e l'organizzatore del sistema di educazione tecnica e anche di quello dell'insegnamento della geometria descrittiva in Austria. L' importanza eccezionale da lui attribuita allo studio post laurea dei candidati all'insegnamento rappresenta una sfida alla ricerca delle moderne direzioni nell'educazione di matematica e di geometria descrittiva all'inizio del 21º secolo.*

Abstract. *In the paper, there is briefly described life and work of Emil Müller, the top representative of the Vienna's geometrical school, namely in the context of the modernization of the instruction in descriptive geometry within the framework of the general reform of the education in mathematics at the beginning of the past century. He can be declared, without hesitation, a metodologist and an organizer of the tecnical and teaching educational system in the sphere of descriptive geometry in Austria. The extraordinary importance that he had assigned to the postgraduate studies of the teaching candidates could be understood as a challenge in our search for modern trends in the education of mathematics and descriptive geometry at the start of the 21th century.*

Introduzione

Emil Müller era uno dei più grandi rappresentanti della scuola geometrica di Vienna. Questa scuola ha raggiunto sotto la sua guida un riconosciménto internazionale. Dai tempi di Monge al primo Ottocènto la geometria descrittiva era insegnata sopratutto nei politècnici[2] e quasi tutti i più grandi di questa disciplina dell'impèro Austro-Ungarico esercitavano la professione d'insegnante nei politecnici dell'odièrna Austria (Vienna, Graz) e Boèmia (Praga, Brno). La personalità di Müller ha naturalmente esercitato un'influènza della geometria descrittiva – mediante i suoi allièvi e seguaci – anche in Ceco-Slovacchia.

Emil Müller nacque il 22 aprile 1861 a Lanškroun, una piccola città tedesca in Boèmia. Dopo la morte di suo padre la famiglia si trasferì a Vienna (1870), dove frequentava la scuola media (reale) inferióre e superióre. Negli anni 1879 – 1883 ha studiato al politècnico di Vienna. Malgrado la necessità di guadagnarsi la vita lavorando frequentava anche lezioni all'università. Dopo il servizio militare (1883–1884) e dopo aver fatto gli esami per l'insegnamento della matematica e della geometria descrittiva esercitava la professione d'insegnante – dapprima nella scuola media superiore e negli anni 1886 – 1890 al politècnico di Vienna. Frattanto si era sposato felicemente con Gizela Unger, la sorella del suo collèga Oskar Unger.

L'impossibilità di avere a Vienna un posto fisso d'insegnante ha costretto Müller ad accettare il posto nella nuova scuola industriale a Königsberg[3] in Prussia. Vi ha passato dieci fecondi anni. I contatti con eccellènti professori di matematica (*D. Hilbert, O. Hölder, F. Lindemann, F. Mayer, H. Minkowski, A. Schönflies, P. Stäckel*) – all'università di Königsberg – erano decisivi per la sua carrièra accadèmica. A Königsberg ha concluso la sua tesi dottorale ("*La geometria delle sfère orientate secondo i metodi di Grassmann*", 1898) e si è abilitato (1899).

Nel 1902 Müller ha accettato il posto del professore ordinario per la geometria descrittiva al politècnico di Vienna; vi esercitava questa professione per lunghi 25 anni sino alla morte. Negli anni

---

[1] RNDr. Zita Sklenáriková, PhD, Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky , FMFI UK. Mlynská dolina, 842 48 Bratislava (Slovakia). E-mail: zita.sklenarikova@fmph.uniba.sk.
This work was supported by Grant Agency VEGA 1/0262/03
[2] In Austria sino ai giorni nostri l'educazione degli insegnanti della geometria descrittiva ha in cura l'Università tècnica.
[3] Più tardi Kaliningrad in Russia

1905–1907 era il decano del reparto di ingegneria civile e negli anni 1912–1913 divenne direttor del politècnico.

Dal 1906 Müller era membro-corrispondènte e dal 1916 membro ordinario dell'Accadèmia delle scienze a Vienna, dal 1918 membro dell' Accadèmia dell'Imperatóre di scienze naturali a Halle (Leopoldina). Nel 1925 gli conferirono il dottorato "onoris causa" al politècnico di Karlsruhe. Negli anni 1918–1921 membro del comitato della Società tedesca dei matematici e poi prèsidente della Società di matematica a Vienna.

Emil Müller morì il 1 settembre 1927 a Vienna.

Le òpere scientifiche e pedagogiche di Emil Müller possono essere suddivise in tre parti:

– La teoria dell'estensione di Grassmann;
– La teoria relativa delle superficie;
– La geometria descrittiva e il suo insegnamento.

Lo scopo di questo articolo è l'analisi dei lavori dedicati alla geometria descrittiva di Müller, quelle dell'insegnamento, delle metodiche. Benché i problèmi da lui risolti in altri rami sono una parte considerevole della sua attività scientifica, non saranno menzionati in questo lavoro. L'elenco dei lavori (in tutto 54) si puo trovare in [6].

1 I libri di testo sulla geometria descrittiva

I libri di testo della geometria descrittiva contengono la parte essenziale dell'opera scientifica di Müller. Possiamo quindi dedicarci soltanto all'analisi di questi libri.

"*Il libro di testo sulla geometria descrittiva per i politecnici*" [1] è nato dalle lezioni introduttive per gli studenti di ingegneria civile e d'architettura. Il testo è diviso in due volumi che sono usciti separatamente, per tre ristampe.[4] La caratteristica fondamentale del libro è la stretta connessione della teoria e le sue applicazioni nella tècnica. Secondo l'autore l'immaginazione spaziale (necessaria per un ingegnere) dovrebbe essere coltivata proprio nell'insegnamento della geometria descrittiva. Nella collaborazione con gli ingegneri afferenti alla sua càttedra Müller ha pubblicato un estéso materiale d'applicazione "*I problèmi d'applicazione tecnici per la geometria descrittiva*" [2] che è uscito nei sei quaderni (1916–1926).

Oltre a questa letteratura scolastica E. Müller ha dedicato molte forze creative alla formazione degli insegnanti in geometria descrittiva e al suo miglioramento. A questo scopo ha fondato *Il seminario per la geometria descrittiva* e ha realizzato un ciclo di quattro anni di lezioni:

– I metodi di rappresentazione della geometria descrittiva;
– La ciclografia e la proiezione stereografica;
– Lo studio costruttivo delle superficie rigate;
– Lo studio costruttivo delle superficie elicoidi e delle superficie di traslazione.

In queste *lezioni* "*speciali*" Müller spesso inseriva i risultati della propria ricerca allo scopo di istruire gli studenti nei metodi della ricerca scientifica e di incoraggiarli sui loro lavori.

Cito dai ricordi di E. Kruppa:

"Nella personalità di Emil Müller si accoppiavano – in modo eccezionale – il talènto per la ricerca e il compiacimento della professione di insegnante. Egli riusciva ad attirare l'uditòrio degli studenti che prendevano parte alle lezioni, anche da insegnanti di scuole medie …"

Tre di questi quattro cicli di lezioni sono stati pubblicati negli anni 1923–1931 da E. Kruppa [3] e da J. Krames [4], [5]. Ricordiamo i tèmi più interessanti.

Il primo libro "*I metodi di rappresentazione lineari*" ha tre tomi: a) *La proiezione centrale*; b) *I principi di una rappresentazione lineare*; c) *I metodi di rappresentazione caratteristici*.

Il tomo più rilevante è il secondo. Vi si studiano i metodi di rappresentazione lineari secondo tre principi: - *Il principio del metodo delle due traccie*; - *Il principio del metodo delle due immagini*; - *Il*

[4] Le ristampe 4 – 6 sono uscite ancora negli anni 1936, 1948 e 1961 a Vienna per mèrito di E. Kruppa, lo studente e il seguace di Müller.

principio di assonometria. Il contributo fondamentale è che tutti i problèmi della geometria descrittiva nei metodi di rappresentazione appartenenti allo stesso principio si possano risolvere *uniformamente* (per esempio nella soluzione dei problèmi di posizione persino usando la stessa configurazione delle rètte).

1.1 Il principio del metodo delle due traccie

Nota **1.** Lo spazio di base in tutti paragrafi sara $\bar{E}_3$ su $\boldsymbol{R}$.
2. Un elemento fondamentale dello spazio è la retta.

Il sistèma di riferimento: – il primo piano di traccia (σ_1);
– il secondo piano di traccia (σ_2); $\sigma_1 \neq \sigma_2$;
– il piano di disegno (π); π – arbitrario, non ideale[5];
– il centro di proiezione (O); O – arbitrario, $O \notin \sigma_i$ (i = 1, 2), $O \notin \pi$

Sia a [ε] una retta [un piano] qualunque. Chiameremo

- la prima traccia della retta a [del piano ε] : $A_1 = a \cap \sigma_1$ [$e_1 = \varepsilon \cap \sigma_1$];
- la seconda traccia della retta a [del piano ε] : $A_2 = a \cap \sigma_2$ [$e_2 = \varepsilon \cap \sigma_2$]; (Figura 1)

Nota. La proiezione centrale di una figura F dal centro O al piano π viene indicata F^c.

È evidènte che la rappresentazione della retta $a \subset \bar{E}_3$ della coppia ordinata (A_1^c, A_2^c) dei punti del piano π è la biiezione per tutte le rette che non hanno con la retta $s = \sigma_1 \cap \sigma_2$ alcun punto in comune. La retta s si esclude dalla rappresentazione.

In che modo si puo *rappresentare* in questo senso un *punto* dello spazio? Il punto M si puo considerare il centro di un fascio (nello spazio) delle rette passanti per M. Sotto la condizione che il punto M è esterno ai piani σ_i (i = 1, 2) vale

Teorèma **1.** Esiste una sola omologia f_M (nel piano π) che trasforma le proiezioni delle prime traccie di tutte le rette passanti per M nelle proiezioni delle seconde traccie delle rette stesse:

$$f_M : \{{}^iA_1^c\} \mapsto \{{}^iA_2^c\},\ \mathrm{i} \in R' \ (R' \subset \boldsymbol{R})$$

Il punto M^c è il centro e la retta s^c l'asse dell' omologia f_M.[6]

L'affermazione segue dalla collineazione prospettiva tra i piani σ_1, σ_2 col centro M e l'asse s. La relazione tra tutti i punti $M \in \bar{E}_3$ ($M \notin \sigma_1$, $M \notin \sigma_2$) e tutte le omologie f_M del piano π è la biiezione, cio è la omologia f_M puo considerarsi (in questo metodo) per la *rappresentazione* del punto M.

---

[5] Il „punto ideale" rappresenta il „punto di fuga".
[6] f_M è la omotetia, se s^c sia la retta ideale del π cio è nel caso $\pi \parallel \sigma_1 \parallel \sigma_2$ o $s \in \sigma$ ($O \in \sigma$, $\sigma \parallel \pi$). Oltre di ciò per il punto M ($M \neq O$, $M \in \sigma$) f_M sia l'affinità assiale o una traslazione. Nel questo senso il centro O della proiezione è rappresentato dall' identità.

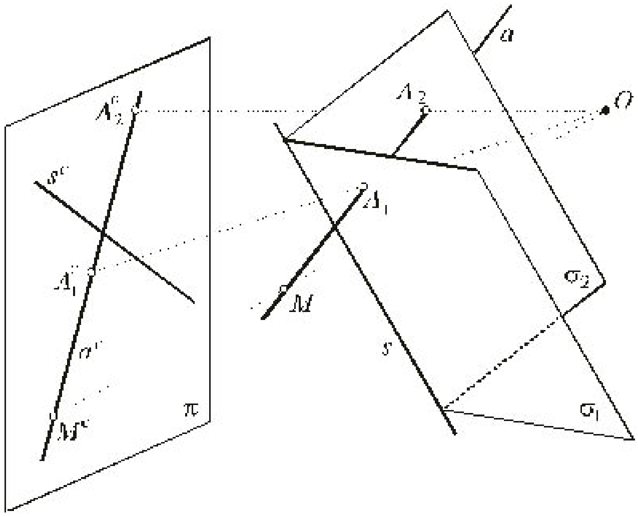

Fig. 1

Analogamente per un piano ε ($s \notin \varepsilon$, $O \notin \varepsilon$) e un punto $M \in \varepsilon$ ($M \notin \sigma_i$) l'omologia f_M trasforma la proiezione della prima traccia di ε nella proiezione della seconda; $f_M : e_1^c \mapsto e_2^c$. Però ogni piano ε non passante per la retta s neanche per il punto O sarà (nel metodo considerato) rappresentato dalla coppia ordinata (e_1^c, e_2^c) delle rette (del piano π) aventi uno solo punto in comune con l'asse s^c di tutte le omologie f_M ($M \in \varepsilon$, $M \notin \sigma_i$). [7]

***Teorèma* 2.** In ogni sistèma di due traccie – riguardo alla soluzione dei problèmi di posizione – l'interezza degli immagini è determinata dalla scelta della retta s^c.

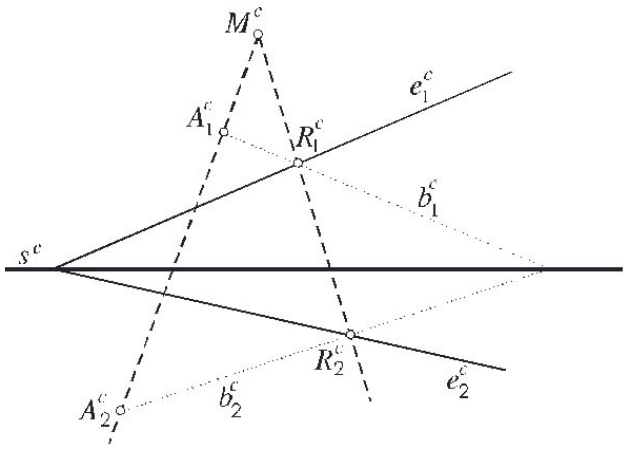

Fig. 2

La figura 2 illustra la soluzione del problèma "*Determinare la posizione della retta* $a = (A_1^c, A_2^c)$ *rispetto al piano* $\varepsilon = (e_1^c, e_2^c)$". Secondo le precedenti considerazioni il problèma si trasforma alla costruzione del centro M^c di tale omologia f_M (con l'asse s^c) che valga:

$$f_M(A_1^c) = A_2^c,\ f_M(e_1^c) = e_2^c.$$

Il significato di spazio della costruzione è evidènte.

[7] Per diverse scelte del sistèma di riferimento si hanno diversi metodi di rappresentazione della geometria descrittiva. Ne si sono occupati per esempio W. Fiedler, Chr. Wiener, G. Peschka, R. Schlesinger.

La soluzione dei problèmi metrici è più complicata. Bisogna conoscere la nozione della *polarità assoluta* cioè le relazioni proiettive delle figure dello spazio $\bar{E}_3$ rispetto alla "*conica assoluta dello spazio*" e le relazioni delle loro proiezioni alla conica rappresentative di questa "circonferenza" immaginaria (non reale) ideale. Le costruzioni nel piano di disegno rende possibili la cognizione seguènte: La proiezione centrale della polarità assoluta al piano π è l'antipolarità rispetto alla circonferenza $k_d = (O^n, d)$ (O^n è la proiezione ortogonale del punto O al piano π e $d = |O\pi|$.[8]

1. 2 Il principio del metodo delle due proiezioni [9]

Malgrado dell' importanza teòrica del metodo trattato nel paragrafo 1.1 la geometria descrittiva risolvendo i problèmi pratici preferisce altri metodi di rappresentazione delle figure di spazio. Per esempio nel metodo di Monge il problèma della trasformazione delle proiezioni ortogonali ausiliari ai due piani (reciprocamente perpendicolari) nel solo unico piano si risolve con l'aiuto del ribaltamento di un piano nell'altro. Dato che questo ribaltamento è equivalènte a una proiezione parallela possiamo passare alla seguente generalizzazione.

Nota. Un' elemento fondamentale dello spazio $\bar{E}_3$ sarà il punto.
Il sistèma di riferimento:

– il primo [secondo] piano ausiliare delle proiezioni (π_1 [π_2]), $\pi_1 \neq \pi_2$;
– il primo [secondo] centro ausiliare della proiezione (O_1 [O_2]), $O_1 \neq O_2$, $O_i \notin \pi_i$;
– il piano principale delle proiezioni (π);
– il centro principale della proiezione (O), $O \notin \pi$, $O \notin \pi_i$ (i = 1, 2). I piani π, π_1, π_2, sono ordinàri (non ideali), i punti O, O_1, O_2 possono essere qualsiasi ordinari o ideali).

Il principio del metodo delle due proiezioni è un principio della rappresentazione di una figura $F \in \bar{E}_3$ (considerata dall' insième dei suoi punti) in cui ogni punto $P \in F$ si proietta dal centro ausiliare O_i della proiezione (al piano π_i) nel punto P_i (i = 1, 2) e in conclusione si proiettano entrambi i punti P_1, P_2 dal centro principale O al piano principale π nei punti P_1', P_2' (Figura 3).

(Naturalmente ci sono punti esclusi dalla rappresentazione: $P \notin \overleftrightarrow{O_1O_2} = o$, $P \neq O$.)
Chiameremo:

– la retta O_1P [O_2P] : *prima* [*seconda*] *retta di proiezione del punto P*;
– il punto P_1 [P_2] : *prima* [*seconda*] *proiezione del punto P* (analogicamente si dice prima [seconda] proiezione della figura F);
– la retta $x = \pi_1 \cap \pi_2 = x_{12}$: *linea di base ausiliare*;
– la coppia ordinata (P_1' , P_2') : *immàgine del punto P*;
– le retta II_1P_1 [I_2P_2] ($I_2 = o \cap \pi_2$, $II_1 = o \cap \pi_1$, $o = \overleftrightarrow{O_1O_2}$) : *prima* [*seconda*] *ordinale ausiliare del punto P*;
– il punto M' (la proiezione del punto $M \in \bar{E}_3$ dal centro O al piano π) : la *proiezione principale del punto M* (analogicamente si dice della proiezione principale di una figura F dello spazio $\bar{E}_3$);
– la proiezione principale della prima [seconda] ordinale[10] ausiliare del punto P: *prima* [*seconda*] *ordinale del punto P*) (analogicamente la retta x' si chiama *linea di base*).

---

[8] La spiegazione esatta dei concetti il lettore li puo trovare in [15].
[9] Possiamo parlare anche del principio delle due immagini.
[10] Per „ordinale“ si intende l'allineamento di punti non coincidenti nell'immagine (riferendoci ad esempio al metodo di Monge).

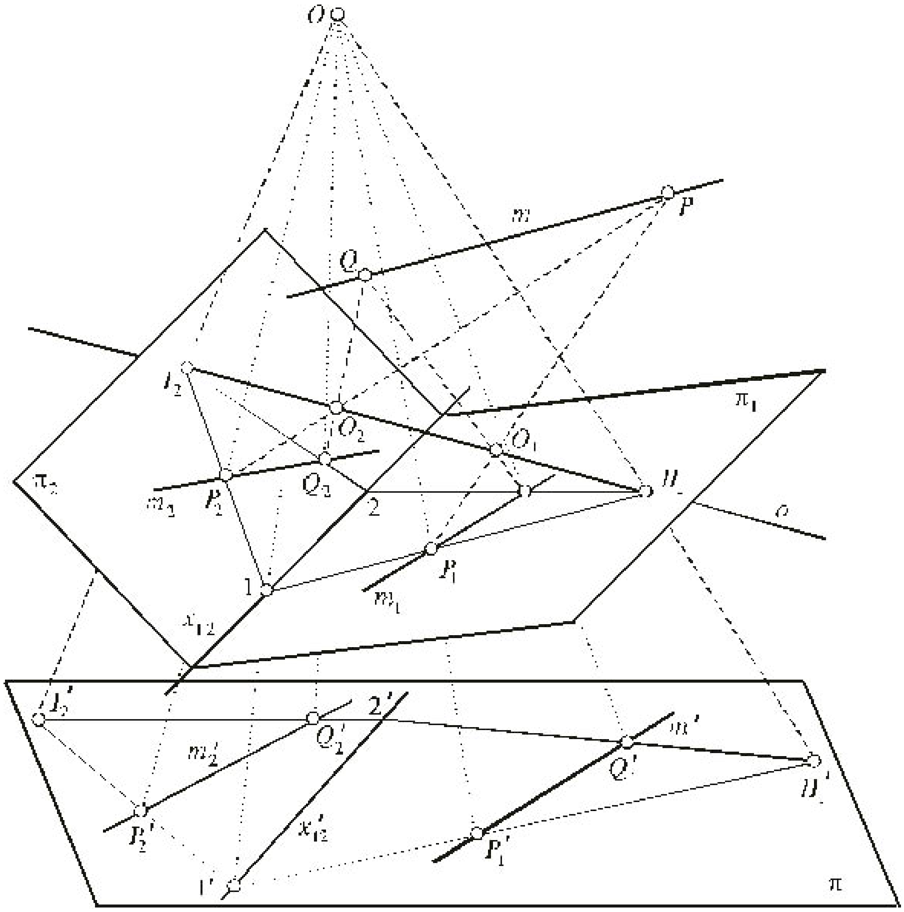

Fig. 3

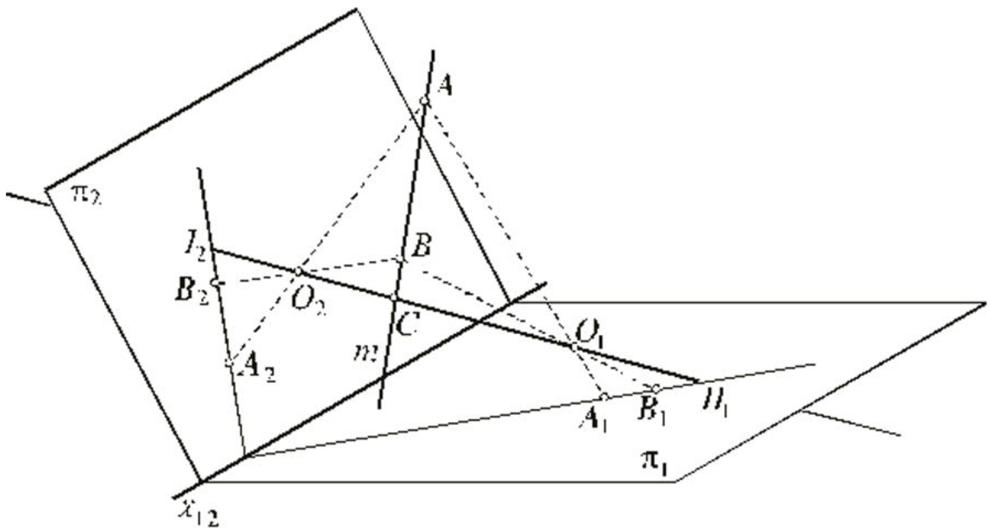

Fig. 4

Considerando prima le relazioni tra le coppie ordinate (P_1, P_2) (con l'aiuto di tre piani: π_1, π_2, $\overleftrightarrow{PO_1O_2}$ e delle figure 3, 4) [11] il lettore puo dimostrarsi il seguènte

[11] Nella figura 3 [4] le rette m, $o = \overleftrightarrow{O_1O_2}$ sono sghembe [incidente].

***Teorèma* 3. a)** L' immagine di un punto $P \in \bar{E}_3$ (con l'eccezione dei punti sopra esclusi) è la coppia ordinata (P_1', P_2') dei punti appartenenti alle rispettive ordinali di due fasci prospettivi (o concentrici proiettivi) delle ordinali nel piano π . **b)** L'immagine di una retta m ($O_i \notin m$, $i = 1, 2$) è la coppia ordinata ($m_1'({}^iP_1')$, $m_2'({}^iP_2')$) (${}^iP \in m$) delle due sèrie proiettive dei punti (appartenenti alle ordinali rispettive). **c)** L'immagine di un piano ε ($O_i \notin \varepsilon$, $i = 1, 2$) è rappresentato dai due insiemi di punti $\pi_1'({}^iP_1')$, $\pi_2'({}^iP_2')$ nella relazione di una collineazione nel piano π. Questa collineazione trasforma le prime ordinali dei punti ${}^iP$ in quelle seconde.

La soluzione dei problèmi di posizione è *uniforme* per qualsiasi scelta amissibile degli elementi di riferimento (cio è della configurazione $\{O_1, O_2, O, \pi_1, \pi_2, \pi\}$). Le figure 5a, 5b illustrano la soluzione del problèma: "*Determinare esplicitamente il punto* $X = (X_1', ?)$ *del piano ABC*. ($A = (A_1', A_2')$, $B = (B_1', B_2')$, $C = (C_1', C_2')$)".

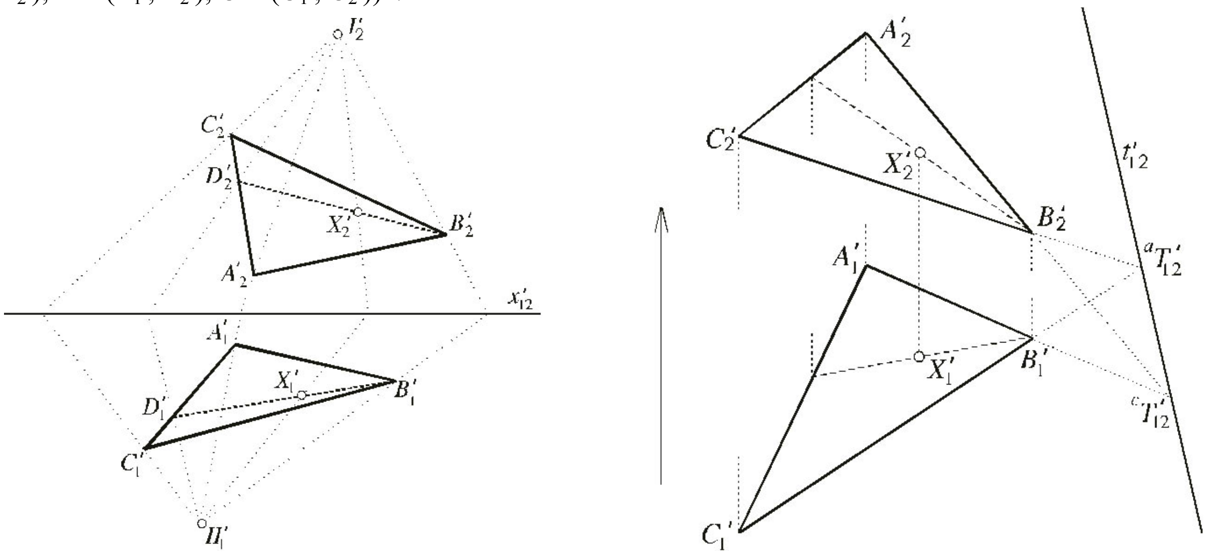

Fig. 5a, b

Nota.

a) Nelle soluzioni dei problèmi di posizione è vantagioso alle volte considerare l'insième di tutti i punti M per cui $M_1' = M_2'$.

b) Per esempio nel caso $O \in o$ i fasci delle ordinali sono *identici*. L'insième di tutti i punti (in a)) consiste di una retta o e da un piano τ. Gli insiemi $\{{}^iP_1'\}$, $\{{}^iP_2'\}$ sono per tutti i punti P di un qualsiasi piano α ($O_i \notin \alpha$, $\alpha \neq \tau$) non ideale in relazione della collineazione prospettiva (omologia) col centro $II_1' = I_2'$ e con l'asse $(\alpha \cap \tau)'$. Per il piano τ si ha l'identità. Nel metodo di Monge questa relazione è l'affinità assiale (Figura 5b).

1. 3 Il principio dell' assonometria

Il metodo d'assonometria è il metodo delle due proiezioni collegato a un tetraèdro di coordinate ortonormale ${}^1OE_xE_yE_z$ (${}^1OE_x \perp {}^1OE_y \perp {}^1OE_z \perp {}^1OE_x$, ${}^1OE_x \cong {}^1OE_y \cong {}^1OE_z$). Per di più $\pi_1 = {}^{\leftrightarrow 1}OE_xE_y$, il piano π (= π_2) interseca tutti gli assi di coordinate, O_1 è un punto di fuga delle rette perpendicolari al piano π e $O = O_2$ è un punto arbitrario ($O \notin \pi_i$, i = 1, 2). Nella pratica tècnica si usa *l'assonometria obliqua* o quella *ortogonale* (cio dipende dalla scelta del punto O (ideale); nel caso $O \in PP'$, $\overleftrightarrow{OP} \perp \pi$ si tratta dell' assonometria ortogonale). Nella figura 6 si ha l'assonometria obliqua.

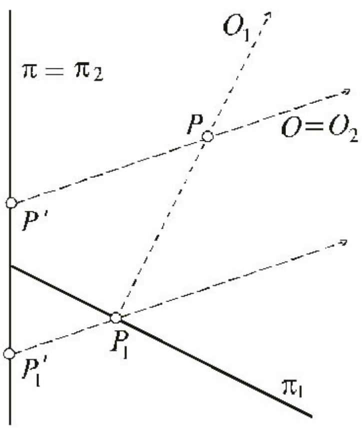

Fig. 6

Qualsiasi libro di testo sulla geometria descrittiva contiene i fondamenti dell'assonometria ortogonale, quindi introduciamo soltanto le teorie fondamentali dell'assonometria obliqua e prospettiva.

Teorèma 4. I vertici di ogni quadrilateraro del piano π si possono considerare come proiezioni parallele dei vertici del tetraedro di una qualsiasi forma data. [12]

Teorèma 5. Ogni configurazione $\{{}^1O^c, (E_x^c E_y^c E_z^c), (X_u^c Y_u^c Z_u^c)\}$ di due triangoli $E_x^c E_z^c E_y^c$; $X_u^c Y_u^c Z_u^c$ prospettivi col centro ${}^1O^c$ della prospettività possiamo considerare per una proiezione centrale dei vertici di un tetraèdro ortonormale ${}^1OE_x E_y E_z$ e dei punti ideali X_u, Y_u, Z_u delle rette coincidenti agli spigoli ${}^1OE_x$, ${}^1OE_y$, ${}^1OE_z$ rispettivamente. (Figura 7)

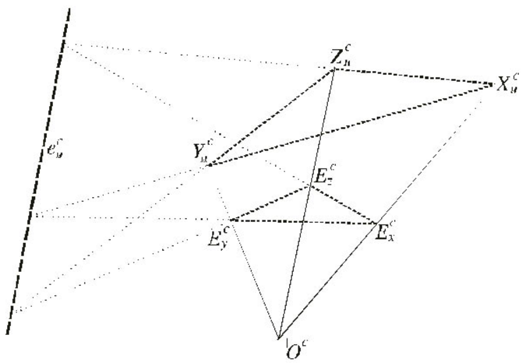

Fig. 7

Nell'ultimo tomo del libro di Müller (già citato) "*I metodi di rappresentazione caratteristici*" possiamo trovare i metodi di rappresentazione della geometria descrittiva più conosciuti nella pratica tècnica (nel primo paragrafo "*Le rappresentazioni lineari solide*") che sono i casi speciali dei principi di rappresentazione introdotti nel quest' articolo. Essi vanno riassunti in brève.

a) *Il metodo di Monge*

[12] Il teorèma di Pohlke-Schwarz. La storia interessante delle dimostrazioni del teorèma si trova in [14].

I piani π, π_2 coincidono, $\pi_1 \perp \pi_2$, O_i è un punto di fuga delle rette perpendicolari al piano π_i (i = 1, 2) e O è il punto di fuga delle rette perpendicolari al piano "d' identità" dei piani π_1, π_2.

$$\Phi\colon \bar{E}_3 \to \pi \times \pi,\ \Phi\colon P \mapsto (P_1', P_2'),\ (P_1'\ P_2' \perp x_{12}') \vee (P_1' = P_2')$$

b) *L' assonometria obliqua* (*ortogonale*)
Il principio d'assonometria (1. 3)

$$\Phi\colon \bar{E}_3 \to \pi \times \pi,\ \Phi\colon P \mapsto (P_1',\ P'),\ P_1'P' \,||\, z' \text{ o } P_1' = P'.$$

c) *Il metodo della proiezione obliqua con un piano ausiliare*
I piani π, π_2 coincidono, $\pi_1 \perp \pi_2$, O_1 è un punto di fuga delle rette perpendicolari al piano π_1 e $O = O_2$ è un punto di fuga (qualsiasi) non giacente nei piani π, π_1. La seconda proiezione P_2 del punto P è nello stesso tempo la proiezione obliqua del P (dal centro O al piano π) e viene indicata P'. Il punto P_1' (cioè la proiezione obliqua del punto P_1) si chiama la pianta obliqua del punto P.

$$\Phi\colon \bar{E}_3 \to \pi \times \pi,\ \Phi\colon P \mapsto (P_1',\ P'),\ (P_1'P' \perp x_1') \vee (P_1' = P')$$

d) *Il metodo della proiezione centrale con un piano ausiliare*
I piani π, π_2 coincidono, $\pi_1 \perp \pi_2$, O_1 è il punto di fuga delle rette perpendicolari al piano π_1 e $O = O_2$ è un punto non ideale (qualsiasi) non coincidente al piano π neanche al π_1. La seconda proiezione del punto P è nello stesso tempo la proiezione centrale del P (dal centro O al piano π) e viena indicata P^c. La proiezione centrale P_1^c del punto P_1 si chiama la pianta centrale (prospettiva) del punto P.

$$\Phi\colon \bar{E}_3 \to \pi \times \pi,\ \Phi\colon P \mapsto (P_1^c, P^c),\ (P_1^c P^c \perp x_1^c) \vee (P_1^c = P^c)$$

e) *La rappresentazione stereoscopica*
Vale: $\pi = \pi_1 = \pi_2$, O_1, O_2 sono dei punti qualiasi non ideali, non coincidenti col piano π e $O_1O_2 \,||\, \pi$.

$$\Phi\colon \bar{E}_3 \to \pi \times \pi,\ \Phi\colon P \mapsto (P', P''),\ (P'P'' \,||\, O_1O_2) \vee (P' = P'' = P)$$

f) *Il metodo della proiezione centrale con una proiezione ortogonale ausiliare*
Vale: $\pi = \pi_1 = \pi_2$, O_1 è il punto di fuga delle rette perpendicolari al piano π e $O_2 = O$ è un punto qualsiasi non ideale e non coincidente al piano π. Se il punto principale (cio è la proiezione ortogonale del centro O al piano π) indichiamo H si ha:

$$\Phi\colon \bar{E}_3 \to \pi \times \pi,\ \Phi\colon P \mapsto (P_1,\ P^c),\ (H \in \overleftrightarrow{P_1 P^c} \vee P_1 = P^c \neq H)$$

(Per tutti i punti ad eccezione dei punti della retta O_2H.)

1. 4 La ciclografia

Il secondo libro delle lezioni speciali di E. Müller "*La ciclografia e la proiezione stereografica*" [4] meriterebbe più alta attenzione che un breve articolo. Mi è sembrato significativo inserire una nota che riguarda applicazioni di questo metodo di rappresentazione della geometria descrittiva. Il principio di ciclografia (una rappresentazione non lineare) è molto semplice. Si tratta di una rappresentazione dell' insième di tutti i punti dello spazio $\bar{E}_3$ alle circonferenze orientate ("*i cicli*") del piano π di disegno.

Müller èra molto speranzoso riguardo la ciclografia, soprattutto in relazione al futuro della geometria descrittiva. In ciclografia ha visto, in primo luògo, il metodo per la derivazione delle nuove qualità delle figure geometriche di spazio dalla geometria delle circonferenze orientate e, al contràrio, il metodo per rivelare le qualità delle figure geometriche (principalmente delle configurazioni delle circonferenze, dei punti e delle rette) dalle figure stereometriche con l'aiuto dei procedimenti e metodi della geometria descrittiva. Accenava alla semplicità affascinante della soluzione dei problèmi della geometria delle circonferenze secondo metodi di geometria descrittiva e cercava instancabilmente i tèmi per la ricerca. Malgrado le sue aspirazioni la ricerca in questo ramo era, più o meno, dall' opera di Müller conclusa. Il libro è uscito nell' anno 1929 poco meno di due anni dopo la morte dell' autore.

La figura seguènte illustra la soluzione del *problèma d'Apollonio* (sulla costruzione di una circonferenza tangente alle tre date). Nel caso generale la soluzione ciclografica sia idèntica con la splendida soluzione di Gergonne [13]. Nel caso particolare (e precisamente nel caso dei centri allineati delle circonference date) il procedimento di Gergonne non da risultati; invece si vede una semplicità meravigliosa della soluzione ciclografica del problèma. (Figura 8)

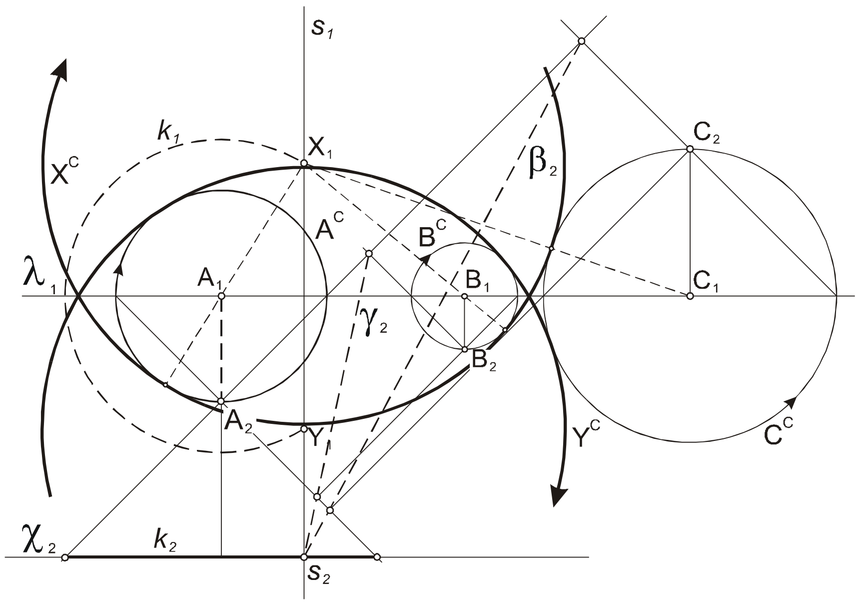

Fig. 8

2 La didattica e la storia della geometria descrittiva

Emil Müller si era interessato dei più nuovi risultati della ricerca scientifica in geometria come anche dei problemi sull'istruzione della geometria descrittiva nelle scuole di tutti i gradi, ma sopratutto si era interessato della metodica dell'istruzione accademica. Senza esitazione possiamo dichiararlo il metodologo e l'organizzatore del sistèma d'istruzione (tecnica e non) in Austria nella geometria descrittiva.

Gli scritti [8]–[12] sono per lo più le conferenze nelle quali Müller reagiva alle problematiche contemporanee. L'articolo [8] è dedicato alla posizione della geometria descrittiva come scienza e al suo insegnamento. Questo problèma era nato – principalmente nei paesi di lingua ufficiale tedesca – all' inizio del secolo scorso durante una riforma scolastica. Secondo Müller prima di introdurre la geometria descrittiva all'università bisognarebbe insegnarla in tutte le scuole medie superiori.[14]

[13] Gergonne, Joseph Diaz (1771 – 1859), il matematico e astrònomo francese. Nella soluzione del problèma d'Apollonio (planimetria) Gergonne ha usato il concetto di polarità in un piano.

[14] In Austria questa condizione è stata rilevante in quasi tutte le scuole.

Inoltre, egli sosteneva che tutti gli insegnanti di matematica dovessero frequentare lezioni ed esercizi costruttivi di geometria descrittiva.

L’ insegnamento alla geometria descrittiva ha un legame strettissimo con la formazione degli insegnanti di questa disciplina. Abbiamo già notato che Emil Müller si era impegnato nella formazione degli insegnanti argomentandone la necessità:

“Soltanto le persone bene istruite e di ampie vedute riusciranno ad adempire la missione importante di insegnanti – *instillare e propagare l’amore per l’idea del progresso* nella scuola ma anche in tutte altre attività.”

Nell’ anno 1911 a Müller gli fu chiesto di elaborare un rapporto sull’insegnamento della geometria descrittiva nei politecnici austriaci. Era una parte del *Rapporto sull’ istruzione matematica in Austria* per la Commissione Internazionale sull’ınsegnamento delle Matematiche [10]. Lo studio di Müller (87 pagine) è prezioso dal punto di vista storico. Possiamo trovarci l’elenco delle càttedre di geometria (con relativi professori) descrittiva di tutti i politècnici in Austria (dalle origini sino al primo decennio del secolo scorso), l’elenco delle lezioni e degli esercizi costruttivi generali, quella delle lezioni, esercizi e seminari speciali, il numero degli studenti, i piani di studi, il programme d’insegnamento, l’organizzazione degli esami (d’ ammissione, semestrali, conclusivi, i temi dei lavori conclusivi, ecc.). La conclusione è dedicata ai progetti di riforma.

Alla storia della geometria descrittiva e della matematica è dedicato lo scritto [12] e in modo parziale quello [11].

Concludendo riflettiamo sull’attualità delle parole anticipatrici di Emil Müller:

“A mio parere lo scopo della riforma della scuola é basato sul fatto che lo spirito scientifico prenda la figura dell’insegnante, spirito scientifico moderno e con risvolti pedagogici – nella misura piú alta possibile – e nell’ incorraggiare gli insegnanti nel loro entusiasmo per questa professione faticosa ma belissima.”

“Da parte dell’amministrazione scolastica, bisognarebbe métter l’accènto per elevare il rispetto della professione d’insegnante – anche riguardo all’aspetto economico – ma è necessario concentrarsi sull’istruzione e sulla scelta dei futuri insegnanti.”

(Emil Müller)

Bibliografia

[1] MÜLLER, E. *Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen*. Band I. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner, 1908, 1918, 1920; Band II. Leipzig u. Berlin: B. Teubner, 1916, 1919, 1923.
[2] MÜLLER, E. *Technische Übungsaufgaben für darstellende Geometrie*. Wien-Leipzig: F. Deuticke, Heft I., II., III. (1910), IV. (1911), V. (1920), VI. (1926).
[3] MÜLLER, E., KRUPPA, E. *Die linearen Abbildungen*. Leipzig u. Wien: F. Deuticke, 1923.
[4] MÜLLER, E., KRAMES, J. *Die Zyklographie*. Leipzig u. Wien: F. Deuticke, 1929.
[5] MÜLLER, E., KRAMES, J. *Konstruktive Behandlung der Regelflächen*. Leipzig und Wien: F. Deuticke, 1931.
[6] KRUPPA, E. *Emil Müller*. In Jahrsbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung XLI, Heft 1/ 4, Leipzig: B. G. Teubner, 1931.
[7] MÜLLER, E. *Zur Frage der Bezeichnungsweise in der darstellenden Geometrie*. In Zeitschrift Math. Phys. XLIX, Wien, 1903. (s. 89 – 92)
[8] MÜLLER, E. *Anregungen zur Ausgestaltung des darstellend-geometrischen Unterrichts an technischen Hochschullen und Universitäten*. In Jahrsbericht der Deutschen Mathematiker- Vereinigung XIX, Heft 1, Leipzig: B. G. Teubner, 1910.
[9] MÜLLER, E. *Die Heranbildung der Lehramtskandidaten für darstellende Geometrie und die Reform der Prüfungsordnung*. In Zeitschrift "Österr. Mittelschule", XXV. Heft I., Linz: k. u. k. Heftdruckerei, 1911. (s. 5 – 18)
[10] MÜLLER, E. *Der Unterricht in der darstellenden Geometrie an den technischen Hochschulen*. In Berichte über den mathematischen Unterricht in Österreich, (IMUK), Heft 9, Wien: K. Hof- und Staatsdruckerei, 1911.
[11] MÜLLER, E. *Das Abbildungsprinzip*. Antrittsrede für das Jahr 1912/1913 gewählten Rektors der k. k. Techn. Hochschule in Wien. Wien: Verlag der k. k. Techn. Hochschule, 1912.
[12] MÜLLER, E. *Geschichte der darstellende Geometrie, ihre Lehre und Bedeutung an den Technischen Hochschulen Oesterreichs*. In Zeitschrift des Österr. Ingenieur- und Architekten – Vereines, Heft 10, 13, 17, Berlin-Wien:Urban & Schwarzenberg, 1919.
[13] SCHMID, TH. *Emil Müller*. In Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 8. Wien, 1928.
[14] LORIA, G. *Storia della Geometria descrittiva*. Milano: Ulrico Hoepli, 1921.
[15] ČIŽMÁR, J. *Grupy geometrických transformácií*. Bratislava: Alfa VTEL, 1984.
[16] SKLENÁRIKOVÁ, Z. *Z dejín deskriptívnej geometrie v Rakúsko-Uhorsku*. In Matematika v proměnách věků II, edícia Dějiny matematiky, zv. 16, Praha: Prometheus, 2001, s. 14 – 45, ISBN 80-7196-218-X.