

Le matrici come espressione delle isometrie nel procedimento compositivo di Pierre Boulez: La serialità integrale in *Structures I* per due pianoforti. Proposte didattiche

Daniela Galante¹

Sommario

Il rapporto fra la matematica e la musica ha radici lontane e le trasformazioni geometriche hanno avuto un ruolo importante e per certi aspetti fondamentale nello sviluppo del linguaggio della musica occidentale.

Col presente lavoro metto in evidenza, nell'ambito dell'interdisciplinarietà, alcuni aspetti paralleli tra la matematica e la musica contemporanea.

Oggetto d'indagine sono le trasformazioni geometriche, applicate ad una serie di dodici suoni, manifestate attraverso delle matrici e l'utilizzo che ne fa Pierre Boulez in *Structures I* per due pianoforti. L'obiettivo dell'autore, consiste nel creare un nuovo linguaggio della musica in grado di annullare l'io creatore attraverso la matematizzazione del processo compositivo.

Nella seconda parte vengono presentate alcune proposte didattiche dal momento che il contenuto del presente lavoro è già inserito nei piani di studio per l'insegnamento della matematica e della musica nei licei Musicali, nei licei Socio-Psico-Pedagogico e nei corsi di Laurea Universitari dei Conservatori di Musica.

Abstract

The relationship between mathematics and music has distant origins and the geometrical transformations have had an important role and for certain aspects fundamental in the development of the language of western music.

With this work I would like to emphasize, through an interdisciplinary approach, some parallel aspects between mathematics and contemporary music.

Object of the investigation are the geometrical transformations, applied to a set of twelve sounds, expressed through some matrix and the use which Pierre Boulez makes of them in *Structures I* for two pianos. The scope of the author, consists in the creation of a new music language able to undo the "I" creator through the mathematization of the composition process.

In the end are proposed some possible didactical applications since the contents of this work is already insert in the study plan for the teaching of mathematics and of music in the Musical secondary school, in Socio – Psico – Pedagogico secondary school and in the University Degree courses of the Conservatoires of Music.

Résumé

Le rapport entre la mathématiques et la musique a des racines lointains et les transformations géométriques ont eu un rôle important et pour certains aspects fondamental dans le développement du langage de la musique occidental. Avec ce travail je met en évidence, dans le domaine de l'interdisciplinarité, quelques aspects parallèles entre la mathématiques et la musique contemporaine.

Objet d'enquête sont les transformations géométriques, appliqué à une série de douze sons, manifestées à travers des matrices et l'utilisation qu'en fait Pierre Boulez en *Structures I* pour deux pianos. L'objectif de l'auteur, consiste dans la création d'un nouveau langage de la musique capable d'annuler le « Moi » créateur à travers la mathématisation du procès composant.

Dans la dernière partie viens proposées quelques possibles applications didactiques étant que le contenu de ce travail est déjà introduit dans les plain d'étude pour l'enseignement de la mathématique et de la musique dans les lycées musicaux, dans les lycées Socio – Psico – Pedaogico et dans les cours des Licences Universitaire des Conservatoires de Musique.

¹ Componente del G.R.I.M., Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università di Palermo.

INTRODUZIONE

Il rapporto fra la matematica e la musica ha radici lontane e le trasformazioni geometriche hanno avuto un ruolo importante e per certi aspetti fondamentale nello sviluppo del linguaggio della musica occidentale. Infatti, le trasformazioni geometriche sono state utilizzate nelle tecniche compositive fin dal XII sec quando mosse i suoi primi passi la musica polifonica e l'affermazione del modello tonale, unitamente allo sviluppo del contrappunto, favorì nei secoli XVII e XVIII un'ulteriore affermazione e divulgazione del procedimento compositivo basato sui principi delle trasformazioni geometriche².

L'arte contrappuntistica, e di conseguenza l'impiego di trasformazioni geometriche del tema principale, attraversò un periodo di declino dalla seconda metà del XVIII sec. alla fine del XIX sec. e a parte qualche sporadico caso³, dobbiamo aspettare il XX sec. per trovare di nuovo degli esempi di strutture geometriche applicate alla musica. L'uso delle trasformazioni geometriche viene ripreso in maniera del tutto nuova dalla scuola dodecafonica di Vienna e dalle avanguardie che la seguirono.

Il presente lavoro, che si ricollega a un precedente articolo (Galante 1999), prende in esame l'impiego delle trasformazioni geometriche in *Structures I* di Pierre Boulez (Montbrison, Loire 1925), compositore e direttore d'orchestra francese, il quale compì anche studi di matematica; lo scopo è quello di offrire un contributo alla decodificazione, comprensione e interpretazione di quella parte di repertorio pianistico solistico contemporaneo di difficile fruizione, per chi esegue e per chi ascolta, dovuta proprio alla sua quasi esclusiva matematizzazione.

IL CONTESTO STORICO E LA MATEMATIZZAZIONE DEL PROCESSO COMPOSITIVO

Il sistema tonale, che aveva dominato per circa due secoli la tecnica compositiva occidentale, era giunto nel tardo Ottocento a un'irrimediabile saturazione. Ci si era spinti sino ai confini della tonalità (si pensi al *Tristano e Isotta* di Wagner) con l'uso eccessivo del cromatismo che mina fin dalle fondamenta le funzioni e la gerarchia dei gradi armonici, contribuendo a spaccare il sistema tonale tradizionale dato che al suo interno tutte le strade erano state esplorate.

Urgeva cercare nuove possibilità musicali e gli anni a cavallo fra Ottocento e Novecento, caratterizzati proprio da tale ansia di rinnovamento, vennero quindi percepiti dai contemporanei come periodo della "Musica Moderna".

Le vie d'uscita dalla tonalità erano ovviamente molteplici.

Alcuni compositori non si allontanarono troppo dalla tonale terra d'origine: essi compirono solo alcune sortite nel territorio circostante per acquisire materiali musicali ancora incontaminati. Ad esempio, Musorgskij, Janàček, Bartók e in parte Stravinskij attinsero al folklore dei loro paesi, mentre Debussy si rivolse al patrimonio musicale orientale e all'antica modalità ecclesiastica. Altri invece, come Schöenberg e i suoi allievi Berg e Webern, si incamminarono decisamente verso strade nuove: tagliando tutti i ponti con il passato tonale essi giunsero ad una completa atonalità, anche per mezzo del sistema dodecafonico.

In qualsiasi direzione si muovessero, dentro o fuori dalla tonalità i compositori tendevano comunque a procedere in piccoli gruppi, dietro un *leader* riconosciuto ed esprimendo spesso le loro idee in un manifesto programmato. Così avremo i Cinque russi, i futuristi italiani, la Seconda scuola di

² La Nuova Enciclopedia della Musica Garzanti, *La Musica Colta Occidentale*, pp.836-867; *Contrappunto*, pp.180,181. L'affermazione va considerata come deduzione storica.

³ Maurizio Clementi (1752-1832) *Gradus ad Parnassum*, numeri 33 e 73; troviamo applicato il Canone diretto a 4 voci e quello per moto contrario.

Vienna, la scuola di Darmstadt, e via seguendo con gruppi e gruppuscoli della musica contemporanea; il confine della "Nuova Musica" può essere tracciato intorno all'anno 1910, quando Schönberg e la sua scuola scrissero le prime composizioni concepite nell'ambito di un nuovo sistema, la *dodecafonìa*, basata sulle 12 note della scala cromatica (che non sono in rapporto gerarchico tra loro, come avveniva nell'armonia classica); le loro composizioni erano caratterizzate dal principio della *serie*⁴. Tale principio si basa su una successione rigorosamente preordinata e invariabile di suoni, detta appunto serie: l'unico rapporto che lega i suoni tra loro dipende dalla regola fondamentale per cui non si può ripetere una nota finché non siano state impiegate le altre 11. Fermi restando i rapporti di intervallo propri della serie, la disposizione dei suoni può essere mutata mediante i procedimenti di inversione (riflessione rispetto all'asse x), retrogradazione (riflessione rispetto all'asse y), retrogradazione dell'inversione (riflessione rispetto all'origine).

La generazione uscita dagli orrori della seconda guerra mondiale volle rinnegare tutto il linguaggio musicale che l'aveva preceduta e ripartire da zero. Poiché, naturalmente, ciò non è letteralmente possibile, i giovani compositori del dopoguerra ricavarono la loro parte di eredità un po' dalla corrente "tedesca", un po' da quella "francese"; in ogni caso, però, cancellarono qualsiasi cosa potesse avere sapore di retorica e di soggettivismo romantico. Ecco allora che l'Io creatore venne sostituito, per la prima volta in modo quasi esclusivo, dal calcolo numerico o addirittura dal caso e agli strumenti suonati dall'uomo si affiancarono suoni e rumori registrati o creati elettronicamente.

L'operazione più radicale in questa direzione fu compiuta da Pierre Boulez. Nel 1952, in un celebre articolo intitolato *Schönberg è morto*, accusa la dodecafonìa schönberghiana di essersi limitata a serializzare le altezze ed invita, sviluppando alcune intuizioni di Webern, ad estendere ad altre componenti del suono (durata, intensità, timbro) la tecnica compositiva della musica seriale. La serialità integrale, spezzando tutti i nessi tradizionali, rispondeva anche a un'esigenza di carattere più generale. Così come l'Europa intera cercava di scrollarsi di dosso i ricordi del recente incubo, anche i musicisti sentivano il bisogno, come già detto, di ripartire da zero: era necessario tagliare tutti i ponti con il passato, impiantare la musica su basi totalmente diverse da quelle del soggettivismo romantico, come se mai nulla fosse stato composto.

Boulez, nella prima delle tre parti di *Structures I* per due pianoforti – come sarà spiegato fra poco – vuole raggiungere proprio il “grado zero” della composizione, annullando del tutto non solo la soggettività emotiva dell'autore, ma anche, per ciò che è possibile il suo stesso agire compositivo: dati alcuni elementi di partenza (e anche questi non di sua creazione, ma estratti dal *Mode* di Messiaen⁵), Boulez applica le trasformazioni geometriche attraverso una rigidissima griglia numerica espressa in forma di matrice che gli impone pressoché tutte le scelte compositive. Il risultato è emotivamente raggelante: poiché tutto è serializzato (altezze, intensità, dinamiche, tipi di attacco), e quindi nulla può ripetersi finché la serie a cui appartiene non è interamente trascorsa; l'orecchio e la memoria non hanno più niente a cui aggrapparsi⁶, e l'ascoltatore galleggia in balia di eventi sonori imprevedibili. Ma contemporaneamente si tratta del massimo ascetismo possibile: il compositore si annulla, rinuncia al

⁴ In questo contesto il termine *serie* va distinto dalla definizione di serie in matematica che indica un algoritmo che a una successione di numeri o funzioni associa la successione delle somme dei primi n , e, se esiste, il limite di quest'ultima.

⁵ Il compositore francese Olivier Messiaen (Avignone, 1908 – Parigi 1992) fu un importante anello di congiunzione fra le avanguardie storiche e la <<nuova musica>> del secondo dopoguerra. Maestro di P. Boulez, a Damstadt, nel 1949-50 scrisse *Mode de valeurs et d'intensités*, uno dei *Quatre études de rythme* per pianoforte. Questa composizione utilizza, secondo quanto specifica lo stesso autore, un *Modo* (dunque non una serie) composto da trentasei *altezze*, ciascuna associata indissolubilmente a un certo *valore* ritmico (cioè a una durata), a un certo *segno dinamico* (cioè a una certa intensità) e a un determinato *tipo d'attacco* (ossia a un colore timbrico). Il che spiega il titolo del lavoro.

⁶ A differenza di quanto avviene col sistema tonale, nella musica seriale sono assenti le funzioni gerarchiche dei gradi e degli accordi all'interno delle scale, i rapporti fra sistema maggiore e minore, il concetto di consonanza e dissonanza e la percezione del senso del movimento e del riposo.

suo “Io” creatore per consegnarsi alla spietata razionalità delle trasformazioni geometriche riassunte in matrici dove il numero contiene il suono nella sua dimensione completa.

Con questa composizione Boulez raggiunge ciò che egli stesso definisce, i <<limiti della terra fertile>>⁷ : più in là non si può più andare. E già dalla seconda e dalla terza parte di *Structures I*, il musicista francese inizia a ricostruire una “discorsività” umana; ora sente di poterlo fare proprio perché nella prima parte ha tagliato ogni ponte dietro di sé.

Ovviamente non aveva alcun senso ripetere ancora questo temerario esperimento: gli altri compositori, come del resto lo stesso Boulez, limitarono la loro serialità integrale essenzialmente al trattamento delle altezze e delle durate, lasciandosi liberi di gestire a proprio arbitrio le altre caratteristiche sonore.

STRUCTURES I PER DUE PIANOFORTI: IL MATERIALE PRE-COMPOSITIVO E LE MATRICI

La continuità con l’esperienza del *Mode* di Messiaen è esplicitamente invocata da Boulez nel primo libro delle sue *Structures* per due pianoforti (1951-52)⁸. Questa composizione, infatti, è costituita da tre pezzi, il primo dei quali utilizza la serie di dodici note corrispondenti alla prima parte del modo di altezze presente nel *Mode* di Messiaen.

La tecnica compositiva del primo pezzo di *Structures I* è tale da ridurre al minimo (anche se non da abolire del tutto, come vedremo) i possibili interventi arbitrari del compositore, visto che questi, a suo stesso dire, si poneva due obiettivi fondamentali: <<eliminare assolutamente dal [...] vocabolario ogni traccia di eredità>>, quasi a ripartire da un “grado zero” di alfabetizzazione stilistica e <<unificare gli aspetti della lingua rimasti, fino ad allora, in uno stato di contraddizione>>⁹, di modo che tutti questi aspetti fossero organizzati secondo un medesimo principio.

Questi scopi sono perseguiti attraverso procedimenti complessi. Innanzitutto viene stabilita per ciascuna delle componenti musicali (altezze, durate, intensità, tipi d’attacco) una gamma di elementi ben distinti: 12 altezze di una serie, 12 durate diverse, 12 intensità diverse, e 10 tipi d’attacco¹⁰; ad ogni altezza è associata indissolubilmente una precisa durata, un livello dinamico e un tipo d’attacco; ciascun elemento viene quindi associato a un numero. Ciò dà origine a una nuova dimensione linguistica della musica che stabilisce il campo di possibilità sonore entro cui il compositore può operare le sue scelte. La novità consiste nel fatto che qui si tratta di un *serie* multi dimensionale o integrale¹¹, proprio perché per ciascun elemento non è specificata soltanto l’altezza, ma anche la durata, l’intensità e il timbro. In altre parole il numero racchiude in sé il suono inteso nella sua dimensione completa di altezza, durata, intensità e timbro (Tabella 1).

⁷ Ai *limiti della terra fertile* è un articolo pubblicato su “Die Reihe” nel 1955, e poi inserito nel volume *Note d’apprendistato*, riguardante il rapporto tra la nozione di tempo propria della musica strumentale e quella propria della musica elettroacustica.

⁸ Questa composizione è stata più volte rimaneggiata in seguito. Al primo libro se ne aggiungerà un secondo, composto da due pezzi, circa un decennio dopo.

⁹ Pierre Boulez, *Pensare la musica oggi*, Torino, Einaudi, 1979, p. 191

¹⁰ L’analisi che il compositore György Ligeti ha condotto su *Structures I* è pubblicata nel periodico <<Die Reihe>>, 4 (ed. inglese 1960, originale 1958), pp. 36-62.

¹¹ Qui il termine integrale è sinonimo di intero e totale perché si riferisce ai quattro parametri del suono (altezza, durata, intensità e timbro o tipo d’attacco); esso va distinto dall’integrale matematico $\int f(x)dx$ che è l’insieme formato da tutte le primitive di $f(x)$.

La tabella 1 mostra la corrispondenza istaurata tra i numeri da 1 a 12 e i parametri del suono ad essi abbinati. Le altezze sono costituite, come abbiamo già detto, da una serie dodecafonica corrispondente alla prima parte del modo di altezze utilizzato nel *Mode* di Messiaen. I valori di durata sono ottenuti moltiplicando il valore base di 1/32 per ciascuno dei numeri interi fino a 12. Le intensità sono costituite da 12 indicazioni dinamiche comprese e ordinate tra pppp e ffff. I tipi d’attacco prescelti sono solo 10, infatti ai numeri 4 e 10 non ne corrisponde alcuno.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ALTEZZE												
DURATE												
INTENSITÀ	<i>pppp</i>	<i>ppp</i>	<i>pp</i>	<i>p</i>	<i>quasi p</i>	<i>mp</i>	<i>mf</i>	<i>quasi f</i>	<i>f</i>	<i>ff</i>	<i>fff</i>	<i>ffff</i>
TIPI D'ATTACCO	\gt	\gt	\cdot		<i>normale</i>	\sim	\cdot	<i>sf</i> Δ	$\bar{\cdot}$		\cdot	\sim

Tabella 1- *Tabella che mostra l’attribuzione di un valore numerico a ciascuno degli elementi costituenti le caratteristiche del suono (altezze, durate, intensità, tipi d’attacco) nel primo pezzo del volume I di Structures per due pianoforti di Pierre Boulez.*

Una volta stabiliti i “mattoni” da utilizzare nel suo edificio musicale, il compositore ha deciso di limitare ulteriormente la propria libertà di scelta. Tali mattoni vengono dunque disposti nel tempo non arbitrariamente, ma secondo un progetto preciso, costituito da due tabelle numeriche o matrici.

Vedremo ora come queste matrici sono ottenute (sempre a partire dalla serie di Messiaen) e poi come Boulez la utilizza.

Per organizzare le altezze in *Structures I* Boulez utilizza le seguenti trasformazioni geometriche applicate alla serie Originale: riflessione rispetto all’asse x ossia Retrogrado, riflessione rispetto all’asse y ossia Inverso, riflessione rispetto all’origine ossia Inverso del Retrogrado (O, R, I, IR)¹². La serie originale inoltre viene traslata rispetto all’asse y (Figure 1a e 1c). Le traslazioni della serie sono disposte secondo un ordine particolare, cioè in modo che la prima nota di ogni traslazione corrisponde alla successione delle note della serie O₁. Dunque la serie originale (O₁) parte dal *mib*¹³; la prima traslazione (O₂) partirà dal *re*, la seconda (O₃) dal *la*, la terza (O₄) dal *lab* ecc. (Figura 1a).

Nell’esempio della figura 1a, a ciascuna nota è stato sovrapposto il numero d’ordine che essa aveva nella serie O₁. Così al *re* corrisponde sempre il 2, al *la* il 3, al *lab* il 4, e così via. Dunque ad ogni

¹² Per Retrogrado (R) si intende una serie costituita dalle stesse note, alla stessa altezza, di quella originale in una successione di suoni a ritroso: essa inizia dall’ultima nota della serie originale per concludere con la prima. Per Inverso (I) si intende una serie in cui vengono invertiti gli intervalli; ciò vuol dire che l’intervallo discendente diventa ascendente e viceversa mantenendo inalterate le distanze. Per Inverso del Retrogrado (IR) si intende una serie in cui si invertono gli intervalli della serie originale e si procede a ritroso.

¹³ La particolare tecnica con cui sono costituite le matrici di Structures consiglia di denominare la serie originale O₁ e non O₀, a differenza di quanto fanno di solito i teorici della musica dodecafonica.

traslazione della serie corrisponde una successione di numeri diversa: alla prima traslazione (O_2 , quella che parte da *re*) corrisponde la successione numerica 2, 8, 4, 5, 6, ...; alla seconda traslazione (O_3 , che parte da *la*) corrisponde la successione, 3, 4, 1, 2, 8, ecc..

Se adesso prendiamo il piano (x, y) e riportiamo sull'asse x lo scorrere del tempo (senza alcuna indicazione metronomica perché, come abbiamo già detto, ad ogni suono della serie è indissolubilmente legata una durata) e sull'asse y l'altezza del suono in ordine crescente dal più grave al più acuto secondo l'ordine della scala cromatica, otteniamo una rappresentazione grafica mediante quadretti che indicano l'altezza assoluta di ogni suono della serie.. Così facendo una qualsiasi serie può essere rappresentata da una legge f in modo che $y = f(x)$.



Figura 1a - Prime trasposizioni della serie di altezze, originale (O) e invertita (I) di Structures I per due pianoforti di Pierre Boulez, ordinate rispettivamente secondo la successione delle note della serie O_1 e I_1 . A ciascuna altezza è costantemente associato il numero d'ordine che essa ha nella serie O_1 : *mib* = 1, *re* = 2 e così via.

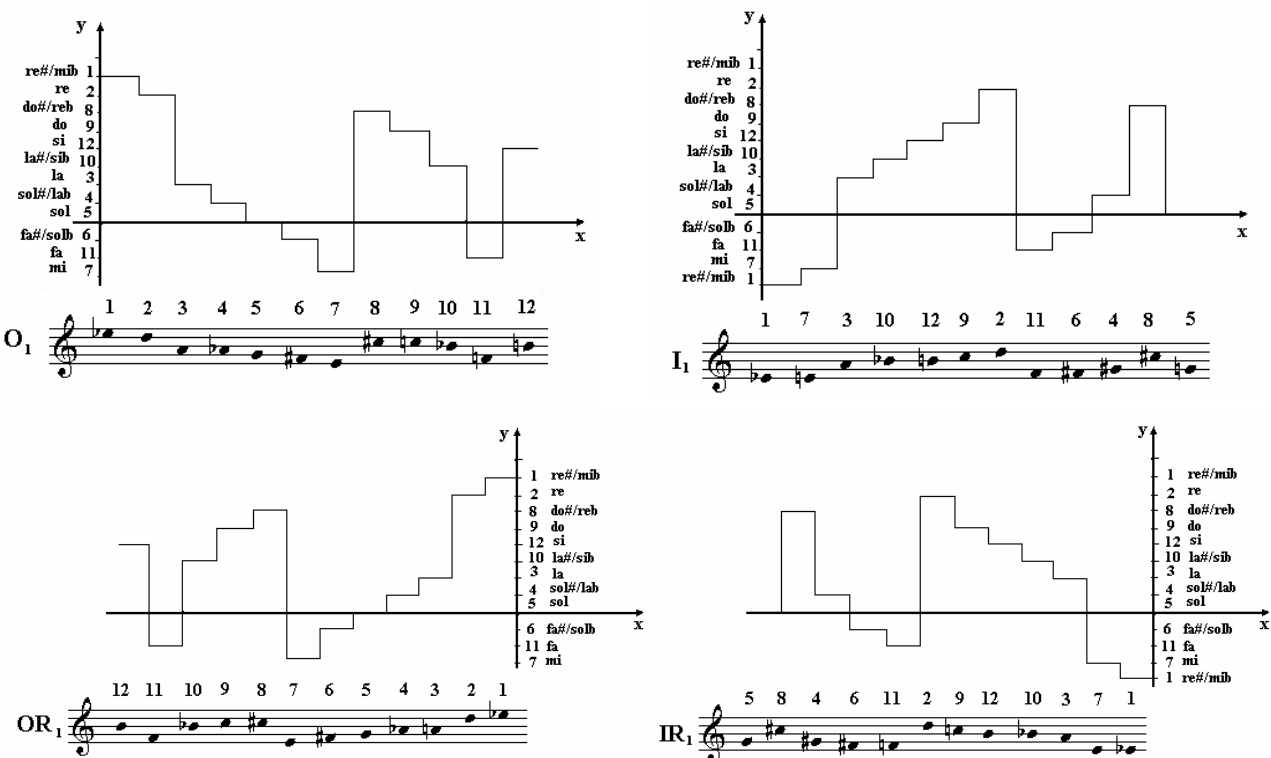


Figura 1b - Rappresentazione grafica della Serie O_1 = Serie Originale; OR_1 = Serie retrogrado dell'Originale (riflessione rispetto all'asse x); I_1 = Serie Inversa dell'Originale (riflessione rispetto all'asse y); IR_1 = Serie Retrogrado dell'Inverso (riflessione rispetto all'origine). A ciascuna altezza è costantemente associato il numero d'ordine che essa ha nella serie O_1 : *mib* = 1, *re* = 2 e così via.

Di conseguenza, se poniamo come origine del nostro sistema di riferimento, cioè $y = 0$, l'altezza del suono corrispondente ad un *sol*, (suono di riferimento per la lettura delle note sul pentagramma in chiave di violino) possiamo visualizzare le trasformazioni geometriche delle serie (Figura 1b).

Nell'esempio della figura 1b sono rappresentate le trasformazioni geometriche della serie Originale. In particolare, la serie OR_1 corrisponde alla serie retrogrado dell'Originale, la serie I_1 si riferisce alla serie Inversa dell'Originale, e la serie IR_1 indica la serie Retrogrado dell'Inverso della serie Originale.

L'esempio successivo (Figura 1c) mostra le trasformazioni geometriche della prima traslazione della serie Originale, ossia O_2 . In questo caso la serie OR_2 corrisponde alla serie Retrogrado della traslazione O_2 , la serie I_2 si riferisce alla serie Inversa della traslazione O_2 , e la serie IR_2 indica la serie Retrogrado dell'Inverso della serie O_2 .

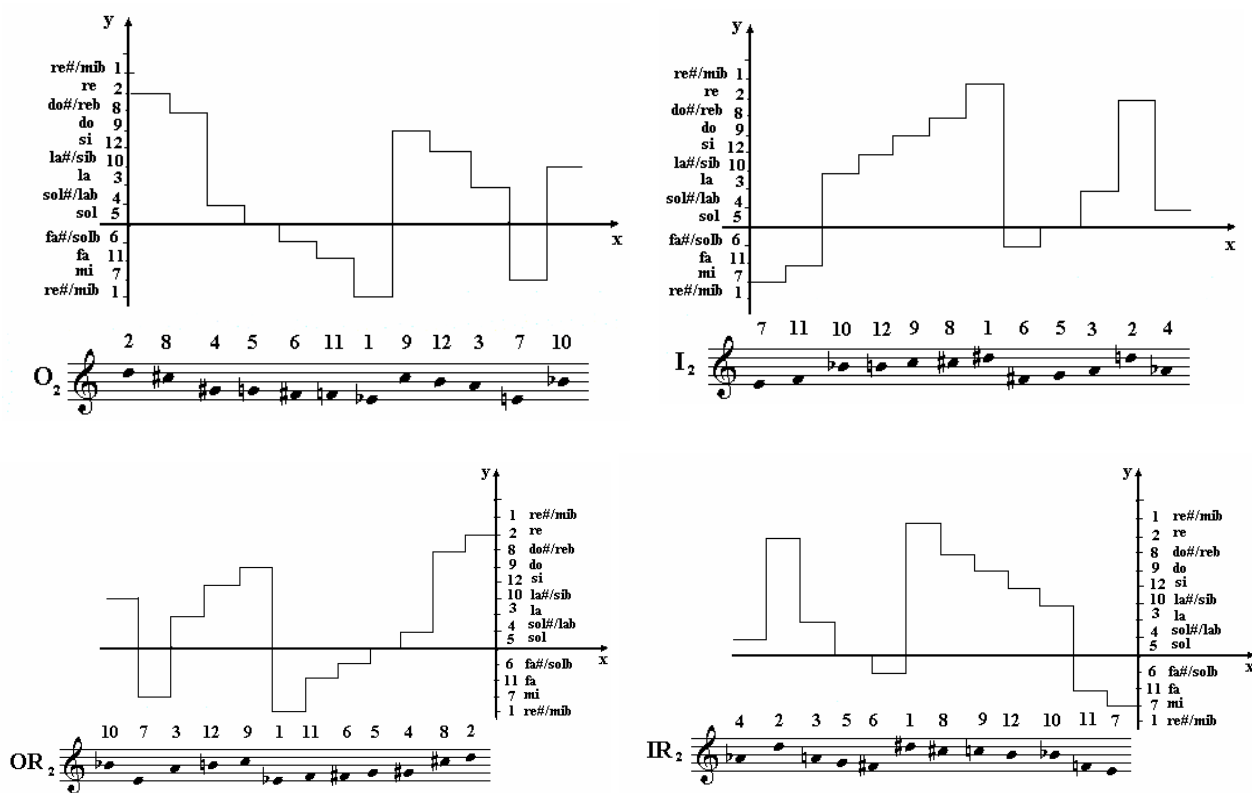


Figura 1c – Rappresentazione grafica della Serie $O_2 =$ Serie Traslata dell'Originale, serie $OR_2 =$ Serie retrogrado della traslazione O_2 (riflessione rispetto all'asse x); serie $I_2 =$ Serie Inversa dell'Originale (riflessione rispetto all'asse y); serie $IR_2 =$ Serie Retrogrado dell'inverso di O_2 (riflessione rispetto all'origine). A ciascuna altezza è costantemente associato il numero d'ordine che essa ha nella serie O_1 : mib = 1, re = 2 e così via.

A questo punto Boulez mette in ordine l'intera gamma delle successioni numeriche corrispondenti alle dodici traslazioni della serie Originale (O) e della serie Inversa (I) ottenendo le due matrici riportate nella tavola 1.

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%;"></td> <td style="width: 10%; text-align: center;">O →</td> <td style="width: 80%;"></td> <td style="width: 10%; text-align: center;">← R</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;">altezze (1°pf)</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">a →</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">c →</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">c →</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">2 8 4 5 6 11 1 9 12 3 7 10</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">b →</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">b →</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">3 4 1 2 8 9 10 5 6 7 12 11</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">4 5 2 8 9 12 3 6 11 1 10 7</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">5 6 8 9 12 10 4 11 7 2 3 1</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">6 11 9 12 10 3 5 7 1 8 4 2</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">7 1 10 3 4 5 11 2 8 12 6 9</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">8 9 5 6 11 7 2 12 10 4 1 3</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">9 12 6 11 7 1 8 10 3 5 2 4</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">10 3 7 1 2 8 12 4 5 11 9 6</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">11 7 12 10 3 4 6 1 2 9 5 8</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">12 10 11 7 1 2 9 3 4 6 8 5</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> </tr> <tr> </tr></table>		O →		← R	altezze (1°pf)	a →	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	c →		c →	2 8 4 5 6 11 1 9 12 3 7 10	b →		b →	3 4 1 2 8 9 10 5 6 7 12 11				4 5 2 8 9 12 3 6 11 1 10 7				5 6 8 9 12 10 4 11 7 2 3 1				6 11 9 12 10 3 5 7 1 8 4 2				7 1 10 3 4 5 11 2 8 12 6 9				8 9 5 6 11 7 2 12 10 4 1 3				9 12 6 11 7 1 8 10 3 5 2 4				10 3 7 1 2 8 12 4 5 11 9 6				11 7 12 10 3 4 6 1 2 9 5 8				12 10 11 7 1 2 9 3 4 6 8 5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
	O →		← R																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
altezze (1°pf)	a →	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	c →																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
	c →	2 8 4 5 6 11 1 9 12 3 7 10	b →																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
	b →	3 4 1 2 8 9 10 5 6 7 12 11																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																														
		4 5 2 8 9 12 3 6 11 1 10 7																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																														
		5 6 8 9 12 10 4 11 7 2 3 1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																														
		6 11 9 12 10 3 5 7 1 8 4 2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																														
		7 1 10 3 4 5 11 2 8 12 6 9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																														
		8 9 5 6 11 7 2 12 10 4 1 3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																														
		9 12 6 11 7 1 8 10 3 5 2 4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																														
		10 3 7 1 2 8 12 4 5 11 9 6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																														
		11 7 12 10 3 4 6 1 2 9 5 8																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																														
		12 10 11 7 1 2 9 3 4 6 8 5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																														

caratteristiche del suono) e di conseguenza la successione delle serie procede secondo un progetto ben preciso basato sul confronto speculare delle due matrici, ognuna delle quali è abbinata a un pianoforte.

Le altezze.

Il primo pianoforte esegue le traslazioni della serie O incluse nella prima matrice. Queste traslazioni però, non vengono utilizzate nella normale successione dall'alto in basso, ma in modo che la sequenza delle note iniziali delle traslazioni dia come risultato la serie I_1 (Figura 1a): *mib, mi, la, sib*, ecc. Dunque la prima traslazione prescelta per il primo pianoforte sarà quella iniziante da *mib*, indicata con la lettera *a* nella tavola 1 (1 = *mib*, 2 = *re*, 3 = *la*, ecc.; si verifichi la corrispondenza numero/note nella tabella 1 e la realizzazione musicale nella Figura 2); essa occupa la parte del primo pianoforte per le prime sette misure del pezzo. La seconda traslazione, sempre del primo pianoforte, (Figura 3, misura 8 e seguenti, pentagramma superiore, quindi solo mano destra) è quella iniziante da *mi* indicata con la lettera *b* nella tavola 1 (7 = *mi*, 1 = *mib*, 10 = *sib*, ecc.); contemporaneamente la mano sinistra, sempre del primo pianoforte, esegue la terza traslazione indicata con la lettera *c* nella tavola 2 (3 = *la*, 4 = *sol#* ossia *lab*, 1 = *re#*, ossia *mib*, e così via).

Al secondo pianoforte, specularmente, sono affidate le serie di altezza incluse nella seconda matrice. La loro successione è stabilita in base alla successione delle note che compare nella serie O_1 (Figura 1): *mib, re, la, lab*, ecc. Anche qui nella tavola le prime serie a comparire sono indicate nell'ordine con *a, b, c*, ecc. In particolare, la prima traslazione (Tavola 1, matrice a destra, Figura 3, misure 1-7) è quella iniziante con la lettera *a* (1 = *mib*, 7 = *mi*, 3 = *la*, ecc). La seconda traslazione, sempre del secondo pianoforte, (Figura 3, misura 8 e seguenti, pentagramma superiore, quindi solo mano destra) è quella iniziante da *b* (Tavola 1, matrice a destra; 2 = *re*, 1 = *mib*, 4 = *sol#* ossia *lab*, ecc.); contemporaneamente la mano sinistra, sempre del secondo pianoforte, esegue la terza traslazione indicata con *c* nella Tavola 2 (3 = *la*, 10 = *sib*, 1 = *mib*, e così via).

Quindi a partire della seconda sezione i due pianoforti eseguono contemporaneamente due traslazioni perfettamente speculari.

Le durate.

Anche per questo parametro il compositore annulla deliberatamente ogni possibilità di scelta affidandosi ai valori imposti dalle matrici della Tavola 1 che vanno associati ai valori ritmici in base alle corrispondenze già stabilite (Tabella 1). Stavolta le serie di valori numerici da attribuire alle durate per il primo pianoforte sono quelle che compaiono in basso nelle matrici lette da destra a sinistra (R e IR). La successione delle serie è data in modo che la sequenza dei numeri iniziali di ciascuna serie di durate dia come risultato la serie numerica associata a R in O_1 (Figura 1a: 12, 11, 10, 9, ..., 1).

La prima serie da utilizzare è dunque l'ultima in basso nella seconda matrice indicata con *a* nella Tavola 1, procedendo a ritroso dall'ultimo numero al primo (abbinando tale successione numerica ai valori di durata riportati nella Tabella 1 otteniamo: 12 = semiminima puntata; 11 = semiminima più semicroma puntata; 10 = semiminima più semicroma, ecc.; si segua la realizzazione musicale nella Figura 2).

La seconda serie è la penultima in basso, sempre nella seconda matrice, (iniziante con 11), indicata con *b* e così via. Per il secondo pianoforte, ci si serve delle successioni numeriche della prima Tavola, ordinate secondo la successione IR in I_1 (5, 8, 4, 6, ..., 1).

Mentre per le altezze si avvicinano dunque le traslazioni di una serie originale, per le durate si avvicinano le *permutazioni di una serie di valori fissi*: i valori sono sempre gli stessi ma compaiono in un ordine sempre diverso (ossia per il primo pianoforte le riflessioni rispetto all'origine, per il secondo pianoforte le riflessioni rispetto all'asse x). La durata complessiva di una tale permutazione (corrispondente a una serie di altezze) coincide con quella di una sezione del pezzo.

Dinamiche e tipi d'attacco

Procedimenti simili a quelli delle altezze e delle durate sono usati anche per le dinamiche e per i tipi d'attacco. Stavolta, il compositore ha deciso di utilizzare la successione dei numeri delle matrici in diagonale (Tavola 2). Le successioni dei tipi di attacco sono evidenziate nella tavola 2 con il fondo grigio chiaro, quelle delle dinamiche con il fondo grigio scuro.

Ciascuna intensità e ciascun tipo d'attacco, però, non viene associato a una singola nota, ma a un'intera serie di altezze e di durate. Ad esempio, la prima serie di intensità utilizzate per il primo pianoforte è quella della diagonale della prima matrice che parte in basso a sinistra (indicata nella Tavola 2 con *a* ed evidenziata in grigio scuro. 12, 7, 7, ecc.). Essendo il numero 12 corrispondente al segno dinamico *ffff* (Tabella 1), questo viene mantenuto al primo pianoforte per l'intera sezione (Figura 2, misure 1 – 7) occupata dall'esposizione della prima serie di dodici altezze e di dodici durate. Specularmente e contemporaneamente la prima serie d'intensità utilizzate per il secondo pianoforte è quella della diagonale della seconda matrice che parte in basso a destra (indicato nella Tavola 2 con *b* ed evidenziata in grigio scuro.. 5, 2, 2, ecc.). Essendo il numero 5 corrispondente al segno dinamico *quasi p*, (Tabella 1) questo viene mantenuto al secondo pianoforte per l'intera sezione (Figura 2, misure 1-7) occupata dall'esposizione della prima serie di dodici altezze e di dodici durate.

Di conseguenza, essendo il numero 7 il secondo della serie in diagonale (indicata nella tavola 2 con *a* nella prima matrice in basso a sinistra ed evidenziata in grigio scuro), la seconda serie di intensità utilizzata per il primo pianoforte corrisponde al segno dinamico *mf* (Tabella 1, figura 3, misure 8-15). Specularmente e contemporaneamente, essendo il numero 2 il secondo della serie in diagonale (indicata nella Tavola 2 con *b* nella seconda matrice in basso a destra ed evidenziata in grigio scuro), la seconda serie di intensità utilizzata per il secondo pianoforte corrisponde al segno dinamico *ppp* (Tabella 1, Figura 3, misure 8-15).

Boulez continua ad abbinare ad ogni serie le intensità ricavate dalla successione numerica delle diagonali, ma procede in modo discontinuo. Infatti, l'intensità della terza serie del primo pianoforte non risulta abbinata al numero 7 della diagonale, che corrisponde al segno dinamico *mf* (tavola 2), bensì al numero 11 che corrisponde al segno dinamico *fff*. Quindi l'autore in questo momento della composizione effettua un salto rispetto alla naturale successione della diagonale. Non sappiamo se questo modo di procedere è da attribuire al caso o a una precisa volontà dell'autore.

Terminati gli elementi della diagonale, sempre per la scelta delle intensità, Boulez utilizza, ancora una volta in modo discontinuo, i numeri posti sulle diagonali delle matrici ridotte, ossia le matrici ottenute togliendo 6 righe e 6 colonne alla matrice originale (indicate nella Tavola 2 con la lettera *c* per il primo pianoforte e con *d* per il secondo pianoforte).

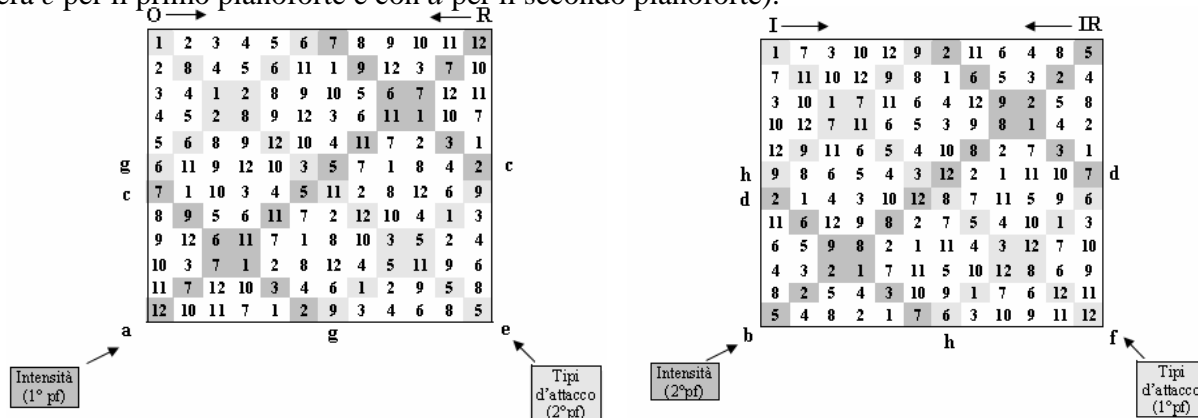


Tavola 2 – Matrici in cui sono evidenziate le successioni numeriche utilizzate per le intensità e i tipi d'attacco nel primo pezzo di Structures I per due pianoforti di Pierre Boulez.

Per i tipi d’attacco viene utilizzata la successione numerica della seconda matrice che parte in basso a destra (indicata nella Tavola 2 con *f* ed evidenziata in grigio chiaro). In questo caso entrambi i primi due numeri sono costituiti dal 12, che corrisponde al legato (Tabella 1). Come per la dinamica, il tipo d’attacco viene mantenuto al primo pianoforte per l’intera prima sezione (Figura 2, misure 1 – 7), ed essendo nuovamente 12 il secondo numero della serie esso si protrae, sempre al primo pianoforte, nella seconda sezione ma solo per la mano destra (Figura 3, misure 8 – 15). Infatti, la mano sinistra del primo pianoforte, sempre nella seconda serie, utilizza il terzo numero della diagonale, ossia 8 che corrisponde al segno dinamico *sfz*. specularmente e contemporaneamente per i tipi d’attacco del secondo pianoforte viene utilizzata la successione numerica della prima matrice che parte in basso a sinistra (indicata nella Tavola 2 con *e* ed evidenziata in grigio chiaro). Anche in questo caso entrambi i primi due numeri sono costituiti dal 5, che corrisponde al *normale* (Tabella 1). Come per la dinamica, il tipo d’attacco viene mantenuto al secondo pianoforte per l’intera prima sezione (Figura 2, misure 1 – 7), ed essendo nuovamente 5 il secondo numero della serie esso si protrae, sempre al secondo pianoforte, nella seconda sezione ma solo per la mano destra (Figura 3, misure 8 – 15). Infatti la mano sinistra del secondo pianoforte, sempre nella seconda serie, utilizza il terzo numero della diagonale, ossia 11 che corrisponde al segno dinamico *sfz*. Boulez continua ad abbinare ad ogni serie i tipi d’attacco ricavati dalla successione numerica delle diagonali, ma procede in modo discontinuo come per le intensità.

Terminati gli elementi della diagonale, per la scelta dei tipi d’attacco Boulez utilizza, ancora una volta in modo discontinuo, i numeri posti sulle diagonali delle matrici ridotte, anche queste ottenute, come per le intensità, togliendo 6 righe e 6 colonne alla matrice originale (indicate nella Tavola 2 con la lettera *h* per il primo pianoforte e con *g* per il secondo pianoforte).

Ecco, finalmente, il risultato di tutte queste operazioni combinatorie, l’*incipit* del primo pezzo di *Structures I* (Figura 2 e 3).

IL PIANO FORMALE DI *STRUCTURES I*

Questa composizione si configura dunque come un tessuto composto da diversi fili, che chiameremo “moduli”, ciascuno costituito da una traslazione della serie di altezze e da una permutazione della serie di durate; a ciascun modulo (e non a ciascuna nota) corrisponde una propria intensità e un tipo di attacco. Proprio quest’ultima condizione rende riconoscibili all’ascolto i singoli moduli, cioè le singole serie di altezze e durate. Poiché per tutte le serie di altezze vengono utilizzate sempre i medesimi valori di durata, anche se permutati, i singoli moduli hanno tutti le stesse dimensioni: $1 + 2 + 3 + \dots + 12 = 78$ trentaduesimi. Questo valore corrisponde alla durata di ciascuna sezione. Più moduli (cioè più serie) possono essere sovrapposti, “intrecciati”. Avendo tutti la medesima durata (78 trentaduesimi), i moduli sovrapposti inizieranno e termineranno simultaneamente¹⁵.

Nella Tavola 3 è riportato uno schema che sintetizza il piano formale del primo pezzo di *Structures I*. Nella riga inferiore è riportato il numero di moduli – ossia di singole serie di altezze e durate – sovrapposte in ciascuna sezione. Si osserva che le sezioni, 14 in tutto, sono distinte l’una dall’altra per avere differente *densità*. La densità massima si raggiunge nella quinta e nella quattordicesima sezione, in cui sono sovrapposti sei moduli; la densità minima si raggiunge nella quarta e nell’ottava sezione, in cui la trama sonora è ridotta a un’unica linea (e dunque in queste sezioni uno dei due pianoforti tace).

¹⁵ Ciò vuol dire che suoneranno sempre simultaneamente le prime note delle serie che vengono sovrapposte in un dato momento, ma non le ultime, che hanno ciascuna una durata diversa..

Très Modéré (♩ = 120)

PIANO I
 3/8 *ffff*
 legato sempre

Très Modéré (♩ = 120)

PIANO II
 3/8 *quasi p*
 sempre

5/16

5/16 (quasi p)

Figura 2 – Pierre Boulez, *Structures I*, primo pezzo misure 1-7; al di sopra delle note è indicato il numero corrispondente ai valori di durata secondo la Tabella 1; sono anche evidenziate le note delle due serie di altezze disposte nel medesimo registro e percorse a più breve distanza.

Modéré, presque vif

8

Modéré, presque vif

12

Figura 3 – Pierre Boulez, Structures I, primo pezzo misure 8 - 15;

	Parte A							Parte B						
Andamenti	M	V			L	V		M	L	V	M	V	L	M
Sezioni	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV
Numero di moduli sovrapposti	2	4	3	1	6	2	5	1	5	3	4	4	2	6

misure 8 16 23 32 39 48 57 65 73 82 90 98 106 115

Tavola 3 – Piano generale del primo pezzo di *Structures I* per due pianoforti di Pierre Boulez. (M = *Très Modéré*; V= *Modéré, presque vif*; L= *Lent*). Le corone squadrate hanno durata maggiore.

La differenziazione reciproca tra le sezioni è ulteriormente evidenziata dal compositore che introduce tra l’una e l’altra alcune corone e modifica le indicazioni di andamento. Le indicazioni di andamento usate sono *Très Modéré* (Molto moderato, abbreviato con M nella Tavola 3), *Modéré, presque vif* (Moderato, quasi vivo = V) e *Lent* (Lento = L). Come risulta nella tavola 3, in due casi alcune sezioni successive sono raggruppate in “macrosezioni” al cui interno l’andamento si mantiene invariato e sono evitate le corone. Si tratta delle sezioni seconda, terza e quarta e delle sezioni sesta e settima.

Il pezzo nel suo complesso è poi diviso in due grandi parti, A e B: nella prima sono usate le traslazioni della serie secondo la successione Originale (O) per il pianoforte 1 e l’Inversione (I) per il pianoforte 2; nella seconda parte sono usate le traslazioni secondo il Retrogrado (R) per il pianoforte 1 e l’Inversione del Retrogrado (IR) per il pianoforte 2. Per la serie delle durate, si segue l’ordine opposto: nella prima parte sono usate R e IR, nella seconda O e I.

Si è già detto che le traslazioni delle serie di altezze O nella parte del primo pianoforte sono ordinate in modo che la successione delle prime note di ciascuna serie dà come risultato l’Inversione della serie principale (I). Ciò è vero solo per la prima parte del primo pezzo di *Structures I*. Per quanto riguarda la seconda parte, la gestione della serie può essere desunta dalla parte superiore della Tavola 4.

Per le durate vale un discorso analogo. La gestione delle serie di durate è riassunta nella parte inferiore della Tavola 4.

		parte A	parte B
Altezze	I pf	serie O disposte secondo la successione di I ₁	serie IR disposte secondo la successione di IR ₁
	II pf	serie I disposte secondo la successione di O ₁	serie R disposte secondo la successione di R ₁
Durate	I pf	serie IR disposte secondo la successione di IR ₁	serie I disposte secondo la successione di R ₁
	II pf	serie R disposte secondo la successione di R ₁	serie O disposte secondo la successione di IR ₁

Tavola 4 – Schema della disposizione globale delle serie di altezze e di durate nelle due parti del primo pezzo di *Structures I* per due pianoforti di Pierre Boulez.

Abbiamo visto che dinamiche e tipi d'attacco rimangono invariati all'interno delle singole sezioni. La successione delle dinamiche al primo pianoforte nella prima parte di *Structures I* è quella stabilita dalla sequenza diagonale di numeri che nella prima matrice della Tavola 2 abbiamo indicato con *a*. Nella stessa prima parte il secondo pianoforte segue le dinamiche secondo la sequenza *b* stabilita dalla sequenza diagonale di numeri della seconda matrice (Tavola 2). Nella seconda parte del pezzo i due strumenti seguono rispettivamente le sequenze *c* e *d*.

Per i tipi d'attacco, nella prima parte i due pianoforti seguono rispettivamente le sequenze numeriche *f* ed *e*, nella seconda parte le sequenze *h* e *g*.

MARGINI DI SCELTA

Dicevamo all'inizio che, per quanto i vincoli tecnico-compositivi attivi in questo lavoro siano tra i più ferrei cui mai si sia sottomesso un autore occidentale, all'arbitrio soggettivo sono concessi comunque alcuni margini. Innanzitutto, non è stabilito *a priori*, e dunque è deciso volta per volta, il registro in cui ogni singola nota deve comparire¹⁶. L'osservazione delle scelte operate da Boulez in questo campo rivela particolari interessanti. Quando due moduli vengono sovrapposti, c'è il rischio che risuonino contemporaneamente o a breve distanza di tempo due note a intervallo di ottava (o di due ottave, o tre, ecc.); ciò sarebbe in contraddizione con uno dei principi cardine del serialismo. Per evitare un tale inconveniente bisogna disporre le note delle due serie che rischiano di entrare in “collisione d'ottava” alla medesima altezza: così invece di un intervallo d'ottava si percepisce la ripetizione di una medesima nota. Il rischio del raddoppio di ottava cresce con il crescere del numero di moduli che vengono sovrapposti e dunque la scelta di mettere le note uguali di moduli diversi alla stessa altezza è più frequente dove maggiore è la densità. Il culmine si registra infatti nella sezione V, che è a sei parti: qui ciascuna nota compare in un registro definito e solo in quello. Tuttavia un fenomeno analogo si osserva anche in sezioni che non hanno una densità elevata: ad esempio, nella prima sezione ben nove delle dodici note che compongono ciascuno dei due moduli sovrapposti condividono la medesima altezza fra un modulo e l'altro: molte più di quante ne occorrerebbero per evitare i raddoppi in ottava (Figura 4)

A sinistra della Figura 4 sono riportate, sovrapponendole come se fossero simultanee, tutte le note di cui si compone la serie O_1 , utilizzata al primo pianoforte, nel registro ad esse assegnato nella prima sezione del pezzo; a destra sono riportate invece le note della serie I_1 , utilizzata nella stessa sezione per il secondo pianoforte (si confronti con la Figura 2). Si osserva appunto che tra le due serie sono disposte nel medesimo registro 9 note su 12. Bisogna considerare che l'assenza di qualsiasi punto di riferimento di tipo metrico, ritmico, melodico, armonico, rende la trasparenza del tessuto musicale quasi assoluta e dunque il semplice ritorno di una nota basta ad attirare l'attenzione dell'ascoltatore. Ciò è tanto più vero quanto più la percussione delle note ripetute è ravvicinata: è il caso, nella prima sezione, dei due $do\#^4$ che si susseguono immediatamente (misura 6) e dei due $fa\#^4$ che sono separati da una sola nota intermedia (misure 4-5; figura 2). Questo aspetto può contribuire a determinare un certo “addensamento” del materiale musicale in certe zone (qui sarebbero le misure 4-6) che è da addebitare al compositore, essendo indipendente dall'automatismo delle regole combinatorie prestabilite.

¹⁶ Riferito agli strumenti in genere e alle voci il registro indica la loro estensione melodica, esso può essere grave, medio o acuto.



Figura 4 – Collocazione nei diversi registri delle note appartenenti alle serie O_1 e I_1 nella prima sezione del primo pezzo di Structures I. Le semibrevi evidenziano le note delle due serie di altezze che sono poste nel medesimo registro.

La possibilità di gestire liberamente l’uso dei registri dà al compositore la possibilità di sottolineare o no anche altri tipi di relazioni. Può accadere, infatti, che risultino sovrapposte due serie di altezze che hanno una certa sequenza di note in comune. Ciò avviene, ad esempio, nella sezione III, (misure 16-22) in cui sono sovrapposte O_{10} e O_{12} (Figura 5a; vedi anche la partitura in allegato): in entrambe compare la successione di note *mi, mib, re*. Il fatto che queste successioni di tre note siano state poste dal compositore nello stesso registro dà luogo a una sorta di imitazione tra le due parti interessate (Figura 5b).



Figura 5 – a) traslazioni 10 e 12 della serie O . utilizzate nella sezione III del I pezzo di Structures I; la graffa evidenzia la successione di tre note comune alle due traslazioni; b) Pierre Boulez, Structures I, primo pezzo, misure 17-19, la graffa evidenzia un accenno di imitazione.

OBIEZIONI, CRITICHE E CONCLUSIONE

Non deve stupire, vista la fattura del lavoro di cui ci stiamo occupando, che esso si sia attirato sin dal suo apparire alcune critiche. Queste si sono appuntate tanto sul versante tecnico-compositivo quanto su quello più propriamente estetico.

Il compositore György Ligeti (Dicsöszentmárton, Transilvania, 1923, compositore ungherese naturalizzato austriaco) osservò che *Structures I* presenta alcune discrepanze rispetto alle regole combinatorie stabilite dal compositore¹⁷. La principale consiste nel fatto che la successione delle serie di durata nella parte A al secondo pianoforte non è completa: delle 12 serie previste ne manca una, mentre un'altra è ripetuta per due volte¹⁸. Ovviamente non è possibile stabilire se questa, come anche altre deroghe alla inflessibile “catena di montaggio” del lavoro rintracciate da Ligeti, sia frutto di una svista o di una deliberata scelta di Boulez..

Ligeti avanzò altre riserve che riguardano la praticabilità di certe prescrizioni della scrittura pianistica (ad. esempio, sulla compatibilità fra indicazioni dinamiche come *pppp* e tipi d'attacco come lo sforzato - staccato). Egli mosse alla composizione anche un'obiezione di stampo diverso: quando si *trasla*, come fa Boulez, una serie di altezze, il rapporto intervallare tra le note consecutive rimane immutata (fatte salve le trasformazioni imposte al materiale melodico tramite la distribuzione delle note tra i registri); non così quando, come nel caso di *Structures I*, si *permuta* una serie di valori ritmici stabiliti: il rapporto fra i valori consecutivi, infatti, cambia continuamente in ciascuna permutazione. Dunque la combinazione fra una certa *traslazione* delle serie di altezze con una determinata *permutazione* delle serie non corrisponde a un criterio organico di corrispondenza tra le due dimensioni sonore e può essere tacciata di incongruenza linguistica.

Karlheinz Stockhausen (Mödrath, Colonia, 1928, compositore tedesco) in un celebre articolo¹⁹ aveva già rilevato alcune incoerenze del genere nel metodo che Boulez aveva adottato per articolare altezze e durate in *Structures I*. Ad esempio, egli diceva, l'omogeneità della scala utilizzata per le durate rispetto a quella utilizzata per le altezze risultava solo apparente: infatti, qui tra una durata e quella immediatamente inferiore c'è sempre la medesima *differenza*, (Tabella 1), mentre come si sa, tra le frequenze di due altezze consecutive – es. *la-la#* o *mi-fa* – interviene sempre il medesimo rapporto²⁰. Dunque l'unificazione del trattamento cui sono sottoposte le diverse componenti musicali in *Structures I* sarebbe solo illusoria.

Ma ancor più radicali sono le riserve espresse dal musicologo e linguista francese di origine belga Nicolas Ruwet (Saive 1923)²¹. Egli considera la musica e la lingua come sistemi integrati costituiti dalla combinazione di diversi sotto-sistemi di organizzazione, ciascuno dotato di un proprio funzionamento. Nella lingua questi sistemi parziali sono quello fonologico, quello grammaticale, quello semantico, ecc. ; nella musica sono quello attinente al ritmo, quello attinente alle intensità, alle altezze, ecc. La generalizzazione del principio seriale a tutte le componenti <<significa che si concepiscono i rapporti fra i diversi sistemi parziali semplicemente sotto la forma del *parallelismo*, vale a dire sotto la forma più primitiva che ci sia>>, mentre << normalmente, in un sistema musicale,

¹⁷ Op. cit.

¹⁸ Le serie sono rispettivamente IR e IR₃

¹⁹ Lo scritto comparve nel 1957 sul terzo numero della rivista <<Die Reihe>>, che in quegli anni costituiva il principale *forum* di discussione sui problemi della “nuova musica”.

²⁰ Ad esempio, le frequenze del *la* la^2 e del *la#* la^2 sono rispettivamente di 220 e di 233,1 Hz (approssimate al primo decimale); le frequenze del *la* la^3 e del *la#* la^3 sono rispettivamente 440 e 466,2 Hz; evidentemente la differenza tra le frequenze è assai diversa: il rapporto, invece tra le frequenze di due note a distanza di semitono è sempre uguale ed è pari a

$\sqrt[12]{2}$

²¹ Esse sono contenute nel saggio *Contraddizioni del linguaggio seriale* del 1959, la cui traduzione italiana è reperibile in *Linguaggio, musica, poesia*, Torino Einaudi, 1983, pp. 5-24.

come in un sistema linguistico (...), i differenti sotto-sistemi sono in rapporti molto più complessi, rapporti di implicazione mutua, di complementarità, di compensazione, ecc.>>. Dunque l'introduzione della serie come principio organizzativo generale fu voluta secondo Ruwet <<per mantenere una certa uniformità nel linguaggio musicale, minacciato dal caos dopo la caduta del sistema di relazioni tonali>>²²; ma ha sortito un risultato musicale “artificiosamente primitivo”.

La stesso Boulez spiegò poi il senso dell'operazione costituita dal primo pezzo di *Structures I*: si trattava di spingere alle estreme conseguenze i presupposti teorici del serialismo, quali che fossero i risultati musicali ottenuti. In *Structures I*, afferma Boulez, <<il linguaggio era strettamente murato in una rete di possibilità decisamente delimitata; (...) persisto a credere che questa esperienza non fu fondamentale che nella misura in cui raggiunse direttamente le frontiere dell'assurdità logica (...) Mi rendevo talmente conto di ciò che, immediatamente dopo aver scritto il pezzo, gli diedi come epigrafe il titolo di un quadro di Paul Klee: *Monumento al limite della terra fertile*>>²³.

Tutto ciò sottolinea le problematiche insite in una composizione come *Structures I*, ma non ne sminuisce l'importanza storica. L'uso delle matrici non solo riduce al minimo il campo delle scelte concesso al compositore, ma impedisce che nell'ascoltatore si determini qualsiasi sistema di aspettative rispetto a tutte le componenti musicali. Ossia: nella musica fino ad ora erano offerte al pubblico – dove più, dove meno – una serie di punti di riferimento per la fruizione dell'oggetto musicale: ritorni tematici, diverse forme di regolarità metrica o ritmica, relazioni di tipo armonico – tonale, ecc. questi elementi aiutavano l'interpretazione degli eventi sonori passati e spingevano a operare previsioni su quelli futuri. Persino la serie, nelle intenzioni di Schönberg, doveva costituire principalmente un punto di riferimento di questo tipo, sostituendosi alle scale tradizionali. In *Structures I* tutto ciò è deliberatamente negato: le tecniche che presiedono alla composizione dell'opera sono espressamente intese a stabilire una serie di eventi totalmente imprevedibili. Questi si succedono, è vero, secondo una logica combinatoria prestabilita, ma essa è totalmente astratta: ignara, cioè, sia delle capacità percettive umane che delle proprietà del materiale musicale che va a organizzare.

Quanto detto fino ad ora ci permette di affermare che *Structures I* rappresenta una significativa risposta al profondo bisogno di innovazione del linguaggio musicale che nel secondo Novecento i compositori dell'epoca consideravano inevitabile. Il rapporto fra l'*Io* e il *Mondo*, dopo gli orrori del secondo conflitto mondiale, si alimentava di incomunicabilità e l'artista percepiva un isolamento sempre maggiore; da qui la scelta della rottura con il passato e con l'eredità della storia per dare vita a un nuovo linguaggio dove la musica era capace di *esprimersi* da sola attingendo alla spietata razionalità del *numero* che in se racchiude tutte le caratteristiche del suono.

Boulez, per rinnovare profondamente il linguaggio della musica, avverte il bisogno di esplorare nuovi sentieri e in ultima analisi, l'obiettivo di fare *tabula rasa* con le abitudini inveterate di ascolto e con qualsiasi eredità delle tecniche di composizione tradizionale può dirsi pienamente raggiunto. Così l'opera, che viene affidata alla meditazione dell'ascoltatore, destinatario ultimo per qualsiasi artista, conquista un posto di indiscussa attualità alle soglie del terzo millennio.

²² *Op.cit.*, pp. 12-13.

²³ Da PIERRE BOULEZ, *Pensare la musica oggi*, cit., pp. 192-193. Abbandonata l'idea di apporre questo titolo al primo pezzo di *Structures I* Boulez denominerà *Ai limite della terra fertile* un articolo, come già detto, pubblicato su “Die Reihe” nel 1955.

PROPOSTE DIDATTICHE

Il contenuto del presente lavoro è già inserito nei piani di studio curricolari per l’insegnamento della matematica e della musica nei licei Musicali, nei licei Socio-Psico-Pedagogico e nei corsi di Laurea Universitari dei Conservatori di Musica.

Scuola Secondaria Superiore:

Liceo delle Scienze Sociali ad indirizzo musicale: cattedre di Matematica e Storia della Musica in compresenza

Il corso di studio quinquennale è attivo da cinque anni presso L’Istituto Magistrale Statale “Regina Margherita” di Palermo ed è abbinato al Conservatorio di Musica “Vincenzo Bellini” della stessa città.

Nel sistema scolastico italiano, fino ad oggi la formazione professionale del musicista si è limitata alla pratica strumentale o vocale. Le profonde innovazioni economiche-culturali cui la nostra società va incontro con ritmi ormai vertiginosi rende necessario da parte dei musicisti un supporto formativo tale da promuovere la crescita culturale unitamente alla preparazione professionale, in grado di rispondere alla grande sfida del nostro tempo. Questa è la premessa che ha condotto lo scorso 30 Novembre 2000 il Conservatorio di Musica "V. Bellini" e il Liceo Statale "R. Margherita" a firmare un protocollo d'intesa che impegna le due Istituzioni a garantire alla propria utenza un sistema integrato di educazione e formazione professionale.

Pertanto il presente lavoro, che è rivolto a un gruppo classe di musicisti in formazione, si prefigge i seguenti obiettivi:

MATEMATICA

- Scoprire le proprietà delle figure geometriche che si conservano quando queste figure sono soggette a quel particolare tipo di trasformazione che è l’isometria.
- Scoprire, sempre per via grafica, i risultati che si possono ottenere combinando varie isometrie.
- Comprendere lo spirito della geometria moderna, secondo l’importanza datole da Klein

MUSICA

- Conoscere la musica colta occidentale del Novecento in prospettiva storica.
- Ampliare le esperienze di ascolto musicale sollecitando in particolare la fruizione analitica.
- Individuare le relazioni che intercorrono tra il contesto storico- culturale - musicale del Novecento e quello dei secoli precedenti.

MATEMATICA E MUSICA

Finalità:

- Scoprire l’unità della cultura nella diversità dei saperi.

Obiettivi:

- Individuare le relazioni che intercorrono fra le isometrie grafiche e quelle sonore.
- Comprendere il fondamentale ruolo che il *numero* assume nella definizione del materiale precompositivo, nella stesura del pezzo e nella prassi esecutiva.
- Confrontare il modello percettivo della musica seriale con quella tonale.

Liceo Socio-Psico-Pedagogico della sperimentazione Brocca: cattedre di Matematica e Storia della Musica in compresenza.

I piani di studio della scuola secondaria superiore, sperimentazione Brocca, prevedono l'insegnamento della storia della musica soltanto nel triennio del liceo Socio-Psico-Pedagogico. La componente storico-estetica della Musica si inserisce nell'indirizzo completando il processo educativo sia della formazione pedagogico-didattica, sia della integrazione nel contesto sociale della comunicazione.

Pertanto il presente lavoro è rivolto a un gruppo classe di non musicisti che studia "musica" nell'ambito di una più ampia formazione culturale di indirizzo umanistico; in esso risulta presente, per tutto il quinquennio, l'insegnamento della matematica nella previsione della polivalenza degli sbocchi e in relazione alla diversità dei settori professionali cui può fare riferimento il corso di studio.

Esso si prefigge i seguenti obiettivi:

MATEMATICA

- Acquisizione di conoscenze a livelli più elevati di astrazione e di formalizzazione.
- Capacità di cogliere i caratteri distintivi dei vari linguaggi (Storico-naturali, formali, artificiali)
- Capacità di utilizzare metodi, strumenti e modelli matematici in situazioni diverse.
- Attitudine a riesaminare criticamente e a sistemare logicamente le conoscenze via via acquisite.
- Interesse sempre più penetrante a cogliere aspetti genetici e momenti storico filosofici del pensiero matematico.

MUSICA

- Partecipazione diretta e attiva all'esperienza musicale nel momento dell'ascolto.
- Conoscere le fondamentali strutture organizzative e le architetture formali del linguaggio musicale.
- Affinare le competenze relative alle fonti sonore strumentali.
- Creare, attraverso l'esperienza estetica dell'ascolto e dell'analisi, l'interesse per il passato e per il presente musicale.
- Comprendere e verificare in maniera storicamente sistematica gli elementi costitutivi dell'opera ascoltata.
- Collocare l'opera musicale nel più ampio contesto delle varie esperienze umane, artistiche, culturali, scientifiche e sociali.

MATEMATICA E MUSICA

Finalità:

- Scoprire l'unità della cultura nella diversità dei linguaggi.

Obiettivi:

- Scoprire, attraverso la grafica abbinata all'ascolto, la rappresentazione sonora delle isometrie e la dimensione grafica del materiale sonoro.
- Comprendere il rapporto fra le griglie numeriche che riepilogano le isometrie e il processo compositivo.

Università della Musica

Il Parlamento Europeo con la dichiarazione della Sorbona del 1998 ha manifestato la volontà ed ha assunto l'impegno di uniformare il sistema didattico europeo sull'istruzione universitaria al fine di favorire da un lato la cooperazione e dall'altro la mobilità, creando le condizioni affinché i percorsi formativi dei singoli paesi siano più facilmente comparabili e intercambiabili.

Parte integrante di questo progetto è la legge 21 dicembre 1999 n° 508 che ha avviato in Italia una profonda riforma della formazione artistica e musicale. In base a tale legge i Conservatori di Musica sono trasformati in Istituti Superiori di Studi Musicali (art. 2 comma 2) che “rilasciano specifici diplomi accademici di 1° e 2° livello, nonché diplomi di perfezionamento e di specializzazione, dichiarati equipollenti ai titoli di studio universitari”. Con i decreti del 2002 sono già stati attivati, in tutti i Conservatori italiani, i corsi triennali e biennali per il conseguimento dei diplomi accademici di I e II livello in discipline musicali.

Il piano di studi per il diploma di II livello in Pianoforte, indirizzo interpretativo-compositivo, curriculum solistico-cameristico annovera quanto segue:

Il corso è finalizzato alla:

- Acquisizione delle competenze specifiche che caratterizzano il profilo professionale del curriculum, prefiggendosi il conseguimento di una solida formazione tecnico-esecutiva ed interpretativa inserita in un più ampio contesto storico-culturale e artistico dalle origini ai nostri giorni.

Sono obiettivi formativi specifici:

- Conoscenza e approfondimento del repertorio pianistico solistico-cameristico
- Approfondimento delle specifiche abilità tecniche esecutivo-interpretative
- Acquisizione di metodologie filologiche e interpretative idonee alla decodificazione del testo musicale in relazione all'evoluzione del linguaggio
- Acquisizione di tecniche, anche in campo multimediale, per l'utilizzazione di strumenti informatici applicati alla produzione musicale e sonora.

Attività formativa:

- Storia ed analisi del repertorio pianistico
- Analisi delle forme compositive
- Semiografia della musica (classica, romantica-moderna e contemporanea)
- Prassi esecutiva e repertorio del pianoforte contemporaneo

Il pianista contemporaneo non può ignorare la letteratura del Novecento e il presente lavoro si può considerare una ghiotta opportunità per conoscere il repertorio e le modalità esecutive più avanzate unitamente al pensiero di Boulez, uno degli indiscussi protagonisti della storia della musica del secondo Novecento.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Boulez P. *Note di apprendistato* a cura di Paule Thévenin, Torino, Einaudi Editore, 1968
- [2] Boulez P. *Pensare la musica oggi*, Torino, Einaudi Editore, 1979
- [3] Boulez P. *Punti di riferimento* a cura di Jean-Jacques Nattiez, traduzione di G. Guglielmi Torino, Einaudi Editore, 1984
- [4] Boulez P. *Structures, 2pianon à 4 main*, Wien, Universal Edition, 1972
- [5] Coxeter H.S.M. *Introduction to geometry*, London, John Wiley, 1961
- [6] Dedò M. *Trasformazioni geometriche*, Bologna, Zanichelli, 1996
- [7] Emmer M. *Matematica e Cultura*, Atti del Convegno di Venezia, 1997, Milano, Springer, 1998
- [8] Furinghetti F. *Matematica oggi, dalle idee alla scuola*, Genova, Mondadori, 1990
- [9] Galante D. *Aspetti didattici dello studio delle trasformazioni geometriche: l'Offerta Musicale di J.S.Bach*, G.R.I.M., N.8
- [10] Groud D. J. *Storia della Musica in Occidente*, Milano, Feltrinelli Editore, 1988
- [11] Karolyi O. *La grammatica della musica*, Torino, Einaudi Editore, 1969
- [12] Lanza A. *Il Novecento II, parte seconda*, in *Storia della Musica* a cura della Società Italiana di Musicologia, vol.10, Torino, Edizioni di Torino, 1980
- [13] Ligeti G. *Structures I*, in *Die Reihe IV*, Vienna, Universal Edition, 1958
- [14] Rossi L. *Teoria Musicale*, Bergamo, Edizioni Carrara, 1977
- [15] Ruwet N. *Linguaggio, musica, poesia*, Torino, Einaudi, 1983
- [16] Salvetti G. *Il Novecento I*, in *Storia della Musica* a cura della Società Italiana di Musicologia, vol. 9, Torino, Edizioni di Torino, 1977
- [17] Spagnolo F. *Insegnare le Matematiche nella scuola secondaria*, Firenze, La Nuova Italia, 1998
- [18] Stoka M. *Istituzioni di matematiche*, Seconda edizione, Palermo, CELUP 1986
- [19] Surian E. *Manuale di Storia della Musica, Il Novecento*, vol.IV, Milano, Rugginenti Editore, 1995
- [20] Vinay G. *Il Novecento II, parte prima*, in *Storia della Musica*, a cura della Società Italiana di Musicologia, vol.10, Torino, Edizioni di Torino, 1978
- [21] Verzina N. *Tecnica dei gruppi, scrittura timbrica, alea Problemi micro e macro-morfologici in Stockhausen, Maderna e Boulez* in *nuova rivista musicale italiana*, 1/4, Gennaio/dicembre, 1998 Firenze, RAI-ERI, pp. 299-332
- [22] Weyl H. *Symmetry*, Princeton, U.S.A., Princeton University Press, 1952

DIZIONARI

- [1] La Nuova Enciclopedia Della Musica Garzanti Milano, Garzanti Editore, 1993
- [2] D.E.U.M.M., *Dizionario Enciclopedico Universale Della Musica e dei Musicisti*, Il lessico, le Biografie, Torino UTET, 1983-1988
- [3] New Grove, *The New Grove Dictionary of Music and Musicians*, Edited by Stanley London, Macmillan, 1980

DISCOGRAFIA

- [1] Boulez P. *Structures pour deux pianos*, Alfons und Aloys Kantarsky, Wergo, 6011-2

ALLEGATO
“STRUCTURES I” PER DUE PIANOFORTI DI PIERRE BOULEZ:
PRIMA PARTE

Alle Rechte vorbehalten
Tous droits réservés

STRUCTURES

Pierre BOULEZ

I a

Très Modéré

PIANO I
très *mf*

Très Modéré

PIANO II
très *p*

5

Copyright 1975 by Universal Edition (London) Ltd., London
Universal Edition Nr. 12287

“Quaderni di Ricerca in Didattica”, n16, 2006.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Modéré, presque vil

8

Modéré, presque vil

ppp

12

ppp

U.E. 11187

16

20

20

20

U.E. 12867

Handwritten musical score for piano, measures 23-27. The score is written on grand staves with treble and bass clefs. It features various musical notations including notes, rests, and dynamic markings. The time signature is 2/8. The score is divided into two systems, with measure numbers 23, 24, 25, 26, and 27 indicated. The notation includes complex rhythmic patterns and dynamic markings such as 'p' and 'f'.

Handwritten musical score for piano, measures 31-34. The score is written on four staves (two systems of two staves each). The tempo is marked "Lent". The key signature is one flat (B-flat). The score includes complex rhythmic patterns, including triplets and sixteenth notes. Dynamic markings include *pp*, *p*, *f*, and *mf*. The score is divided into measures 31, 32, 33, and 34. Measure 31 is marked with a 3/16 time signature. Measure 32 is marked with a 6/16 time signature. Measure 33 is marked with a 5/16 time signature. Measure 34 is marked with a 5/16 time signature. The score is signed "G. B. Galante" at the bottom.

The image displays a musical score for piano, consisting of two systems of staves. The first system, starting at measure 36, features a complex rhythmic structure with time signatures of 4/16 and 5/16. The second system, starting at measure 39, features a tempo marking of "Modéré, presque vil" and a time signature of 2/8. The score includes various musical notations such as notes, rests, and dynamic markings like *p* and *f*. The page number 88 is visible at the bottom right.

The image displays a handwritten musical score for piano, consisting of two systems of staves. Each system includes a grand staff with a treble clef on the upper staff and a bass clef on the lower staff. The first system is marked with measure numbers 42 and 43. The second system is marked with measure numbers 45 and 46. The notation includes various note values, rests, and dynamic markings such as *(f)* and *(mf)*. A 'Coda' symbol is present at the end of the second system. The score is written in black ink on white paper.

Handwritten musical score for piano, measures 49-52. The score is written on four staves (two grand staff systems). The first system (measures 49-50) shows a grand staff with a treble clef on the upper staff and a bass clef on the lower staff. The second system (measures 51-52) also shows a grand staff with a treble clef on the upper staff and a bass clef on the lower staff. The music is in 2/8 time, indicated by the time signature $\frac{2}{8}$ at the beginning of each system. The score includes various musical notations such as notes, rests, and dynamic markings like *ppp* and *p*. The piece concludes with a double bar line and the number 5/16 written at the end of the second system.

The image displays a musical score for piano, consisting of three systems of staves. The first system (measures 55-57) features a tempo marking of *Très Modéré* and dynamic markings of *ppp* and *p*. The second system (measures 58-60) includes a *ppp* marking and a *Très Modéré* tempo. The third system (measures 61-63) shows a *ppp* marking. The score includes various musical notations such as notes, rests, and dynamic markings. The tempo *Très Modéré* is indicated at the beginning of the first and second systems. The dynamic *ppp* (pianissimo) is used throughout, with some *p* (piano) markings. The score is numbered 55, 58, and 61 on the left side of the staves.

The image displays a musical score for piano, consisting of four systems of staves. The first system (measures 62-63) shows a treble and bass staff with a 5/16 time signature. The second system (measures 64-65) continues the piece, with a 2/8 time signature in the second measure and a 5/16 time signature in the third measure. The score includes various dynamic markings such as *ppp*, *pp*, and *ppp*, and tempo markings like *Lento*. The notation is dense, with many notes and rests, and includes some unusual rhythmic values like 3/8 and 5/16.

The image displays a musical score for piano, consisting of four systems of staves. The first system (measures 69-70) is in 5/16 time. The second system (measures 71-72) is in 2/8 time. The score includes various dynamic markings such as *pppp*, *pp*, and *ppp*, along with phrasing slurs and articulation marks. The notation is complex, with many notes beamed together and some notes marked with accents or slurs. The page number 69 is visible on the left side of the first system, and 71 is visible on the left side of the third system.

The image displays a musical score for piano, consisting of five systems of staves. The first system (measures 73-74) is marked "Modéré, presque vil" and "mp". The second system (measures 75-76) is also marked "Modéré, presque vil" and features dynamic markings "pppp" and "f". The third system (measures 77-78) is marked "(mp)" and includes dynamic markings "pppp" and "f". The fourth system (measures 79-80) is marked "f" and includes dynamic markings "pppp" and "f". The fifth system (measures 81-82) is marked "f" and includes dynamic markings "pppp" and "f". The score includes various musical notations such as notes, rests, and slurs.

The image displays a musical score for piano, consisting of four systems of staves. The tempo is marked "Très Modéré".

- System 1 (Measures 80-81):** The left hand (bass clef) starts with a dynamic marking of *mp*. Measure 80 contains a 5/16 time signature. Measure 81 contains a 2/8 time signature. The right hand (treble clef) has a dynamic marking of *pppp*.
- System 2 (Measures 82-83):** The left hand begins with *pppp* dynamics. Measure 82 has a 5/16 time signature, and measure 83 has a 2/8 time signature. The right hand has a dynamic marking of *pppp*.
- System 3 (Measures 84-85):** The right hand has a dynamic marking of *ppp*. The left hand has a dynamic marking of *mp*. Both hands have a 2/8 time signature.
- System 4 (Measures 86-87):** The right hand has a dynamic marking of *ppp*. The left hand has a dynamic marking of *mp*. Both hands have a 2/8 time signature.

At the bottom center of the page, the text "G. R. I. M." is visible.

The image displays a musical score for piano, consisting of six systems of staves. The first system (measures 86-87) features a 2/8 time signature and a 5/16 time signature. The second system (measures 88-89) also features a 2/8 time signature and a 5/16 time signature. The third system (measures 90-91) features a 2/8 time signature and a 5/16 time signature. The score includes various dynamic markings such as *mf*, *ppp*, *mp*, and *ff*. The tempo marking *Modéré, presque vif* is present in the third system. The score is written for piano and includes a variety of rhythmic patterns and articulations.

The image displays a musical score for piano, consisting of four systems of staves. The first system (measures 91-92) features a bass clef on the left and a treble clef on the right. The second system (measures 93-94) features a treble clef on the left and a bass clef on the right. The time signature is 5/16, indicated at the end of the second and fourth systems. The score includes various musical notations such as notes, rests, and dynamic markings like *mp* and *ppp*. The piece concludes with a double bar line and a repeat sign at the end of the fourth system.

U.S. 1067

The image displays a musical score for piano, consisting of four systems of staves. The first system (measures 96-97) features a treble clef with a 5/16 time signature and a dynamic marking of *f*. The second system (measures 98-99) features a bass clef with a 5/16 time signature and dynamic markings of *ppp* and *pp*. The third system (measures 96-97) features a treble clef with a 5/16 time signature and a dynamic marking of *mp*. The fourth system (measures 98-99) features a bass clef with a 5/16 time signature and a dynamic marking of *f*. The word "Lento" is written above the first and third systems. The number "96" is written to the left of the first system, and "99" is written to the left of the third system. The number "5/16" appears at the beginning and end of each system. The score includes various musical notations such as notes, rests, and dynamic markings.

The image displays a musical score for piano, consisting of four systems of staves. The first system (measures 101-102) features a 5/16 time signature and a dynamic marking of *mp*. The second system (measures 103-104) includes a tempo marking of "Très Modéré" and dynamic markings of *ppp* and *pp*. The score shows a progression of time signatures: 5/16, 3/16, and 2/8. The notation includes various rhythmic values, accidentals, and articulation marks.

The image displays a musical score for piano, consisting of four systems of staves. The first system is labeled with the measure number 107. The second system is labeled with the measure number 109. The score includes various dynamic markings such as *ppp*, *pp*, and *mp*. The notation includes notes, rests, and slurs, with some notes marked with accents. The overall style is that of a classical piano score.

The image shows a musical score for piano, consisting of four systems of staves. The first system is labeled with the number 112 on the left. The second system is labeled with the number 114 on the left. Each system contains two staves (treble and bass clef). The music is written in a style that includes various dynamic markings such as *pp*, *ppp*, and *pppp*. The notation includes notes, rests, and some articulation marks. The score is presented in a clear, legible format with a white background and black ink.

U. B. 11477

INDICE

Sommario.....	p. 1
Introduzione.....	p. 2
Il contesto storico e la matematizzazione del processo compositivo.....	p. 2
<i>Sturctures I</i> per due pianoforti: il materiale precompositivo e le matrici.....	p. 4
Matematizzazione e serializzazione di tutte le componenti musicali in <i>Sturctures I</i>	p. 8
Il piano formale di <i>Sturctures I</i>	p. 11
Margini di scelta.....	p. 15
Obiezioni, Critiche e Conclusione.....	p. 17
Applicazioni didattiche	p. 19
Bibliografia	p. 22
Discografia	p. 22
Allegato: partitura di <i>Sturctures I</i> , prima parte.....	p. 23