

***Influenza dei registri linguistici  
nell’enunciato di un problema sui processi  
di risoluzione adottati dagli alunni del secondo  
biennio della scuola elementare***

Francesca Alongi<sup>1</sup>

**Riassunto**

In questo testo si indaga sull’utilizzo e sulla comprensione di rappresentazioni linguistiche differenti negli alunni del secondo biennio della scuola primaria (allievi di 8 –10 anni), e dell’influenza che tali rappresentazioni hanno nella risoluzione di una situazione – problema.

Nella prima parte verrà affrontata una questione relativa agli ostacoli di origine didattica nell’apprendimento della matematica nella scuola primaria, in particolare, verranno esaminati gli ostacoli dipendenti dal linguaggio e l’importanza che riveste la visualizzazione, ovvero il ruolo delle immagini (disegni, diagrammi, rappresentazioni grafiche, ect.).

Una seconda parte sarà dedicata al ruolo della rappresentazione semiotica nell’attività matematica, facendo riferimento agli studi di semiotica e alle ricerche sui registri linguistici.

Infine, un’ultima parte è riservata alla descrizione dell’esperienza di ricerca, nelle sue tre fasi sperimentali, supportata dai relativi risultati.

Parole – chiave: *registro linguistico, lingua naturale, linguaggio figurativo, linguaggio tabulo – relazionale, linguaggio algoritmico – procedurale, leggibilità di un testo matematico.*

**Abstract**

In this text it is inquired on the use and the understanding of different linguistics representations in the pupils of according to biennium of the primary school (the students of 8 -10 years), and of the influence that such representations have in the resolution of one situation - problem. In first part it will come faced a relative issue to the obstacles of didactic origin in the learning of the mathematics in the primary school, in particular, they will come examines the obstacles employee from the language and the importance that cover the visualization, that is the role to you of the images (designs, diagrams, graphical representation, ect.).

---

<sup>1</sup> Laureata in Scienze della Formazione Primaria presso la Facoltà di Scienze della Formazione dell’Università di Palermo. Lavoro eseguito nell’ambito della sua tesi di laurea, Giugno 2005.

A second part will be dedicated to the role of the semiotics representation in the mathematical activity, making reference to the studies of semiotics and the searches on the linguistics registries. Finally, last part is reserved to the description of the search experience, in its three is made experiences them, supported from the relatives results.

Words - key: linguistic registry, natural language, figurative language, tabular – relational language, algorithmic-procedural language, readability of a mathematical text.

### **Resumè**

Dans ce texte s'enquête sur l'utilisation et sur la compréhension de représentations linguistiques différents dans les élèves de la seconde période de deux ans de l'école primaire (des élèves de 8 -10 ans), et de l'influence que tels représentations ont dans la résolution d'une situation - problème. Dans la première partie elle sera affrontée une question relative aux obstacles d'origine didactique dans l'apprentissage des mathématiques dans l'école primaire, en particulier, seront examinés les obstacles employé du langage et l'importance qui revêt la visualisation, ou bien le rôle des images (projets, diagrammes, représentations graphiques, ect.).

Une deuxième partie sera dédiée au rôle de la représentation sémiotique dans l'activité mathématique, en faisant référence aux études de sémiotique et aux recherches sur les registres linguistiques. Finalement, une dernière partie est réservée à la description de l'expérience de recherche, dans ses trois phases expérimentales, supportée des relatifs résultats.

Mots - clé : *registre linguistique, langue naturelle, langage figuratif, langage tabulaire - relationnel, langage algorithmique - procédurier, lisibilité de un texte mathématique.*

### **1.0. Introduzione**

Perché avviare un'indagine di tipo sperimentale sul ruolo delle rappresentazione semiotiche nell'apprendimento della matematica?

La scelta dell'argomento di indagine è stata dettata da una riflessione personale circa una tematica molto ampia, legata agli ostacoli relativi all'apprendimento della matematica, in primo luogo ostacoli di natura linguistica.

Tra le ipotesi di partenza del lavoro sperimentale si pone come obiettivo fondamentale quello di indagare sull'utilizzo e sulla comprensione di rappresentazioni linguistiche differenti durante la risoluzione di una situazione problematica, negli alunni del secondo biennio della scuola primaria.

Lo scopo del lavoro è quello di dimostrare che l'utilizzo “spontaneo” di una modalità di rappresentazione da parte del campione considerato è influenzata fortemente dal contratto didattico, quindi dalle richieste esterne che, implicitamente, modificano i processi di risoluzione messi in atto.

Si vuole porre l'attenzione sulle strategie e i procedimenti messi in atto da tali alunni nel risolvere le situazioni-problema proposte e verificare in che modo un registro linguistico influenza l'interpretazione dei dati e le successive rappresentazioni da parte degli alunni. Infine si cercherà di valutare quale grado di difficoltà implica l'utilizzo di una rappresentazione semiotica piuttosto che un'altra nella comprensione di un testo matematico.

### **1.1. Ostacoli e fallimenti: linguaggi e difficoltà nell'apprendimento della matematica**

L'apprendimento della matematica non è sempre un processo semplice, lineare. È caratterizzato da una serie di ostacoli di diversa entità, riconducibili sia alla natura della disciplina che ad altri fattori.

Il linguaggio matematico è caratterizzato da una forte astrazione, dal momento che gli oggetti matematici sono per loro natura astratti, non riconducibili ad oggetti concreti: la concettualizzazione di un oggetto matematico, quindi, deve necessariamente passare dall'acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche (Duval, 1993).

Il linguaggio non è soltanto una sorgente di difficoltà ma gioca un ruolo fondamentale nei processi di apprendimento.

Sono caratteristiche fondamentali dell'attività matematica l'astrazione, la generalizzazione e la simbolizzazione, operazioni mentali tipiche dell'attività razionale che serve a fornirci un modello generale, concettuale e simbolico, della realtà fisica.

Alla luce di tale riflessione possiamo interpretare in modo nuovo le difficoltà solitamente riscontrate nell'apprendimento della matematica, facendo riferimento alla classificazione degli ostacoli che possono rendere difficile il superamento delle difficoltà nell'apprendimento della matematica, proposta da G. Brousseau (1983), il quale individua:

1) *Ostacoli di origine ontogenetica*: tali ostacoli dipendono dai limiti neurofisiologici dell'allievo, che possono influenzare negativamente il rendimento scolastico;

2) *Ostacoli di origine didattica*: dipendono dal sistema educativo adottato, dalle scelte operate dall'insegnante, quindi proprio all'insegnante spetta il compito di limitare il più possibile l'influenza di questo genere di ostacoli;

3) *Ostacoli di natura epistemologica*: dipendono dalla natura della disciplina, e dunque sono inevitabili.

Una delle principali questioni connesse agli ostacoli di origine didattica è quella inerente al linguaggio utilizzato e alla comprensione di quest'ultimo.

Il problema della comprensibilità di un testo scritto è uno degli ostacoli più evidenti: l'enunciato di un problema, il testo di un esercizio, una spiegazione dell'insegnante, esprimono, mediante frasi e parole, termini tratti dal linguaggio matematico e non sempre la comprensione di un concetto matematico veicolato

dal linguaggio scritto è immediata. La leggibilità<sup>2</sup> di un testo matematico (ad es. dell'enunciato di un problema) è determinata da alcune variabili caratteristiche degli enunciati dei problemi dati in lingua naturale, le quali hanno una forte incidenza sul trattamento del testo da parte dell'allievo, svolgendo il ruolo di facilitatore o di ostacolo nell'elaborazione della soluzione. Tra queste variabili<sup>3</sup>, le più evidenti sono la complessità sintattica, la densità dell'enunciato, la punteggiatura, le strutture sintattiche impiegate, l'ordine delle informazioni fornite, la differenza tra la forma in cui le informazioni sono date e quella in cui le si deve trattare nella risoluzione, il grado di esplicitazione degli oggetti intermedi utili alla risoluzione del problema.

Il linguaggio può diventare un ostacolo supplementare all'acquisizione di conoscenze matematiche. La componente linguistica è un fattore preponderante in matematica, anche se a volte viene sottovalutato: la capacità di estrarre da un testo matematico le informazioni pertinenti rispetto alla risoluzione dello stesso, è mortificata dalla struttura dell'enunciato, dal momento che esso contiene solo le informazioni necessarie (e solo quelle vanno utilizzate, senza escluderne nessuna) per giungere alla soluzione del problema.

Questa è una vera e propria clausola didattica, come la definisce B. D'Amore (1995), che spinge il bambino dalla scuola elementare in poi ad utilizzare esclusivamente i dati numerici del testo nell'ordine in cui essi si presentano<sup>4</sup>.

## **1.2. Il ruolo della visualizzazione**

Nell'apprendimento e nell'insegnamento della matematica, oltre all'espressione linguistica, svolge un ruolo importante la visualizzazione.

Per esprimere un contenuto matematico, spesso si utilizzano non soltanto parole o appositi simboli, ma anche disegni, schemi, diagrammi, immagini.

Insieme alle altre modalità di rappresentazione semiotica, le rappresentazioni grafiche sono molto utili per esprimere un contenuto matematico, e quindi per essere in grado di apprenderlo.

---

<sup>2</sup> Per leggibilità si intende “il grado di difficoltà provata da un lettore che cerchi di comprendere un testo” (A. Gagatsis, 1995, pag. 139).

<sup>3</sup> Si tratta delle variabili redazionali, indicate dalla ricercatrice francese Colette Laborde nell'articolo “Occorre imparare a leggere e scrivere in matematica?” *La matematica e la sua didattica* n° 2, 121-135 (1995).

<sup>4</sup> Per quanto riguarda il contratto didattico, come lo definisce G. Brousseau quando parla di quell’:  
”Insieme dei comportamenti dell’insegnante che sono attesi dall’allievo e l’insieme dei comportamenti dell’allievo che sono attesi dall’insegnante...”, esso è costituito da regole implicite, stabilite dai fatti. Un esempio:

- Ogni problema ha una soluzione e una sola;
- Bisogna utilizzare tutti i dati numerici dell'enunciato nell'ordine in cui vengono dati;
- L'allievo deve pensare ad applicare le operazioni che si stanno studiando;
- L'allievo deve arrivare ad ogni costo alla soluzione.

E. Fischbein (1993), in uno studio dedicato specificamente alla rappresentazione visuale di oggetti matematici ed alla sua importanza nella didattica della matematica, espone la “teoria dei concetti figurali”.

Fischbein sottolinea:

*«L'integrazione delle proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie, con la predominanza dei contenuti concettuali su quelli figurali, non è un processo naturale. Essa dovrebbe costituire una continua, sistematica, principale attività del docente».*

Introducendo il termine “concetto figurale”, Fischbein parla di una « *fusione tra concetto e figura*» che porta alla formazione ed all'apprendimento del contenuto matematico in questione.

La costruzione dei concetti figurali, nella mente dello studente, non è, tuttavia, un processo cognitivo frutto dell'interpretazione spontanea dell'immagine: è necessario l'accostamento adeguato di diverse forme di rappresentazione per giungere alla comprensione.

La visualizzazione è didatticamente molto importante, ma non deve essere considerata concettualmente esclusiva.

Duval (1993) sottolinea l'indispensabilità della varietà dei possibili registri rappresentativi, ridimensionandone il ruolo:

*«È l'oggetto rappresentato che importa, e non le sue diverse rappresentazioni semiotiche possibili... La distinzione tra un oggetto e la sua rappresentazione è dunque un punto strategico per la comprensione della matematica».*

È da questa considerazione che voglio partire per introdurre l'argomento successivo, che costituirà una trattazione più ampia circa il concetto di “registro linguistico” e la coordinazione di diverse modalità di rappresentazione semiotica.

## **2.0. Registri di rappresentazione semiotica e noetica nella didattica della matematica**

Dal momento che gli oggetti matematici non sono direttamente accessibili alla percezione, in quanto astratti, è necessario ricorrere a diverse rappresentazioni semiotiche per comprenderli, giungendo in tal modo alla concettualizzazione. La varietà dei possibili registri di rappresentazione semiotica<sup>5</sup> è indispensabile, e addirittura inevitabile, come sostiene Duval (1993):

*«Il funzionamento cognitivo del pensiero umano si rivela inseparabile dall'esistenza di una diversità di registri semiotici di rappresentazione. Se chiamiamo “sémiosis” l'apprendimento o la produzione di una rappresentazione*

---

<sup>5</sup> Secondo Duval un registro è un sistema *semiotico* di rappresentazione. Ferrari P.L. intende il concetto di registro con un'accezione differente: il registro è una varietà linguistica basata sull'uso. Più in generale, è una costruzione che collega la situazione simultaneamente al *testo*, al sistema *linguistico* e al sistema sociale. Un registro si forma per selezione delle risorse linguistiche disponibili a un soggetto, in relazione agli usi che intende farne.

*semiotica e “noésis” l’apprendimento concettuale di un oggetto, dobbiamo affermare che la “sémiosis” è inseparabile dalla “noésis”».*

L’acquisizione concettuale di un oggetto matematico passa necessariamente attraverso l’acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche. Da qui ne deriva che “non c’è noetica<sup>6</sup> senza semiotica<sup>7</sup>”, non c’è pensiero senza attività rappresentativa. Quindi, il soggetto deve necessariamente ricorrere ad una pluralità di sistemi semiotici, coordinandoli in modo funzionale alla comprensione.

La questione dei rapporti fra sviluppo del pensiero e processi di comunicazione sembra collegarsi ampiamente al rapporto noetica/semiotica.

Duval distingue le rappresentazioni mentali da quelle semiotiche. Le rappresentazioni mentali sono il risultato di un processo di interiorizzazione delle rappresentazioni semiotiche<sup>8</sup>. La disponibilità di più sistemi semiotici permette diverse rappresentazioni di uno stesso oggetto, il che arricchisce le capacità cognitive dei soggetti e le loro rappresentazioni mentali.

La scuola di G. Lakoff<sup>9</sup> di colloca su posizioni opposte: l’attività linguistica è il riflesso di quella cognitiva e dipende strettamente da questa.

Gli oggetti matematici sono costruiti attraverso l’attività semiotica, cioè attraverso rappresentazioni linguistiche, molteplici e complementari, che aiutano a distinguere l’oggetto dalla sua rappresentazione.

L’ampia letteratura in materia di conversione e trattamento dei registri semiotici, che fa capo a Raimond Duval, e le numerose ricerche nel settore, nascono per tentare di capire qual è il ruolo del segno, del simbolo, nella concettualizzazione<sup>10</sup>.

Elemento centrale per la costruzione di concetti è l’uso funzionale del segno<sup>11</sup>. Un sistema simbolico è un registro rappresentativo che interviene nella concettualizzazione, un sistema di segni che permette di adempiere alle funzioni meta-linguistiche di comunicazione, trattamento e di oggettivazione.

---

<sup>6</sup> Per “noetica” si intende l’acquisizione concettuale di un oggetto. Per Platone la noetica è l’atto di concepire attraverso il pensiero, per Aristotele costituisce l’atto stesso di comprendere concettualmente.

<sup>7</sup> Per “semiotica” si intende l’acquisizione di una rappresentazione realizzata per mezzo di segni. La semiotica include lo studio delle *lingue* e di altri sistemi di segni che lingue non sono, come ad esempio le notazioni *simboliche* o i colori di un semaforo.

<sup>8</sup> Vygotskij sostiene che l’interiorizzazione è un processo che consiste nel trasformare i comportamenti esteriorizzati in processi intellettuali interni (Vygotskij, 1992).

<sup>9</sup> Lakoff e Núñez (1997), opera citata e commentata all’interno dell’articolo “*Matematica ed educazione: il ruolo fondamentale dei linguaggi*”, parte I, di Ferrari P.L. Lakoff rifiuta l’indipendenza della grammatica da fattori come significati, contesti, cultura, esperienza corporea, metafore: per lui i linguaggi sono manifestazioni di superficie di processi cognitivi profondi. Ne deriva che la comunicazione non è ha un ruolo rilevante nello sviluppo del pensiero e quindi dell’educazione.

<sup>10</sup> Per “concettualizzazione” qui s’intende la costruzione di un concetto, alla quale partecipa sia la parte istituzionale (il Sapere) che la parte personale (chiunque abbia accesso al Sapere). Il concetto è continuamente in fase di costruzione. Su come definire un “concetto” ne discute ampiamente D’Amore in (D’Amore, 2001, pag. 151 – 152).

<sup>11</sup> Vygotskij sostiene che il nostro funzionamento cognitivo è intimamente legato e influenzato dall’uso dei segni. Di conseguenza c’è un passaggio da ciò che i segni rappresentano a ciò che i segni ci consentono di fare (Vygotskij, 1992).

Ma un sistema semiotico non è uno strumento per accedere ad un concetto, *“esso è costitutivo del funzionamento stesso del pensiero e della conoscenza”*, in questo senso *“ogni conoscenza è inseparabile da un’attività di rappresentazione”* (D’Amore, 2001).

Per tentare di sintetizzare le numerose ricerche che trattano del ruolo del segno nel processo di costruzione del significato, possiamo affermare che ogni concetto in matematica:

- ha rinvii a "non-oggetti". La concettualizzazione non può basarsi su significati che poggiano sulla realtà concreta.
- è costretto a servirsi di rappresentazioni, dal momento che non esistono "oggetti reali"<sup>12</sup> che possano rievocarlo; dunque la concettualizzazione deve necessariamente passare attraverso registri rappresentativi che, per vari motivi, soprattutto se sono a carattere linguistico, non possono essere univoci.
- si parla più spesso in matematica di "oggetti matematici" che non di concetti matematici in quanto in matematica si studiano preferibilmente oggetti piuttosto che concetti (Duval, 1998).

La conseguenza, evidenziata da Raimond Duval, è l’esistenza di un paradosso cognitivo del pensiero matematico:

*“(…)da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l'apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile. E, al contrario, come possono essi acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati? Questo paradosso è ancora più forte se si identifica attività matematica ed attività concettuale e se si considera le rappresentazioni semiotiche come secondarie o estrinseche”<sup>13</sup>.*

L’alunno non può entrare direttamente in contatto con l’oggetto matematico, per forza di cose dovrà riferirsi ad una specifica rappresentazione di quell’oggetto, finendo con identificare l’oggetto con la sua rappresentazione.

Nel momento in cui l’allievo si troverà nella necessità di accedere a quello stesso oggetto con un’altra modalità di rappresentazione, non sarà in grado di farlo, non possedendo né mezzi critici, né culturali, né cognitivi.

---

<sup>12</sup> “Oggetto reale” va inteso nel senso intuitivo di “cosa”.

<sup>13</sup> Duval, 1993, pag. 38, citato in D’Amore, 2001, pag. 156. D’Amore si chiede: *“In questo paradosso, così bene evidenziato da Raymond Duval, si può nascondere una potenziale causa di mancate devoluzioni?”*.

Oppure si può perdere di vista la costruzione del concetto, se l'allievo si limita ad imparare ad esprimerlo e a rappresentarlo con quanti più registri semiotici è possibile.

Sono caratteristiche della semiotica:

- la rappresentazione
- il trattamento
- la conversione

Preso un contenuto da rappresentare (A), si scelgono i suoi tratti distintivi, che dipendono dalle capacità semiotiche di rappresentazione del registro scelto per rappresentare A.

Infatti, scegliendo un registro diverso si fisserebbero altri tratti del contenuto da rappresentare: due rappresentazioni dello stesso oggetto, ma in registri linguistici differenti, hanno contenuti diversi<sup>14</sup>.

Una volta scelti i tratti distintivi del contenuto è possibile rappresentare A in un dato registro semiotico, per poi passare al trattamento, cioè all'elaborazione delle informazioni all'interno dello stesso registro.

Un'ultima attività cognitiva è la conversione, la trasformazione del contenuto in un registro semiotico diverso da quello di partenza.

La costruzione della conoscenza matematica dipende dalla capacità di saper utilizzare differenti registri di rappresentazione semiotica dello stesso concetto, quindi dalla capacità di rappresentarlo in un certo registro, di trattare le informazioni e di convertirle da un dato registro ad un altro.

Duval sottolinea, inoltre, due aspetti molto importanti dell'attività semiotica in matematica:

- la pluralità dei registri rappresentativi
- la coordinazione di tali registri.

Abbiamo già visto come diverse rappresentazioni dello stesso oggetto possano rappresentare contenuti differenti di quest'ultimo. È proprio per questo motivo che è importante e indispensabile una varietà di registri semiotici, affinché diverse rappresentazioni si completino a vicenda, evidenziando aspetti che con un solo registro linguistico non è possibile rilevare.

Nella complementarietà trova significato il coordinamento tra registri diversi, che permette allo studente di distinguere tra oggetti matematici e loro rappresentazione e lo rende in grado di utilizzare un oggetto matematico in situazioni differenti, effettuando una scelta consapevole del registro rappresentativo.

---

<sup>14</sup> “Una rappresentazione semiotica costituisce un significante diverso a seconda del significato di cui è significante”, D'Amore, 2001, pag. 172.

## **2.1. La rinuncia dell’allievo alla devoluzione: scolarizzazione e mancata noetica**

Alla luce del panorama teorico delineato è possibile interpretare in modo nuovo le difficoltà nell’apprendimento della matematica

D’Amore (2001), a partire dalla sua teoria delle rappresentazioni in matematica, sostiene che:

*“La rinuncia dello studente alla devoluzione<sup>15</sup> (ovviamente inconsapevole), l’incapacità dello studente di implicarsi (...), assumendosi carico diretto e personale della responsabilità della costruzione della conoscenza, in ambiente scuola, sono legate all’incapacità (talvolta solo supposta) o di rappresentare, o di trattare o di convertire, a causa di una mancata didattica specifica a monte”.*

Una delle maggiori difficoltà cognitive di un allievo è proprio data dalle operazioni tipiche della semiotica:

- La scelta della modalità di rappresentazione del concetto all’interno di un registro semiotico stabilito, e la scelta dunque dei tratti considerati significativi per tale rappresentazione.
- La trasformazione di trattamento da una rappresentazione all’altra ma all’interno dello stesso registro.
- La trasformazione di conversione da una rappresentazione all’altra, ma passando da un registro all’altro.

Lo studente, in tal modo, potrebbe giungere ad effettuare una scelta rinunciataria, che ha come diretta conseguenza la scolarizzazione dei saperi<sup>16</sup>.

In particolare, alcune delle difficoltà più spesso riscontrate riguardano capacità come quella di risalire da una rappresentazione al contenuto rappresentato.

Padroneggiare le rappresentazioni semiotiche ed essere in grado di coordinare registri linguistici diversi è un modo per rendere lo studente responsabile della costruzione del proprio sapere.

Ma questo non basta: l’elemento chiave dell’apprendimento è la condivisione.

Gli oggetti matematici, così come li definisce J. Godino (2000), sono *“entità culturali socialmente condivise”*: questo è valido, naturalmente, anche per i registri di rappresentazione semiotica.

---

<sup>15</sup> Per *“devoluzione”* si intende l’atto con il quale l’insegnante delega allo studente di farsi carico diretto della responsabilità della costruzione del proprio sapere. Quando l’allievo accetta l’apprendimento è possibile; in altri casi lo studente non accetta di impegnarsi personalmente, ed allora l’apprendimento è impossibile. La parola *“devoluzione”* è tratta dallo studio del diritto: si tratta di un passaggio di beni da una persona ad un’altra.

La *“devoluzione”* è definita da Brousseau come *“L’atto attraverso il quale l’insegnante fa accettare all’allievo la responsabilità di una situazione di apprendimento (a – didattica) o di un problema ed accetta lui stesso le conseguenze di questo transfer”*, Brousseau, 1986.

<sup>16</sup> Per *“scolarizzazione dei saperi”* si intende l’atto, spesso inconsapevole, attraverso il quale l’allievo effettua una delega alla Scuola, in quanto istituzione, ed all’insegnante, in quanto rappresentante di quell’istituzione, il compito di selezionare per lui i saperi significativi.

Essi nascono con una funzione comunicativa, quindi la loro costruzione è il risultato di una interazione tra individui che ne hanno condiviso i significati.

Negoziare le esperienze, i problemi, le soluzioni, socializzare le proprie esperienze e condividerle permette di apprendere in modo responsabile.

## **2.2. Lingua naturale e uso spontaneo del disegno nella risoluzione di problemi di matematica**

La lingua naturale, o "everiday language", è un registro di rappresentazione semiotica più complesso degli altri, in quanto è plurifunzionale.

Duval distingue quattro funzioni discorsive, che caratterizzano la lingua naturale: funzione referenziale di designazione degli oggetti, funzione apofantica di espressione di enunciati completi, funzione di espansione discorsiva di un enunciato completo e funzione di riflessività discorsiva.

Ci siamo già occupati del ruolo svolto dalla visualizzazione, e quindi dalle rappresentazioni grafiche, nell'espressione e nella comprensione di un contenuto matematico. Precisiamo che la figura (grafici, tabelle, disegni...) non sempre è un aiuto alla risoluzione di problemi: a volte può confondere ulteriormente lo studente, il quale, dovendo lavorare con un doppio codice linguistico (quello scritto e quello figurale), può essere portato a credere di avere di fronte a sé due problemi, invece di due rappresentazioni semiotiche dello stesso problema. In altre parole, non riesce a far convergere le diverse informazioni suggerite da registri differenti.

Di tutt'altra natura è invece il disegno spontaneo. A volte l'allievo, nel tentativo di risolvere un problema di matematica, può ricorrere al disegno, per ricercare la strategia risolutiva adeguata. Tali figure sono spontanee, e sono disegnate come supporto alla risoluzione e quindi sono figure risolutive.

D'Amore differenzia tali modalità di rappresentazione grafica dalle figure allegoriche: in alcuni casi i calcoli sono accompagnati da figure che non sono legate esplicitamente alla soluzione (D'Amore, 1995).

## **3.0. Il lavoro sperimentale**

L'ipotesi di lavoro parte dalla considerazione che il linguaggio naturale sia un registro semiotico che comporta ostacoli maggiori rispetto agli altri, per le difficoltà indicate precedentemente (principalmente riguardano la capacità di estrarre da un testo matematico le informazioni pertinenti alla risoluzione del problema) e per il ruolo svolto dal contratto didattico. Ritengo infatti che la risoluzione di un problema che si avvale esclusivamente di una modalità di rappresentazione come questa, sia più difficoltosa rispetto all'utilizzo di altri registri o, meglio, rispetto all'uso coordinato di vari registri.

Per tali motivi l'ipotesi di partenza del lavoro sperimentale si può esprimere in questo modo: se agli alunni viene presentato un problema in un registro

linguistico differente dalla lingua naturale, allora le loro prestazioni nella risoluzione migliorano.

Inoltre, il linguaggio figurativo e quello tabulo – relazionale, a mio avviso, consentono una migliore interpretazione dei dati di un problema..

Obiettivo generale della ricerca è quello di indagare sull'utilizzo e sulla comprensione di rappresentazioni linguistiche differenti durante la risoluzione di una situazione problematica, negli alunni del secondo biennio della scuola primaria. Il lavoro intende, inoltre, rilevare le differenti strategie risolutive, all'interno di ciascun gruppo, rispetto alla risoluzione della situazione -problema proposta in quattro varianti linguistiche, durante la somministrazione del fattore sperimentale, e verificare in che modo la proposta di un modalità di rappresentazione piuttosto che un'altra influenza i risultati della fase finale.

### **3.1. Strumenti e metodologie**

Per indagare su tali aspetti e falsificare l'ipotesi generale si sono ipotizzate 3 fasi sperimentali. E' necessario, infatti, in seguito alla formulazione delle ipotesi di ricerca, predisporre degli strumenti adeguati strumenti che ne permettano la falsificazione, che permettano di andare contro l'ipotesi.

La prima fase consiste nella somministrazione di un problema aperto ad un campione di 98 alunni, scelti in modo casuale, di età compresa tra gli 8 e i 10 anni. Mi riferisco, dunque, ad un target di alunni frequentanti il secondo biennio della scuola primaria (4° -5° elementare)<sup>17</sup>.

La seconda fase, che costituisce propriamente l'esperimento, consiste nella somministrazione di una stessa situazione-problema a quattro gruppi di soggetti, in differenti registri linguistici.

La terza fase sperimentale consiste nel proporre nuovamente a tutti i gruppi la situazione-problema iniziale, che prevede, in fase finale, la stessa identica consegna. L'obiettivo di quest'ultima fase è quello di verificare quali effetti sono stati ottenuti in seguito all'introduzione del fattore sperimentale.

Prima di somministrare le diverse schede ai bambini, nelle varie classi, mi sono presentata a loro, chiarendo ogni dubbio circa la mia presenza in classe.

Una volta introdotta alla classe l'attività, ho distribuito a ciascun alunno una copia della prima scheda, il problema – questionario, senza dare alcuna indicazione. Dopo aver letto la consegna e il testo del problema ho dato 20 minuti per risolverlo, in modo individuale. La stessa cosa è avvenuta durante la somministrazione delle altre due schede. Per svolgere le diverse fasi della sperimentazione in ciascuna classe è stata impiegata circa un ora.

---

<sup>17</sup> Si tratta di tre classi quinte appartenenti al circolo didattico “G. La Masa”, e di una quinta e di una quarta elementare dell'istituto “Nino Bixio”, entrambe di Palermo. Il lavoro si è svolto nei mesi di dicembre-gennaio 2004/2005.

Prima di iniziare l'indagine sperimentale sul campo, è stata costruita l'analisi a – priori dei comportamenti attesi da parte degli allievi, uno strumento essenziale per affrontare ricerche di questo tipo, perché permette di rilevare in modo adeguato i dati utili e di analizzarli con gli strumenti della statistica (analisi descrittiva per mezzo del programma Excel, per registrare la presenza/assenza di tali comportamenti, analisi delle similarità e analisi implicativa con il supporto del programma Chic). Al completamento dell'analisi quantitativa dei dati, ho effettuato un'analisi qualitativa delle risposte, tenendo conto degli elaborati maggiormente significativi tra tutti i protocolli del campione.

### **3.2. L'esperienza di Ricerca in Didattica: le fasi della sperimentazione**

#### **3.2.1. La prima fase della sperimentazione**

La prima fase della sperimentazione è consistita nella somministrazione di un problema aperto ad un campione di 98 alunni.

La scelta del problema aperto è stata orientata dallo scopo stesso di questa prima fase, cioè quello di individuare le strategie risolutorie e l'adozione spontanea di una modalità di rappresentazione semiotica nei soggetti che costituiscono il campione.

Il problema aperto rappresenta un *compito di traduzione* da una modalità di rappresentazione all'altra. Nello specifico si tratta di tradurre il problema *dal linguaggio naturale ad un altro*, scelto liberamente da ciascun allievo.

Il problema aperto è stato considerato come un questionario. Si tratta di un semplice problema, rappresentato in lingua naturale: ho scelto questo registro perché è una modalità di rappresentazione familiare agli alunni.

La situazione – problema proposta è la seguente:

“Quattro amici pagano €12,50 per 3 coppe di gelato e un aperitivo. Sapendo che quest'ultimo costa €3,50, qual è il prezzo di ogni coppa di gelato?”

Rappresenta il problema nel modo che preferisci (con un disegno, con una tabella, con un'espressione aritmetica ecc.) e trova la soluzione.”

Le strategie risolutive che sono state prese in considerazione per la tabulazione dei dati rispetto alla prima fase sono state raggruppate in quattro categorie<sup>18</sup>:

1. **S1, S2, S3, S4, S5, S22**: l'alunno rappresenta il problema nel modo “classico”: dati, diagramma, operazioni in colonna, risposta. Può inserire o meno simboli iconografici, ma si caratterizzano come elementi poco rappresentativi della situazione problematica.

---

<sup>18</sup> Dopo aver raccolto i dati, l'analisi a – priori è stata completata con tutte quelle strategie che non erano state ipotizzate. L'operazione è stata effettuata sia per la fase iniziale che per quella finale. Le quattro categorie di strategie indicate si riferiscono sia alla fase iniziale che alla fase finale, in questo modo è possibile effettuare un valido confronto.

2. **S6, S7, S20:** l'alunno rappresenta il problema utilizzando prevalentemente dei disegni, servendosi dunque del linguaggio figurativo.
3. **S8, S9, S10, S11, S12, S18, S21:** tali strategie indicano una predisposizione a rappresentare il problema utilizzando un linguaggio tabulo-relazionale o algoritmico-procedurale. Spesso il problema è risolto indicando esclusivamente l'algoritmo risolutivo.
4. **S13, S14, S15, S16, S17, S19:** Strategie che utilizzano in modo coordinato più di un registro linguistico.

Analizzando le tipologie di risposte che ho raccolto e classificato, si possono rilevare alcuni dati particolarmente significativi, in fase iniziale:

- Il 77% del campione ha utilizzato una strategia corretta;
- La S3 (l'alunno procede alla risoluzione del problema come è abituato a fare solitamente, ma, prima o subito dopo aver inserito i dati, li rappresenta attraverso una serie di disegni in sequenza o simboli iconografici) è stata la strategia risolutiva maggiormente utilizzata, nel 17,5% dei casi; a questa seguono la S2 e la S1. Da notare che le strategie fanno riferimento tutte al 1° gruppo.
- Nel 45,9% dei casi si tratta di una strategia appartenente al gruppo n°1;
- Solamente lo 0,85% (cioè un solo alunno su 98) ha utilizzato una strategia del gruppo n° 2 (rappresentazione attraverso il disegno);
- Il 25,95% utilizza una strategia del gruppo n°3 (linguaggio tabulo – relazionale e algoritmico -procedurale);
- Solo il 4,2% ha rappresentato il problema servendosi di più registri linguistici coordinati (gruppo misto);
- Il 22,55% delle risposte indica l'uso di una strategia errata, in particolare la E3 nel 10% dei casi (E3: cerca di risolvere il problema utilizzando i dati forniti dal testo in modo casuale).

Dai dati rilevati emerge dunque che la modalità di rappresentazione più spontaneamente utilizzata dagli alunni che costituiscono il campione è quella classica. Gli alunni, infatti, sono soliti procedere in questo modo quando devono risolvere un problema, e questa percentuale era normale aspettarsela.

### **3.2.2. La seconda fase della sperimentazione**

La seconda fase costituisce il fattore sperimentale vero e proprio<sup>19</sup>. Ad un primo gruppo di soggetti è stata somministrata una situazione-problema che utilizza come modalità di rappresentazione semiotica il linguaggio naturale. Al secondo gruppo il problema è stato presentato con un linguaggio figurativo: per interpretare il problema e trovare la soluzione, gli alunni possono dunque servirsi esclusivamente di immagini. Al terzo gruppo ho somministrato il problema utilizzando il linguaggio tabulo-relazionale. Per questa modalità di

---

<sup>19</sup> Vedi appendice.

rappresentazione mi sono servita di una tabella a doppia entrata, che mette in relazione i dati fondamentali del problema, consentendone una più facile interpretazione. Al quarto gruppo di soggetti è stato richiesto invece di risolvere il problema che viene proposto con un linguaggio algoritmico-procedurale: la situazione-problema è stavolta suddivisa in quattro tappe, per ognuna delle quali gli alunni dovevano specificare l’algoritmo risolutivo all’interno del diagramma indicato.

Gli obiettivi di questa seconda fase sono:

- Rilevare le differenti strategie risolutive e verificare, per ciascun gruppo, la **leggibilità** del testo matematico (percentuale di risposte corrette o errate).
- Verificare in che modo la proposta di un modalità di rappresentazione piuttosto che un’altra influenza i risultati della fase finale.

Dall’analisi dei dati è emerso che nel registro “lingua naturale” la percentuale delle strategie corrette è stata del 62,5%, contro il 37,5% delle strategie errate. Queste percentuali sono simili a quelle ottenute in seguito all’analisi dei dati relativi al linguaggio figurativo (69,9% corrette e 30,1% errate). Risultati migliori sono stati ottenuti con il linguaggio tabulo – relazionale (82,5% di strategie corrette) e quello algoritmico – procedurale (78,7% di strategie corrette).

### **3.2.3. La terza fase della sperimentazione**

Per verificare quali effetti sono stati ottenuti con la somministrazione del fattore sperimentale (seconda fase), ho somministrato nuovamente a tutto il campione la situazione – problema iniziale, con la stessa identica consegna.

I risultati ottenuti sono stati molto interessanti. Infatti la percentuale di strategie riconducibili al 1° gruppo si è notevolmente abbassata: dal 45,9% della fase iniziale al 13,8% della fase finale. Si è registrato un aumento di strategie appartenenti al 2° gruppo (dallo 0,85% al 9,5%) e al 3° gruppo (dal 25,9% al 45,7%). La percentuale degli errori è rimasta più o meno la stessa, ma diverse sono le percentuali rispetto alla tipologia di errore. La strategie errata più frequente è la E2 (rappresenta il problema utilizzando uno qualunque dei registri linguistici, ma commette errori di calcolo.)

Al termine di questa fase ho individuato alcune variabili supplementari che rappresentano profili ideali di bambini classificati in base alla modalità di rappresentazione semiotica che hanno utilizzato per risolvere i problemi.

- ⇒ **Classic**: alunno che solitamente procede, nel risolvere un problema, in modo “classico”: S1, S2, S3, S4, S5, S22.
- ⇒ **Icon**: alunno che utilizza il linguaggio iconico: S6, S7 e S20.
- ⇒ **Algo**: algoritmico – procedurale o tabulo – relazionale, raggruppa le variabili: S8, S9, S10, S11, S12, S18 e S21.

⇒ **Mix**: l'alunno corrispondente a tale profilo utilizza in modo coordinato diverse modalità di rappresentazione semiotica: S13, S14, S15, S16, S17 e S19.

Questi profili ideali rispecchiano quindi i gruppi di strategie precedentemente indicati. Mi sono servita delle variabili supplementari per dare un significato più profondo ai grafici implicativi precedentemente realizzati, attraverso il programma CHIC. In questo modo è stato possibile analizzare i dati relativi all'implicazione tra gruppi di variabili e ciascuna variabile supplementare, per capire quali e quante variabili implicano quelle supplementari. Analizzando i grafici risultanti, e comparando fase iniziale e finale, ho ottenuto alcune informazioni. Per esempio la variabile “icon” corrispondeva, in fase iniziale, al profilo di un solo alunno (a conferma dei dati ottenuti con l'analisi descrittiva), mentre in fase finale sono 8 le variabili che implicano la variabile supplementare in questione. Interessante risultato è quello che vede la variabile “classic” implicata in fase iniziale da numerose variabili (16), mentre in fase finale il numero delle variabili è sceso in modo consistente (solamente 5). È aumentato notevolmente, invece, il numero di variabili che implicano la variabile supplementare “algo” (da 2 a 17).

### **3.3. Considerazioni conclusive**

Al termine della sperimentazione posso effettuare alcune importanti conclusioni:

- La modalità di rappresentazione semiotica che, in fase iniziale, costituiva il registro maggiormente utilizzato nella risoluzione del problema, la modalità “classica”, è diminuita notevolmente, in seguito all'introduzione del fattore sperimentale.
- È aumentata la rappresentazione figurativa e l'utilizzo coordinato di diversi registri linguistici (variabile Icon e Mix).
- La modalità di rappresentazione algoritmico – procedurale e quella tabulo – relazionale (variabile Algo) in fase iniziale è rappresentata, idealmente, da pochi alunni mentre in fase finale rappresenta il registro maggiormente utilizzato dagli allievi.

Riguardo l'ipotesi generale, in effetti, gli alunni ai quali ho sottoposto, durante la somministrazione del fattore sperimentale, il problema in linguaggio figurativo, tabulo – relazionale o algoritmico – procedurale, hanno ottenuto dei risultati migliori, rispetto al gruppo al quale ho somministrato il problema in lingua naturale.

Quindi i risultati che ho ottenuto nella 2° fase sperimentale, quella relativa alla situazione-problema in 4 varianti linguistiche, inducono a ritenere attendibile l'ipotesi di partenza: la modalità di rappresentazione influenza la risoluzione del problema. Nello specifico, l'utilizzo di un registro linguistico diverso dalla lingua naturale influenza in modo positivo le prestazioni del campione preso in esame.

Ma la diminuzione degli errori non implica, di per sé, che un registro semiotico sia migliore di un altro. A livello di interpretazione dei dati, posso

concludere, il registro tabulo relazionale è quello che consente agli alunni di procedere al meglio, perché induce a fare meno errori di interpretazione del testo.

Ma in che modo la somministrazione della situazione – problema (fattore sperimentale) ha influenzato la fase finale? Se mettiamo in correlazione i dati raccolti in fase iniziale e in fase finale è facile concludere che la modalità di risoluzione classica, modalità di rappresentazione molto utilizzata in modo “spontaneo” dagli alunni, è stata quasi del tutto scartata in fase finale, a favore di altri tipi di rappresentazione, come quella figurativa e algoritmico – procedurale. Quest’ultimo tipo di rappresentazione, insieme a quella tabulo – relazionale, è stata la più adottata in fase finale.

Alla luce dei dati raccolti, è possibile interpretarli in diversi modi. L’influenza del fattore sperimentale sulla modalità di rappresentazione in fase finale potrebbe essere determinata, ancora una volta, dal contratto didattico che, implicitamente, la serie di situazioni - problema ha creato.

I dati che ho raccolto e analizzato potrebbero non essere attendibili, almeno in parte, dal momento che tra la fase iniziale e la fase finale è stato introdotto un registro semiotico specifico che può aver indotto i ragazzi a interpretar in un altro modo la consegna: rifare il problema seguendo l’esempio che la maestra ci ha mostrato. Ancora una volta, una richiesta esterna, a livello implicito, può avere un’influenza molto forte sulla “spontaneità” della rappresentazione. Ma se osserviamo con attenzione i dati, ci accorgiamo che spesso ciò non è avvenuto.

Dalla visione delle tabelle excel emerge con chiarezza un dato che ritengo significativo: le strategie utilizzate sono molto simili all’interno di ciascuna classe. Trovandosi di fronte ad un problema aperto, all’inizio della sperimentazione, gli alunni hanno proceduto senza alcuna influenza, se non quella, molto forte, del contratto didattico.

Non è un caso se, pur di fronte ad una richiesta di rappresentazione libera, la maggioranza del campione in esame ha proceduto come d’abitudine. Pochissimi elaborati, in fase iniziale, si distinguono per la loro creatività, per la loro capacità di cogliere il contenuto matematico e trasformarlo con un linguaggio spontaneo, che non sia influenzato dalle richieste esterne.

Fino a che punto possiamo essere sicuri che la modalità “classica” di rappresentare una situazione problematica sia utilizzata spontaneamente (e compresa) da un allievo e che, invece, non sia solo il frutto di un adesione, quasi subita, a modelli semiotici che non corrispondono al suo modo di percepire e simbolizzare la realtà? I bambini sono abituati a concentrarsi sugli elementi numerici dell’enunciato, la situazione nella quale questi dati si inseriscono (e all’interno della quale acquistano un senso), tutto il resto è come una cornice, che può anche essere tralasciata (mi metto nei panni di un bambino: lui è consapevole, più o meno implicitamente, che l’importante è fare bene i calcoli, con le virgole al posto giusto).

Mortificante per lo sviluppo cognitivo del bambino, concentrarsi solo su questo, dal momento che ben poche strategie risolutive si possono ideare, perché il contratto didattico si impone in modo determinante, e le capacità di risolvere

problemi, trovare soluzioni originali, argomentare le proprie idee quasi si atrofizzano.

Con questo non intendo dire che utilizzare il ragionamento aritmetico e la modellizzazione numerica per risolvere problemi non sia didatticamente appropriato: ritengo che sia per lo meno discutibile concentrare l’attenzione solo sull’algoritmo risolutivo, senza preoccuparsi di conoscere le strategie e il procedimento che hanno permesso all’allievo di giungere a quel risultato.

In base ai risultati ottenuti con il mio lavoro sperimentale, ho individuato una serie di problemi aperti, questioni da chiarire e spunti di riflessione che possono costituire un punto di partenza per ulteriori indagini sperimentali:

- Quanto influisce la scolarizzazione e il contratto didattico sull’adozione “spontanea” di una modalità di rappresentazione piuttosto che un’altra?

- Al fine di coinvolgere gli alunni che hanno più difficoltà ad entrare in sintonia con l’astrazione propria della matematica, quali strategie di azione è più utile adottare?

- Esistono delle predisposizioni naturali verso l’ambito logico matematico che influenzano la scelta di una modalità di rappresentazione semiotica?

- In che modo i fattori culturali possono incidere su tale scelta? Differenti approcci alla matematica e differenze di ordine culturale implicano anche differenti rappresentazioni di un concetto matematico? Sarebbe interessante avviare una ricerca di questo tipo con un campione multiculturale<sup>20</sup>.

- La lingua naturale come rappresentazione semiotica di un oggetto matematico: quali differenze esistono tra la dimensione dell’oralità e quella della scrittura? Quali processi cognitivi gli alunni mettono in atto nell’uno e nell’altro caso?

- Insegnare matematica ad alunni provenienti da gruppi linguistici diversi: ostacoli nella didattica della disciplina e individuazione di metodologie alternative.

---

<sup>20</sup> A tal proposito si consiglia di consultare l’articolo di A. Gagatsis: “*Processi di traduzione e concetti di funzione*”, 2000. Nell’articolo si esaminano le abilità degli allievi greci (14 – 15 anni) di fare delle traduzioni di un tipo di rappresentazione ad un’altra nel dominio delle relazioni e delle funzioni, e si intende verificare se gli allievi greci presentano le stesse difficoltà degli allievi francesi.

## Appendice

La situazione – problema somministrata durante la seconda fase sperimentale è stata proposta a quattro sottogruppi del campione preso in esame nelle seguenti varianti linguistiche:

### 1. Lingua naturale

Leggi attentamente e risolvi il seguente problema:

Giulia, con i genitori e la sorellina, va al luna Park.

Alla cassa c'è il seguente cartello:

- Ingresso bambini: € 3,50
- Ingresso adulti: € 6,00

Il papà di Giulia paga con una banconota da €

### 2. Linguaggio figurativo

Osserva attentamente le vignette:



Saresti in grado di rispondere alla domanda di Giulia?

3. Linguaggio tabulo - relazionale

Ecco il costo dei biglietti del Luna Park:

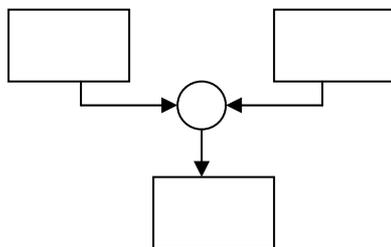
	PAPA'	MAMMA	GIULIA	LAURA
ADULTI € 6,00	X	X		
BAMBINI € 3,50			X	X

Se il papà paga con una banconota da € 50,00 quanto riceverà di resto? Spiega come hai fatto.

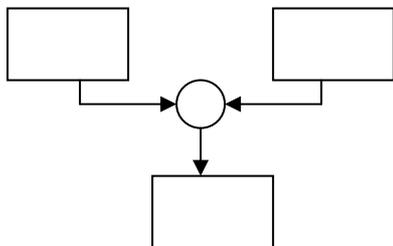
4. Linguaggio algoritmico - procedurale

*Leggi attentamente, completa e risolvi il problema:*

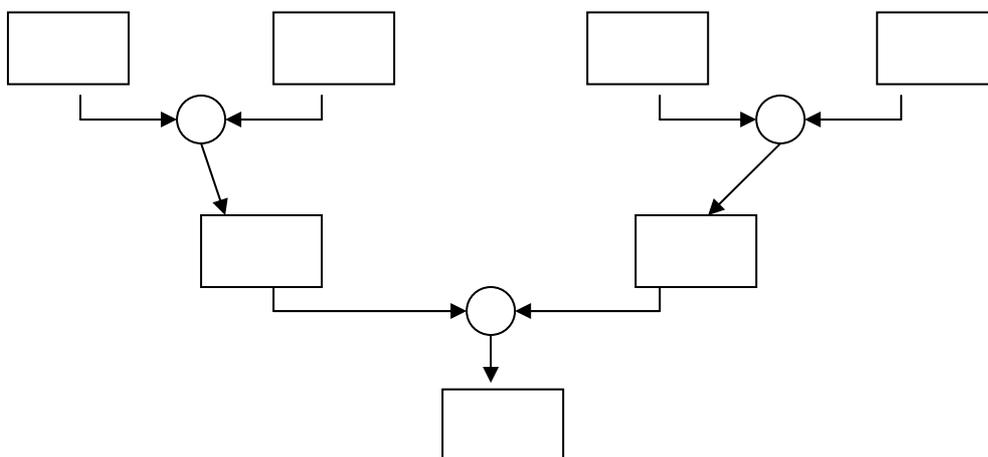
Prima tappa: Giulia, con i genitori e la sorellina, va al Luna Park.  
Per i bambini il costo del biglietto è di € 3,50.



Seconda tappa: per gli adulti il biglietto di ingresso costa € 6,00.



Terza tappa: quanto sarà il costo complessivo dei 4 biglietti?



Quarta tappa: il papà di Giulia paga con una banconota da € 50,00.

Quanto riceverà di resto?

Completa la catena di operazioni aggiungendo la 4° tappa.

### Riferimenti bibliografici

- 15-17 novembre 2001, “*Matematica 2001*”, XXII Convegno UMI-CHM, Ischia.
- BROUSSEAU, G. (1983), *Ostacoles epistemologiques en mathématique*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 4, 2;
- CHEVALLARD Y. (1991). *Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique*. Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble. LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble;
- D'AMORE, B. (1993), *Problemi*, Angeli, Milano.
- D'AMORE B. (1995), *Uso spontaneo del disegno nella risoluzione di problemi di matematica*. La matematica e la sua didattica, n°3, 328 – 370;
- D'AMORE B. (1999), *Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica*. L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate;
- D'AMORE B. (2001), *Concettualizzazione, registri di rappresentazione semiotica e noetica nella didattica della matematica*. La matematica e la sua didattica. Ricerche sul funzionamento del sistema allievo-insegnante-sapere: motivazioni della mancata devoluzione, n°2, 150 - 173;
- DUVAL R. (1993). *Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*, in Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, ULP, IREM Strasbourg;
- DUVAL R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne, Peter Lang;
- FERRARI P. L. (2004). *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*. Pitagora editrice;
- FISCHBEIN, E. (1993), *The theory of figural concepts*. Educational Studies in Mathematics, n° 24, 139-162;
- GAGATSI, A. (1995), *Modi di valutazione della leggibilità dei testi matematici*. La matematica e la sua didattica, n° 2, 136-146;
- GAGATSI A., (1997), *Problemi di interpretazione connessi con il concetto di funzione*. La matematica e la sua didattica, n°2, 132 – 149;
- GAGATSI A., Demetriou A., Afantiti Th., Michaelidou E., Panaoura R., Shiakalli M., & Christoforides M. (1999), *L'influenza delle Rappresentazioni “Semiotiche” nella Risoluzione di Problemi Additivi*. La matematica e la sua didattica, n° 2, 382 – 403;

- GODINO J., BATANERO C. (2000), *Significato istituzionale e personale degli oggetti matematici*. La matematica e la sua didattica, n°3.
- GODINO J. (2001), *Significato e comprensione dei concetti matematici*. La matematica e la sua didattica, n°3.
- GRAS R. (1997), *Metodologia di analisi d'indagine*, Quaderni di ricerca in didattica, 7, 99-109.
- G.R.I.M. (2002), *Quaderni di ricerca in didattica*, supplemento al n°10, Palermo;
- LABORDE, C. (1995), *Occorre imparare a leggere e scrivere in matematica?* La matematica e la sua didattica n° 2, 121-135;
- LAKOFF, G., Núñez R.E. (1997), *The Metaphorical Structure of Mathematics*, Mathematical Reasoning, Lawrence Erlbaum Associates, 21-89.
- MAIER H. (1995), *Il conflitto tra lingua matematica e lingua quotidiana per gli allievi*. La matematica e la sua didattica n° 3, 298 – 305;
- VYGOTSKIJ, L. S. (1992), *Pensiero e linguaggio*, Laterza, Bari.
- SPAGNOLO F. (1998), *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*, La Nuova Italia, Firenze.