"Quaderni di Ricerca in Didattica", n17, 2007.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles : de quoi s'agit-il ?

Bernard Parzysz

Dept. de Mathematiques I.U.F.M. 45044 ORLEANS Cedex 1 - France
Bernard.Parzysz@orleans-tours.iufm.fr

Résumé : La géométrie enseignée, de l'enseignement primaire à l'université, se construit comme une modélisation de l'espace physique et évolue d'une « géométrie de l'observation » à une « géométrie de la démonstration ». On peut rendre compte de cette évolution en considérant plusieurs paradigmes géométriques distincts. Au niveau de l'enseignement obligatoire, on peut en particulier distinguer deux paradigmes : une géométrie « spatio-graphique » (ou G1) et une géométrie « proto-axiomatique » (ou G2). En fait, la résolution d'un problème de géométrie élémentaire consiste en une succession d'allers et retours entre G1 et G2, centrés sur la « figure ». Celle-ci joue un rôle crucial dans le processus ; en effet, bien qu'elle constitue une aide précieuse dans les conjectures, elle peut également constituer un obstacle à la démonstration, car « l'évidence de la figure » peut être source de confusion dans l'utilisation des données.

La recherche relatée ici s'est intéressée aux rapports aux savoirs géométriques des futurs professeurs des écoles en France; elle a consisté en l'élaboration et l'analyse d'un questionnaire et d'une séance de formation, en environnements papier crayon et informatique (logiciel de géométrie dynamique Cabri géomètre). Les résultats obtenus montrent que, si ces étudiants ont des connaissances certaines dans G2, ils ne relient pas nécessairement les savoir-faire (constructions géométriques classiques) aux théorèmes qui les justifient ; d'autre part, leur « géométrie personnelle » a tendance à amalgamer G1 et G2. Enfin, l'étude du discours « méta » lors des débats suggère que des interventions ponctuelles du professeur peuvent aider les étudiants à prendre conscience de l'existence des deux paradigmes.
Mots-clés : paradigmes géométriques, « figure » géométrique, futurs professeurs des écoles.

Abstract: The geometry which is taught from elementary school to university is commonly viewed as a modelisation of physical space and it evolves from an « observation geometry » to a « mathematical proof geometry ». This evolution can be described with the help of a few different geometrical paradigms. At compulsory school level, two such paradigms can be distinguished : a « spatio-graphic » geometry (or G1) and a « proto-axiomatic » geometry (or G2). In fact, solving a geometrical problem consists of repetedly moving from G2 to G1 and back. It is centred on the « figure », which plays a crucial role in the process because, although it is of considerable help for conjecturing, it can also constitute an obstacle to working out a mathematical proof since the « figure obviousness » can be a source of confusion in using the data.

The research which is here reported focused on the French preservice school-teachers' relation to geometrical knowledge; it consisted in working out and analysing a questionnaire and a teaching session, both in paper + pencil and computer (namely Cabri geometre software) environments. The results show that, although students have indeed a positive theoretical geometrical knowledge (within G2), they do not always link their technical knowledge (i.e. classical geometrical constructions) with the theorems which justify it; besides, their « personal geometry » tends also to confuse G1 and G2. And, finally, the study of the « meta » discourse during the verbal debates suggests that limited interventions of the teacher may help the students to become aware of the existence of two distinct paradigms.
Keywords: geometrical paradigms, geometrical « figure », preservice school-teachers.

Car les mathématiciens, faisant abstraction de toute matière, mesurent les formes et les espèces des choses par leur seule intelligence.

Leon Battista ALBERTI, *Della Pittura* (1436)

L’une des finalités de l’enseignement de la géométrie dans le cursus obligatoire est de faire passer les élèves d’une « géométrie de l’observation » à une « géométrie de la démonstration », et la notion de « figure » – sur laquelle je reviendrai – est un élément central et incontournable dans les pratiques de ce niveau. La résolution d’un problème de géométrie élémentaire, qui s’appuie fortement sur cet élément, consiste en une succession d’allers et retours, souvent implicites, entre les deux types de géométrie et risque de mettre, si l’on n’y est pas attentif, les élèves dans une position inconfortable, voire de les conduire à des conflits cognitifs. C’est pour tenter de préciser cette situation qu’ont été entreprises dun certain nombre de recherches récentes ([Parzysz 2001], [Parzysz & Jore 2002], [Houdement & Kuzniak 2000, 2003]). Elles montrent en particulier que le rapport à la géométrie des étudiants de première année d’IUFM se préparant au professorat des écoles ne les met pas toujours à même de gérer ce type de conflit avec leurs futurs élèves.

Si l’on se place au niveau de l’enseignement obligatoire, la géométrie, même si elle est un discours portant sur des entités théoriques, est issue de considérations faites sur des objets matériels (maquettes, « figures »), et fait parfois usage de tels objets sous la forme de métaphores. D’où un problème majeur, sur lequel je reviendrai, qui est cause de nombreuses incompréhensions : en géométrie, professeur et élèves ne jouent pas toujours au même jeu. Je tenterai ici, en m’appuyant en particulier sur les travaux de mon équipe, de préciser comment se manifeste ce problème et sur quels malentendus il repose. Je proposerai aussi des pistes de réflexion pour des recherches futures.

1- Le cadre théorique.

En ce qui concerne l’opposition « géométrie d’observation » / « géométrie de la démonstration », P.M. Van Hiele distingue deux niveaux d’appréhension des formes géométriques [Van Hiele 2002) :

> *Au niveau inférieur, le niveau visuel, les formes sont identifiées par la vue : « C’est un carré parce je vois que c’en est un ». Au niveau supérieur, une forme est identifiée par ses propriétés : « C’est un triangle isocèle parce qu’il a trois côtés dont deux sont égaux ». J’ai appelé ce niveau, niveau descriptif. Si un enseignant veut quelque chose de mieux qu’une pensée instrumentale, il devra prendre en compte la différence entre les deux niveaux.*

Quant à C. Houdement et A. Kuzniak, s’appuyant sur F. Gonseth, ils distinguent trois paradigmes géométriques [Houdement & Kuzniak 2003] :

- une *géométrie naturelle* (G I), dans laquelle la géométrie se confond avec la réalité ;

- une *géométrie axiomatique naturelle* (G II), qui est un schéma de la réalité

- une *géométrie axiomatique formaliste* (G III), où le « cordon ombilical » avec la réalité est coupé.

D’autre part, M. Henry distingue trois types de rapport à l’espace dans l’enseignement / apprentissage de la géométrie [Henry 1999] :

- la situation « concrète »

- une première modélisation, qui consiste en « *l'observation d'une situation réelle et sa description en termes courants. (...) La description qui en découle est alors une sorte d'abstraction et de simplification de la réalité perçue dans sa complexité, dans la mesure où certains choix sont faits pour ne retenir que ce qui semble pertinent de cette situation vis-à-vis du problème étudié.* »

- une mathématisation, élaborée à partir du modèle précédent.

Sur la base de ces trois approches, notre équipe s’est placée dans un cadre théorique comportant au total 4 paradigmes, qui s’articulent selon le schéma suivant :

	géométries non axiomatiques		géométries axiomatiques	
type de géométrie	concrète* (G0)	spatio-graphique (G1)	proto-axiomatique (G2)	axiomatique (G3)
objets	physiques		théoriques	
validations	perceptivo-déductives		hypothético-déductives	

* A proprement parler, G0 n’est pas une géométrie.

Les éléments sur lesquels repose ce modèle synthétique sont, d’une part la nature des objets en jeu (physique *vs* théorique), d’autre part les modes de validation (perceptif *vs* hypothético-déductif). Partant de la "réalité", ou encore du "concret" (G0), qui n'est pas encore géométrique car ses objets sont des réalisations matérielles avec toutes leurs caractéristiques (matière, couleur, etc.), nous opposons d'une part une géométrie non axiomatique, s'appuyant sur des situations concrètes[1] qui sont idéalisées pour constituer le "spatio-graphique"[2] (G1), et d'autre part une géométrie axiomatique, l'axiomatisation pouvant être explicitée complètement (G3)[3], ou non (G2), et la référence au "réel" étant facultative pour la première (mais pas pour la seconde) ; dans le dernier cas, nous parlerons de géométrie *proto-axiomatique*. En outre, et contrairement à ce qui se passe pour G3, la composition de G2 ne peut être définie de façon précise, car d’une part elle présente une composante institutionnelle (les programmes) qui évolue dans le temps, et d’autre part elle est également sujette à des variations « locales ». Par exemple, au cours d’une activité donnée, un professeur peut décider de s’intéresser à une notion qui n’est habituellement pas prise en compte par institutionnellement au niveau considéré. C’est le cas en particulier de la notion de convexité, qui n’est pas prise en compte dans les programmes de géométrie de l’enseignement secondaire, ce qui empêche de démontrer par exemple que deux bissectrices d’un triangle sont sécantes.

Du point de vue didactique, la distinction entre ces géométries apparaît dans les *ruptures de contrat* qui se produisent entre l'une et l'autre, et plus précisément:

- passage de G0 à G1: matérialité des objets en jeu (bois, carton, paille...)

- passage de G1 à G2: épaisseur des traits, des points; justification perceptive

- passage de G2 à G3: propriétés jugées "évidentes".

[1] D'après le Petit Larousse (éd. de 1999): « 1.qui se rapporte à la réalité, à ce qui est matériel (...) 2. Qui désigne un être ou un objet réel ».
[2] Qualificatif dû à Colette Laborde (voir par exemple [Laborde & Capponi 1995]).
[3] On trouvera en Annexe 1, comme illustration de G3, un exemple d’axiomatique développé par G. Choquet.

(N.B. Au niveau de l’enseignement obligatoire, ce sont G1 et G2 qui jouent un rôle crucial dans la construction par l’élève de son rapport aux savoirs géométriques. C’est pourquoi, dans la suite, nous nous restreindrons à ces deux paradigmes.)

En se référant à la théorie anthropologique du didactique [Chevallard 1999], on peut considérer G1 et G2 comme deux praxéologies qui, pour un même type de problèmes (comme par exemple les problèmes de construction sous des contraintes fixées) se distinguent à la fois au niveau des *techniques*, des *technologies* et des *théories* :

∗ pour G1, les *techniques* utilisées pour la résolution de ce type de tâches sont essentiellement liées à l'usage d'instruments tels que règle graduée, compas, équerre, rapporteur (perception instrumentée). Les *technologies* (mode de validation) font également usage des instruments, qui sont alors utilisés pour contrôler le dessin construit par la constatation visuelle de coïncidences ou de superpositions : graduations de la règle, pointes du compas, bords de l'équerre, rayons du rapporteur[4]... Le *niveau théorique* – absent dans la pratique usuelle – serait une théorie relative à la précision ou à l'économie des tracés, qui est effectivement attestée historiquement. Ainsi, dans la préface de sa *Geometria del compasso* (1797), Mascheroni, adoptant le point de vue des constructeurs d’instruments scientifiques, indique que

> *« pour démontrer en général la supériorité de l’usage du compas sur celui de la règle, quand il s’agit de décrire avec précision des lignes à l’épreuve du microscope, il suffit de dire qu’avec une règle tant soit peu longue, il est presque impossible de garantir la précision de tous les points qu’on trace, tant il est difficile qu’elle soit rigoureusement droite dans toute sa longueur. Fût-elle même très droite, les praticiens savent que la trace d’une ligne menée le long de la règle porte avec elle une incertitude de parallélisme dans le mouvement de l’axe de la pointe qui marque, ou de la parfaite application de cette pointe à l’arête de la règle. Le compas n’est point sujet à ces deux inconvéniens, il suffit que son ouverture soit fixe et les pointes très fines ; en plaçant l’une d’elles en un point pris pour centre , l’autre décrit un arc aussi exact qu’il est possible. »* [Mascheroni 1828, pp. 9-10]

Plus loin, il précise quelques principes de réalisation effective des tracés au compas seul :

> *« Nous ajouterons ici en faveur des artistes pour lesquels, en grande partie, cet ouvrage est écrit, que, bien convaincus de l’importance des erreurs qui résultent de l’écart et du rapprochement des branches du compas pour obtenir avec précision des ouvertures différentes, nous aurons soin de résoudre les problèmes avec le moindre nombre possible d’ouvertures de compas […]. D’ailleurs, comme pour la précision pratique de la position d’un point, il importe que la section des lignes qui le déterminent se fasse à angle droit ou approchant, nos ferons toujours en sorte qu’un arc en coupe un autre, ou à angle droit, ou au moins sous un angle qui en diffère peu. »* [*op. cit.* pp. 28-29]

En 1903, Emile Lemoine publie la *Géométrographie ou Art des constructions géométriques*, qui, pour toute construction, *« donne (…) un symbole qui est une sorte de*

---

[4] Cette technologie est également appliquée à la vérification des instruments de tracé, en particulier dans les anciens manuels de collège. Ainsi, dans les manuels anciens, trois techniques de G1, toutes fondées sur la perception (instrumentée ou non) sont indiquées comme moyens de vérifier la rectitude d’une règle : visée, fil tendu le long de la règle, retournement de la règle.

mesure de sa simplicité et des chances de sa plus ou moins grande exactitude »[5]. A la même époque, K. Nitz s'intéresse au même problème et se place explicitement au niveau des *Realgebilden* (figures réelles)[6], en considérant par exemple un point comme un disque, une droite comme une bande déterminée par deux parallèles et un cercle comme une couronne [Nitz 1906]. Un peu plus tard, A. Sainte-Laguë mentionne la géométrographie, dans laquelle, selon lui, *"on cherche les constructions les plus rapides"* ([Sainte-Laguë 1913] p. 352), c'est-à-dire celles qui font intervenir un nombre minimal d'opérations ; il donne des conseils permettant d'améliorer la précision des tracés, tels que :

> *"pour des travaux précis, l'équerre ne doit jamais servir à mener des perpendiculaires à une droite, mais seulement des parallèles à une droite"*
>
> *"un point P déterminé par l'intersection de deux droites est d'autant mieux connu que l'angle de ces droites est plus voisin d'un angle droit"*
>
> *"une droite joignant deux points n'est tracée avec une certaine précision que si les deux points sont éloignés d'au moins un ou deux centimètres"*
>
> *"un dessinateur habile (...) fait en même temps toutes les constructions analogues, en traçant par exemple tous les cercles de même rayon les uns à la suite des autres..."* (*ibid.* pp. 350-351)

∗ pour G2 et pour le même type de tâches, les *techniques* concernent des objets géométriques (droites, points, segments, cercles...) dont l'existence est assurée par des énoncés (définitions, axiomes, propriétés admises...), et l'usage des instruments permet d'en obtenir des représentations (dessins). Les *technologies* correspondantes consistent en la production d'un discours de type déductif appliqué aux données de l'énoncé et utilisant des éléments de G2 rencontrés antérieurement. Le *niveau théorique* est constitué par une géométrie axiomatique de type G3 (la géométrie affine euclidienne). Comme nous l'avons dit cependant, une technique très générale dans G2 est la réalisation et l'étude de "figures" (= dessins, *cf* plus loin §3) sur lesquelles on fera éventuellement agir des techniques de G1 dans le but de rechercher des indices qui permettront d'aboutir à une démonstration.

Prenons ainsi l'exemple de la construction aux instruments (règle et compas) d'un pentagone régulier, et considérons les deux constructions données successivement (*fig. 1* et *fig. 2*) par A. Dürer dans son *Instruction sur la manière de mesurer* ([Dürer 1525] pp. 79-80): du point de vue actuel, la première (pentagone inscrit dans un cercle), en accord avec G2, est une construction "exacte"[7] tandis que la seconde (pentagone construit sur un côté) est une construction "approchée", même si elle est validée par la perception : en effet, rien ne permet de distinguer visuellement des productions graphiques obtenues à partir de chacune de ces deux constructions.

---

[5] Cité in [Houdement & Kuzniak 2002] p. 20.
[6] Sur ce sujet, on pourra consulter avec profit [Houdement & Kuzniak 2002], qui donne plusieurs exemples d'utilisation de la géométrographie.
[7] C'est la construction dite « de Ptolémée »

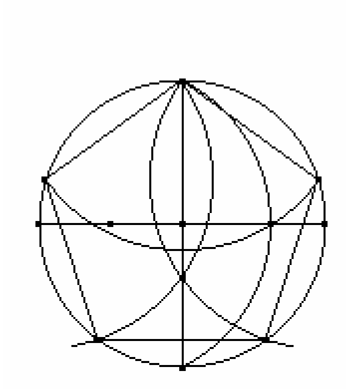


fig. 1

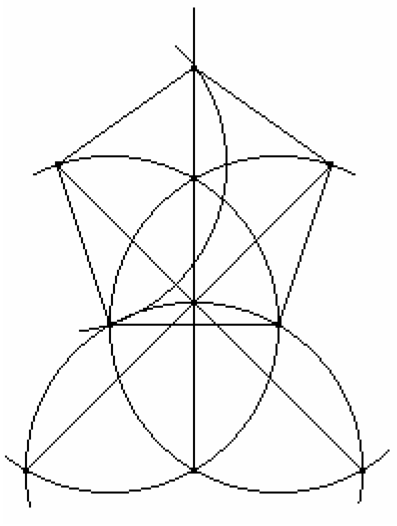


fig. 2

En ce qui concerne les institutions dans lesquelles vivent ces différentes géométries, on peut dire que G1 correspond à l'école élémentaire, tandis que G2 correspond au lycée et G3 à l'université. Mais qu'en est-il pour le collège ? En fait, ce sont essentiellement les "figures", objets communs à G1 et G2, qui mettent ces deux géométries *en concurrence* chez des « non-experts » comme le sont les élèves de collège. Plus précisément, pour un élève donné confronté à une tâche de géométrie :

- si elle est perçue comme relevant de G1, elle conduira à s’appuyer sur des techniques de G1 (réalisation d'une "figure" + comparaison, superposition, mesurage...)

- si elle est perçue comme relevant de G2, elle conduira à s’appuyer sur des techniques de G2 (réalisation d'une "figure" + démonstration).

Notons enfin que G1 et G2 sont susceptibles de se contrôler l’une l’autre:

- *G2 contrôle G1:* si une contradiction perceptive est relevée sur la "figure" (G1), on peut rechercher dans G2 l’erreur qui l’a produite ;

- *G1 contrôle G2*: si la conclusion d'un raisonnement géométrique surprend, le retour à la "figure" et aux techniques de G1 peut permettre de confirmer ou d'infirmer ce résultat.

2. L’articulation G1-G2.

L'articulation G1-G2 est au cœur de la problématique de l'enseignement obligatoire, et plus encore de celle de l'enseignement professionnel, par rapport à l'enseignement général : ce qui compte, dans une perspective professionnelle, c'est l'efficacité et non la justification: on utilise éventuellement la théorie pour rechercher des procédures efficaces, mais pas nécessairement. On se situe donc dans une problématique de la *précision*, et non de la *conformité à la théorie* (qu’on peut appeler la "rigueur"). Ainsi, un manuel de dessin industriel français présente-t-il des constructions à la règle et au compas des polygones réguliers convexes, et présente comme des « constructions approchées » celles qu'il propose pour le pentagone, l'heptagone et l'ennéagone, alors que la première est exacte. Par contre, le même manuel, mettant sur le même plan la construction à la règle et au compas de la bissectrice et celle des trisectrices, omet d’indiquer que cette dernière est une construction approchée.

Envisageons maintenant quelques types ou genres de tâches (au sens de Chevallard) géométriques, à la lumière des paradigmes G1 et G2.

Exemple 1 : valider une conjecture donnée.

Il y a (au moins) deux façons d'y parvenir :

a) Utiliser comme technique une démonstration (éventuellement facilitée par une « figure ») et s'appuyer sur une technologie constituée, d'une part d'une géométrie partiellement axiomatisée, et d'autre part d'un raisonnement hypothético-déductif, l'ensemble relevant de la géométrie G2 (la théorie correspondante étant une géométrie euclidienne axiomatisée de type G3).

b) Utiliser comme technique la réalisation d'un objet graphique (« figure ») et s'appuyer sur une technologie constituée d'un corpus de « constructions géométriques » (issues plus ou moins directement de G2) associé à la validation perceptive, l'ensemble relevant de la géométrie G1 (la théorie correspondante étant la géométrographie).

Exemple 2 : montrer qu'un objet X satisfait une propriété P.

a) On peut s'appuyer exclusivement sur l'énoncé qui définit la configuration géométrique (la « figure » ne servant que de support et n'étant jamais évoquée) et utilisr des définitions et des théorèmes du cours pour démontrer que l'objet x satisfait bien la condition P.

b) On peut réaliser une « figure » comportant l'objet X, réalisé selon des constructions géométriques, puis vérifier visuellement qu'il satisfait la propriété P. Ou bien – plus raffiné – on peut effectuer une construction de l'objet Y satisfaisant la propriété P, puis constater visuellement la superposition de X et de Y[8].

(N.B. « l'objet X » n'est pas de même nature dans les deux cas : dans le premier c'est un objet physique et dans le second c'est un objet théorique.)

Exemple 3 : reproduire un dessin à une échelle donnée.

a) si le dessin à reproduire est associé à un texte qui le définit géométriquement, la tâche consiste d'abord à élaborer une procédure de construction à partir de ce texte, puis à la transformer pour la rendre conforme à la consigne (multiplication des distances par le coefficient adéquat, les angles étant conservés).

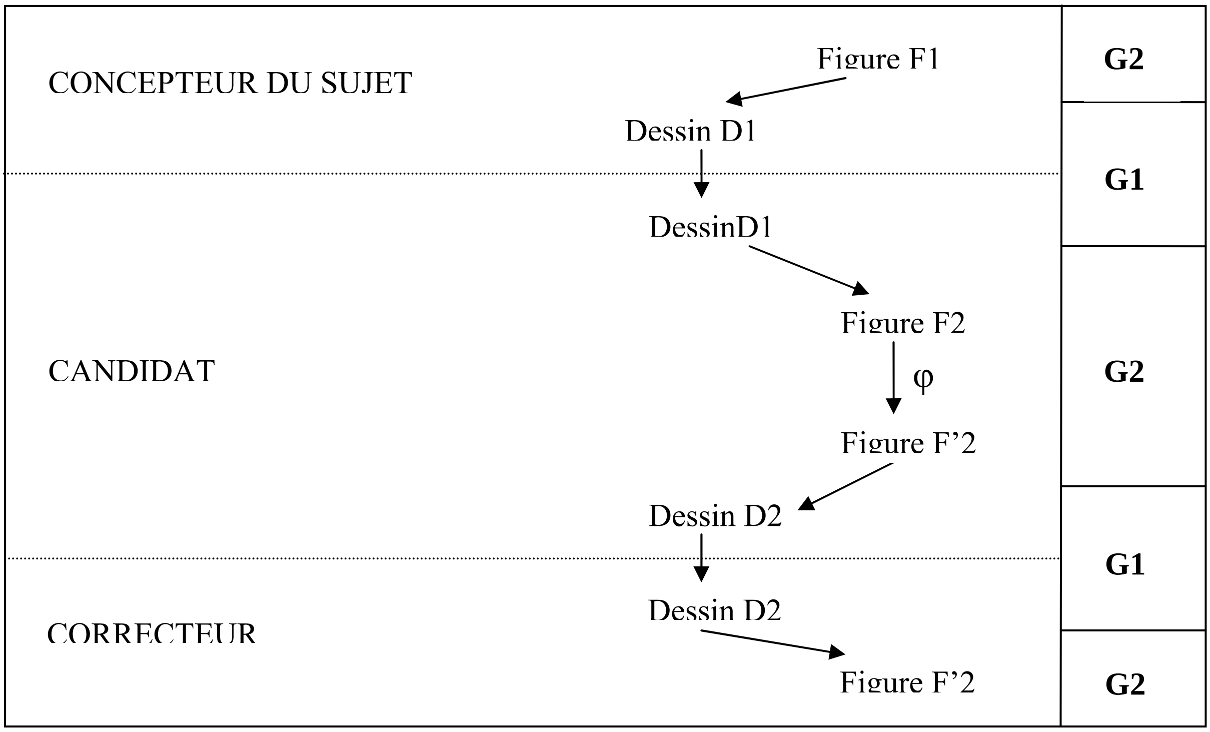
b) si le dessin n'est pas associé à un énoncé qui le définit, la tâche consiste cette fois à identifier une procédure de construction possible, le reste sans changement par rapport au a).

La différence fondamentale entre les deux tâches réside dans la détermination de la procédure de construction qui sera mise en oeuvre : dans le premier cas elle est donnée, soit explicitement (algorithme), soit implicitement (énoncé descriptif) ; dans le second cas, il faut l'abstraire du dessin, avec une possibilité non négligeable d' « erreur », c'est-à-dire d'interprétation non conforme à l'idée du concepteur du dessin initial.

Ce qui est gênant, c'est que ce type de tâche a été donné plusieurs fois, dans la version b) ci-dessus, lors des concours de recrutement des professeurs des écoles français. La démarche, depuis la conception de l'exercice jusqu'à sa correction, peut être schématisée comme suit.

---

[8] Nous rencontrerons cette procédure plus loin, dans le § 5.



1° Le concepteur du sujet imagine une figure F1, qu'il représente, en utilisant un algorithme de construction A1, par un dessin D1 qui est reproduit dans l'énoncé.

2° Le candidat observe ce dessin et en conclut, sur cette seule base perceptive, qu'il représente une figure F2. Puis il associe à F2 un algorithme de construction A2. Il applique ensuite à F2 la transformation φ (changement d'échelle) et représente F2 sous la forme d'un dessin D2, en l'accompagnant du même algorithme A2 (à l'exception de la transformation des longueurs).

3° Le correcteur de l'épreuve juge la production du candidat en se fondant sur le dessin D2 et sur l'algorithme A2.

La question est de savoir sur quoi porte cette correction. Ce peut être sur la seule mise en œuvre correcte de la transformation φ (conservation des angles et multiplication des longueurs par une constante). Mais ce peut aussi être sur la conformité de l'algorithme A2 avec l'algorithme A1 fourni par le concepteur et sur la mise en œuvre de la transformation φ. La première option correspond à une tâche bien définie dans G2 et à la réalisation d'un dessin (passage de G2 à G1). Mais la seconde inclut en outre un *décodage* du dessin D1, c'est-à-dire une tâche relative au passage de G1 vers G2. Dans cette option le candidat sera jugé, non pas – ce qui serait équitable – sur ses compétences dans G2 et sa réalisation d'un dessin géométrique, mais également sur sa « lecture » du dessin de l'énoncé – ce qui ne l'est pas : en effet, si cette lecture n'est pas conforme à celle qui est attendue, le candidat sera pénalisé.

Exemple 3 : Classement des côtés d'un triangle selon leur longueur.

Cette activité a été donnée dans le cadre d'une expérimentation en classe de sixième[9] (élèves de 11 ans environ) : on donne à chaque élève une feuille de papier sur laquelle sont dessinés des triangles (voir Annexe 2), la consigne (orale) étant la suivante :

---

[9] En collaboration avec F. Colmez.

« *Pour chaque triangle, ranger ses trois côtés du moins long au plus long; pour établir ce rangement, n'utiliser comme seul instrument que le compas. Les tracés réalisés devront être laissés sur la feuille, afin de permettre la justification de l'ordre obtenu.* »

Dans un premier temps, la plupart des élèves utilisent leur compas comme un outil à reporter des longueurs. Cependant, en leur demandant de rechercher une économie de moyens pour parvenir au résultat, on les amène à tracer le moins de cercles possible (en fait, deux ou trois ; voir ci-après). Ainsi, pour un triangle ABC, on peut commencer par tracer le cercle de centre A passant par B: si C est intérieur (resp. extérieur) à ce cercle, on en déduit AC < AB (resp. AC > AB). En recommençant alors successivement avec le cercle de centre B passant par C et le cercle de centre C passant par A, on peut finalement ordonner les trois côtés.

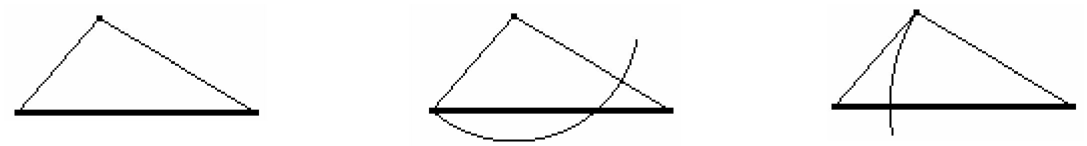
Dans quelle(s) géométrie(s) se situe donc cette activité ? Comme les objets sur lesquels on travaille "concrètement" sont des dessins tracés sur une feuille de papier, le problème est apparemment posé dans le cadre de la "géométrie concrète" (G0). Mais les élèves de ce niveau savent déjà que les traits n'ont pas d'épaisseur, *etc.* ; en conséquence, ils se situent en principe d'emblée dans la géométrie spatio-graphique (G1). Pour accomplir la tâche demandée, ils vont avoir à comparer des longueurs de segments, et plus particulièrement - avec la consigne modifiée- à utiliser un résultat qu'ils connaissent, à savoir *"si un point est intérieur (resp. extérieur) à un cercle, sa distance au centre est inférieure (resp. supérieure) au rayon"*. Cette "propriété", qui leur a vraisemblablement été introduite par l'enseignant selon un procédé d'ostension, fait en réalité partie d'une géométrie axiomatique (G3). Ainsi, Choquet <u>définit</u> respectivement le cercle, son intérieur et son extérieur comme ensembles des points du plan euclidien dont la distance à un point donné est égale (resp. inférieure, resp. supérieure) à un réel positif donné, et il en <u>déduit</u> que toute demi-droite ayant pour origine le centre rencontre le cercle (le point d'intersection étant unique) [Choquet 1964, pp. 127 *sq.*]. Soient alors G le cercle de centre O et de rayon r et M un point du plan (M ≠ O); la demi-droite [OM] coupe G en un point unique A et, si M ∈ [OA], on a OM < OA, donc M est intérieur à G; même chose dans les autres cas, d'où l'équivalence: *OM < OA ⇔ M appartient à un rayon du cercle*.

Pour un élève de Sixième, le fait que M est intérieur au cercle (au sens topologique) se constate sur le dessin, et permet d'en inférer l'inégalité des longueurs (grâce à la propriété citée plus haut), tandis que, dans la géométrie de Choquet, cette inégalité est la définition même de l'intérieur. Ce qui distingue les deux situations, c'est que dans le second cas la "propriété" en question prend place dans une théorie déductive, alors que dans le premier cas elle a sa source dans le spatio-graphique. En fait, comme le dit Choquet :

> *"A cet âge [avant 14 ans] on ne présente pas la géométrie sous forme déductive, mais on donne cependant les démonstrations de quelques théorèmes simples à partir de prémisses acceptées par les élèves à cause de leur caractère intuitif ; ces prémisses constituent les axiomes des petits ilôts déductifs ainsi constitués."* (*op. cit.* p. 164)

Ceci correspond bien à une "géométrie proto-axiomatique" (G2), dans laquelle les objets et la démarche de validation sont "localement" les mêmes que dans une géométrie axiomatique.

Illustrons maintenant l'articulation G1-G2 à l'aide de l'activité décrite ci-dessus. Le type de stratégie le plus efficace (*fig. 3*) consiste en fait à utiliser conjointement les deux géométries.



repérage visuel du côté le plus long — comparaison des deux autres côtés — comparaison avec le premier côté

fig. 3

Par exemple : on commence par repérer à l'œil l'un des trois côtés du triangle comme étant de longueur maximale (conjecture dans G1, s'appuyant sur la percpetion visuelle); puis on compare entre eux les deux autres côtés : pour cela, on trace le cercle centré au sommet commun aux deux côtés et passant par l'un des deux autres sommets (régionnement du plan par un cercle, donc dans G2): on constate alors (nouveau recours à la perception, et donc à G1) la position du troisième sommet par rapport au cercle tracé, et on conclut (retour au régionnement et à G2). Il ne reste plus qu'à comparer, par la même méthode, le plus long de ces deux côtés avec le premier côté, et à conclure (dans G2). Si la conjecture initiale était correcte, il a donc suffi de tracer deux cercles pour ranger les trois côtés, moyennant le jeu de cadres G1 → G2 → G1 → G2 → G1 → G2.

Plus généralement, on peut dans le cas présent distinguer un *quadruple balancement* entre G1 et G2, et plus précisément:

1- <u>au niveau de la tâche</u>: la tâche proposée paraît *a priori* ressortir à G1, mais les contraintes imposées la font en fait passer dans G2;

2- <u>au niveau de la démarche</u>: les tracés réalisés (G1) concrétisent des constructions géométriques, en l'occurrence des cercles (G2);

3- <u>au niveau de l'outil</u>: la propriété utilisée a été "établie" en se référant à G1 (c'est le "caractère intuitif" dont parle Choquet), mais elle est utilisée comme "axiome" de G2 (de par les objets en jeu et les formulations utilisées);

4- <u>au niveau de la validation</u>: la "lecture" des inégalités sur les longueurs est perceptive: on <u>voit</u> sur le dessin que tel point est intérieur à tel cercle (G1), mais la formulation de la réponse fait usage du symbolisme lié à G2.

Ainsi, si l’on se place du point de vue de la validation, les rétroactions du milieu (perception instrumentée ou non) sont valides dans G1, mais non dans G2. On peut donc dire que G1 est une géométrie *perceptivo-déductive*, tandis que G2 est une géométrie *hypothético-déductive*.

3. La dialectique su / perçu.

Nous venons de voir que, au niveau de l'enseignement obligatoire, G1 et G2 se trouvent imbriquées à plusieurs niveaux, et la résolution d'un problème les fait intervenir l'une et l'autre, alternativement, à divers moments. Par exemple :

G1 → G2 : modélisation d'un problème "concret"

G2 → G1: réalisation d'un dessin dans un but heuristique

G1 → G2 : démonstration d'une conjecture résultant de l'observation

G2 → G1: "vérification", sur un dessin, d'une conclusion théorique

Dans tous les cas se met en œuvre une véritable *dialectique du su et du perçu* ([Parzysz 1988], [Parzysz 1989], [Colmez & Parzysz 1993]). J’ai initialement développé les notions de « su » et de perçu » à propos la représentation de l’espace en géométrie ([Parzysz

1988, 1989]), et il n'est peut-être pas inutile d'y revenir succinctement ici. Il s'agit d'un cadre interprétatif des productions graphiques (dessins) qui prend son origine dans les travaux de Gombrich ([Gombrich 1960, 1982]). En effet, pour Gombrich, l'artiste de l'Egypte antique ne peignait pas ce qu'il voyait, mais ce qu'il savait des paysages et des personnages, réels ou mythologiques, le but étant de les rendre reconnaissables. C'est pourquoi, en particulier, le visage et les jambes d'un être humain sont figurés de profil, tandis que le torse est représenté de face.

De façon générale, lorsqu'il s'agit de représenter un objet tridimensionnel, et si l'on veut qu'il soit facilement identifié, on le dessine selon un point de vue habituel (le « vu »), c'est-à-dire, le plus souvent, à peu près de face (mais pas complètement) et légèrement de dessus. Mais ceci ne permet pas de conserver la totalité des propriétés spatiales de l'objet (le « su »), car certaines parties sont cachées et d'autres déformées par la perspective. Il est donc nécessaire de « négocier » – ce qui se fait le plus souvent de façon non réfléchie – la coexistence du vu et du su, afin d'arriver à une représentation synthétique de l'objet. Prenons comme premier exemple la *fig. 4*, qui reproduit une peinture égyptienne (14e siècle av. J.C.) représentant un bassin carré rempli d'eau et entouré d'arbres.

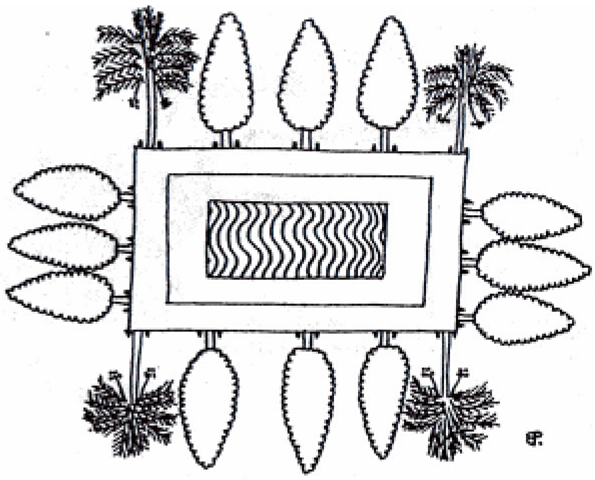


fig. 4

Le bassin est représenté vu de dessus (ce qui permet d'en conserver sur le dessin la forme rectangulaire), l'eau qu'il contient est symbolisée de façon classique par des ondulations parallèles et les arbres, perpendiculaires au sol dans la réalité, sont représentés perpendiculaires aux bords du dessin du bassin ; on est donc bien ici dans un mode de représentation qui privilégie le su par rapport au percu, puisque certains des objets sont figurés sous un angle de vue inhabituel (bassin vu de dessus, arbres représentés couchés ou la tête en bas).

Cette « coexistence » du su et du perçu dans une même représentation n'est pas toujours « pacifique » et peut donner lieu à des conflits, comme par exemple sur le lit de la *fig. 5*, dessin réalisé à partir d'une partie de la miniature de la mort de Moïse figurant dans la Bible de Naples (14e siècle). Ce lit est représenté en perspective, avec des fuyantes (le vu) ; les bandes parallèles qui ornent la couverture sont représentées parallèles (le su). Le conflit apparaît en bas du dessin à droite, où la dernière bande décorative est oblique par rapport au pied du lit, au lieu de lui être parallèle comme on s'y attendrait.

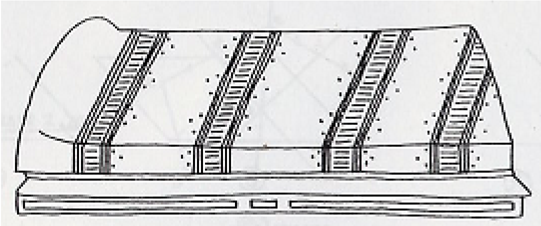


fig. 5

Il en va de même dans les productions des élèves. Ainsi, lorsque nous avons demandé à des élèves de différents âges de « *dessiner une pyramide de façon qu’un de leur camarade puisse reconnaître l’objet représenté* » [Colmez & Parzysz 1993], le dessin le plus fréquemment obtenu a été, en classe de CM2 (10 ans) celui de la *fig. 6*, en classe de 5^{e} (12-13 ans) celui de la *fig. 7* et en classe de 2^{e} (15-16 ans) celui de la *fig. 8*.

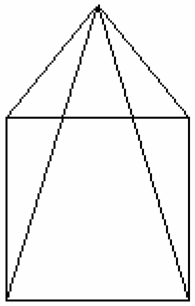


fig. 6

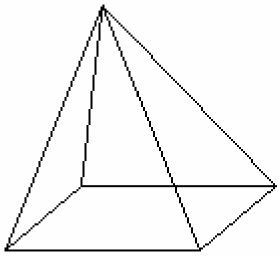


fig. 7

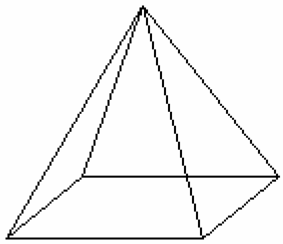


fig. 8

En CM2, le su est très présent, sous la forme du carré de base, de la symétrie globale du dessin et des deux triangles isocèles ; en 5^{e}, le vu prend davantage d’importance car la base est vue en perspective, mais la face avant reste isocèle ; enfin, en 2^{e}, le dessin est structuré autour de la hauteur et se rapproche encore davantage de la vision photographique[10].

On peut cependant penser que cette difficulté n’existe pas dans le cas des objets plans, car on peut en principe les représenter tels qu’ils sont (en d’autres termes, le su coïncide avec le vu). Mais elle apparaît sous une autre forme, à cause du rôle ambigu joué par la « figure » de géométrie. Rappelons la distinction désormais classique entre la *figure* (qui est un objet géométrique théorique défini par un énoncé) et le *dessin* (qui est une représentation matérielle de cet objet théorique sur un support plan : feuille de papier, écran d’ordinateur…) [Parzysz 1989].

Dans une géométrie axiomatique il existe deux façons de prendre en charge le perçu dans la validation:

- ou bien on le récuse totalement, et on développe alors une géométrie purement axiomatique (même si certains axiomes trouvent leur origine dans la perception du monde physique) ;

- ou bien, à l'instar de Clairaut [Clairaut 1741], on décide de ne pas "encombrer inutilement" la théorie en démontrant des propriétés perceptivement évidentes. Mais alors, tôt ou tard, le problème de cette « évidence » se posera, à propos d'une « figure » où la prétendue évidence n'apparaît pas, d'un dessin conduisant à une hypothèse implicite erronée ou d'une démonstration dans laquelle l'évidence de l'élève n'est pas acceptée par le maître. C’est-à-dire que l’on verra apparaître, au sein d’une argumentation, un nouveau conflit entre le su (les propriétés géométriques données dans l’énoncé ou démontrées) et le perçu (les propriétés

[10] Même si la perspective est parallèle et non pas centrale.

induites de l’observation du dessin) ; c’est ce que nous appelons la *contamination du su par le perçu* (CSP), et qui apparaît notamment lorsque l’élève inclut dans sa démonstration (en principe dans G2) une propriété, vraie ou fausse, qui a été observée sur son dessin mais n’a pas été donnée dans l’énoncé, ni démontrée auparavant. Par nature, cette CSP chez des élèves en situation de résolution de problème est liée à une appréhension discursive[11] du dessin. Ainsi, dans une étude récente effectuée avec des élèves en fin de lycée [Dvora & Dreyfus 2004], T. Dvora et T. Dreyfus se posent la question des motivations qui les guident lorsqu’ils ont recours à une (des) affirmation(s) non justifiée(s) dans une démonstration géométrique. Ils concluent que ces affirmations non justifiées sont faites :

- dans la grande majorité des cas, sans que les élèves en soient conscients ;
- lorsqu’ils croient qu’elles sont correctes ;
- dans le but de parvenir à un pas critique de la démonstration ;
- dans le but de faciliter la réalisation de la tâche, d’écarter un obstacle et de mener immédiatement au but.

On voit donc que cette « lecture » abusive du dessin qui est à la base de la CSP n’est pas seulement liée à la perception, mais qu’elle est partie prenante dans la démarche de preuve.

4. L’articulation G2-G3.

La question des rapports de la géométrie proto-axiomatique G2 avec la géométrie axiomatique G3 se pose également : la première n'est-elle qu'un sous-produit, une version « allégée » de la seconde, dans laquelle des « blocs » (sous-champs conceptuels de Vergnaud) ont été occultés ? Ou ne se situe-t-elle pas plutôt dans une problématique différente, celle d'une géométrie *en construction* ? Plus précisément: bien qu'on sache qu'il existe « quelque part » une (des) géométrie(s) axiomatique(s) – qui pourra (pourront) éventuellement servir en quelque sorte de "caution scientifique" –, il s'agit ici de faire accéder les élèves aux connaissances géométriques en leur faisant prendre en charge une double démarche:

1° une démarche de modélisation de l'espace physique, s'effectuant en deux temps : d'abord du concret (G0) au spatio-graphique (G1), puis du spatio-graphique (G1) au proto-axiomatique(G2) ;

2° une démarche de type hypothético-déductif, à l'occasion de la résolution de problèmes spatiaux qui auront préalablement été mathématisés.

Sous peine de compromettre cette entreprise, la gestion des parties non déductives de la démarche doit alors être aussi « transparente » que possible, les arguments d'ordre perceptif (« *on voit que...* ») cédant éventuellement le pas, en fonction du questionnement des élèves, à une attitude moins « hypocrite » et plus « modeste » (du type : « *on voit, et on peut effectivement démontrer que.... Quant à nous, nous admettrons ce résultat* »). Ceci revient, en quelque sorte, à considérer l'assertion qui suit la formule « *nous admettrons...* » comme un « axiome local » (ou, comme on le voit parfois dans les manuels, une « propriété admise »). La différence entre une géométrie proto-axiomatique (G2) et une géométrie euclidienne complètement axiomatisée (G3), de type Choquet, apparaît donc d'ordre quantitatif et non qualitatif ; la distinction ne se situe en effet, ni au niveau des objets en jeu, ni à celui de la

[11] « *L’appréhension discursive d’une figure correspond à une explicitation des autres propriétés d’une figure que celles indiquées par la légende ou par les hypothèses. (…) La fonction épistémologique de l’appréhension discursive est la démonstration.* ». ([Duval 1996] p. 126).

démarche de preuve, mais à celui de la place faite à l'axiomatique sous-jacente: il serait en effet théoriquement possible de démontrer ce que l'on admet, mais en ajoutant des axiomes *ad hoc*: le problème ne serait que déplacé, et non supprimé.

Bien entendu, il s'agit là, pour les élèves, d'une entreprise sur le long terme, qui pourra en particulier prendre appui à maintes reprises sur des situations « trompeuses » du spatio-graphique, destinées à contrecarrer ce qu'il est convenu d'appeler « l'évidence du dessin », c'est-à-dire la prégnance du perçu sur le su. La prise en compte du rôle ambigu, et pourtant essentiel, du perçu (tantôt à la source de la démarche de modélisation ou des conjectures, et tantôt obstacle à la démarche déductive) est ici fondamentale. Il s'agit d'une question certes délicate, mais qui apparaît cruciale si l'on veut permettre aux élèves l'accès, non seulement aux concepts, mais aussi à la démarche de la géométrie théorique.

Notons au passage qu'en environnement papier-crayon les symboles conventionnels de codage du « su » (égalités de longueurs ou d'angles, perpendicularité) sont destinés à visualiser des propriétés géométriques, c'est-à-dire à intégrer davantage de su dans le perçu, de façon à faciliter la mise en œuvre de cette dialectique.

Certes, un « expert » en géométrie élémentaire saura à tout moment – en principe – dans quelle géométrie (G1 ou G2) il se trouve; pour lui, *le perçu guide* (conjecture) *et contrôle* (vérification) *le su, mais ne le commande pas*. Mais ce n'est en tout cas pas le cas pour un débutant (tel l'élève du début du collège), et un objectif majeur de l'enseignement de la géométrie à ce niveau est justement d'engager l'élève dans cette démarche d'« expertise », en l'amenant à maîtriser ce balancement dialectique qui est, non seulement inévitable, mais en réalité *constitutif* de l'élaboration dynamique d'un domaine mathématique compris, à ce niveau, comme une modélisation de l'espace physique.

5. Le cas des futurs professeurs des écoles.

En France, le public des futurs professeurs des écoles en formation initiale (PE1) est particulièrement intéressant du point de vue de l'articulation G1-G2, car ils sont amenés à travailler, d'une part dans G2 lors de la préparation du concours de recrutement[12], et d'autre part dans G1 lors des stages en établissement scolaire. En outre, comme nous l'avons vu plus haut, G2 est amené à servir de contrôle aux activités des élèves, qui se situent dans G1. Il est donc important, pour leur formation, qu'ils sachent différencier les deux paradigmes sans ambiguïté. C'est afin d'étudier le rapport aux savoirs géométriques des PE1 que nous avons réalisé, de 2000 à 2004, une recherche comprenant notamment un questionnaire et des séances de formation, faisant partie de la préparation « normale » au concours. Les principaux objectifs de cette recherche étaient (1) d'établir un inventaire et une classification des types d'argumentation utilisés en géométrie par les PE1, (2) de mettre à l'épreuve le cadre théorique décrit plus haut et (3) d'élaborer et de tester des ingénieries didactiques (en environnements papier-crayon et informatique) destinées à faire prendre conscience aux PE1 de la distinction G1 / G2 et à les amener à un comportement plus « expert » en géométrie. Je me contenterai ici d'évoquer certains points significatifs de cette recherche.

5.1. Le questionnaire.

[12] Les PE1 ont tous – sauf exception, comme les mères de trois enfants – une licence (d'une spécialité quelconque). L'épreuve de mathématiques du concours comporte une partie « mathématique » constituée d'exercices de niveau collège, et une partie « didactique ».

Le questionnaire a été passé auprès de 878 PE1. Je me contenterai ici d’évoquer trois des items qu’il comportait, et qui concernent la construction de la médiatrice de deux points : les items 3, 5 et 8 (voir Annexe 3).

Dans les trois cas, la tâche prescrite était la construction de la médiatrice du segment [MN]. Dans l’item 5, le segment était situé au milieu du cadre réservé à la réponse, tandis que dans l’item 3 il était voisin du bord inférieur de ce cadre. Enfin, dans l’item 8, deux triangles isocèles de base [MN] (non tracée) étaient dessinés. Sur la construction demandée, nos objectifs étaient les suivants :

- pour l’item 5, identifier les procédures disponibles chez les PE1 (en particulier celles utilisant le compas seul et celles utilisant l’équerre et la règle graduée) ;

- pour l’item 3, voir si la contrainte imposée conduisait à des procédures différentes de celles de l’item 5 ;

- pour l’item 8, voir si les PE1 allaient ou non repérer que la médiatrice était déjà donnée par les points U et E[13].

Comme nous nous y attendions, la procédure la plus utilisée dans l’item 5 (78 %) est l’utilisation de deux intersections d’arcs de cercle de même rayon, centrés en M et en N et situés de part et d’autre de la droite (MN) (*fig. 9*). Nous avons en outre distingué une sous-procédure très fréquente (3 fois sur 4) consistant à prendre comme rayon des 4 cercles tracés la longueur MN.

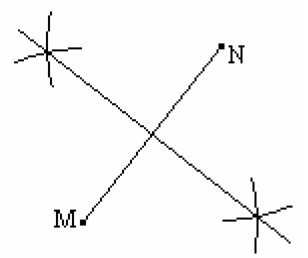


fig. 9

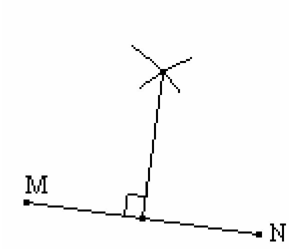


fig. 10

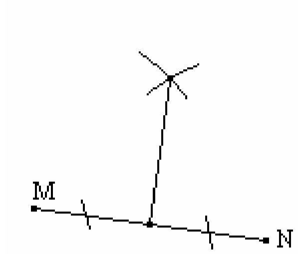


fig. 11

Dans l’item 3, et même si elle persiste malgré tout (14 %), cette procédure est majoritairement « adaptée » (51 %) en conservant l’intersection « supérieure » associée, soit (3 fois sur 4) à un angle droit (*fig. 10*), soit (1 fois sur 4) au milieu de [MN] (*fig. 11*), la procédure « milieu + équerre » atteignant ici 28 % (au lieu de 11 % pour l’item 5).

Enfin, dans l’item 8, un PE1 sur deux (49 %) trace directement la droite (UE) et 18 % utilisent l’un de ces deux points dans leur construction, en l’associant à un autre élément (intersection d’arcs, milieu ou perpendiculaire).

De plus, le recours à l’analyse implicative [Gras 1996] nous a amenés à conclure à l’existence d’un degré d’expertise plus ou moins élevé chez les PE1. Nous avons en effet pu constater que ceux qui, en position standard, utilisaient un rayon égal à MN, avaient davantage de difficulté à changer de procédure en cas de contrainte imposée. Nous l’expliquons par le fait que cette procédure est figée et ne présente aucun degré de liberté, et qu’elle est en fait un simple savoir-faire, non relié à un savoir géométrique.

Enfin, pour l’item 5 (tracé de la médiatrice sans contrainte), les réponses obtenues à la question : « *Précisez quelles propriétés de la médiatrice vous utilisez* » sont synthétisées dans le tableau suivant, où ont été distinguées 3 procédures (en colonnes) :

[13] On trouvera une étude détaillée des résultats obtenus pour ces trois items dans [Parzysz & Jore 2002].

	XX $r \neq MN$	XX $r = MN$	Milieu et angle droit
Equidistance	35% *	16%	0%
Milieu et angle droit	33%	39%	71%
Autre	14%	15%	4%
Sans commentaire	18%	30%	25%

* *Les pourcentages indiqués sont des pourcentages de chaque colonne.*

Pour les PE1 qui utilisent deux intersections d'arcs de cercle, on remarque, et ceci pour les deux sous-procédures, le taux important (plus d'un sur 3) de ceux qui justifient leur construction par le fait que la médiatrice est la droite perpendiculaire au segment passant par son milieu (ce qui est la définition qu'ils ont apprise lorsqu'ils étaient eux-mêmes élèves). Ce commentaire met en évidence le fait que beaucoup ne font pas le lien entre cette propriété relevant de G2 et la technique de tracé qu'ils mettent en oeuvre dans G1, celle-ci étant pour eux vide de sens. Ce qui a pour conséquence le fait qu'ils ne sont pas à même de pouvoir contrôler l'un par l'autre, ni d'adapter leur procédure.

5.2. La séance expérimentale.

Il s'agissait de proposer aux PE1, en début de formation, une situation « ambiguë », en ce sens qu'il n'était pas précisé si la tâche de référence relevait de G1 ou de G2. D'autre part, il ne s'agissait pas de résoudre un problème de géométrie, mais d'indiquer les moyens possibles pour répondre à la question de géométrie posée. En l'occurrence, les étudiants étaient répartis en groupes de 4, les étudiants d'un même groupe étant munis chacun d'une version numériquement différente d'un même problème [Parzysz 2001]. Voici le schéma général de l'énoncé proposé :

Tracer une droite d. On appelle O un point de cette droite.

Tracer le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre O et de rayon R_1. Ce cercle coupe la droite d en deux points A et B.

Tracer le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre O et de rayon R_2.

Tracer le cercle $\mathcal{C}_3$ de centre A et de rayon R_3. Ce cercle coupe le cercle $\mathcal{C}_2$ en deux points C et D.

Quel(s) moyen(s) pouvez-vous mettre en œuvre pour savoir si la droite (CD) est, ou non, la médiatrice du segment [AB] ?

Dans chacune des 4 versions, des valeurs numériques différentes étaient données aux rayons R_1, R_2 et R_3 ; ces valeurs étaient choisies de façon que, dans deux des versions on avait $(R_1)^2 + (R_2)^2 = (R_3)^2$, et dans les deux autres $(R_1)^2 + (R_2)^2$ était voisin de $(R_3)^2$, mais cependant différent (*fig. 12*). Notre idée était que, dans chaque groupe, deux étudiants travaillent sur une version dans laquelle (CD) était médiatrice de [AB] et les deux autres sur une version dans laquelle (CD) n'était pas médiatrice de [AB], *mais la différence étant imperceptible*. Autrement dit, pour deux des étudiants de chaque groupe la réponse à la question « (CD) est-elle la médiatrice de [AB] » était « oui » dans G1 et dans G2, et pour les deux autres elle était « oui » dans G1 et « non » dans G2. Chaque groupe avait pour consigne de réaliser une affiche unique présentant sa (ou ses) réponse(s), et après affichage était mise en place une discussion collective des productions.

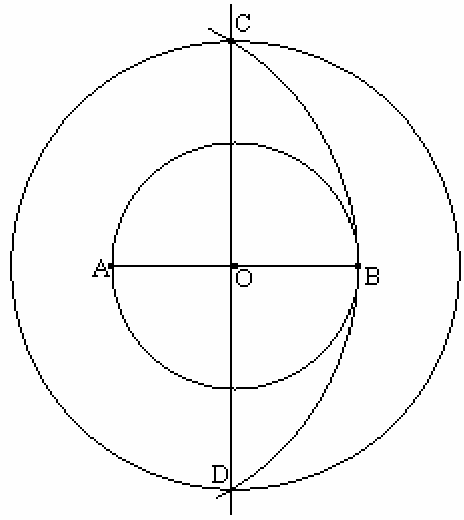


fig. 12

Comme nous nous y attendions, la plupart des groupes ne se sont pas contentés d'évoquer des moyens de « savoir » si oui ou non (CD) était médiatrice de [AB], mais ont développé des argumentations. Nous en avons trouvé de trois types :

a) argumentation relevant de G2 ; c'est par exemple le cas de l'affiche suivante :

La médiatrice du segment [AB] le coupe perpendiculairement en son milieu O.

Si AOC est triangle rectangle en O, alors la droite (CD) est la médiatrice de [AB]. On applique la réciproque du théorème de Pythagore :

Si $AC^2 = CO^2 + OA^2$*, alors AOC est triangle rectangle en O.*

Même chose avec le triangle AOD.
Si AOC et AOD sont triangles rectangle en O, alors C, O, D sont alignés et (CD) est la médiatrice de [AB].

On voit que cette justification se présente comme une démonstration classique de géométrie du collège, même si elle est incomplète [le cas où la relation de Pythagore n'est pas vérifiée n'est pas traité].

b) argumentation relevant de G1, comme dans l'exemple suivant :

Définition de la médiatrice:

C'est une droite qui coupe un segment en son milieu perpendiculairement.

Donc tout point situé sur la médiatrice d'un segment [AB] est situé à égale distance de A et de B.

Moyens:

** pour vérifier que (CD) passe par le milieu de [AB]:*

- O milieu de [AB]. (CD) passe-t-elle par O?

- avec compas ou règle graduée: est-ce que CA = CB? ou DA = DB?

** pour vérifier que (CD)* $\perp$ *[AB]:*

- avec équerre

** pour vérifier que (CD) est la médiatrice de [AB]:*

- construire la médiatrice de [AB], si elle est confondue avec (CD) alors (CD) est la médiatrice de [AB].

- construction du losange ACB'D. B = B'?

Le début de cette affiche relève manifestement de G2. Par contre, les moyens envisagés, même s'ils utilisent la terminologie et les notations deG2, reposent tous sur des mesures ou des constructions aux instruments : elles se situent donc sans ambiguïté dans G1. On peut au passage noter la technique de superposition que j'ai évoquée plus haut, technique qui consiste ici à construire la médiatrice de [AB] et à voir si elle se coïncide visuellement avec (CD).

c) <u>argumentations paraissant relever de G2 mais recélant une CSP</u>, comme celle-ci :

C_1 est le cercle de centre O: tous les points du cercle sont situés à égale distance du point O.

*Donc: * OA = OB*

** O milieu de [AB]*

Comme A et B $\in$ à (d), les points A, O, B sont alignés.

- C et D sont sur les cercles C_2 et C_3 respectivement de centre O et A.

*Donc: * OC = OD, O milieu de [CD]*

** AC = AD.*

- le triangle ACD est isocèle en A car AC = AD. La demi-droite [Ad) issue de A coupe [CD] en O. Comme O est milieu de [CD], [AO] est la hauteur et la médiatrice de [CD].

- On en déduit que [AB] et [CD] sont perpendiculaires en O. Donc [CD] médiatrice de [AB].

Ce texte se présente comme une authentique démonstration de géométrie et manifeste une certaine expertise de G2, par l'utilisation correcte du vocabulaire et du symbolisme ; l'argumentation est clairement exposée et les affirmations sont justifiées …sauf « O milieu de [CD] », qui s'appuie sur la seule égalité « OC = OD » et admet implicitement l'alignement des points C, O, D : les 4 étudiants du groupe se sont fait piéger par l'observation de la « figure », qui leur a fait croire à cet alignement.

Sur l'ensemble de l'expérimentation nous avons obtenu au total 31 affiches : 10 se situent dans G2, 8 dans G1, et 13 font coexister des « moyens » relevant de G1 et de G2, le plus souvent de façon non consciente, la distinction nette entre G1 et G2 n'étant le fait que de 3 groupes.

Ce type de séance a également été réalisé dans un environnement de géométrie dynamique (Cabri géomètre), avec un énoncé et des modalités différents :

Soient A et B deux points du plan et O le milieu du segment [AB].
Soient M un point du plan et M' le symétrique de M par rapport au point O.
Tracer le cercle de centre A passant par M et le cercle de centre B passant par M'.
On appelle I un point d'intersection de ces deux cercles.
Que se passe-t-il pour le point I lorsque le point M se déplace dans le plan ?

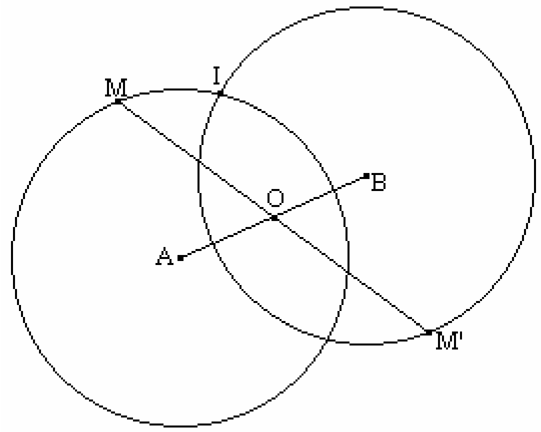


fig. 13

Je me bornerai ici à signaler les différences et les similitudes constatées entre les deux environnements (pour plus de détails, on pourra consulter [Parzysz 2003]). Les différences portent sur les effets induits par les environnements papier-crayon et Cabri, notamment le fait que, lors la résolution du problème, Cabri facilite considérablement l'accès à la conjecture, essentiellement grâce à son aspect dynamique. Certaines des similitudes observées sont sans doute liées au manque de familiarité des étudiants avec l'outil Cabri (comme par exemple le fait de réaliser successivement plusieurs constructions sur un même Cabri-dessin plutôt que d'utiliser l'aspect dynamique du logiciel), mais d'autres semblent être de nature perceptive, comme le principe de superposition dont j'ai parlé ci-dessus, consistant à comparer le dessin de l'objet conjecturé avec celui de l'objet expérimental. De même, en ce qui concerne les démarches de validation, l'évidence visuelle de la « figure », qui s'érige en obstacle à la mise en œuvre correcte d'une démonstration, est comparable dans les deux environnements ; j'irai même jusqu'à dire qu'elle est plus importante en environnement Cabri, du fait de la qualité du logiciel, et plus précisément de la grande précision des dessins réalisés.

Si nous considérons maintenant l'ensemble des résultats obtenus grâce au questionnaire et grâce aux diverses séances centrées sur la médiatrice, nous pouvons affirmer que, dans leur grande majorité, les PE1 disposent d'un bagage relativement important de connaissances de G2, tout à fait suffisant pour enseigner la géométrie à l'école élémentaire : définitions théorèmes, vocabulaire, symbolisme[14]. Ils connaissent également les principales constructions classiques : médiatrice, losange. Malgré tout, il apparaît que la plupart d'entre eux ne possèdent pas un degré d'expertise géométrique suffisant pour leur faire distinguer que la preuve perceptive et la démonstration ne se situent pas sur le même plan et que les « figures » qu'ils réalisent ne sont que des représentations matérielles d'objets théoriques de la géométrie de la fin du collège.

5.3. Le discours méta.

Dans le but de rechercher des moyens d'améliorer cette situation quelque peu préoccupante, nous avons décidé d'étudier les échanges verbaux lors de certaines des séances expérimentales menées sur la médiatrice, et plus particulièrement de nous focaliser sur le discours « méta » qui intervient lors des diverses prises de parole, qu'il provienne de l'enseignant ou des étudiants. A la suite de divers chercheurs (notamment [Schoenfeld 1985], [Robert & Robinet 1993]), nous distinguons en effet deux types de discours : un discours géométrique et un discours « méta ». Plus précisément, en ce qui nous occupe ici, le qualificatif "méta" sera réservé à un discours *sur* la géométrie enseignée (objets en jeu,

[14] Je précise que, pour devenir PE1, il faut passer un test de français et de mathématiques.

validations), le niveau géométrique consistant en discours *de* géométrie. Notre étude nous a amenés à subdiviser le discours méta en deux niveaux :

- le premier (méta contextualisé, ou *méta 1*) étant un discours spécifique au problème géométrique support (par exemple : « *Ce que je ne comprends pas, c'est qu'on ne montre pas que CD passe par O* ») ;

- le second (méta décontextualisé, ou *méta 2*) étant un discours général portant sur la géométrie ou même, plus généralement, sur les mathématiques enseignées (par exemple : « *En mathématiques, on nous demande toujours de démontrer* »)[15].

Nous avons alors été conduits à distinguer trois types de discours plus ou moins « superposés » : géométrique / méta 1 / méta 2. Dans ce cadre, la connaissance visée chez les PE1 (c'est-à-dire l'existence de deux paradigmes géométriques) se situe au méta 2.

Le court extrait de dialogue ci-dessous permet de voir, sur un exemple, comment l'intervention du professeur peut orienter le débat du méta 1 vers le méta 2 [E1, E2 et E3 sont des étudiantes, P est le professeur. Le problème est celui du § 5.2. et le point C' est le symétrique du point C par rapport au point O] :

> **E1 :** *… Sur le dessin initial la différence de tracé entre CC' et CD était … Ca allait de même pas un millimètre. (…) Mais en agrandissant l'écart s'est considérablement agrandi, donc là ça vient pas de l'imprécision des tracés, ça vient bien de la construction qui fait que CC' et CD ne sont pas confondus.*
>
> **P :** *Et malgré ça, ta camarade ne reçoit toujours pas ton argument.*
>
> *(…)*
>
> **E2 :** *On le voit sur la figure, mais …*
>
> **P :** *Et voir sur la figure, ça ne te suffit pas ?*
>
> **E3 :** *Ça suffit. Mais en fait, en mathématiques on nous demande toujours de démontrer, hein ? (…) Est-ce qu'on a le droit de se baser sur le dessin, à ce moment-là ?*

On voit ici l'étudiante[16] E1 faire des considérations situées dans G1, en utilisant une technique propre à ce paradigme (l'agrandissement) ; elle se situe donc au niveau méta 1. Puis l'étudiante E2 entame une phrase qui se situe au même niveau, et qui sans doute confrontera G1 et G2. Le professeur, qui s'en rend immédiatement compte, saisit l'occasion qui lui est ainsi offerte de décontextualiser l'enjeu, qui est celui de l'insuffisance du perçu par rapport au su (dans G2), c'est-à-dire de passer au niveau méta 2. Enfin, une troisième étudiante, E3, poursuit sur cette lancée en posant la question du contrat didactique, donc en se plaçant également dans le méta 2.

De façon plus générale, notre expérimentation a montré qu'une situation, dont la consigne se situe dans le méta 1 et qui est conçue de façon à ce que la perception risque de provoquer des CSP, peut effectivement permettre de développer chez les PE1 un débat au niveau du méta 1. Mais il n'est pas pour autant assuré – ce qui est l'objectif visé – que le débat engagé finira par accéder au niveau méta 2, même si c'est le cas dans l'exemple précédent. Nous avons également pu observer que, même si le rôle de l'enseignant apparaît important pour faire évoluer le débat vers le méta 2 grâce à des « coups de pouce » judicieux

---

[15] On pourrait également distinguer un troisième niveau (*méta 0*), consistant en un discours de type "récit de la démarche géométrique" (par exemple : *"On a dit que C' était différent de D"*) ; mais nous l'assimilons au niveau géométrique.

[16] Les PE1 hommes sont très minoritaires.

(comme sur l'exemple ci-dessus), il arrive que ce soient les étudiants eux-mêmes qui amènent le débat au niveau méta 2. Enfin, il n'est pas évident que le discours se maintienne à ce niveau, et il semble qu'on assiste plutôt à une succession de transitions entre les trois niveaux

Bien sûr, il ne s'agit ici que de constatations ponctuelles qui nécessiteraient d'être étudiées sur une période plus longue, et dont on il faudrait évaluer les effets à court et à moyen terme. En effet, dans ce domaine *"la perspective est celle du temps long : les interventions ne se conçoivent que sur une certaine durée, ne serait-ce que pour établir les changements d'habitude qu'elles impliquent pour les élèves"* [Robert & Robinet 1993 p. 32].

6. Conclusions et perspectives.

L'un des objectifs de l'enseignement de la géométrie dans l'enseignement primaire et secondaire est d'amener les élèves à prendre progressivement conscience de l'intérêt de disposer, parmi les outils intellectuels à leur disposition, d'une géométrie théorique, obtenue comme modélisation de l'espace physique, qui permette de répondre sans ambiguïté aux questions qu'on peut se poser dans le domaine spatial – y compris dans la vie quotidienne – de par le fait qu'elle n'est pas soumise aux aléas et aux contingences liées à la perception. La distinction de plusieurs paradigmes géométriques, qui se différencient par la nature de leurs objets, leurs types de validations et leur niveau de formalisme, paraît susceptible d'éclairer cette question. En particulier, les statuts et le rôles de la « figure », c'est-à-dire du dessin réalisé sur la feuille de papier ou sur l'écran de l'ordinateur, gagneraient sans doute à être clairement pris en compte dans l'enseignement et dans la formation des enseignants de mathématiques, avec comme objectif d'amener les futurs professeurs à un degré d'« expertise » leur permettant de reconnaître, dans leur discours et leurs productions comme dans ceux de leurs élèves, le(s) paradigme(s) mis en jeu. Il reste pour cela à imaginer, à mettre en œuvre et à évaluer des dispositifs de formation susceptibles de favoriser cette prise en de conscience. Les situations géométriques « ambiguës », c'est-à-dire dans lesquelles la tâche demandée ne relève pas clairement d'un paradigme donné ou dans lesquelles la « figure » peut se révéler trompeuse, semblent – comme nous l'avons vu – une piste intéressante à exploiter. Il en va de même de la gestion des débats suscités par la discussion consécutive à la résolution de telles situations, où le rôle de l'enseignant pour faire évoluer débat semble important.

Bibliographie

Choquet, G. (1964) : *L'enseignement de la géométrie*. Ed. Hermann, Paris.

Colmez, F. & Parzysz, B. (1993) : Le vu et le su dans l'évolution de dessins de pyramides, du CE2 à la Seconde, in *Espaces graphiques et graphismes d'espaces. Contribution de psychologues et de didacticiens à l'étude de la construction des savoirs spatiaux* (sous la direction d'A. Bessot et P. Vérillon), pp. 35-55. Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Dürer, A. (1525): *Instruction sur la manière de mesurer*. Traduit de l'allemand et présenté par J. Bardy et M. Van Peene. Ed. Flammarion, Paris 1995.

Duval, R. (1996) : *Sémiosis et noésis*. Ed. Peter Lang, Berne.

Dvora, T. & Dreyfus, T. (2004) : Unjustified assumptions based on diagrams in geometry, in Hoynes, M.J., Fuglestad, A.D. (eds) *Proceedings of the 28th PME International Conference*, 2, pp. 311-318.

Gombrich, E.H. (1960) : *Art and Illusion*. Ed. Phaidon, London.

Gombrich, E.H. (1982) : *The Image and the Eye. Further studies on the psychology of pictorial representations*. Cornell University Press.

Gonseth, F. (1955) : *La géométrie et le problème de l’espace*. Ed. du Griffon, Lausanne.

Gras, R. (1996) : *L’implication statistique : nouvelle méthode exploratoire de données. Application à la didactique*. Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Henry, M. (1999): L'introduction des probabilités au lycée: un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie, in *Repères-IREM* n° 36, pp. 15-34.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2000) : Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol 20/1*. La Pensée sauvage. Grenoble

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2002) : Approximations géométriques. *L'Ouvert* n°105 pp. 19-28.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2003) : Quand deux droites sont « à peu près » parallèles ou le versant géométriques du « presque » égal**.** *Revue « petit X » n° 61*. Grenoble.

Laborde, C. & Capponi, B. (1995) : Modélisation à double sens, in *Actes de la 8e Ecole d'été de Didactique des mathématiques*. Editions IREM de Clermont-Ferrand.

Lemoine, E. (1903) : *Géométrographie ou Art des constructions géométriques pures*. Ed. Scientia, Paris.

Nitz, K. (1906) : Beiträge zu einer Fehlertheorie der geometrischen Konstruktionen. *Zeitschrift für Mathematik und Physik* n° 53.

Parzysz, B. (1988): ‘Knowing’ vs ‘seeing’. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics* voL XIX, pp. 79-92.

Parzysz, B. (1989): *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir.* Diplôme de doctorat. Université Paris-7. Ed. IREM Paris-7.

Parzysz, B. (2001): Articulation et déduction dans une démarche géométrique en PE1. *Actes du 28ème colloque COPIRELEM* (Tours), pp. 99-110. Ed. Université d’Orléans.

Parzysz, B. & Jore, F. (2002): Qu'ont-ils retenu de la géométrie du collège ? Le rapport à la géométrie des futurs professeurs de écoles. *Actes du colloque inter-IREM Géométrie – Premier cycle (Montpellier)*, pp. 107-118. Ed. Université de Montpellier.

Parzysz, B. (2003) : Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1, dans les environnements papier-crayon et informatique, in *Actes du 29ème Colloque de la COPIRELEM* (La-Roche-sur-Yon), pp. 85-92.

Robert, A. & Robinet, J. (1993) : *Prise en compte du méta en didactique des mathématiques.* Cahier de DIDIREM n° 21. Ed. Université Paris-7.

Sainte-Laguë, A. (1913): *Notions de mathématiques.* Ed. Hermann, Paris.

Schoenfeld, A. (1985) : *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.

Van Hiele, P.M. (2002): Similarities and differences between the theory of learning and teaching of Skemp and the Van Hiele levels of thinking. *Intelligence, learning and understanding in mathematics. A tribute to Richard Skemp.* D. Tall & M. Thomas, eds. PostPressed, Flaxton, Australia.

Annexe 1. L’axiomatique de Choquet.

Extraits de "L'enseignement de la géométrie", de G. Choquet (Ed. Hermann 1964)

Axiome 0: Le plan contient au moins deux droites, et toute droite contient au moins deux points.

Axiome 1a: Pour tout couple (x, y) de points distincts de Π, il existe une droite et une seule contenant x et y.

Axiome 1b: Pour toute droite D, et pour tout point x, il passe par x une parallèle et une seule à D.

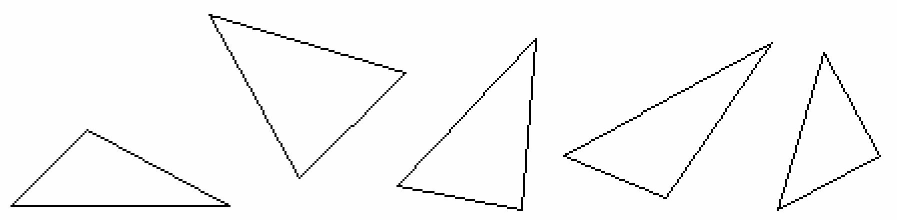
Axiome 2a: A toute droite D sont associées deux structures d'ordre total, opposées l'une de l'autre.

Axiome 2b: Pour tout couple (A, B) de droites parallèles, et pour tous points a, b, a', b' tels que a, a' $\in$ A et b, b' $\in$ B, toute parallèle à ces droites qui rencontre [a, b] rencontre aussi [a', b'].

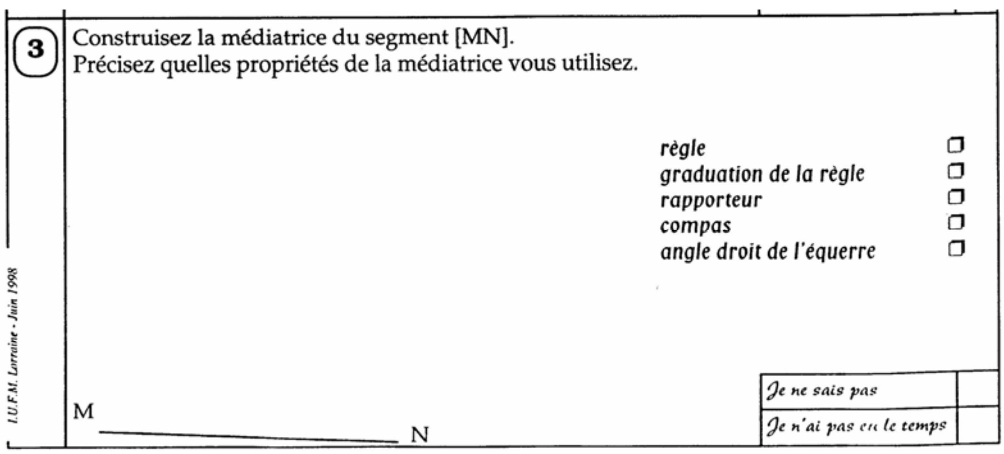
Proposition 7.1: Supposons que le nombre cardinal des droites soit >2. Pour toute droite D, il existe une partition unique de $(\Pi - D)$ en deux ensembles convexes Π_1 et Π_2. Aucun de ces ensembles n'est vide et, pour tous $x_1 \in \Pi_1$, $x_2 \in \Pi_2$, l'intervalle $[x_1, x_2]$ rencontre D.

Annexe 2. Une activité en classe de sixième.

Pour chaque triangle, rangez ses trois côtés du moins long au plus long.



Annexe 3. Trois items du questionnaire PE1



3

Construisez la médiatrice du segment [MN].
Précisez quelles propriétés de la médiatrice vous utilisez.

règle ❑
graduation de la règle ❑
rapporteur ❑
compas ❑
angle droit de l'équerre ❑

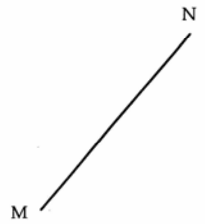
M

N

Je ne sais pas
Je n'ai pas eu le temps

I.U.F.M. Lorraine - Juin 1998

5 Construisez la médiatrice du segment [MN].
Précisez quelles propriétés de la médiatrice vous utilisez.

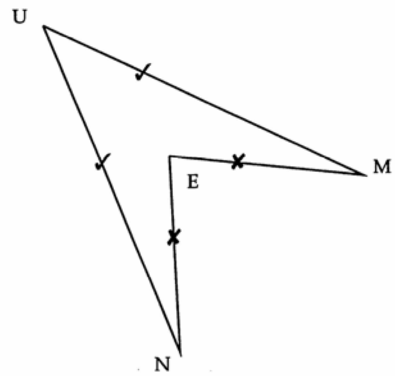


- *règle* ☐
- *graduation de la règle* ☐
- *rapporteur* ☐
- *compas* ☐
- *angle droit de l'équerre* ☐

Je ne sais pas	
Je n'ai pas eu le temps	

I.U.F.M. Lorraine - Juin 1998

8 **Construisez la médiatrice du segment [MN].**
Précisez quelles propriétés de la médiatrice vous utilisez.



- ***règle*** ☐
- ***graduation de la règle*** ☐
- ***rapporteur*** ☐
- ***compas*** ☐
- ***angle droit de l'équerre*** ☐

Je ne sais pas	
Je n'ai pas eu le temps	