

Se e quando si raggiunge il pensiero algebrico

Teresa Marino, Benedetto Di Paola

*G.R.I.M. (Gruppo di ricerca sull'insegnamento delle Matematiche) - Dipartimento di Matematica ed Applicazioni
dell'Università di Palermo, Via Archirafi, 34 -90123 Palermo*

marino@math.unipa.it dipaola@math.unipa.it

Sommario. Il presente articolo, nato come naturale ampliamento dei precedenti lavori (Cfr.[18]) sull'analisi d'alcune problematiche relative al passaggio dal pensiero aritmetico al pensiero algebrico, vuole essere un ulteriore approfondimento sull'argomento trattato, attraverso non soltanto un'analisi critica dei risultati precedentemente ottenuti ma anche, la strutturazione e l'utilizzo di un'ulteriore strumento di indagine sperimentale che in una prima approssimazione potrebbe essere considerato più oggettivo ed esplicativo dei precedenti in termini di lettura dei dati raccolti e quindi analisi dei fenomeni di insegnamento/apprendimento riferiti all'Algebra.

L'esperienza descritta è frutto di un lavoro condotto parallelamente in tre differenti indirizzi di scuola secondaria superiore ed in un primo anno d'Università a Palermo.

La metodologia sperimentale si basa sulla progettazione e l'interpretazione dei grafici elaborati con il software Chic.

Il lavoro s'inserisce in un quadro di un più vasto progetto di ricerca che si sta affrontando all'interno del G.R.I.M. di Palermo

Abstract. The present article, thought as natural implications of the precedents research works (Cfr.[18]) *substantially contemplated* on the analysis of some problematic related to the passage from the arithmetical thought to the algebraic thought, wants to be a further examination on the treated matter, through not only a critical analysis of the previous results but also, with the structuring and the use of a further tool of investigation that in a first approximation it could consider more objective and explanatory than the precedent ones, in terms of reading the picked data and therefore analysis of the teaching/learning phenomenon reported to the Algebra.

The described experience comes out from a research work conducted parallelly in three different addresses of upper secondary school and in a first year of University in Palermo. The experimental methodology is based on the planning and the interpretation of the elaborate graphs with the Chic software.

This work is inserted in a more vast project of research conducted inside the G.R.I.M. of Palermo

Résumé. Cet article, né comme un naturel agrandissement des travaux précédents (Cfr. [18]) sur l'analyse de quelques problèmes par rapport à la transition de l'idée arithmétique à l'idée algébrique, veut être un approfondissement ultérieur sur le sujet traité non pas seulement par intermédiaire d'une analyse critique des résultats précédemment acquis mais aussi par l'organisation structurel et l'utilisation d'une autre méthode de recherche qu'on pourrait considérer, dans une première approximation, plus objective et éclairante des précédentes soit pour le déchiffrement des données trouvées que pour l'analyse des phénomènes d'enseignement/apprendement rapportés à l'Algèbre.

Cette expérience est le résultat d'une année de travail fait parallèlement dans trois différents catégories d'école secondaire supérieure et au premier année de Université à Palermo .

La méthodologie expérimentale est opérée sur le projet et l'interprétation des graphiques réalisés avec le software Chic.

Le travail se place dans un cadre d'un projet de recherche plus large qu'on va réaliser chez le G.R.I.M

Introduzione: ricerche precedenti e nuove indagini

Dall'analisi dei dati raccolti nelle sperimentazioni precedenti (Cfr.[4],[5],[18]) che avevano l'obiettivo di evidenziare, seppur in una prima approssimazione, se e quando gli allievi della scuola secondaria superiore raggiungano un pensiero algebrico consapevole, si è sentita l'esigenza di voler ancor più approfondire l'argomento trattato, ripensando in modo critico, agli strumenti di indagine e la metodologia di ricerca utilizzati per lo scopo proposto. Con questa finalità, in questo lavoro, abbiamo allora cercato di raffinare opportunamente, in termini d'oggettività e lettura dei risultati, la tecnica d'indagine precedentemente utilizzata; abbiamo quindi realizzato e sperimentato in classe un questionario nel quale abbiamo provato ad eliminare quelle che potevano rappresentare a nostro parere, le possibili componenti di disturbo date da una interpretazione soggettiva dei dati raccolti. Se nel lavoro della Di Chiara (Cfr.[4]) si evidenziava già questa esigenza e a tale proposito si prevedeva, successivamente al test, l'utilizzo di un Post-Test come strumento “chiarificatore”; nel presente lavoro si è sentita l'esigenza di introdurre un'ulteriore analisi a-posteriori capace di analizzare l'indagine sperimentale in maniera, a nostro parere meno “aperta” a possibili interpretazioni soggettive e quindi fuorvianti. Dopo l'esperienza del Post-test ci siamo, infatti, resi conto di presumere negli studenti, seppur in maniera non consapevole, un primo “pensiero matematico”, un pensiero che abbiamo chiamato pre-algebrico. Un tipo di ragionamento matematico/logico riferito ad un pensiero non proprio algebrico ma sganciato dal calcolo per prove ed errori (caratteristica legata al pensiero aritmetico) e che poteva costituire una prima condizione necessaria per il pieno superamento del pensiero aritmetico e il raggiungimento di quello algebrico evidenziabile nella capacità di giocare con le formule e usare quindi la/le variabile in gioco in maniera autonoma e critica. (Cfr.[9])

L'ipotesi quindi dalla quale siamo partiti per la strutturazione di questo nuovo strumento di indagine (Appendice1) è quella secondo la quale per indagare in maniera approfondita su alcune difficoltà evidenziabili nel passaggio dal pensiero aritmetico a quello algebrico è necessario un'analisi delle conoscenze ingenui degli allievi coinvolti con particolare riferimento ad un primo concetto di funzione da ritenersi come sottolineano Grugnetti e Villani (Cfr. [9] pag. 197) come **condizione necessaria** al raggiungimento consapevole delle tecniche e strategie usate.

Il concetto di funzione in questo senso viene da noi inteso in termini di corrispondenza o almeno “saper leggere” una tabella mettendo in evidenza il dato mancante. Il concetto di variabile ,infatti, elemento portante per il ragionamento algebrico e quindi per il pensiero algebrico <<si sviluppa lentamente, passando dalla relazione iniziale tra i numeri inclusi nelle tabelle, alle quantità dinamiche relazionate attraverso una formula>> (Malisani, 2006, pag.161).

Con questa finalità, nello strutturare lo strumento d'indagine utilizzato in questo lavoro, abbiamo previsto uno studio preliminare (attraverso una prova che abbiamo chiamato questionario 0), elemento portante per la ricerca condotta e non presente nei lavori di ricerca precedenti, nel quale abbiamo chiesto agli studenti di riflettere su un problema espresso in linguaggio naturale che presentava al suo interno una tabella.

In generale, come si evince da una prima lettura, lo strumento d'indagine che abbiamo pensato ed elaborato si articola poi opportunamente su tre diversi livelli d'analisi; si compone,infatti, oltre al questionario 0, di altre tre differenti batterie di domande (denominati questionario I, questionario II e questionario III) tra loro complementari e da ritenersi in una prima approssimazione, esaustivi per l'indagine proposta.

La prima successione di domande che abbiamo presentato nel questionario 0 si proponevano, come detto, di verificare in un'analisi iniziale, se gli studenti possedessero o meno un primo concetto di relazione-funzione: idea ritenuta preliminare per il pieno, maturo e consapevole raggiungimento del pensiero algebrico. La soluzione dei quesiti proposti richiedeva,infatti, la capacità di relazionare una quantità che varia in maniera discreta formalizzando il risultato ottenuto. Il pensiero attivato dagli studenti nel compito proposto, indagato e studiato a posteriori in relazione al comportamento adottato dagli stessi sui restanti esercizi, può essere definito quindi come un

pensiero di tipo pre-funzionale che fa riferimento ad un pensare **simultaneamente** su intere famiglie di numeri piuttosto che su una qualsiasi quantità specifica (pensiero richiesto invece nel primo quesito del questionario), nonché alle reciproche relazioni tra famiglie di numeri. (Arzarello et alii, 1994).

In questa parte del questionario, avremmo potuto mettere un'ulteriore condizione necessaria, una condizione riferita alla lettura, ad esempio, di una formula del tipo $P=kt$. Abbiamo però, in questo contesto, deliberatamente scelto di non indagare su ciò. Nella scrittura presentata compare la nozione di parametro definito da Grugnetti e Villani come un terzo livello di pensiero algebrico (Cfr. [9], pag. 200), un livello troppo alto, maturo, consapevole per una condizione necessaria, come da noi intesa, condizione minima per il passaggio all'Algebra, e quindi, a nostro parere, da studiare solamente dopo aver verificato altri livelli precedenti di pensiero algebrico .

La strutturazione dei vari esercizi prospettati nei differenti questionari I e III è stata poi riproposta sulla falsa riga di quella evidenziata nei lavori condotti precedentemente sullo stesso tema di ricerca: le varie situazioni problematiche somministrate nel questionario sono state quindi, anche in questo caso, formulate secondo contesti differenti, denominati *geometrico*, *algebrico* e *aritmetico/naturale-quotidiano* ed espresse secondo differenti linguaggi.

La scelta di riproporre la stessa tipologia di quesito è stata dettata anche e soprattutto dall'analisi dei risultati precedentemente ottenuti che hanno confermato, ancora una volta, come l'isomorfismo di strutture logiche nei contesti algebrico e geometrico non implichi necessariamente l'isomorfismo nella performance degli studenti <<[...] *il contesto semiotico influisce sulle concezioni della variabile dal punto di vista dell'alunno*>>. (Malisani, 2006. p.6).

Per un'analisi più approfondita, secondo quanto detto in precedenza in termini d'oggettività e chiarezza dei risultati, nel preparare questo nuovo strumento di ricerca abbiamo poi affiancato agli esercizi sopra descritti alcune domande stimolo (presentate sul questionario II) che potessero far riferimento al libero pensiero degli studenti e riferirsi quindi all'analisi della fase di metacognizione. In questa parte del questionario, abbiamo allora chiesto ai ragazzi di riflettere autonomamente ed in maniera più o meno consapevole sugli esercizi proposti nel questionario I (in termini di contesto di presentazione del problema, linguaggio formalizzato e procedura risolutiva da adottare) ed avere quindi come ricaduta, come nostra ipotesi, una consapevolezza maggiore nell'affrontare il terzo questionario creato ad hoc secondo questa motivazione.

In questo senso inoltre il questionario II presentando una serie d'esercizi/domande stimolo aperte permetteva una nostra maggiore attenzione agli schemi di ragionamento degli allievi attraverso la lettura delle loro osservazioni, giustificazioni, motivazioni alla risposta. Il presente lavoro, basandosi su un'analisi quantitativa dei dati, non tratterà, per le difficoltà che ciò può comportare, questo aspetto. Si rimanda quindi l'analisi qualitativa dei protocolli ad un approfondimento successivo.

Nell'analisi dei quesiti presentati nel questionario utilizzato sottolineiamo poi la presenza nel questionario II e III, in parallelo, di due quesiti relativi al concetto di parametro.

La scelta di inserire nel test due problemi del genere non è stata casuale; secondo quanto detto anche in precedenza in relazione al concetto di parametro correlato al pensiero algebrico, gli esercizi presentati si proponevano, in una prima analisi, certamente da approfondire con ulteriori studi, di valutare la consapevolezza matura in termini di pensiero algebrico acquisita dagli studenti; valutare quindi, in maniera più oggettiva e meno ambigua possibile, il pieno raggiungimento, se mai conquistato, del pensiero algebrico.

Nel processo di costruzione del linguaggio algebrico e quindi in generale del pensiero algebrico in relazione a quello aritmetico, si passa, come già accennato precedentemente, in maniera più o meno consapevole, dalla semplice relazione tra numeri contenuti in una tabella al concetto di variabile collegata a quantità continue, passando attraverso il manipolare quantità dinamiche discrete legate in una formula. Come osserva Malisani poi <<*in relazione al metodo è possibile poi definire due differenti livelli di concepire la generalità: uno relativo alla possibilità di applicarlo ad una diversità di casi specifici, l'altro riguardante la possibilità di esprimerlo attraverso il linguaggio*

dell'algebra simbolica. Il secondo livello, si raggiunge soltanto con l'introduzione dei parametri, così intere famiglie di problemi possono essere trattate mediante procedure concise, cioè attraverso una formula>> (Malisani, 2006, p.42)

L'analisi delle strategie risolutive degli allievi riferite a queste particolari e complesse problematiche “lette” in parallelo con le altre riferite all'utilizzo della variabile, potrebbe permettere allora, a nostro parere, di evidenziare in una prima battuta, il rapporto variabile-parametro in termini di pensiero algebrico.

Se lo strumento d'indagine adottato per questo lavoro di ricerca è stato, come ampiamente discusso in precedenza, modificato rispetto ai precedenti (Cfr.[18]) nel contenuto e nella sua strutturazione, per favorire un'indagine quanto più profonda e dettagliata; secondo la stessa idea, sono state apportate sostanziali modifiche e correzioni per quanto attiene alla metodologia d'indagine sperimentale.

Se, infatti, i precedenti lavori si appoggiavano, per l'analisi dei risultati, a questionari o test, sperimentati in classe in un unico momento di riflessione per gli studenti, in questo lavoro, per favorire nei ragazzi una maggiore riflessione a posteriori sul test o almeno su una parte significativa di questo, e quindi una presa di coscienza di eventuali errori e false risposte riportate, si è pensato di verificare lo strumento di indagine in due distinti momenti di attenzione riproposti in due distinte e successive fasi (per lo più in due diverse giornate).

La preferenza di tale metodologia di ricerca è stata dettata anche e soprattutto in relazione alla struttura dell'ultimo questionario somministrato, il questionario III. La particolarità dello strumento, costruito su una serie di situazioni problematiche create ad hoc e sostanzialmente riferite alla stessa classe di problemi presentate nel questionario I, “risolte” dagli allievi nella prima fase di riflessione in classe, aveva l'obiettivo, come precedentemente sottolineato, di permettere agli studenti una riflessione più matura sugli esercizi presentati e quindi una maggiore disinvoltura nel “controllare” in parallelo, attraverso i differenti registri linguistici, i vari quesiti; affrontando con maggior “coscienza” il sistema parametrico proposto (peraltro opportunamente espresso in una forma più immediata rispetto a quello del questionario II), ultima ed importante tappa del percorso di studio proposto.

Per entrambe le batterie di test, si chiedeva agli studenti di risolvere (in massimo 40 minuti) gli esercizi, evidenziandone i vari passaggi.

Nella prima fase di sperimentazione abbiamo quindi somministrato i questionari 0, I e II e solamente nella seconda fase (per lo più il giorno dopo) abbiamo portato in classe il terzo questionario.

La diversità di comportamento, e quindi la maturazione dei ragazzi, attraverso le varie sottoparti del questionario, risulta, attraverso anche la lettura dei dati sperimentali, più o meno evidente sia a livello universitario che per gli studenti di scuola superiore, dove, come vedremo successivamente con l'analisi di alcune delle strategie messe in atto dagli allievi, la situazione analizzabile sul questionario I e II è per lo più differente sul III.

Il tipo di studio che abbiamo considerato ha coinvolto in totale 102 studenti di Palermo d'età compresa fra i 17 ed i 19 anni frequentanti sia la scuola secondaria superiore negli indirizzi Istituto d'Arte, Liceo Scientifico ed Istituto Tecnico Commerciale, che il primo anno d'Università. La scelta di un campione così variegato è stata effettuata allo scopo di verificare una differenza di verbalizzazione tra gli studenti per il compito presentato.

Sulla scia dei lavori precedenti (Cfr.[18]) abbiamo sì proposto il test agli alunni della scuola secondaria superiore ed in particolare a quelli frequentanti il IV anno, ma in questo lavoro, con la finalità di studiare anche l'evoluzione del fenomeno indagato dopo la scuola secondaria, abbiamo voluto estendere l'indagine ad un primo anno d'Università, scegliendo, per il fine proposto, una facoltà d'indirizzo scientifico come Biotecnologie.

Selezionando poi tre scuole d'indirizzo differente abbiamo potuto analizzare in parallelo i diversi approcci all'Algebra nei vari contesti didattici, peraltro fra loro molto diversi.

La scelta di questi particolari indirizzi scolastici è stata fortemente voluta anche in relazione ai risultati evidenziati negli anni passati (Cfr.[18]) attraverso i quali abbiamo indagato sul confronto diretto tra il Liceo classico e quello Scientifico. In questo lavoro quindi, consci dei risultati ottenuti, abbiamo esteso lo studio all’istituto d’Arte (una tipologia d’istituto certamente non incentrata sul ramo scientifico) mantenendo come campo di controllo un indirizzo di scuola superiore di tipo Scientifico ed uno Tecnico Commerciale, indirizzi da ritenere “buoni” in termini di comparazione per l’analisi dei comportamenti.

Le scuole scelte per la sperimentazione: l’Istituto d’arte di Palermo di Piazza Turba, il Liceo Scientifico Galileo Galilei di Palermo e l’Istituto Tecnico Commerciale Salvemini di Palermo¹.

Analisi dei risultati

➤ Analisi a-priori

Scopo principale dell’analisi a-priori è quello di classificare e riportare tutte le possibili strategie risolutive che s’ipotizzano gli studenti possano applicare per la “soluzione” del test.

Riferendoci ai risultati evidenziati nella ricerca in didattica in questo settore, stilata l’analisi a-priori e somministrato lo strumento d’indagine, abbiamo confrontato i risultati ipotizzati con quelli raccolti dall’analisi sperimentale.

L’ipotesi dalla quale siamo partiti per l’analisi dei risultati, è stata quella secondo la quale la tecnica procedurale adottata da uno studente per la risoluzione di un quesito (strategia risolutiva letta anche in parallelo tra i vari esercizi presentati nel test) possa evidenziare, in una prima analisi, il pensiero dell’allievo e quindi in particolare, se la sua fissità di pensiero, possa “limitarlo” in qualche modo nella risoluzione algebrica di una determinata situazione problematica; viceversa, se in particolari condizioni, sia capace di ragionare in termini algebrici e quindi evidenziare una certa “abitudine” alla formalizzazione del testo in linguaggio matematico e alla risoluzione dello stesso in maniera algebrica. Se sia, in pratica, capace di giocare con le formule, manipolarle consapevolmente.

Riportiamo in appendice II alcune delle possibili strategie ipotizzate.

➤ Prime elaborazioni con il software CHIC

Il primo risultato che riteniamo importante sottolineare in questo contesto, fa certamente riferimento al comportamento e l’atteggiamento positivo evidenziato dagli allievi coinvolti. Tutti i ragazzi, infatti, si sono dimostrati interessati e attenti al compito proposto. Pochissimi sono stati i compiti nulli o non valutabili quantitativamente. Per l’interpretazione dei dati si è raccomandato loro di prestare attenzione non soltanto al risultato dell’esercizio ma piuttosto al procedimento adottato per la risoluzione.

In pochissimi casi, come già detto, si è stati costretti a considerare non valide le risposte che non riportavano il procedimento seguito.

Le strategie individuate nell’analisi a-priori si sono dimostrate valide ed esaustive, i comportamenti ipotizzati si sono infatti verificati.

L’analisi dei risultati è stata ottenuta attraverso semplici applicazioni di statistica descrittiva e l’uso del software di statistica inferenziale CHIC. Attraverso l’analisi implicativa e della similarità, il software utilizzato ci ha permesso di evidenziare significative relazioni tra i vari item analizzati e fare quindi alcune possibili inferenze. I grafi prodotti dallo CHIC, alcuni dei quali riportati nel testo, hanno infatti permesso di mettere in evidenza nodi a nostro parere significativi relativi al questionario e le interrelazioni fra le varie sottoparti di questo (Questionario 0, I, II e III).

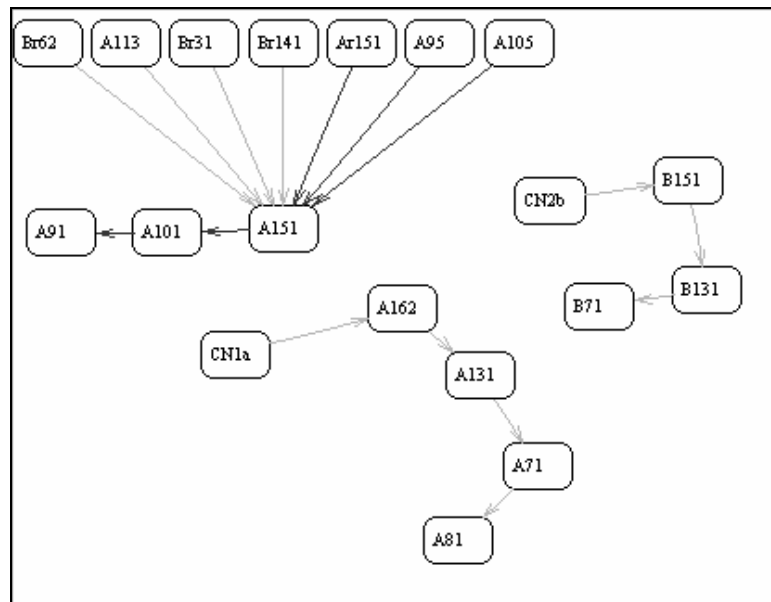
Nel presente articolo, ci riferiamo nello specifico, ai risultati ottenuti analizzando i dati dell’indirizzo Scientifico e del I anno del corso di Biotecnologie confrontati, in una prima analisi,

¹ L’esperienza si è svolta in collaborazione con la Prof. Messina (Liceo scientifico Galile Galilei), il Prof. Catania (Istituto d’Arte di Piazza Turba), la Prof. Scillieri (Istituto tecnico commerciale Salvemini) e la Prof. Marino (docente del corso di Istituzioni di Matematica, I anno della facoltà di Biotecnologie).

con alcuni dei risultati giudicati più evidenti, riscontrabili all’Istituto d’Arte ed al Tecnico commerciale, indirizzi certamente meno centrati sulle discipline scientifiche ma che consentono, come detto in precedenza, proprio per questo, un termine di paragone interessante.

I grafi riportati nelle pagine successive, riferite esclusivamente all’implicazione, sono stati ottenuti elaborando i dati immessi attraverso una matrice scritta con Excel.

Il primo grafo implicativo che potrebbe risultare interessante analizzare è quello relativo alle variabili collegate al Liceo scientifico.



Il grafo, disposte le variabili in maniera opportuna, risulta facilmente interpretabile.

Una prima analisi parallela delle variabili in gioco mette, infatti, in evidenza da un lato l’implicazione (con un livello 95 d’intensità) tra la variabili CN2b, considerata condizione necessaria di tipo statico sul quesito II, e una serie di strategie algebriche scorrette; dall’altro, l’implicazione (con un livello 99 d’intensità) tra la Condizione Necessaria CN1a e alcune delle strategie algebriche corrette ipotizzate nell’analisi a priori.

Per il significato stesso d’implicazione si ha quindi un risultato che conferma l’ipotesi iniziale relativa alla Condizione Necessaria impostata:

- una condizione Necessaria di tipo statico, legata al singolo caso e senza alcuna possibilità di generalizzazione da parte dell’allievo, sembra portare in lui, una conoscenza in Algebra errata, “falsa”. Lo studente, pur elaborando ed evidenziando una prima idea di relazione/funzione sembra non riuscire a leggere in maniera autonoma una formula. Non padroneggia questa e quindi le variabili presenti in essa. Le strategie di risoluzioni tipicamente algebriche possono risultare, come in questo caso, errate sia per calcoli che procedura.

-una Condizione Necessaria dinamica invece sembrerebbe portare una maturità consapevole di lettura algebrica e quindi una manipolazione cosciente di una formula, di un’espressione algebrica formalizzata. Tra le strategie correlate alla CN1a risulta poi evidente la A162, riferita al sistema parametrico presentato nel questionario III. L’implicazione mette in rilievo una prima, ingenua, accettazione negli allievi, dell’approssimazione dell’idea di parametro. Possiamo quindi parlare di un pensiero pre-algebrico.

Le altre variabili presenti nel grafo potrebbero poi permetterci una riflessione a posteriori sull’utilizzo del questionario II e quindi sulla sua valenza “educativa” sul III.

Concordemente alle nostre ipotesi, è infatti interessante evidenziare come, aver svolto il questionario II, abbia portato ad affrontare il questionario III in maniera più critica e cosciente (si notino le implicazioni tra le variabili Br62, Br31, A105... e la A151 legata alla A91 e A101). La metacognizione sembrerebbe quindi aver favorito una maggiore consapevolezza almeno in termini

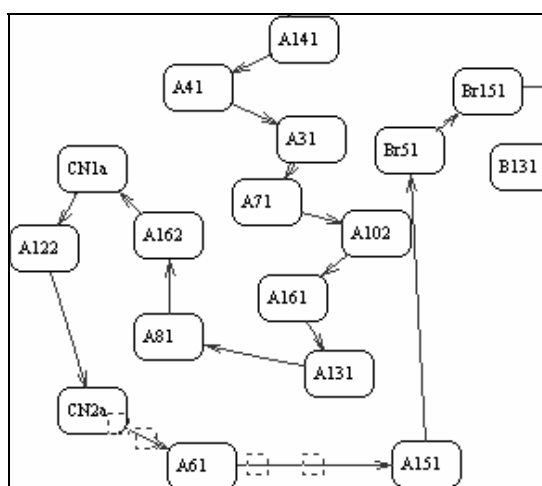
di procedimenti. Prova ne è che nel questionario III è possibile evidenziare, a tutti i livelli scolastici analizzati, una maggiore percentuale di risultati corretti rispetto a quelli precedentemente risolti dagli allievi nel primo questionario. La metariflessione, come detto precedentemente, sembra che abbia indotto negli allievi performance più attente.

Un’analisi parallela poi sul grafo implicativo relativo alla sperimentazione sul corso di Laurea di Biotecnologie (sotto riportato in un particolare relativo alle variabili più significative e con un livello d’intensità d’implicazione 99) fa risaltare una situazione complessa tra le variabili coinvolte.

Attraverso la lettura del grafo è possibile evidenziare due tipologie di studenti “buoni risolutori algebrici”: quelli che evidenziano come “strategia risolutiva” la Condizione Necessaria (CN1a, CN2a, CN1b, CN2b), e quelli che invece non riportano alcuna risposta per i quesiti I e II pur indicando strategie di tipo algebrico corrette e non, per alcuni dei quesiti affrontati.

Implicazioni significative in questo senso si ritrovano quindi tra le variabili A131, A81, A162 e CN1a; CN1a, CN2a (attraverso la A122) e le CN2a, A61, A51.

Se per la prima tipologia di studenti possiamo ipotizzare però una consapevolezza matura delle strategie algebriche, utilizzate in virtù delle ipotesi fatte sulla Condizione Necessaria; per la seconda tipologia di studenti possiamo invece supporre soltanto che questi conoscano la sintassi dell’Algebra e che quindi siano “capaci” di affrontare la risoluzione algebrica ma che non abbiano una piena consapevolezza della variabile. Avere la Condizione Necessaria non implica, infatti, necessariamente “l’utilizzo” spontaneo, da parte dello studente, del pensiero algebrico, è però garanzia, per noi, per una piena e consapevole “comprensione” di questo.



Altre implicazioni interessanti possono poi essere ritrovate analizzando l’informazione studiata a percentuali più basse. In particolare abbassandola all’85% appaiono evidenti, le strategie errate, indicate con la lettera B, riferite al pensiero aritmetico, per gli esercizi IV, V, VI, XIV e XV, che seppur non particolarmente utilizzate in questo indirizzo di studi (risultati diversi si evincono all’istituto d’Arte e al Tecnico Commerciale) risultano tra loro fortemente implicate.

Se al Liceo Scientifico, secondo quanto detto, attraverso le analisi messe appunto, la situazione evidenziata mostra negli studenti un pensiero solamente pre-algebrico la situazione universitaria per ciò che attiene il primo anno di Biotecnologie, seppur con le dovute modifiche del caso, non è da considerare poi molto distante.

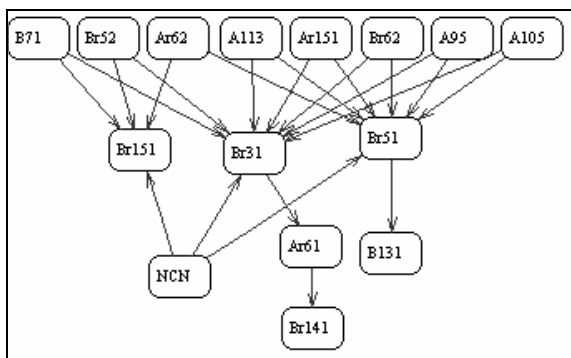
La percentuale degli allievi che affrontano in maniera più o meno consapevole i quesiti 12 e 16, riferiti al parametro, è certamente più alta in percentuale ma, anche in questo caso, possiamo soltanto concludere considerando una prima, ingenua, accettazione negli allievi dell’approssimazione dell’idea di parametro. Soltanto pochissimi studenti sembrano raggiungere, seppur in una prima ipotesi, la percezione di parametro e quindi il considerare i diversi quesiti del

questionario come identificati in un'unica classe di problemi. Anche in questo caso quindi, per la maggior parte degli allievi, possiamo soltanto parlare di un pensiero pre-algebrico.

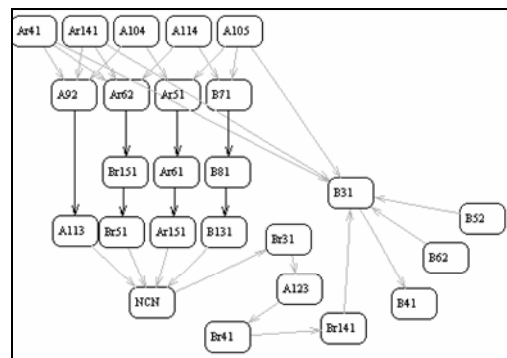
Un'analisi comparativa delle variabili evidenziate nei grafi CHIC, (in particolare quelli riferiti al Liceo Scientifico e all'Università) e le relative complesse relazioni di queste con le variabili CN, ci ha portato, in una successiva fase di elaborazione del lavoro sperimentale, a mettere a punto, per l'analisi proposta, un'ulteriore variabile creata ad hoc: la NCN. Variabile da noi intesa come “mancanza” della Condizione Necessaria.

Secondo quest'ulteriore approfondimento, abbiamo quindi ricercato e isolando quegli studenti che, nella risoluzione del questionario, evidenziavano una mancanza nella Condizione Necessaria non rispondendo a nessuno dei due quesiti inseriti nel questionario 0 o riportando una strategia errata per gli stessi. Riconsiderata l'analisi dei dati abbiamo poi inserito tra le variabili in gioco la strategia NCN relativa proprio a questi casi difficili da analizzare.

I grafi delle similarità sotto riportati (in un particolare relativo alle variabili più significative) riferiti all'istituto d'Arte (percentuale di informazione all'99%) e al corso di Biotecnologie (percentuale di informazione all'90%); indirizzi nei quali abbiamo riscontrato in maniera significativa in percentuale la variabile NCN, evidenziano, coerentemente a quanto ipotizzato sulla variabile in questione, tra le relazioni interessanti che è possibile riscontrare, da un lato le implicazioni tra le variabili aritmetiche errate, utilizzate nelle varie sottosezioni del questionario e la NCN, dall'altro le correlazioni dirette o indirette tra la stessa variabile NCN e le strategie sia algebriche che aritmetiche errate. Significativa è poi l'implicazione che si ritrova nel grafo di Biotecnologia tra la variabile A123, strategia errata riferita al parametro, e la NCN.



Grafo implicativo Ist. D'Arte Piazza Turba



Grafo implicativo Corso di Laurea Biotecnologia.

Come detto anche precedentemente, allora, gli studenti che hanno raggiunto una prima Condizione Necessaria, sembrerebbe che si dimostrino in grado di argomentare nelle soluzioni dei quesiti, seppur in alcuni casi in maniera non sempre sintatticamente corretta, con ragionamenti di tipo almeno pre-algebrico e quindi con un linguaggio almeno pre-formalizzato che non faccia riferimento a tentativi di soluzione per prove ed errori.

Gli studenti invece che mostrano serie difficoltà sui primi due esercizi del questionario 0, non rispondendo del tutto o evidenziano errori nella compilazione delle tabelle, sembra che non riescano ad evidenziare neanche un primo stadio di pensiero algebrico (Cfr.[9]): non riescono ad impostare una strategia di tipo algebrico, corretta nei calcoli e nella procedura (non si ritrovano infatti strategie algebriche corrette per nessuno degli esercizi proposti).

Ulteriori approfondimenti in questo senso, per questi casi di studio da porre sotto la lente di ingrandimento, andrebbero fatti poi per quanto attiene agli esercizi specifici sul parametro. Interessante sarebbe infatti notare come nel grafo implicativo la variabile A165 e A125 possa essere implicata in qualche modo, con la NCN.

Conclusioni e problemi aperti

L'analisi evidenziata ci permette una duplice osservazione. Da un lato ci conferma i risultati discussi con le sperimentazioni precedenti (Cfr.[18]) e ci permette di poter affermare che con l'introduzione della Condizione Necessaria come variabile di controllo per lo studio del livello di maturazione del pensiero algebrico negli studenti, lo stadio di oggettività in termini di analisi dei dati e critica dei risultati è apparso, seppur in una prima analisi, maggiore rispetto a quello tenuto nei lavori precedenti. Dall'altro, la mancanza della Condizione necessaria, isolata e studiata negli studenti come variabile portante per il lavoro di ricerca, ci ha permesso di sottolineare come questa possa vincolare la performance degli allievi sia per la messa in formula autonoma di una situazione non propriamente algebrica che già soltanto nel saper leggere una formula o un'espressione in linguaggio almeno pre-formalizzato.

Se è vero che, come sperimentato, la mancanza della Condizione Necessaria si ritrova maggiormente negli istituti scolastici meno incentrati sui contenuti matematici è però possibile una ipotizzabile correlazione tra tutti gli indirizzi scelti per la sperimentazione. All'Istituto d'Arte e all'Università (Indirizzo di Biotecnologie), coerentemente con le nostre ipotesi, abbiamo, infatti, ottenuto, come risultato significativo, percentualmente di più nel primo che nel secondo caso, gli estremi di valutazione di tale variabile; in entrambi i casi la “strategia” NCN, considerata, risulta correlata con una quasi totalità di esercizi errati di tipo aritmetico e pochi di tipo algebrico, anch'essi errati.

Nel presente lavoro abbiamo identificato la variabile CN solamente come Condizione Necessaria e non anche Sufficiente. La nostra scelta, confortata anche a-posteriori dall'analisi quantitativa, è stata dettata dalla possibilità di ritrovare casi particolari di studenti che possano manifestare strategie algebriche corrette nella risoluzione di particolari quesiti di matematica, pur privi della Condizione Necessaria, indicata come condizione minima per un approccio consapevole all'Algebra. Tali studenti sembrerebbe allora che risolvano i quesiti usufruendo solamente di una sintassi priva di significato recepita dall'uso non consapevole delle strategie e dal significato che esse portano.

I risultati più evidenti, riferiti poi alla fase metacognitiva della sperimentazione, ci hanno inoltre evidenziato come per questi *studenti NCN* (studenti privi della Condizione Necessaria) sia compito arduo riferirsi al parametro, concetto da noi ritenuto portante per il maturo e consapevole pensiero algebrico.

In questo senso comunque per la quasi totalità degli studenti coinvolti nella sperimentazione, il concetto di parametro si rivela un ostacolo. Alla richiesta di “riconoscere” i vari modelli presentati nel questionario, soltanto pochissimi allievi (per lo più universitari) hanno raggiunto, seppur in una prima ipotesi, la percezione di parametro e quindi il considerare come i diversi quesiti del questionario potessero essere identificati in un'unica classe di problemi.

A tale riguardo affronteremo un'indagine per verificare la natura di ostacolo della tematica riguardante il parametro che ipotizziamo possa rappresentare un ostacolo epistemologico.

Se fosse così potrebbe essere opportuno ripensare all'approccio didattico ai concetti di incognita e parametro; concetti certamente in stretta dipendenza fra loro, e riferiti, già ad un livello ingenuo, al concetto di relazione/funzione come mostrato sperimentalmente, in prima approssimazione, in questo lavoro.

Come risultato significativo relativo alla metodologia di sperimentazione riteniamo significativo sottolineare come per la maggior parte degli allievi coinvolti nella fase sperimentale l'aver svolto il questionario II, sia stato un momento importante di attenzione. La riflessione autonoma nei quesiti IX, X e XI ha portato gli studenti, in maniera più o meno evidente, ad affrontare il questionario III in modo più critico e consapevole. La metacognizione sembra quindi aver favorito nei ragazzi una maggiore consapevolezza, almeno in termini di procedimenti attesi e verificati.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Arzarello F., Bazzini L., e Chiappini G., (1994), L'Algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche. Progetto Strategico CNR - TID, Quaderno n. 6.
- [2] Bednzar N., Radford L., Janvier B., Lepage A., (1992), Arithmetical and algebraic thinking in problem solving, Proc. PME XVI, Durham N.H., Vol. I
- [3] Bourbaki N., (1976), Elementos de historia de las Matematicas, Madrid. Ed. orig.: Eléments d'histoire des mathématiques. Hermann, (1969), Paris
- [4] Di Chiara I., (2004), Equazioni di primo e secondo grado (tesi di laurea), Palermo.
- [5] Di Paola B., (2003), Analisi sperimentale di alcune fasi del passaggio dal pensiero aritmetico al pensiero algebrico (tesi di laurea), Palermo.
- [6] Franci R., Pancati M., (1988), Introduzione di “Il Trattato d'Algebra”. In Anonimo, pag. I- XXIX.
- [7] Garcia R., Piaget J.. (1989), Psychogenesis and the history of scienze, Columbia Univ. Press, New York.
- [8] Gras R. (2000), Les fondements de l'analyse implicative statistique, Quaderni di Ricerca in Didattica, Palermo, <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno9.htm>
- [9] Grugnetti L., Villani V. La Matematica dalla scuola materna alla maturità, Pitagora editrice, Bologna
- [10] Kline M., (1991), Storia del pensiero matematico. Vol. I, Vol. II, Enaudi Editore, Torino.
- [11] Loria G., (1929), Storia delle matematiche Vol I, Torino.
- [12] Maracchia S, (2001), articolo tratto da: Progetto Alice, N.5 Vol II
- [13] Malisani, E., (1992), Incidenza di diversi tipi di struttura logica di un problema sulla condotta di risoluzione. Quaderni di Ricerca in Didattica del Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche (G.R.I.M.), n. 3, Palermo, pp.65–86. - ISSN on-line 1592-4424. Pubblicazione on-line su Internet nel sito <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno3.htm> .
- [14] Malisani, E., (1996), Storia del pensiero algebrico fino al cinquecento. Costruzione del simbolismo e risoluzione di equazioni. Quaderni di Ricerca in Didattica del Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche (G.R.I.M.), n. 6, Palermo, pp.26-77. - ISSN on-line 1592-4424. Pubblicazione on-line su Internet nel sito <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno6.htm>.
- [15] Malisani, E., Marino T., (2002), Il quadrato magico: dal linguaggio aritmetico al linguaggio algebrico. Quaderni di Ricerca in Didattica del Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche (G.R.I.M.), supplemento al n.10, Palermo, - ISSN on-line 1592-4424. Pubblicazione on-line su Internet nel sito <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno10.htm>.
- Difficulty and Obstacles with the concept of variable, Proceedings CIEAEM57.
- [16] Malisani, E., Spagnolo F., (2005), Difficulty and Obstacles with the concept of variable, Proceedings CIEAEM57. <http://math.unipa.it/~grim/CIEAEM57>
- [17] Malisani, E., (2006), Il concetto di variabile nel patagio dal linguaggio aritmetico al linguaggio algebrico in contesti semiotici diversi. Tesi di dottorato Comenius University , supervisore Prof. Filippo Spagnolo <http://dipmat.math.unipa.it/~grim>.
- [18] Marino T., Spagnolo F., (1996), Gli ostacoli epistemologici: Come si individuano e come si utilizzano nella Ricerca in Didattica della Matematica. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 19B (2), pag.130-152.
- [19] Marino T., Di Chiara I., Di Paola B., (2004), Il passaggio dal pensiero aritmetico al pensiero algebrico nella scuola secondaria superiore, atti convegno “Quali prospettive per la Matematica e la sua Didattica”, 2004, Piazza Armerina (EN) Pubblicazione on-line su Internet: http://math.unipa.it/~grim/convreg1_dipaola_PA.pdf
- [20] Nesselmann G.H., (1843), Essez der Rechenkunst von Mohammed Beha-eddin ben Alhosain aus Amul, arabisch und deutch, Berlin.
- [21] Neugebauer O., (1935), Mathematische Keilschrift-Texte (MKT),I
- [22] Spagnolo, F., (1998), Il ruolo della storia delle matematiche nella ricerca in didattica, Storia e ricerca in didattica.

QUESTIONARIO 0

Esercizio 1:

In un agrumeto, in un anno, si producono 10 kg. di limoni.

- a) Cosa traduce la tabella sotto riportata?
- b) Secondo te, in essa, cosa va sostituito al posto del simbolo “*“?

12 mesi	24 mesi
10 Kg.	*

Esercizio 2:

Leggi la seguente tabella:

1 anno	2 anni	3 anni	5 anni	t anni
10 Kg.	20 Kg.	30 Kg.	50 Kg.	10t Kg.

P = Produzione

Cosa rappresenta la formula $P=10t \text{ Kg}$?

QUESTIONARIO 1

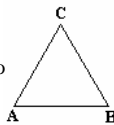
Esercizio 3:

In un triangolo, un angolo è di 57° mentre la differenza degli altri due è di 83° . Trova le ampiezze dei tre angoli.

N.B. Ricorda che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°

Esercizio 4:

Il perimetro del triangolo ABC riportato accanto è 180 cm.. Il lato AC misura 20 cm



mentre il lato BC è minore del lato AB di 46 cm.. Determina i lati del triangolo ABC.

Esercizio 5:

Due amici, Giacomo ed Andrea, si incontrano a scuola per scambiarsi dei CD; Giacomo dice ad Andrea: <<Dammi cinque dei tuoi CD ed io ne avrò quindi il triplo dei tuoi.>>. Andrea risponde all'amico dicendo: <<Dammene invece tu cinque, ne avremo così un numero uguale!>>. Quanti CD aveva ciascuno?

Esercizio 6:

Trova le età dei due fratelli Rossi: Carlo e Mario, sapendo che:

- > sommando cinque all'età di Mario si ottiene una quantità pari al triplo della differenza fra l'età di Carlo e cinque;
- > aggiungendo cinque all'età di Carlo e sottraendo cinque all'età di Mario, le due quantità così ottenute sono le stesse.

Esercizio 7:

Risolvi il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Esercizio 8:

Risolvi il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} y = \frac{12 - 3x}{2} \\ y = 2 - x \end{cases}$$

QUESTIONARIO 2

Esercizio 9:

Gli esercizi N.3 e N.4 hanno lo stesso metodo risolutivo? Sintetizzano la stessa questione? **Motiva la risposta.**

Esercizio 10:

Gli esercizi N.5 e N.6 hanno lo stesso metodo risolutivo? Sintetizzano la stessa questione? **Motiva la risposta.**

Esercizio 11:

Gli esercizi N.7 e N.8 hanno lo stesso metodo risolutivo? Sintetizzano la stessa questione? **Motiva la risposta.**

Esercizio 12:

Riesci a descrivere qualche situazione problematica *utilizzando* il seguente sistema parametrico?

$$\begin{cases} x = a \\ y - z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$$

QUESTIONARIO 3

Esercizio 13:

Risolvi il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \\ 2x + 2y = 80 \end{cases}$$

Esercizio 14:

Il perimetro di un rettangolo è 80 dm. ed il rapporto tra i due lati è $\frac{2}{3}$. Calcola le misure dei lati e l'area del rettangolo.

Esercizio 15:

Determina le età di Giovanna e di Licia sapendo che:

- il rapporto tra le loro età è $\frac{2}{3}$;
- la doppia somma delle rispettive età è pari ad 80 anni.

Esercizio 16:

Secondo te, il seguente sistema parametrico, $\begin{cases} \frac{x}{y} = a \\ 2(x + y) = b \end{cases}$ è una modellizzazione degli esercizi N.13, N.14 ed N.15 sopra proposti? **Motiva la risposta.**

Riportiamo alcune delle strategie presenti nell’analisi a priori del questionario:

CN1a	La tabella traduce la crescita annuale della produzione. Lo studente legge la tabella e la riconduce spontaneamente al calcolo del dato mancante. Nella fase di giustificazione evidenzia una visione dinamica della problematica.
CN1b	La tabella traduce la produzione annuale di limoni. Nella fase di giustificazione, lo studente evidenzia una visione statica della problematica.
CN2a	La formula è la traduzione della tabella presentata. La tabella rappresenta il testo. Lo studente traduce la relazione riportata in linguaggio naturale in termini di produzione e crescita.
CN2b	Lo studente traduce la formula, rimanendo agganciato alla simbologia presentata senza far apparire l’idea di funzione.
A31	Strategia riferita allo studio di un sistema lineare impostato e risolto opportunamente.
Ar31	Strategia per tentativi ed errori. Strategia sistematica.
Ar32	Strategia per tentativi ed errori. Strategia casuale.
A41	Strategia riferita allo studio di un sistema lineare impostato e risolto opportunamente.
Ar41	Strategia per tentativi ed errori. Strategia sistematica.
Ar42	Strategia per tentativi ed errori. Strategia casuale.
A51	Strategia riferita allo studio di un sistema lineare impostato e risolto opportunamente.
A52	Strategia riferita allo studio di un sistema lineare impostato e risolto opportunamente. Lo studente non formalizza dinamicamente il problema.
Ar51	Strategia per tentativi ed errori. Strategia sistematica.
Ar52	Strategia per tentativi ed errori. Strategia casuale.
A61	Strategia riferita allo studio di un sistema lineare impostato e risolto opportunamente.
A62	Strategia riferita allo studio di un sistema lineare impostato e risolto opportunamente. Lo studente non formalizza dinamicamente il problema.
Ar61	Strategia per tentativi ed errori. Strategia sistematica.
Ar62	Strategia per tentativi ed errori. Strategia casuale.
A71	Strategia riferita allo studio di un sistema lineare impostato e risolto opportunamente.
Ar71	Strategia per tentativi ed errori. Strategia sistematica.
Ar72	Strategia per tentativi ed errori. Strategia casuale.
A81	Strategia riferita allo studio di un sistema lineare impostato e risolto opportunamente.
Ar81	Strategia per tentativi ed errori. Strategia sistematica.
Ar82	Strategia per tentativi ed errori. Strategia casuale.
A9/10/111	Lo studente riconosce l’analogia fra i due quesiti proposti ed interpreta correttamente la questione.
A9/10/112	Lo studente riconosce l’analogia solamente in termini di metodo risolutivo.
A9/10/13	Lo studente riconosce l’analogia solamente in termini di struttura, secondo una visione statica della problematica.
A9/10/114	Lo studente non riconosce nessuna analogia tranne una generica appartenenza a problemi di matematica.
A9/10/115	Lo studente non riconosce l’analogia, giustificando la sua risposta ad ogni singolo particolare degli esercizi proposti.
A9/10/116	Lo studente non riconosce alcuna analogia, manifestando una conoscenza settoriale, legata al contesto e al linguaggio usato.
A121	Lo studente risponde al quesito non riprendendo, per lo scopo prefisso, un problema già presente nel questionario. Potrebbe mostrare un’alta maturità nel presentarne uno nuovo corretto (ipotizzabile un pensiero algebrico consapevole).
A122	Lo studente risponde al quesito riprendendo, per lo scopo prefisso, un problema già presente nel questionario.
A123	Lo studente non comprende l’esercizio. Sintatticamente lo affronta (scorrettamente) ma non nota le analogie con gli esercizi precedenti.

A131	Strategia riferita allo studio di un sistema lineare impostato e risolto opportunamente.
Ar131	Strategia per tentativi ed errori. Strategia sistematica.
Ar132	Strategia per tentativi ed errori. Strategia sistematica.
A141	Strategia riferita allo studio di un sistema lineare impostato e risolto opportunamente.
Ar141	Strategia per tentativi ed errori. Strategia sistematica.
Ar142	Strategia per tentativi ed errori. Strategia casuale.
A151	Strategia riferita allo studio di un sistema lineare impostato e risolto opportunamente.
Ar151	Strategia per tentativi ed errori. Strategia sistematica
Ar152	Strategia per tentativi ed errori. Strategia casuale
A161	Lo studente riconosce nel sistema parametrico lo strumento per modellizzare le situazioni proposte.
A162	Lo studente riconosce l'analogia solamente in termini di metodo risolutivo. Non va oltre semplici osservazioni di tipo procedurale.
A163	Lo studente non riconosce l'analogia, si limita ad una lettura sintattica del sistema.
A164	Lo studente non manifesta una matura consapevolezza del ruolo del parametro. Non riconosce nel sistema proposto la possibilità di descrivere situazioni problematiche analoghe.