"Quaderni di Ricerca in Didattica", n. 17, 2007
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Forme del pensiero nella didattica della matematica: riflessioni e ricadute didattiche

Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica
dell'Università degli Studi di Udine

Dipartimento di Matematica e Informatica,
Via delle Scienze 206, 33100 Udine, Italia

Sommario. La capacità degli studenti di dare forma e organizzazione al proprio pensiero, in particolare a quello matematico, ha bisogno, oggi piú che mai, di venire esercitata in modo esplicito e consapevole. Si riportano le riflessioni su questo argomento elaborate durante i seminari del Nucleo ed alcune esperienze didattiche, che sono sembrate adatte a far produrre dagli studenti delle proposte personali o di gruppo e poi a farle confrontare e valutare criticamente.

Le esperienze hanno riguardato classi elementari, medie e del biennio superiore.

Summary. Today's student needs, more than ever, the capability to shape and to organize his thinking, especially the mathematical one, in a way both explicit and conscious. This paper reports some reflections made by the members of NRDM on the issues implyed by that need, along with the didactict experiences made during their teaching activities in primary and secondary schools.

These experiences allowed the students to work out their own views on some mathematical topics, to confront them critically and to evaluate the outcomes.

"Quaderni di Ricerca in Didattica", n. 17, 2007
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

1 Premessa

Il Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica dell'Università di Udine [1] (NRDM) durante le sue riunioni ha riflettuto sulla scuola nella realtà socioculturale dei nostri giorni; ha preso in considerazione insoddisfazioni, incertezze, lacune degli allievi, che spesso si presentano come un rifiuto nei confronti della matematica e della scuola come istituzione. Ha cercato quindi di escogitare strategie didattiche che possano fare breccia nell'apatia e nell'estraniamento, che a tale rifiuto consegue.

Lo spunto per la ricerca è nato dalla difficoltà riscontrata in allievi di una prima liceo scientifico a gestire lo spazio del foglio per rappresentare il complesso delle azioni necessarie per realizzare una ricetta di cucina (cfr. [17], p. 31–37).

La pratica didattica, le letture di approfondimento e l'impegno degli insegnanti nell'innovare il metodo didattico hanno prodotto le riflessioni e le unità didattiche presentate in questo quaderno. Esse non hanno pretesa di essere complete e approfondite, ma possono costituire l'inizio per ulteriori studi teorici e strategie didattiche piú appropriate.

Le parole *"rappresentazione"* e *"forma"* del pensiero evocano problemi e discussioni filosofici ed epistemologici, che esulano dagli obiettivi di questo quaderno; dal punto di vista didattico è sembrato piú produttivo usare la parola *"rappresentazione"* nel senso piú ampio del termine.

[1] I membri del Nucleo che hanno collaborato al presente lavoro sono: Evi Azzali, Sylviane Beltrame, Diana Bitto, Alba De Michele, Agostino Margari, Maurizio Trombetta, Caterina Vicentini, Ida Visintin.

"Quaderni di Ricerca in Didattica", n. 17, 2007
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

2 Riflessioni

A cura di Evi Azzali, Maurizio Trombetta e Ida Visintin

2.1 Le forme del sapere

Oggi, nell'insegnamento, si avverte il contrasto tra la forma di pensiero proposta dalla scuola e quella presente nella società.

Antinucci ([1]) e Simone ([22]) osservano che, fino agli anni settanta, la maggior parte delle informazioni si propagava con testo scritto su supporto cartaceo, testo che prevede una esposizione analitica, strutturata, chiusa ([22],pag. 99).

Gran parte dell'informazione corrente, anche quella culturalmente importante, circola attraverso vari media, molto spesso in forma non verbale, se c'è l'aspetto verbale, questo è interattivo, manipolabile, o si basa su un linguaggio poco strutturato (come gli SMS o la posta elettronica): una lingua "rap" ([14]).

Inoltre, le forme attuali sono di facile comprensione e si prestano a comunicazioni estremamente veloci, grazie ai media elettronici.

Non si può dimenticare che in tutti i tempi si sono avute importanti correnti di pensiero che privilegiano forme non proposizionali come strumenti di conoscenza piú profonda, perché la formulazione verbale del pensiero, principale strumento di analisi, sembra distruggere l'esperienza cui vuol dare espressione ([22], pag. 131–134).

Questo cambiamento di linguaggio è la spia di mutamenti culturali profondi, che investono tutti gli aspetti della vita sociale; Zygmunt Bauman scrive nelle sue opere di "modernità liquida", relazioni affettive e rapporti di lavoro "liquidi". In particolare, le nuove forme di comunicazione rivelano un cambiamento nello stile cognitivo, privilegiando lo sviluppo dell'intelligenza simultanea, propria dell'*homo videns*, piuttosto che quello dell'intelligenza sequenziale e del pensiero proposizionale, tipici dell'*homo sapiens/legens* ([22], pag. 72).

Lo schema seguente riporta alcune caratteristiche delle due forme di pensiero.

Homo sapiens/legens	Homo videns
linguaggio:	linguaggio:
strutturato (es. testo argomentato)	rap, (es. SMS)
gerarchico, articolato	vago, liquido
referenziale	allusivo
verbale (es. "sono contento")	multisensoriale (es. ☺)
di comprensione mediata	di comprensione immediata
pensiero proposizionale	pensiero non proposizionale
intelligenza sequenziale	intelligenza simultanea
media:	media
libro	televisione
documento cartaceo	computer
lettera	telefono cellulare

Di tutto questo la scuola deve prendere atto, per assolvere meglio al suo compito di educazione al pensiero razionale e complesso, altrimenti il fossato già grande che la separa dagli allievi aumenterà.

La matematica, per le sue caratteristiche, risente in modo particolare di questo iato, perché essa è, nella sua formulazione canonica, la scienza delle classificazioni, delle analisi, delle sintesi e dei formalismi.

2.2 Percezione, azione, pensiero

Il pensiero proposizionale viene spesso considerato oggi come troppo astratto e difficile per i ragazzi, ma se si considera il comportamento umano nelle attività quotidiane, questa opinione perde consistenza.

Percezione, azione, pensiero richiedono da parte nostra capacità di scegliere, di dare forma, organizzazione, rappresentazione. Sono canali di comunicazione per la persona.

Ausubel considera l'organizzazione del pensiero uno degli aspetti piú importanti dello stile cognitivo ([2], pag. 249) e del processo di apprendimento significativo ([2], pag. 155).

Tutti noi nella vita quotidiana compiamo spontaneamente, in modo piú o meno consapevole, azioni che rendono manifesto un pensiero progettuale, anche se non esplicitato.

Ma l'esempio piú eclatante di quanto l'organizzazione pervada la nostra vita è il fenomeno della percezione.

Esperienza ed emozione sono i motori della nostra vita e della conoscenza e la percezione è il canale attraverso cui ci giungono i dati che generano esperienza, emozione e quindi pensiero (cfr. [5]). È noto che carenze nel sistema percettivo o motorio, se non opportunamente seguite nei primi anni di vita, possono limitare lo sviluppo del pensiero astratto, poiché nell'uomo molte connessioni neuronali si completano nei primi anni di vita.

I dati di una esperienza sensoriale, che siano o meno generati da un unico oggetto della realtà esterna, vengono finissimamente analizzati, catalogati e selezionati dai recettori altamente specializzati del sistema percettivo e cosí spezzettati e scelti arrivano al cervello, che li compone e li combina dandoci l'impressione di qualcosa di globale, unitario, non analizzabile: percepire è scegliere una interpretazione piuttosto che un'altra.

Il comportamento dei sensi è emblematico. Di fronte ad una varietà enorme di stimoli, l'unica possibilità di gestirli, data la nostra limitatezza, è catalogarli, scegliere quelli che si ritengono piú importanti e organizzarli. Siamo anche coscienti dei limiti dei nostri sensi, e quindi, se necessario, ci procuriamo diversi punti di vista della stessa situazione, per ottenere informazioni piú complete.

Allora quelle operazioni che sono già alla base della percezione e di tante attività quotidiane, a cominciare dal gioco, possono diventare strumenti anche del nostro pensiero e di un apprendimento razionale e consapevole fin dalla scuola elementare, analogamente a quanto avviene, secondo Dehaene [8], per i numeri e le abilità aritmetiche.

2.3 Semplice e complesso

Il titolo di questo paragrafo è rubato ad una bella mostra itinerante presentata al Festival della Scienza di Genova nel 2003, che riguarda argomenti matematici, fisici e artistici.

La polarità semplice-complesso è ormai argomento di ricerca per vari campi dell'attività intellettuale, anche se poi assume connotati diversi in ogni disciplina. Da ([23], pag.39) è tratta la citazione seguente: "Nel procedere del pensiero sistemico, il tentativo diventa quello di costruire una teoria indipendente sia dagli approcci olistici (che considerano il tutto come maggiore dell'analisi delle singole parti), sia dagli approcci atomistici (in cui il tutto è ridotto all'analisi della somma delle parti), per considerare la misura del tutto come contemporaneamente maggiore e minore della somma delle misure delle parti. Maggiore, perché vi è l'emergenza di caratteristiche e possibilità nuove, e minore perché si realizza una sola delle possibili organizzazioni."

Per quanto riguarda l'apprendimento, è ormai nota a tutti l'importanza di collegare conoscenze nuove e vecchie con una rete organica di relazioni. Mentre le particelle della materia fisica seguono la legge dell'entropia, cioè evolvono verso distribuzioni sempre piú disordinate, nell'evoluzione degli organismi viventi le forme di vita complessa diventano sempre piú organizzate; il complesso delle conoscenze di una persona si comporta come un organismo vivo ed è di questo secondo tipo.

Si presta meno attenzione all'ultima parte della citazione (il tutto è minore della somma delle misure delle parti), dove si sottolinea che ogni sistemazione deve essere pensata come provvisoria, e deve restare flessibile e disponibile a riorganizzazioni.

Piú avanti, sempre in [23], si considerano testo e ipertesto come forme emblematiche e complementari di rappresentazione del pensiero: il primo, come rappresentazione lineare, sequenziale e stabile, il secondo adatto a rappresentare la complessità di un pensiero allo stato nascente, o di una visione complessiva e ramificata.

"È proprio il rapporto fra testo e ipertesto uno dei nostri interessi principali: il rapporto cioè tra una rete complessa di conoscenze, teorie, vocaboli e un percorso sequenziale, ordinato e logico... L'ipertesto si colloca al contempo su di un gradino precedente e successivo a questo stadio e riporta alla confusione e al caos del pensiero che precede la stesura di un testo, come anche alla connessione complessa tra accadimenti, esperienze e teorie, alla luce di una nuova conoscenza e un nuovo modello." ([23], pag. 14)

Queste affermazioni illustrano bene due aspetti, che hanno un ruolo importante nelle riflessioni e nelle proposte didattiche di questo lavoro: il rapporto tra particolare e generale nella conoscenza e la relazione tra le rappresentazioni lineare e ramificata del pensiero.

2.4 Proposte per la didattica della matematica

Quali accorgimenti si possono adottare allora per diminuire la disaffezione degli studenti per la matematica?

Alcuni insegnanti mantengono un atteggiamento conservatore creando un distacco tra studenti e scuola. Altri, invece, sostituiscono libro di testo, compito e interrogazione con ipertesto, scheda e test, negando spazio alla costruzione del pensiero proposizionale.

La proposta di questo lavoro è quella di coltivare la forma proposizionale del pensiero, cercando per essa motivazioni attuali e nello stesso tempo sfruttare gli aspetti positivi delle forme non proposizionali.

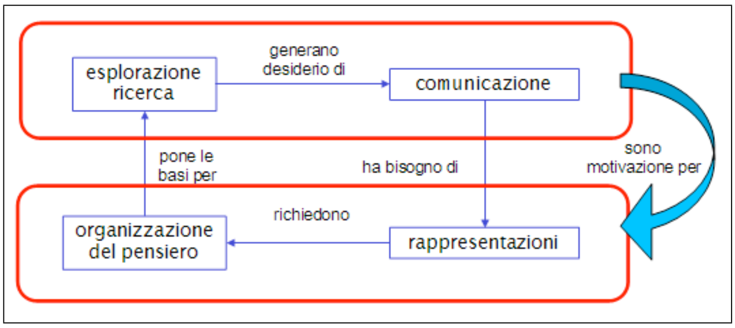
I motivi di questa scelta si basano sulle convinzioni che:

- il pensiero proposizionale è:

  necessario per un apprendimento significativo e per un uso consapevole delle informazioni;
  "naturale" ovvero analogo a processi spontanei della percezione, del gioco, delle attività progettuali;
  complementare a esperienza, emozione, intuizione;

- ogni sistemazione è provvisoria e relativa a scopi specifici in accordo con il pensiero sistemico sulla dialettica semplice - complesso: "il tutto è contemporaneamente maggiore e minore della somma delle parti" ([23]).

Lo schema seguente suggerisce come attuare questa proposta.



In particolare, il piacere di comunicare è una forte motivazione per gli studenti e l'analisi critica di una pluralità di rappresentazioni valorizza sia l'uso della forma proposizionale, sia quello delle forme non proposizionali.

Alla base delle proposte didattiche di questo lavoro stanno le seguenti ipotesi:

a) La scuola oggi, ancor piú di prima, può e deve insegnare il pensiero proposizionale, organizzato, perché il clima generale sembra trascurarlo, mentre esso è il presupposto necessario per l'apprendimento significativo.

Proprio la grande varietà e quantità di informazione che ci circonda può avere come risultato l'apatia e la soggezione a scelte altrui. Se l'individuo non riesce a gestire la situazione, vista la complessità dell'ambiente in cui vive, può gestirla solo ricorrendo a modelli semplificati ed organizzati.

Il computer impera ovunque: per costruire anche un piccolo prodotto, visto il grande numero delle alternative possibili, occorre una severa capacità di scelta ed una ferrea organizzazione del messaggio da comunicare (cfr. 3.9).

Anche certe rappresentazioni non proposizionali di un messaggio prevedono una organizzazione del pensiero da rappresentare e una capacità di scelta critica: basta pensare quanto vengono studiati i messaggi pubblicitari, oppure come si sia tenuto conto delle deformazioni della visione nella costruzione degli antichi templi greci.

Nei precedenti articoli del Nucleo ([16], [17]) sono state presentate attività sull'uso didattico delle mappe concettuali.

b) La difficoltà principale del pensiero strutturato non sta nella sua astrazione, ma nelle motivazioni e negli scopi ad esso relativi, che non sono cosí evidenti, come lo sono invece nel caso della percezione e di tante altre situazioni quotidiane di utilità immediata

La motivazione fondamentale è la necessità o meglio il desiderio di comunicare. In alcune occasioni, la possibilità di guidare il pubblico in una mostra scientifica o di partecipare ad una recita di argomento matematico è stata per gli allievi una spinta ad impegnarsi nello studio dei relativi contenuti matematici ([12], [25]).

Possono essere utili anche le analogie tra procedimenti mentali e organizzazione di attività pratiche (vedi punto (*e*)), ma soprattutto sarà utile la storia. Per esempio, si può osservare lo stretto rapporto tra le varie rappresentazioni dei numeri e le contemporanee esigenze pratiche e tecnologie disponibili ([12]). Oppure si può confrontare un testo matematico di epoca prealgebrica e l'espressione algebrica odierna ([24]).

c) *La sistemazione organica della conoscenza può e deve essere presentata come la premessa necessaria per trovare nuovi punti di vista e nuove teorie, e non come qualcosa di rigido e definito.*

Qui si ritrova l'analogia con i sistemi complessi. Nel momento in cui si costruisce e si rappresenta un contenuto in forma strutturata si evidenziano le possibili scelte alternative e quindi si mantiene aperta la possibilità di organizzazioni diverse (vedi paragrafo 3.8.1).

La storia della matematica è ricca di esempi nei quali la sistemazione organizzata di alcune idee ha dato la possibilità di costruirne di nuove a fronte di nuove esigenze (ad esempio, dalla rappresentazione posizionale in base 10 a quella in base 2; dalla sistemazione di Euclide alle geometrie non euclidee, ecc.). Già queste considerazioni storiche possono dare una motivazione interdisciplinare (storia, tecnologia, matematica, filosofia) per apprezzare il valore delle sistemazioni teoriche, anche se superate (3.6).

L'elasticità mentale necessaria in questo tipo di attività è la stessa che, in forma meno vistosa, serve per risolvere problemi di geometria nei quali capita di dover "vedere" una stessa figura con ruoli diversi (3.5), oppure per confrontare procedimenti diversi per uno stesso risultato (cfr. 3.5, 3.8).

Inoltre, un qualsiasi pensiero può essere rappresentato in varie forme, proposizionali e non (verbale, iconica, gestuale, simbolica, ecc.). L'attività di traduzione di uno stesso pensiero da una rappresentazione ad un'altra è un aspetto formativo tipico della matematica ([9]). L'analisi di rappresentazioni diverse di uno stesso contenuto rende piú consapevole l'uso dei mezzi rappresentativi, relativizza le varie formalizzazioni del pensiero, senza diminuirne l'importanza (cfr. 3.1, 3.3; [16], pag. 41–44, [17], pag. 31–37).

d) *In matematica si può e si deve trovare tempo per attività basate su pensiero non strutturato, per studiare queste forme di pensiero e confrontarle con quelle strutturate.*

In altre materie, piú legate alla espressività, ci sono numerose esperienze di questo tipo.

Anche in matematica si può superare la sterile contrapposizione tra razionalità ed emozione perché emozioni, intuizione e fantasia creativa le sono essenziali quanto la formalizzazione e la logica. U. Eco in [10] sostiene, portando alcuni simpatici esempi, che in molti casi la definizione formale di un concetto è la piú esatta e concisa, ma spesso non cosí espressiva come altri tipi di definizione, ad esempio quello ostensivo e quello costruttivo. Afferma che una definizione "...dovrebbe essere in qualche modo una storia", avvicinando "l'universo della fantasia, dove per creare storie si immaginano mondi, e l'universo della realtà, dove, per permetterci di capire il mondo, si creano storie". In [19], M. Piccolino si augura di recuperare agli argomenti scientifici "quel fascino e quelle valenze emozionali" che Galileo e Goethe hanno trasmesso con i loro scritti.

Inoltre, si può creare uno spazio per l'emozione e la creatività attivando esperienze di laboratorio che portino a formulare congetture e a giustificarle o dimostrarle. Si ha cosí occasione di osservare come siano diversi il processo di intuizione di un enunciato e quello della sua formalizzazione, e come lo siano i relativi linguaggi ([11], cfr. 3.7), riconoscendo a ciascuno un ruolo specifico.

È interessante far notare ai ragazzi che passare da uno stile formalizzato ad una forma divulgativa corretta è forse piú difficile che passare da uno stile colloquiale ad uno formalizzato. A questo proposito, è stato istruttivo invitare gli studenti a guidare i visitatori di mostre a carattere scientifico ([12]), chiedere loro di preparare una lezione per una classe parallela (3.9) o per un ipotetico pubblico, partecipare ad una recita di argomento matematico ([25]). La presenza di un pubblico non usuale acuisce lo spirito di autocritica, oltre che essere motivante psicologicamente.

e) È utile sottolineare l'affinità tra attività progettuale e pensiero proposizionale, perché si ritiene che l'atteggiamento mentale del soggetto sia trasferibile da una situazione operativa ad una mentale e viceversa.

Il linguaggio usato per esporre una teoria logico formale si avvale di locuzioni spazio-temporali, come si trattasse si una sequenza di azioni, anziché di enunciati (da ciò segue, ne viene che...).

Può sembrare troppo astratto per dei bimbi riflettere sull'attività organizzativa; questa impressione cambia, se si osserva come un gruppo di loro si organizza spontaneamente per realizzare un gioco insieme (almeno quei bimbi che hanno ancora la fortuna di avere del tempo da gestire in modo autonomo con gli amici). Si tratterà allora di guidarli alla consapevolezza del loro procedimento, verbalizzandolo, schematizzandolo, confrontandolo con altre esperienze analoghe (cfr. [3]).

La difficoltà nell'organizzazione intellettuale può derivare da una attività fisica carente e prevalentemente eterodiretta, per cui manca l'abitudine a progettare. Attività manuali, che richiedano progettazione, possono costituire un primo passo per rimediare a questa carenza. Il secondo passo è riflettere su di esse e commentare il processo di pensiero sottostante, per arrivare poi a vedere l'organizzazione come uno strumento di utilità generale (cfr. [4]).

Spesso capita di trovare ragazzi che riescono ad adoperare un certo ragionamento in una situazione non matematica, ma non sanno applicarlo ad un problema matematico; in qualche modo sono (stati) convinti che in matematica non si possano usare le osservazioni ed i ragionamenti "naturali" (3.4).

Pellerey afferma: "la ricerca psicologica attuale evidenzia come sia del pari importante stimolare la capacità di rendersi conto dei processi e delle strategie necessari per reinquadrare, comprendere, rappresentare, risolvere un problema, e per verificarne la soluzione, nonché per regolarne l'attivazione" ([18], pag XIV). "Lo sviluppo della conoscenza e della competenza matematica ... appare ... un processo lento, progressivo, basato contemporaneamente sull'acquisizione di significati e abilità, di quadri interpretativi e di strategie di controllo" ([18], pag XV). (cfr. 3.1)

f) I grafici (schemi, mappe concettuali, diagrammi di flusso, ecc.) sono essenziali per dare forma ad un pensiero o ad una azione di qualche complessità.

Essi si prestano a rappresentare, sullo spazio del foglio, l'azione che si svolge nel tempo oppure i legami logici, e quindi extra-spaziali ed extratemporali, tra i concetti legati ad un argomento.

Magnani sottolinea il loro valore epistemico, osservando che il nostro pensiero delega alle rappresentazioni esterne alcune sue funzioni: esse non sono solo semplici aiuti per la memoria, ma possono condizionare il pensiero stesso, dare stimoli per ulteriori inferenze, e altro ancora ([15], pag 313). Spesso capita di chiarire il proprio pensiero quando ci si costringe a rappresentarlo (cfr. 3.8).

Mappe concettuali e diagrammi di flusso hanno il ruolo specifico di esplicitare una rete di concetti o scandire momenti di un'operazione e sono molto potenti se usati nei momenti giusti, diventano noiosi se usati sempre e dovunque, perché di moda (3.4).

2.5 Criteri generali delle esperienze didattiche

I criteri generali delle esperienze presentate in questo lavoro sono:

- provocare gli allievi a produrre rappresentazioni organiche di esperienze e argomenti matematici;
- guidare gli studenti all'analisi critica degli elaborati.

Queste proposte quindi non introducono nuovi argomenti matematici, ma richiedono di sottolineare il ruolo della forma del pensiero e delle sue rappresentazioni, ruolo molto importante in ogni argomento della matematica. L'attenzione da parte dell'insegnante si esplica nella fase della preparazione dell'unità didattica, progettando i suoi interventi e anche nella gestione dell'unità didattica in classe, lasciando agli studenti il tempo necessario per una elaborazione personale e valorizzando le loro proposte: l'obiettivo è che gli alunni adottino un metodo consapevole per organizzare e rappresentare le nozioni, facendo leva anche sulle abilità naturali o acquisite in altri campi di attività.

Da Pellerey: "...è il processo di costruzione del nuovo sulla base del vecchio, cioè di quello che già si sa e si sa fare, che deve essere attivato e le vie per far questo sono rese possibili e facilitate da un'azione attenta e intelligente dell'insegnante". ([18], pag X)

Come in tutti i progetti che mirano all'aspetto formativo, anche quello proposto in questo quaderno ha una certa difficoltà nel trovare delle verifiche in senso classico; la buona riuscita dell'insegnamento non è legata solo alle singole attività ma ad un percorso in cui l'attenzione dell'insegnante e degli alunni sia sempre rivolta a curare l'aspetto della rappresentazione. I confronti con le altre classi sono stati utili, ma il risultato vero dovrà essere valutato sulla crescita intellettuale di ogni singolo allievo e sulla sua capacità di usare in modo personale e creativo i concetti, le procedure e le abilità acquisite.

Nelle attività qui proposte si attua una raccomandazione della didattica per concetti di Damiano ([7], [16], [17]), che il nucleo ha sperimentato negli anni scorsi. Questo metodo propone una classificazione dei mediatori in attivi, iconici, analogici e logico-verbali, che è in ordine crescente di astrazione e potenza logica, e decrescente in ordine di calore e di coinvolgimento emotivo. La didattica per concetti raccomanda comunque l'uso di tutti i tipi di mediatori in ogni ordine di scuole, per rispettare i diversi stili cognitivi degli studenti e per presentare tutti gli aspetti di un concetto, che, secondo le teorie cognitive piú aggiornate, non si riduce alla sua definizione formale. Gli insegnanti del Nucleo hanno potuto verificare che un'attività di laboratorio matematico (mediatore attivo) è motivante anche alle superiori, e che gli alunni delle elementari, con la guida dell'insegnante, sono in grado di costruire mappe concettuali (mediatori logico-verbali), acquistando una visione organica di ciò che apprendono.

Nel capitolo seguente vengono presentate alcune attività realizzate con studenti di scuole e di classi molto diverse. È interessante osservare come gli insegnanti abbiano ideato le attività didattiche, pur tese tutte allo stesso obiettivo, in modo consono ai singoli contesti, ottenendo delle situazioni molto diversificate.

"Quaderni di Ricerca in Didattica", n. 17, 2007
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

3 Esperienze

3.1 Alla scuola elementare: il contesto e la rappresentazione cognitiva

Docente: Ida Visintin;
Scuola Elementare "Carducci", Udine

3.1.1 Relazione

Fin dai primi giorni di scuola si avvia un processo graduale e progressivo per sviluppare nei bambini la conoscenza concettuale e le abilità procedurali in ambito matematico. È una costruzione di significati e di procedimenti che si basa sulle conoscenze già possedute dall'alunno, su cui si organizza un insegnamento che genera un apprendimento stabile e significativo. L'attività che si propone è legata ad un contesto specifico, ad una rappresentazione cognitiva che mette in evidenza la struttura e le relazioni degli eventi presi in considerazione ed una riflessione consapevole sui processi e sulle strategie messe in atto.

Tutto il percorso di geometria pubblicato in [3] e [4] è stato progettato seguendo questo criterio, basandolo su osservazioni, immagini mentali e riflessioni per un'organizzazione dello spazio e delle figure.

In aritmetica la contestualizzazione avviene sotto forma di problemi, di esercitazioni espressi a parole e sotto forma di racconto; il tema e i personaggi dei testi proposti sono aderenti all'età e all'esperienza degli alunni. Specialmente nei primi anni si è organizzato e realizzato, con la collaborazione propositiva e attiva dei bambini, un ambiente immaginario a cui attingere per inventare eventi e scrivere dei testi che gli alunni, poi, tradurranno in operazioni aritmetiche.

L'esperienza verbalizzata, il testo, il problema espresso a parole richiedono una certa abilità linguistica per individuare cosa è noto, che cosa si deve trovare e quale strategia mettere in pratica. E qui ben si inserisce la necessità di schematizzare e rappresentare la via intrapresa per risolvere un quesito o un problema.

La rappresentazione cognitiva, iconica e simbolica, esprime come la mente del soggetto si è organizzata e come ha concettualizzato. Nella rappresentazione iconica, in cui si raffigura una situazione (evento, manipolazione, operazione) al fine di memorizzarla per ricrearla mentalmente, il bambino illustra le caratteristiche dell’evento in modo soggettivo perché non tutti i dettagli sono espressi. Man mano che il bambino progredisce nella competenza linguistica con la rappresentazione simbolica, fissa nella memoria a lungo termine l’esperienza, lasciando cadere i dati legati ai particolari contesti: “8” e “otto” sono simboli completamente astratti.

Le rappresentazioni iconica e simbolica sono dei mediatori che “mostrano in assoluta trasparenza i processi di concettualizzazione. Soprattutto gli iconici quando perdono il loro spessore figurativo trasformandosi in puri organizzatori spaziali e logici” ([7], Pag. 236).

Il bambino nella prassi didattica può essere coinvolto in una situazione esperenziale diretta o in una manipolazione di oggetti di uso comune o di materiale strutturato (blocchi aritmetici multibase: BAM, numeri in colore,...), che poi viene tradotta in una produzione verbale e numerica orale e scritta, oppure può prendere coscienza di un evento attraverso un testo che deve sapere decifrare linguisticamente, saper rappresentare in uno schema e in una espressione aritmetica.

Nell’attività didattica ci si esercita nel passaggio dall’evento, al testo, alla rappresentazione in espressione numerica. Ma è anche importante approfondire il passaggio dall’espressione numerica alla formulazione del testo per favorire la riflessione consapevole sulle strategie messe in atto.

Appare dai protocolli, riportati a mo’ di esempio, come dalla seconda classe, alla quarta e alla quinta si evolva e si affini la capacità di rappresentare situazioni problematiche.

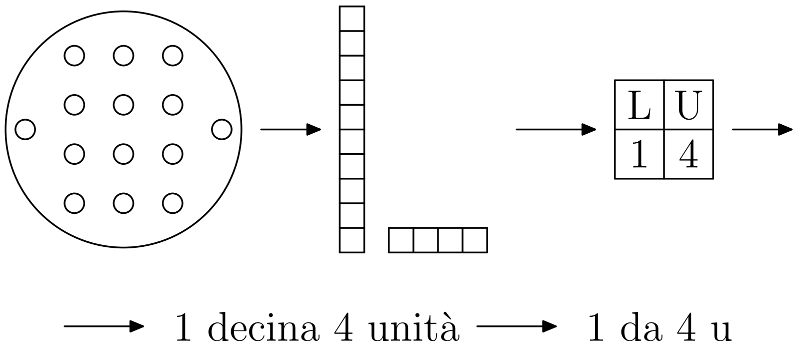
3.1.2 Protocolli

3.1.2.1 In seconda elementare

L’esperienza è stata svolta a dicembre, come attività riguardante il valore posizionale delle cifre numeriche.

Problema. *Decine e unità. Fufi, il mio gattino, ha fatto indigestione: ha mangiato quattordici polpettine di carne! Rappresenta.*

Dal quaderno di Tomaso:



Con una configurazione grafica figurativa si evidenzia come il bambino, nell'affrontare una rappresentazione, abbia recuperato nella memoria dichiarativa i concetti appresi con le esperienze passate (decina e unità), che erano state codificate ed elaborate; inoltre egli ha saputo connettere la memoria semantica e quella procedurale e farle interagire per risolvere il problema della rappresentazione in termini aritmetici.

3.1.2.2 In quarta elementare

L'esperienza è stata svolta a settembre.

Problema. "Principessa Flora". *La principessa Flora possedeva un giardino con* 93 *piante tropicali. Una notte, un nubifragio si abbattè sulla zona e distrusse* 37 *piante. La principessa era disperata e tentò di salvare le piante rimaste. Purtroppo, dopo alcuni giorni, altre* 26 *appassirono e morirono. Flora volle abbellire il suo giardino e mise a dimora* 18 *piante pregiatissime. Ora, quante piante ha la principessa Flora?*

Soluzione di Elisa.
Procedura.
1° Trovare il n° delle piante morte.
2° Trovare il n° delle piante rimaste dopo il nubifragio.
3° Trovare il n° di piante dopo che Flora ha fatto la spesa.

$37 + 26 = 63$ (n° piante morte)

$$\begin{array}{rl} \text{PLU} & \\ 37 & + \\ 26 & = \\ \hline 63 & \end{array}$$

$93 - 63 = 30$ (n° piante vive)

$$\begin{array}{rl} \text{PLU} & \\ 93 & - \\ 63 & = \\ \hline 30 & \end{array}$$

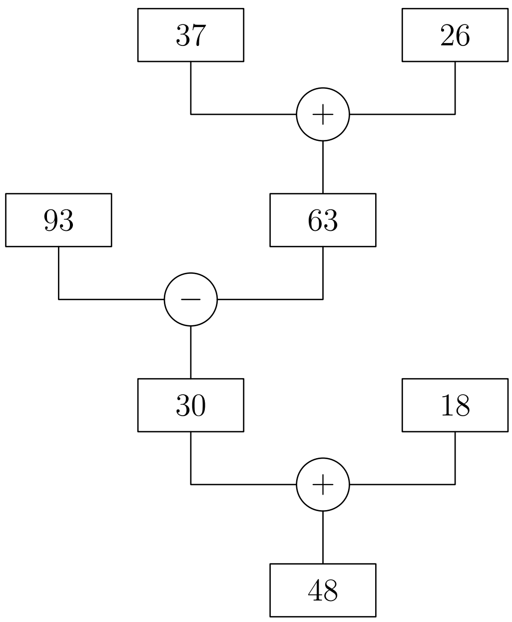
$30 + 18 = 48$ (n° definitivo delle piante)

$$\begin{array}{rl} \text{PLU} & \\ 30 & + \\ 18 & = \\ \hline 48 & \end{array}$$

Tomaso propone:

$$93 - (37 + 26) = 93 - 63 = 30 + 18 = 48.^2$$

Raffaella propone:



[2]Si riporta la proposta originale, compreso l'errore.

Giuseppe e Joseph propongono

$$[93 - (37 + 26)] + 18 = 48$$

Elisa e Joseph propongono

$$[(93 - 37) - 26] + 18 = 48$$

Seguendo una prassi ormai acquisita, questi allievi fanno un'attenta lettura del testo prima di affrontare la soluzione. Alla fine giunge il momento della riflessione sulle strategie usate: la sequenza logica delle azioni volte alla soluzione e la loro traduzione in operazioni (Elisa), la rappresentazione delle operazioni in un grafo (Raffaella), e le due diverse espressioni risolutive (Giuseppe, Joseph ed Elisa).

3.1.2.3 In quinta elementare

L'esperienza è stata svolta a settembre.

Problema. "Le spese di Oscar." *Oscar si reca in cartoleria per acquistare il materiale necessario per l'inizio dell'anno scolastico. Acquista una dozzina di quaderni da* 2.650 *lire l'uno,* 6 *pennarelli da* 1.250 *lire l'uno e una gomma da* 2.350 *lire. Quanto spende Oscar in tutto?*

Il cartolaio dà un bollino premio ogni 10.000 *lire di spesa. Quanti bollini riceverà Oscar?*

Soluzione di Lisetta.
Dati

12	=	numero quaderni
2.650	=	costo unitario quaderno
6	=	pennarelli
1.250	=	costo unitario pennarello
2.350	=	costo unitario gomma
10.000	=	valore di un bollino

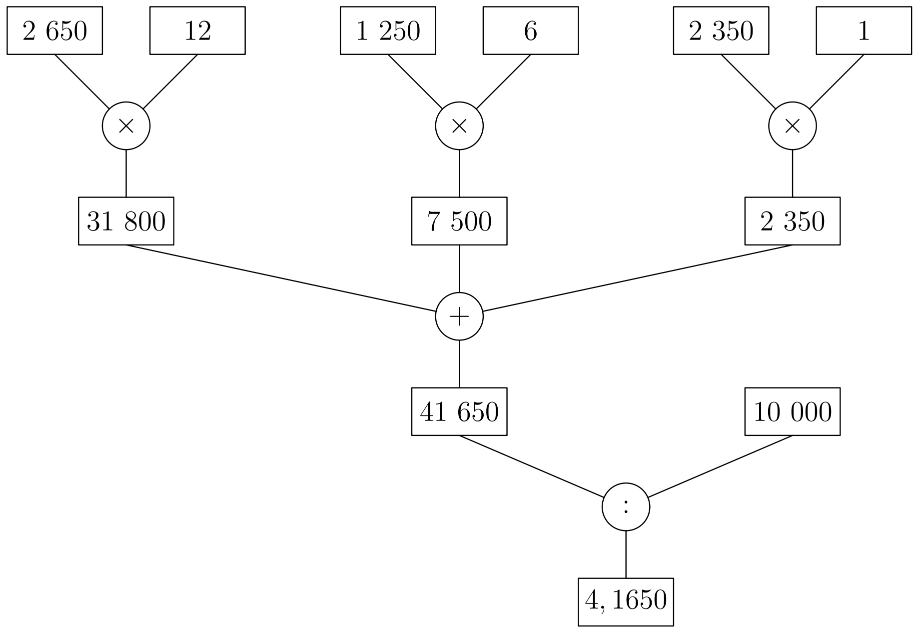
Procedura

1° Calcolo il costo totale dei quaderni moltiplicando il costo unitario per il numero dei quaderni;

2° Calcolo il costo totale dei pennarelli moltiplicando il costo unitario per il numero dei pennarelli;
3° Per calcolare la spesa totale devo addizionare il costo totale dei quaderni, dei pennarelli e della gomma;
4° Per trovare il numero dei bollini devo dividere la spesa per il valore di un bollino.

$$[(2.650x12) + (1.250x6) + 2.350] : 10.000 = \cdots$$

...(La bimba esegue correttamente le operazioni nell'ordine previsto dalle parentesi) ...
1° Oscar spende in tutto 41.650 lire. 2° Oscar riceverà n° 4 bollini.



La soluzione del problema si esplica nell'elenco dei dati, nella sequenza della procedura da seguire, nel calcolo ragionato, nell'espressione numerica e nello schema ad albero.

"Quaderni di Ricerca in Didattica", n. 17, 2007
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

3.2 In prima media: una sorta di aritmo-geometria

Docente: Caterina Vicentini; Classe 1[a], a.s. 2004/05,
Scuola Media "Ascoli", Gorizia,
Tempo: 3 ore.

3.2.1 Relazione

Il giorno della consegna dei documenti di valutazione, l'insegnante, per infondere fiducia anche agli allievi meno brillanti, racconta che persone intelligenti e capaci possono talvolta trovarsi in difficoltà scolastiche anche piuttosto serie o comunque essere state studenti irrequieti e non sempre facili. Vengono citati alcuni esempi illustri del passato, come la bocciatura di Einstein al Politecnico di Zurigo. Passando da un aneddoto all'altro, si arriva al famoso episodio occorso alla scuola elementare a Karl Friedrik Gauss, il quale, punito dalla maestra che aveva assegnato alla classe il compito di sommare tutti i numeri naturali dall'1 al 100 per tenere gli allievi occupati, risolse velocemente la questione scrivendo direttamente il risultato sulla lavagnetta.

L'insegnante domanda quindi agli allievi: "Voi come fareste una addizione del tipo (e scrive alla lavagna)"

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 97 + 98 + 99 + 100 =?$$

Un allievo alza immediatamente la mano proponendo un modo alternativo di sistemare i dati che porta a una soluzione non standard della somma in questione. Dopo alcune precisazioni e ulteriori riflessioni si decide che lo strumento piú adatto per esprimere velocemente e chiaramente la soluzione proposta è il foglio di calcolo Microsoft Excel. La riflessione viene allora continuata durante una lezione di laboratorio di Informatica. In questa occasione però il ragazzo stesso che aveva esposto la soluzione teorica, trova che il computer "sbaglia", nel senso che non fa quello che l'allievo crede di aver comandato alla macchina. Nello spiegare a questo ragazzo il motivo dell'errore, l'insegnante viene a trovarsi nella condizione di dover approfondire il fatto che strumenti di calcolo sofisticati hanno una loro organizzazione interna che è bene conoscere per non sbagliare.

Questa esperienza didattica è parsa interessante soprattutto perché:

- ha permesso di evidenziare l'aspetto creativo e intuitivo della matematica spesso percepita dagli allievi come una disciplina rigida in cui non c'è spazio per un apporto personale;
- ha consentito di sottolineare che l'organizzazione di ogni processo risolutivo, anche di una semplice addizione, deve essere pensato come provvisorio e restare flessibile e disponibile ad ulteriori riorganizzazioni;
- ha obbligato gli studenti a rendersi conto che quando si utilizza uno strumento di calcolo sofisticato, se non si vuole correre rischi, bisogna confrontarsi con la sua struttura interna (cfr. anche 3.3, esperienza didattica che è stata ideata sulla base di questa).

3.2.2 Protocolli

Si riportano i passi salienti degli interventi che si sono avuti in classe.

3.2.2.1 Lezione di matematica

I Voi come fareste un'addizione del tipo (*scrive alla lavagna*)

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots\cdots + 97 + 98 + 99 + 100 =?$$

Si alza quasi subito la mano di Marco (M)

M Metterei i numeri scritti in un quadrato 10 per 10. Nella prima riga tutti i numeri dall'1 al 10, nella seconda dall'11 al 20 e cosí via, fino all'ultima riga dal 91 al 100. Poi farei la somma delle dieci colonne e la scriverei sotto in una undicesima riga e poi farei la somma di questa riga ottenendo il risultato finale.

I Bravissimo Marco. Dimmi ancora una cosa: sarebbe ugualmente possibile, secondo te, fare la somma per righe e poi sommare la colonna risultante?

M Sí. È la stessa cosa... cioè non è la stessa cosa perché i numeri vengono diversi,... ma sí riesce lo stesso.

Il discorso ex-cathedra ricomincia, quando Marco, interrompendolo con entusiasmo esclama:

- M Prof!, non occorre sommare tutte le colonne, basta sommare la prima e poi aggiungere 10 ogni volta...
- I E nell'esempio per righe?
- M Basta sommare 100 invece di 10.

A questo punto l'insegnante, preoccupata dello sguardo incredulo degli altri e dato che il tempo per la lezione sta per esaurirsi, annuncia che in una futura ora di informatica verrà usato il foglio di calcolo Microsoft Excel per chiarire a tutta la classe il ragionamento di Marco.

Nella successiva lezione di matematica, invece, viene spiegato il metodo che gli storici della matematica ipotizzano abbia usato Gauss. L'insegnante scrive alla lavagna:

$$
\begin{array}{c}
1 + 2 + 3 + 4 + \quad \cdots\cdots \quad + 97 + 98 + 99 + 100 \\
+ \\
= 101 \\
+ \\
= 101 \\
+ \\
= 101 \\
+ \\
= 101
\end{array}
$$

e traduce questa scrittura nell'espressione aritmetica:

$$
\begin{gathered}
1 + 2 + 3 + 4 + \cdots\cdots + 97 + 98 + 99 + 100 = \\
= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + (4 + 97) + \cdots\cdots + (49 + 52) + (50 + 51) = \\
= 101 + 101 + 101 + \cdots\cdots + 101 = 50 \times 101 = 5050
\end{gathered}
$$

A questo punto interviene Guido.

G Prof, a me non sarebbe venuto in mente di sommare l'1 con il 100, ma piuttosto di mettere da parte il 100, e poi osservare che $1 + 99 = 100$, $2 + 98 = 100$, eccetera.

I Sí, ma ci sarebbe un "problema al centro"...

G Non capisco,

I *(Scrive alla lavagna)*

$$\begin{array}{rcl} 1{+}99 & = & 100 \\ 2{+}98 & = & 100 \\ & \vdots & \\ 48{+}52 & = & 100 \\ 49{+}51 & = & 100 \end{array}$$

I E il 50?

G Ha ragione lei prof, bisognerebbe mettere da parte anche il 50.

Con l'aiuto dell'insegnante Guido riesce infine a formalizzare in un'unica espressione il proprio suggerimento e scrive alla lavagna:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots\cdots + 97 + 98 + 99 + 100 =$$
$$= 100 + 50 + (1 + 99) + (2 + 98) + \cdots\cdots + (48 + 52) + (49 + 51) =$$
$$= 100 + 50 + 49 \times 100 = 100 + 50 + 4900 = 5050$$

G Fatto, prof!

Dopo un breve commento fatto da qualche compagno, termina la lezione.

3.2.2.2 Lezione di Informatica in laboratorio

L'insegnante mostra come il comando Σ serva a fare la somma automatica per righe o colonne con il programma Microsoft Excel e poi spiega anche come farlo richiamando le funzioni piú usate o direttamente digitando *SOMMA(. . . :. . .)* e chiede poi agli allievi di servirsi del foglio di calcolo per verificare che Marco aveva ragione.

Il primo studente a chiamare per un aiuto l'insegnante è proprio Marco, il quale sta producendo la seguente tabella:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	55
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	155
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	210
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	
460	470	480	490	500	510	520	530	540	550	

e si è accorto che 210 non è il risultato atteso. L'insegnante, per capire l'accaduto si posiziona sulla casella del risultato errato 210 e si accorge che sulla barra delle formule è affisso il comando *"SOMMA(K1:K2)"*.

I Come hai 'ordinato' a Excel di fare la somma?

M Con il comando Σ.

I Evidentemente, in caso di ambiguità, il comando Σ predilige la somma per colonne a quella per righe!

M Non capisco. . .

I . . . Prova a 'cliccare' sulla casella del 210 e guarda attentamente cosa affigge la barra delle formule: Excel sta facendo la somma dei due addendi sopra di lui, infatti $55 + 155 = 210$.

M Urca! ha ragione lei!

I Non avete notato niente di strano?

Poiché la classe dà segni di perplessità, l'insegnante torna al server della rete, rende nuovamente "stupidi" i computer degli allievi e ripete a tutta la classe il ragionamento fatto con Marco. Lascia in seguito agli allievi il compito di produrre la tabella corretta:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	55
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	155
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	255
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	355
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	455
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	555
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	655
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	755
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	855
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	955
460	470	480	490	500	510	520	530	540	550	5050

La lezione si conclude con alcune puntualizzazioni.

- 5050 che è il totale complessivo è anche il risultato della somma sia dell'ultima colonna che dell'ultima riga in virtú delle proprietà associativa e commutativa dell'addizione.
- I ragionamenti di Gauss e Marco evidenziano che un'organizzazione degli addendi diversa da quella proposta dall'esercizio può facilitare molto la somma.
- Il foglio di calcolo Microsoft Excel ha una propria organizzazione interna che è bene conoscere per non commettere errori.

“Quaderni di Ricerca in Didattica”, n. 17, 2007
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

3.3 Come calcola il foglio elettronico

Docente: Caterina Vicentini; Quattro Classi 1^e, Sezioni A, D, F e G, a.s. 2004/05,
Scuola Media “Ascoli”, Gorizia
Tempo: 2 ore.

3.3.1 Relazione

Da quest’anno scolastico, nelle classi prime della Scuola Media è previsto l’insegnamento dell’Informatica per un’ora settimanale. Dato che non è stato assunto personale specifico, alla scuola media “Ascoli” di Gorizia, gli insegnanti di Scienze Matematiche, Chimiche, Fisiche e Naturali, hanno deciso di assumersi tale incombenza, in base alla considerazione che questa disciplina, se svincolata dall’insegnamento delle altre materie scientifiche, avrebbe rischiato di trasformarsi in una sorta di “dattilografia di lusso” perdendo la sua valenza formativa piú alta. Questa esperienza didattica, ideata grazie agli spunti forniti da quella esposta nella Sezione 3.2 sembra particolarmente adatta a chiarire che, anche uno studio dell’informatica di base, intesa come acquisizione della capacità di utilizzare programmi confezionati da altri, possa recare con se registri alti di apprendimento costringendo gli allievi a riflettere a proposito delle diverse forme che l’organizzazione di un lavoro può assumere.

Si è cominciato assegnando ai ragazzi il seguente compito:

*Scrivi i numeri dall’*1 *al* 16 *sul tuo quaderno disponendoli in un quadrato di* 4 *quadretti di lato.*

Esegui manualmente le somme per righe e per colonne e scrivile accanto creando una quinta riga di quattro numeri e una quinta colonna di quattro numeri.

Nel quadretto che manca a completare un quadrato 5×5 *inserisci infine il totale complessivo.*

Già questa prima richiesta è occasione per un ripasso delle proprietà dell’addizione.

Poi si passa ad eseguire le operazioni con il foglio elettronico. Allora ci sono diverse logiche a confronto: quella della persona che sta operando, che si è seduta alla scrivania con determinate aspettative, quella delle persone che hanno scritto i programmi e quella della macchina, la cui unità aritmetico-logica è strutturata diversamente dal cervello umano. Queste logiche diverse possono portare a diverse organizzazioni del lavoro e a delle discrepanze rispetto alle aspettative iniziali dell'utente, che deve essere in grado di tenere il lavoro sotto controllo per avere una garanzia rispetto alla correttezza del risultato finale.

Troppo spesso l'informatica a scuola, specialmente nella scuola media inferiore dove rarissimamente si fanno fare dei programmi ai ragazzi, suscita un entusiasmo miope. È contro questa pericolosa tendenza che si è voluto provare ad andare. L'esperienza è stata condotta in quattro classi parallele che hanno reagito in maniera abbastanza uniforme agli stimoli forniti, per non appesantire troppo la lettura, si è scelto di presentare il resoconto come se si trattasse di un lavoro condotto in un'unica classe.

3.3.2 Protocolli

Si è cominciato assegnando ai ragazzi il seguente compito:

*Scrivi i numeri dall'*1 *al* 16 *sul tuo quaderno disponendoli in un quadrato di* 4 *quadretti per* 4 *quadretti.*

Esegui manualmente le somme per righe e per colonne e scrivile accanto creando una quinta riga di quattro numeri e una quinta colonna di quattro numeri.

Nel quadretto che manca a completare un quadrato 5×5 *inserisci infine il totale complessivo.*

Qualche allievo, che non aveva interiorizzato bene il significato delle proprietà associativa e commutativa dell'addizione, ha chiesto se nel quadretto finale doveva inserire il risultato delle somme parziali per righe o quello per colonne. Gli è stato suggerito di eseguire il lavoro e di provare a fare entrambi i calcoli. Ben presto tutti gli allievi hanno avuto sul quaderno la seguente tabella:

1	2	3	4	**10**
5	6	7	8	**26**
9	10	11	12	**42**
13	14	15	16	**58**
28	**32**	**36**	**40**	**136**

Dopo una discussione per capire il motivo dell'uguaglianza del totale, si è pervenuti a questa catena di uguaglianze da tutti accettata come valida motivazione:

$$
\begin{gathered}
1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16= \\
=(1+2+3+4)+(5+6+7+8)+(9+10+11+12)+(13+14+15+16)= \\
=10+26+42+58= \\
=136= \\
=28+32+36+40= \\
=(1+5+9+13)+(2+6+10+14)+(3+7+11+15)+(4+8+12+16)= \\
=1+5+9+13+2+6+10+14+3+7+11+15+4+8+12+16= \\
=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16.
\end{gathered}
$$

In seguito l'insegnante ha chiesto agli studenti di far eseguire lo stesso lavoro al foglio di calcolo Microsoft Excel, secondo le seguenti istruzioni:

Dopo aver implementato i dati nel quadrato, fate fare le somme prima per colonna e poi per riga utilizzando il comando Σ dalla barra degli strumenti [3].

Dopo un po' di tempo qualche allievo ha reagito con stupore, notando che otteneva "un risultato sbagliato". La tabella ottenuta infatti era la seguente:

1	2	3	4	**10**
5	6	7	8	**26**
9	10	11	12	**36**
13	14	15	16	**58**
28	**32**	**36**	**40**	**136**

che presenta il valore 36 nella casella della terza riga-quinta colonna invece del 42 presente nella casella corrispondente della tabella calcolata manualmente.

Qualche allievo ha anche notato che il programma segnala l'anomalia affiggendo un triangolino verde in alto a destra della casella con il risultato in questione.

L'insegnante ha quindi invitato a cercare di capire come mai Excel calcola 36 al posto del 42 che ci si aspettava.

[3] È essenziale che si usi questa modalità di somma, altrimenti lo "sbaglio" non si verifica.

Dopo qualche minuto, gli allievi piú veloci hanno notato che, posizionandosi sulla casella incriminata e leggendo nella barra delle funzioni, era chiaro che Excel stava sommando i dati in colonna invece di quelli in riga ($10 + 26 = 36$ invece di $9 + 10 + 11 + 12 = 42$).

Ben presto qualcuno si è reso conto che usando il comando Σ dalla barra degli strumenti e quindi senza specificare il campo di applicazione della funzione somma, Excel prediligeva le colonne alle righe in quanto programmato a operare questa scelta. Questa osservazione ha portato i ragazzi a riflettere sul fatto che comandi spesso presentati come equivalenti possono non esserlo in particolari situazioni. Coloro che avevano notato il triangolino verde hanno evidenziato che comunque Excel segnala a suo modo l'ambiguità. L'insegnante ha precisato che versioni piú vecchie non lo fanno e ha invitato i possessori di computer a rifare l'esercizio a casa per vedere come reagiva la loro versione domestica.

In seguito è stata posta un'ulteriore questione:

Come mai Excel “sbaglia” solo in quella particolare casella? Cosa accadrebbe se facessimo lo stesso tipo di esercizio con un quadrato di dati 5×5*, cioè con la somma dei primi* 25 *numeri? E con uno* 6×6*?*

Questa domanda è parsa particolarmente difficile.

Nella lezione successiva, si è approfondita la questione di saper prevedere dove Excel avrebbe sbagliato in una tabella con i dati in un quadrato 5×5. Alcuni allievi avevano già ipotizzato un errore nelle caselle della *terza riga - sesta colonna* e in quella del totale complessivo, alla *sesta riga-sesta colonna*. L'insegnante ha allora chiesto:

In risposta a una domanda dell'insegnante, gli allievi hanno sostenuto che secondo loro Excel non sbagliava alla prima casella dell'ultima colonna perché non c'era alcuna ambiguità: aveva solo i dati della riga precedente e nessun numero sopra; non sbagliava neanche nella seconda casella dell'ultima colonna perché aveva solo un dato sopra di sé e con un solo numero non si fa una somma, mentre l'ambiguità si presentava per la prima volta alla terza riga dell'ultima colonna in cui c'erano alcuni numeri nella riga a sinistra e due numeri nella colonna soprastante. Poi, avendo già calcolato un totale, ricominciava un ciclo dello stesso tipo.

A questo punto l'insegnante ha chiesto di controllare se la previsione era corretta usando il programma, la qual cosa ha dato origine alle tabelle:

1	2	3	4	5	**15**
6	7	8	9	10	**40**
11	12	13	14	15	**55**
16	17	18	19	20	**90**
21	22	23	24	25	**115**
55	**60**	**65**	**70**	**75**	**325**

e

1	2	3	4	5	**15**
6	7	8	9	10	**40**
11	12	13	14	15	**65**
16	17	18	19	20	**90**
21	22	23	24	25	**115**
55	**60**	**65**	**70**	**75**	**325**

di cui la prima è “sbagliata” in accordo con le previsioni fatte mentre la seconda è quella corretta, fatta per avere il controllo.

L’insegnante ha quindi invitato la classe a controllare ulteriormente la correttezza del ragionamento cimentandosi con una tabella 6×6.

Un allievo particolarmente autonomo ha scoperto da solo facendo dei tentativi che il metodo piú veloce per far eseguire ad Excel le tabelle corrette consiste nell’implementare i dati, e successivamente evidenziare un’area che contenga una riga e una colonna in piú e poi cliccare una volta sola sulla Σ della barra degli strumenti.

3.4 Problemi e “ragionamenti naturali”

Docente: Alba De Michele,
Attività di recupero indirizzate ad un’allieva di seconda media.
Tempo: 6 ore.

3.4.1 Relazione

Come in ogni attività umana, il ricupero dei ragazzi che non vanno bene in matematica ha maggiore possibilità di riuscita se viene data una motivazione al lavoro da svolgere.

Inoltre, la difficoltà nel risolvere i problemi spesso è dovuta a una certa incapacità nel gestire le conoscenze apprese, piuttosto che alla non comprensione degli argomenti; questo avviene ad ogni livello scolastico.

Il primo ostacolo è senz'altro la comprensione di un testo, che richiede un'attenta lettura e un'accurata analisi del ruolo delle parole da tradurre poi in linguaggio matematico. Un altro ostacolo è la mancanza di chiarezza e di ordine nel processo risolutivo. Per dare agli allievi maggior sicurezza e per aiutarli a risparmiare tempo bisogna guidarli a costruirsi un metodo per rappresentare lo svolgimento cosí che possano ritrovare facilmente risultati parziali da utilizzare.

Lo schema che si è ottenuto con le attività esposte in questo paragrafo è utile anche per studenti del biennio delle superiori che si trovino in difficoltà.

In questo caso, attraverso un colloquio con la ragazza, l'insegnante ha modo di osservare che:

- la ragazza ha difficoltà solo nella risoluzione di problemi di geometria piana, tipici della seconda media, con applicazione dei teoremi di Pitagora e di Euclide;
- tale difficoltà è dovuta al fatto che non sa riorganizzare quanto studiato e metterlo in relazione con le informazioni date dal problema;
- la ragazza sa schematizzare con i diagrammi di flusso;
- alla ragazza piace preparare dolci.

Quindi l'insegnante considera la possibilità di intervenire facendo scoprire all'allieva l'analogia tra il processo di esecuzione di un dolce e l'analisi e la soluzione di un problema. Opportune tabelle per i dati e i diagrammi di flusso delle relative procedure sono sembrati in questo caso le rappresentazioni iconiche piú adatte ad evidenziare questa analogia.

Presa in esame una ricetta, si sono considerati i vari elementi: il nome del dolce, gli ingredienti, gli utensili e i termini non noti. L'insegnante ha proposto di utilizzare colori diversi per sottolineare i vari elementi in quanto l'uso del colore aiuta i ragazzi a schematizzare e aumenta la loro concentrazione in fase di lavoro. Durante l'esecuzione piú volte si è esaminato il tutto fino a che la procedura non è risultata chiara e completa, richiamando l'attenzione dell'allieva anche sulle istruzioni non esplicitate (in questo caso, l'accensione preventiva del forno). A questo punto si è passati alla rappresentazione iconica del procedimento con un diagramma di flusso utilizzando i simboli piú noti (rettangolo per una singola istruzione, rombo per una decisione con due possibili scelte). Questo tipo di rappresentazione è stata scelta perché evidenzia in modo chiaro non solo i singoli passaggi ma anche la ripetitività di certe istruzioni fino a che le condizioni per proseguire non sono ottimali. Nella stesura dello schema l'insegnante è intervenuta solo per la giusta collocazione dei cicli, dopo averli fatti preparare singolarmente all'allieva.

Successivamente si è passati ad un problema di geometria e l'insegnante ha proposto di sottolineare anche qui, con colori diversi, i vari elementi: dati espliciti numerici e non; dati impliciti non numerici; termini non noti e le richieste del problema. Per farle scoprire l'analogia con quanto precedentemente fatto le ha consigliato di utilizzare gli stessi colori di prima, rispettando le seguenti corrispondenze:

	ricetta	problema
elementi da utilizzare	ingredienti	dati numerici
"mezzi"	utensili	dati non numerici impliciti ed espliciti (proprietà e teoremi)
parole sconosciute	parole sconosciute	parole sconosciute
obiettivo finale	il dolce	risposte alle richieste

Prima della preparazione del diagramma di flusso questa volta vengono fatti scrivere gli elementi sottolineati in quattro blocchi in modo da verificare soprattutto se sono stati ben individuati i dati espliciti e impliciti non numerici, elementi spesso trascurati dai ragazzi all'inizio del problema. Farli riflettere su questa parte è molto importante per aiutarli a trovare i collegamenti tra le varie conoscenze.

Viene quindi fatto il diagramma di flusso che è piú elaborato rispetto al precedente avendo piú istruzioni e piú cicli annidati (è stato ultimato dopo cinque stesure parziali). Maggiore difficoltà si è incontrata nella parte finale quando si affronta la scelta della formula migliore per il problema e nell'analisi del risultato ottenuto con la relativa verifica della sua adeguatezza. Indubbiamente qui l'aiuto dell'insegnante è stato determinante. Considerando che il diagramma, in questo caso, non serve per un linguaggio di programmazione, si è preferito lasciare alcune istruzioni piú volte ripetute perché rendono piú chiaro il procedimento. Alla fine, si è svolto il problema seguendo passo a passo il diagramma compilato. Durante la risoluzione l'insegnante ha suggerito una modalità di scrittura che è risultata molto utile per inquadrare le informazioni e i dati che andavano utilizzati:

- figura sufficientemente grande a sinistra del foglio;
- sotto la figura, elenco di tutti i suoi elementi con lettere corrispondenti;
- a destra i quattro blocchi, nell'ordine, costituiti da: dati espliciti numerici, dati espliciti non numerici, dati impliciti non numerici, richieste del problema.

Si parte dalla prima richiesta e si scrive la formula risolutiva migliore, quindi di fianco si scrivono le varie grandezze interessate con il relativo dato numerico, se si conosce, oppure con il punto di domanda se la grandezza non è nota. A questo punto l'attenzione si sposta sull'eventuale dato da trovare e si prosegue spostandosi a destra con lo stesso metodo di prima, che si ripete fino a che tutte le grandezze, che compaiono nelle formule scelte, risultano note. Ultimato questo percorso, si ritorna a sinistra e, sotto la formula, si fa il calcolo (però si posiziona piú in basso rispetto alle operazioni laterali, per evidenziare la sequenzialità delle operazioni fatte).

Per esempio [4]:

$$2p = AC + BC + AB \begin{cases} AC = 25\ cm \\ BC = 20\ cm \\ AB = ? \longleftarrow \text{ T. di Pitagora, } AB = \cdots = 15\ cm \end{cases}$$

$$= (25 + 20 + 15)cm = 60\ cm$$

Per procedere in questo modo ci sono volute in totale circa 2 ore per la prima parte (ricetta) e 4 ore per la seconda parte (problema). Certo sembrano tante per un solo problema ma senz'altro il lavoro è risultato piú efficace che fare nello stesso tempo decine di problemi che avrebbero portato la ragazza a preoccuparsi di "ricordare" tra i problemi fatti quello piú "uguale" a quello successivamente dato. Con questo metodo la ragazza ha preso coscienza di ciò che faceva e ha compreso che la metodologia di lavoro era riutilizzabile per altri problemi. Alla fine, l'allieva chiede di fare subito un altro problema ed è proprio la sua voglia di riprovarci che dà soddisfazione all'insegnante. A distanza di tempo l'allieva ha dichiarato di essere riuscita a superare da sola le nuove difficoltà incontrate: aveva acquisito fiducia

[4] Seguendo la notazione usata dai testi per le scuole medie inferiori e la pratica didattica, non si distinguerà la notazione di un segmento da quella della sua misura.

nella "ragionevolezza" della matematica e nelle proprie capacità, imparando ad usare anche quelle maturate in ambienti extrascolastici.

3.4.2 Protocolli

Dopo aver valutato la situazione iniziale l'insegnante e l'allieva decidono di analizzare il procedimento di esecuzione di un dolce.

L'insegnante (I) prende una ricetta e chiede alla ragazza (R) di spiegarle cosa farebbe se volesse utilizzarla.

R Leggo la ricetta, vedo quali ingredienti occorrono, me li procuro e poi lavoro.

I Secondo te gli ingredienti sono tutti esplicitamente dichiarati o alcuni sono "impliciti" perché nominati nell'esecuzione? Quali sono gli utensili necessari? Conosci il significato di tutti i termini presenti nella ricetta?

R *(Riprende a leggere la ricetta con maggior attenzione.)*

I Potresti sottolineare, utilizzando colori diversi, gli ingredienti, l'utensileria e le parole che non conosci

R *(Concorda e, scelti opportuni colori (che saranno sostituiti per ragioni di stampa con tipologie diverse di carattere), comincia a sottolineare.)*

I *(Nota che la ragazza esegue diligentemente e le chiede di mimare l'esecuzione.)*

R *(Mima l'esecuzione e si accorge che nella sequenza ha trascurato che il forno deve essere acceso dall'inizio perché possa raggiungere la giusta temperatura.)*

Dolce agli amaretti

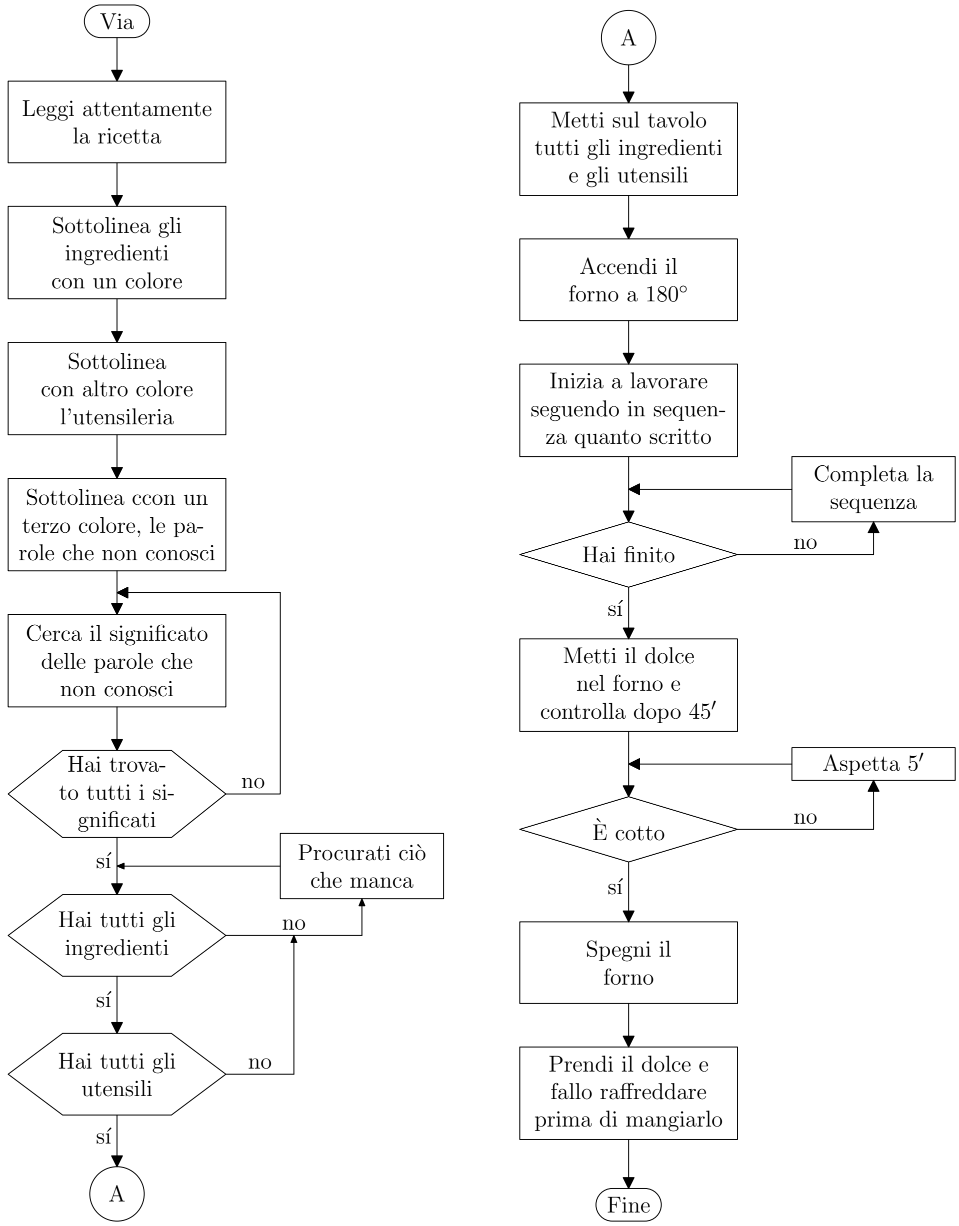
Dosi per 6 persone — Tempo d'esecuzione 1h 10'

1/2 *l* latte	200 *gr* amaretti	120 *gr* zucchero
1/2 limone	3 uova	15 *gr* farina
1/2 stecca di vaniglia		

Versate il ***latte*** *in una* CASSERUOLA, *aggiungete la* ***vaniglia*** *e mettetelo sul fuoco, scaldandolo senza farlo bollire. In una* TERRINA *sbattete le* ***uova*** *con* *lo* ***zucchero*** *e versatevi il latte poco alla volta continuando a mescolare, dopo aver tolto la stecca di vaniglia. Riducete in polvere gli* ***amaretti*** *nel* MIXER *(o pestateli nel mortaio), uniteli al composto e infine incorporate il succo di* ***limone****. Ungete con la* ***margarina*** *(manca nell'elenco degli ingredienti dati all'inizio) una* PIROFILA *(di 18 cm di diametro), versatevi la crema agli amaretti e cuocere a bagnomaria in* FORNO *già caldo a 180° per 45′. Controllate la cottura infilando nel dolce la lama di un* COLTELLO *che dovrà uscire asciutta. Lasciate raffreddare il* dolce *e mettetelo poi in* FRIGORIFERO. *Prima di servire mettetelo su un* PIATTO *di portata e a vostro piacere decoratelo.*

I *(Sollecita l'allieva a scegliere una rappresentazione iconica per schematizzare i vari passaggi.)*

R *(Sceglie il diagramma di flusso e dopo alcune stesure parziali con l'aiuto dell'insegnante arriva alla stesura definitiva seguente:)*


Via
Leggi attentamente la ricetta
Sottolinea gli ingredienti con un colore
Sottolinea con altro colore l'utensileria
Sottolinea ccon un terzo colore, le parole che non conosci
Cerca il significato delle parole che non conosci
Hai trovato tutti i significati
no
sí
Procurati ciò che manca
Hai tutti gli ingredienti
no
sí
Hai tutti gli utensili
no
sí
A
A
Metti sul tavolo tutti gli ingredienti e gli utensili
Accendi il forno a 180°
Inizia a lavorare seguendo in sequenza quanto scritto
Completa la sequenza
Hai finito
no
sí
Metti il dolce nel forno e controlla dopo 45′
Aspetta 5′
È cotto
no
sí
Spegni il forno
Prendi il dolce e fallo raffreddare prima di mangiarlo
Fine

L'insegnante cerca di far scoprire l'analogia tra il procedimento utilizzato per l'esecuzione della ricetta e il procedimento di risoluzione di un problema di geometria.

Problema

Considerato un triangolo rettangolo ABC con un cateto e l'ipotenusa che misurano rispettivamente 20 e 25 cm; calcola del triangolo il perimetro, l'area e le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

I Leggi con attenzione e sottolinea, come hai fatto per la ricetta, i dati espliciti numerici e non numerici ed i termini che non conosci. Non dimenticare di evidenziare le richieste del problema.

R Cosa vuol dire dato non numerico?

I Esempio triangolo rettangolo è un dato non numerico che ti segnala proprietà e possibilità di applicare alcuni teoremi noti.

R *(Legge il testo e decide di sottolineare i dati espliciti numerici, i dati espliciti non numerici, le parole che non conosce e le richieste del problema con colori diversi.)*

I Potresti utilizzare gli stessi colori di prima considerando queste corrispondenze:

	ricetta	problema
elementi da utilizzare	ingredienti	dati numerici
"mezzi"	utensili	dati non numerici impliciti ed espliciti (proprietà e teoremi)
parole sconosciute	parole sconosciute	parole sconosciute
obiettivo finale	il dolce	risposte alle richieste

R *(Esegue.)*

Problema

Considerato un TRIANGOLO RETTANGOLO *ABC con un* ***cateto*** *e l'****ipotenusa*** *che misurano rispettivamente* ***20*** *e* ***25 cm****; calcola del triangolo il* perimetro, *l'*area *e le* proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

I Perché hai evidenziato le proiezioni dei cateti in due modi diversi contemporaneamente?

R Capisco che è una richiesta del problema ma non ne conosco il significato.

I *(Spiega come trovare la proiezione di un segmento AB su una retta r.)*

R *(Disegna un triangolo rettangolo e sulla figura indica le proiezioni dei cateti.)*

I Ora scrivi in blocchi separati i dati espliciti numerici e non, i dati impliciti e le richieste.

R *(Scrive:)*

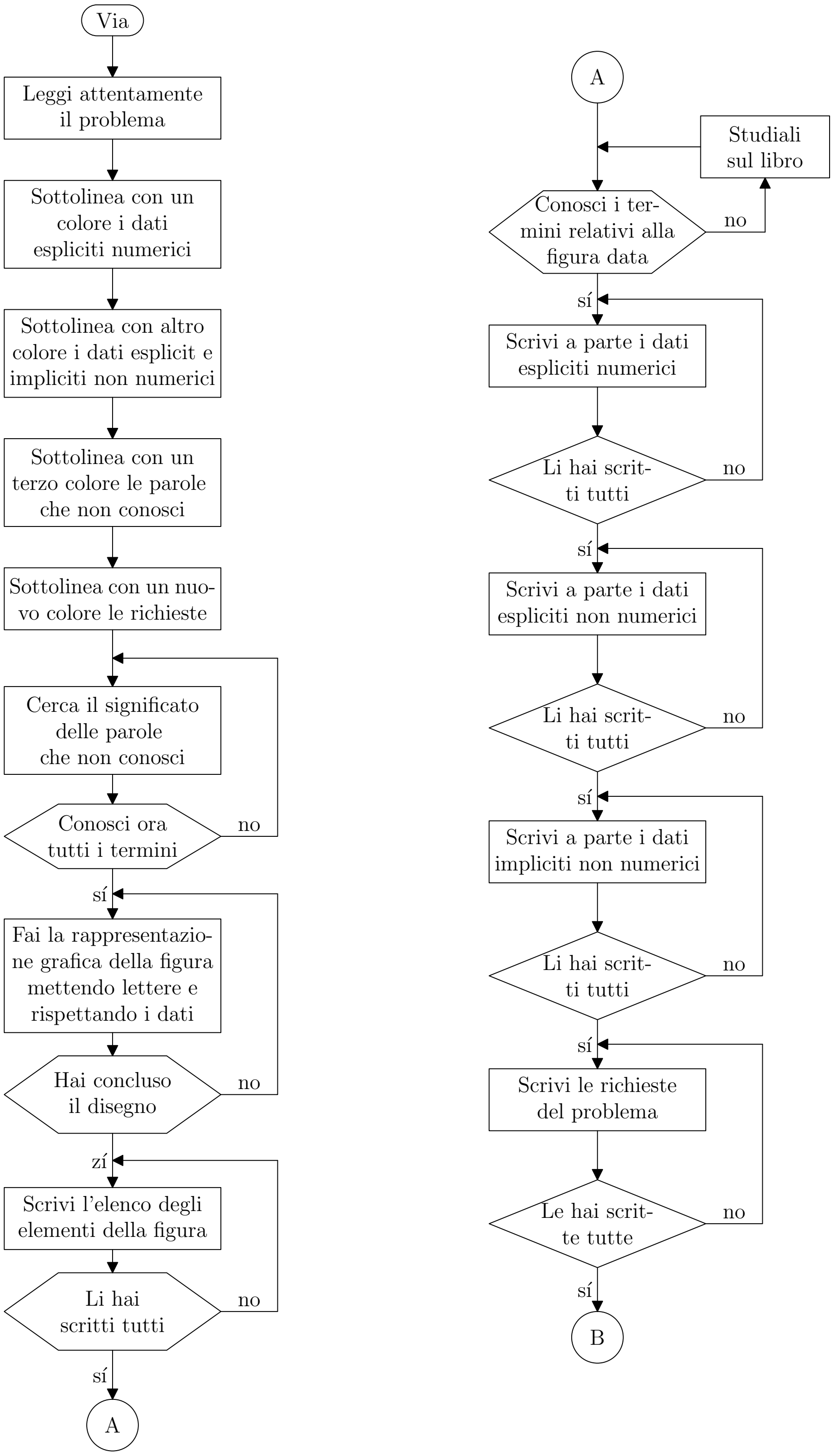
Dati espliciti

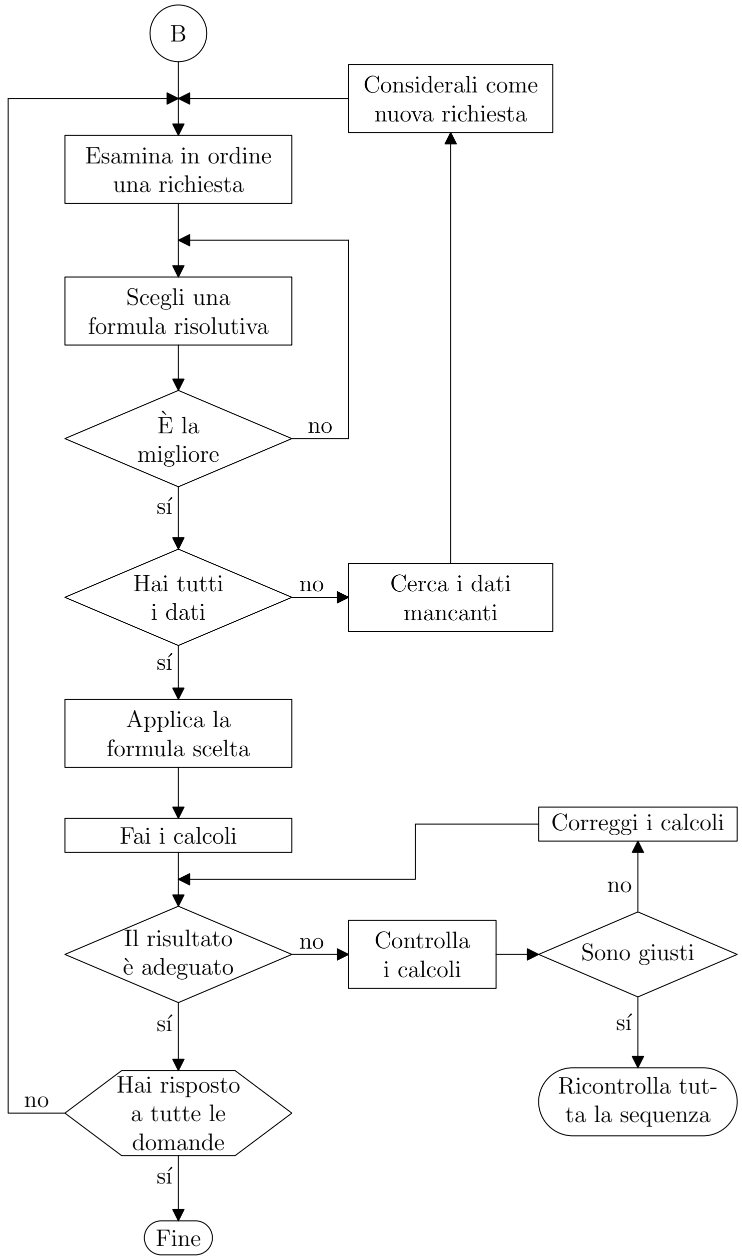
NUMERICI	NON NUMERICI
cateto: 20 cm	triangolo rettangolo
ipotenusa: 25 cm	

Dati impliciti
perpendicolarità tra i due cateti
teoremi noti che si possono applicare al triangolo rettangolo (T. di Pitagora, T. di Euclide)
formula del perimetro
formula dell'area

Richieste
perimetro
area
proiezioni dei cateti sull'ipotenusa

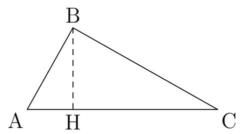
Si passa cosí alla rappresentazione con il diagramma di flusso giungendo a questa stesura definitiva dopo 5 stesure parziali:


Via
Leggi attentamente il problema
Sottolinea con un colore i dati espliciti numerici
Sottolinea con altro colore i dati esplicit e impliciti non numerici
Sottolinea con un terzo colore le parole che non conosci
Sottolinea con un nuovo colore le richieste
Cerca il significato delle parole che non conosci
Conosci ora tutti i termini
no
sí
Fai la rappresentazione grafica della figura mettendo lettere e rispettando i dati
Hai concluso il disegno
no
zí
Scrivi l’elenco degli elementi della figura
Li hai scritti tutti
no
sí
A
A
Studiali sul libro
Conosci i termini relativi alla figura data
no
sí
Scrivi a parte i dati espliciti numerici
Li hai scritti tutti
no
sí
Scrivi a parte i dati espliciti non numerici
Li hai scritti tutti
no
sí
Scrivi a parte i dati impliciti non numerici
Li hai scritti tutti
no
sí
Scrivi le richieste del problema
Le hai scritte tutte
no
sí
B



I *(Sollecita la ragazza a svolgere il problema seguendo il diagramma di flusso compilato.)*

R *(Legge nuovamente il problema, conferma le sottolineature e verificato che conosce tutti i termini imposta cosí i dati.)*



Elenco elementi

AB	cateto
AC	cateto
AC	ipotenusa
AH	proiezione di AB su AC
BH	altezza relativa all'ipotenusa

Dati espliciti numerici

$AC = 25\ cm$
$BC = 20\ cm$

Dati espliciti non numerici

$\widehat{ABC} = 90°$
$AB \perp BC$

Dati imliciti non numerici

Teorema di Pitagora
1° Teorema di Euclide (il 2° non è stato ancora fatto)
Forlula perimetro
Formula area

Richieste

$2p = ?$
Area $= ?$
$AH = ?$
$HC = ?$

I *(Suggerisce, per aiutare R nell'organizzazione, di partire dalla prima richiesta, scrivere vicino la formula scelta e prima di fare i calcoli analizzare, spostandosi a destra del foglio, i dati noti e quelli da trovare con relativo calcolo.)*

R *(Esegue.)*

$2p = AC + BC + AB$

$AC = 25\ cm$

$BC = 20\ cm$

$AB = ?$ $\longleftarrow$ T. di Pitagora

$AB^2 = AC^2 - BC^2 =$

$= (25^2 - 20^2 = 125)cm$

$AB = \sqrt{125}\ cm = 15\ cm$

$= (25 + 20 + 15)cm = 60\ cm$

$$\text{Area} = \frac{AB \times BC}{2}$$

$AB = 15\ (cm$

$BC = 20\ (cm$

$$= \frac{15 \times 20}{2}\ cm^2 = 150\ cm^2$$

$$AH = \frac{AB^2}{AC}\ (1^\circ \text{ T. di Euclide})$$

$AB = 15\ cm$

$AC = 25\ cm$

$$= \frac{15^2}{25}\ cm = 9\ cm$$

$$HC = \frac{BC^2}{AC}\ (1^\circ \text{ T. di Euclide})$$

$BC = 20\ cm$

$AC = 25\ cm$

$$= \frac{20^2}{25}\ cm = 16\ cm$$

oppure

$HC = AC - AH$

$AC = 25\ cm$

$AH = 9\ cm$

$= 25 \times 9cm = 16\ cm$

R *(Soddisfatta chiede di poter fare subito un altro problema.)*

"Quaderni di Ricerca in Didattica", n. 17, 2007
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

3.5 Ancora problemi: i solidi di rotazione

Docente: Caterina Vicentini, Classe 3^a, a.s. 2004/05,
Scuola media "Ascoli", Gorizia
Tempo: 2 ore.

3.5.1 Relazione

Nel compito d'esame per ottenere la licenza media, uno degli scogli statisticamente piú ardui risulta essere il problema di geometria solida, specialmente se riguarda i solidi di rotazione. Spesso gli alunni non hanno avuto modo di allenare e sviluppare l'immaginazione su figure tridimensionali, dove il disegno può essere solo un suggerimento che viene sostenuto da opportune esperienze spaziali (cfr. [3], [4]). In particolare, per i solidi di rotazione, ci si potrebbe aiutare con opportuni manufatti di carta.

I problemi sui solidi di rotazione solitamente presentano una figura piana, in genere un triangolo o un quadrilatero, che ruota intorno ad uno dei lati. Alcune misure della figura piana non vengono date esplicitamente, ma richiedono di essere ricavate usando teoremi, formule o sistemi di primo grado. Le richieste riguardano il calcolo della superficie, del volume ed eventualmente anche del peso del solido di rotazione ottenuto dato il peso specifico del materiale con cui è costruito.

Dopo aver dato da fare e corretto alla lavagna diversi problemi, si sono evidenziati dei punti di maggiore difficoltà per gli allievi.

Essi tendevano a guardare al problema come a un tutto unico.

Da un lato era estremamente difficile per loro immaginare le relazioni tra la figura piana e il solido generato, in particolare "vedere" come e dove applicare i teoremi di Pitagora ed Euclide guardando solo il disegno del solido. Dall'altro leggevano il testo e scrivevano i dati senza tenere conto del fatto che, all'interno del processo risolutivo, la stessa lettera poteva trovarsi a rappresentare la misura di due o tre segmenti diversi e uno stesso segmento aveva ruoli diversi nella figura piana e nel solido.

Consideriamo il problema riportato nei protocolli: nel testo si parla di un trapezio isoscele e della sua altezza. All'interno del processo risolutivo però, compaiono altre altezze: quella del cilindro e quelle dei due coni. Gli allievi, abituati ad una sorta di algebra sincopata, indicavano semplicemente con h l'altezza di ogni figura. Quindi h si trovava a rappresentare tre valori diversi:

altezza del trapezio, altezza del cilindro e altezza dei coni; al momento di applicare le formule per il calcolo della superficie e del volume, il valore di h utilizzato veniva scelto casualmente, con gli evidenti errori conseguenti.

Nello stesso tempo, la base maggiore del trapezio, con la rotazione, cambiava ruolo e diventava l'altezza del cilindro, il lato obliquo del trapezio diventava l'apotema dei coni e cosí via.

Dalla correzione ripetuta di questi errori e dalle chiarificazioni successive, hanno preso corpo le tre indicazioni fondamentali:

- l'abitudine a separare la parte di geometria piana e quella della geometria solida
- la creazione per tappe della figura solida
- l'attenta notazione dei dati (usando opportuni pedici) e la traduzione del loro ruolo nella figura piana in quello sostenuto nella figura solida.

Esse sono state alla base di un decalogo, da tener buono come vademecum per l'esame, riguardante l'organizzazione piú efficace del lavoro per la soluzione dei problemi sui solidi di rotazione.

Decalogo per una corretta soluzione

a Disegnare la figura piana assegnata, per quanto possibile in scala

b Risolvere il problema di geometria piana che permette di ricavare i dati mancanti

c Ridisegnare la figura piana avendo cura che la scala sia corretta

d Evidenziare l'asse di rotazione

e Tracciare nello stesso disegno la figura che si ottiene ruotando di 180° intorno all'asse la figura data (cioè la simmetrica di questa rispetto all'asse assegnato)

f Dare al disegno il senso della rotazione

g Rifare un disegno sulla base di quello al punto (f) in cui sia cancellata l'asse di rotazione e siano tracciate in modo continuo le parti che risultano davanti e in modo tratteggiato quelle che risultano dietro o all'interno della figura solida ottenuta

h "Tradurre" i dati della geometria piana in dati della geometria solida

i Scrivere le formule per il calcolo della superficie e del volume del solido di rotazione ottenuto

j Fare i calcoli per concludere il problema.

È interessante rendere noti i risultati dei compiti scritti di matematica dell'esame di licenza della classe coinvolta nell'esperienza. Un allievo non è stato ammesso a sostenere l'esame finale. I risultati conseguiti dai 23 allievi che hanno sostenuto la prova scritta di matematica sono stati:

OTTIMO	4 alunni
DISTINTO	9 alunni
BUONO	6 alunni
SUFFICIENTE	3 alunni
NON SUFFICIENTE	1 alunno.

In cinque anni di insegnamento alla scuola media inferiore, le frequenze assolute piú alte andavano sempre ai giudizi sufficiente e buono e c'erano piú di una insufficienza. La classe era di buon livello, però senza la riflessione sull'organizzazione del problema di geometria solida e una riflessione analoga per l'esercizio di geometria analitica, i risultati sarebbero stati meno incoraggianti.

3.5.2 Protocolli

Diamo ora un esempio di risoluzione applicando il decalogo.

Problema. *Un solido in gesso ha la forma che si ottiene facendo ruotare di* 360° *un trapezio isoscele attorno alla sua base minore. Si calcolino la superficie, il volume e il peso sapendo che:*

la somma delle basi misura 16 *centimetri:*

la base minore è i $1/3$ *della maggiore;*

l'altezza del trapezio misura 3 *centimetri;*

il peso specifico del gesso è $1,4$ *grammi al centimetro cubo.*

Si vogliono sia i risultati esatti che le loro approssimazioni secondo il seguente criterio: a meno di un millimetro quadrato le superfici, a meno di un millimetro cubo i volumi e a meno di un grammo i pesi.

Dati	**Domande**
$ABCD$ trapezio isoscele;	la superficie S
$ABCD$ ruota di 360° intorno alla base minore CD	il volume V
$\mathcal{B} + b = 16\ cm$	il peso P
$h_{trapezio} = 3\ cm$	
$b = (1/3)\mathcal{B}$	
$ps = 1,4\ g/cm^3$	

(a) Disegnare un trapezio isoscele con la base maggiore tripla della minore. Dopo il calcolo in (b), si potrà disegnare la figura in scala in (c).

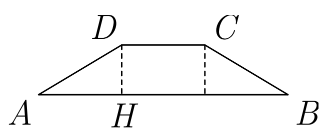
(b) $b = (1/3)\mathcal{B}$ permette di scrivere l'equazione $\mathcal{B} + (1/3)\mathcal{B} = 16$ che risolta dà $\mathcal{B} = 12$ e quindi $b = 4$. Per il calcolo del lato obliquo, calcolare la sua proiezione ortogonale sulla base maggiore [5] :

$$(AB - CD)/2 = (12 - 4)/2 = 4;$$

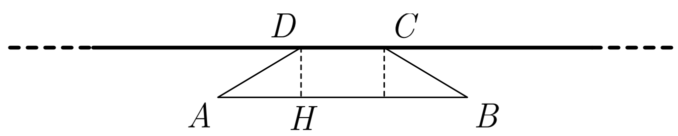
poi applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AHD

$$AD = \sqrt{AH^2 + HD^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

(c)

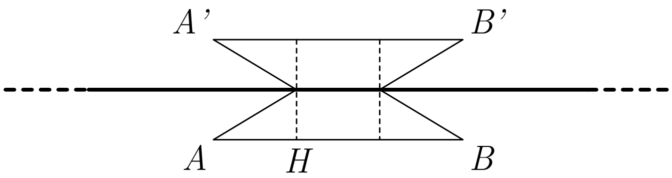


(d) A questo punto verrà tracciato l'asse:

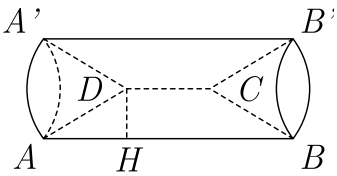


e poi la figura speculare:

[5] Cfr. nota a pag.33.



(f) e (g) Dopo aver dato il senso di rotazione, aver cancellato l'asse e aver tratteggiato le parti che vengono a trovarsi dietro o all'interno, si avrà:



cioè un cilindro nel quale sono scavati due coni uguali.

A questo punto “traduciamo” i dati del trapezio in dati del solido:

L'altezza del trapezio è il raggio di base sia del cilindro che dei due coni. Possiamo scrivere pertanto:

$$r = 3cm.$$

La base maggiore del trapezio è l'altezza del cilindro. Possiamo scrivere allora:

$$h_{cil} = 12cm.$$

L'apotema dei coni è il lato obliquo del trapezio:

$$a = 5cm.$$

L'altezza dei coni è la proiezione del lato obliquo del trapezio sulla base maggiore:

$$h_{coni} = 4cm.$$

Le formule per il calcolo di superficie, volume, e peso del solido risultano pertanto essere:

$$S = S_{lat\ cil} + 2S_{lat\ cono}$$
$$V = V_{cil} - 2V_{cono}$$
$$P = p_s V$$

Applicando le formule si ha:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi r h_{cil} + 2\pi r a = \\ &= 2\pi(3cm)(12cm) + 2\pi(3cm)(5cm) = \\ &= 72\pi cm^2 + 30\pi cm^2 = 102\pi cm^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h_{cil} - 2(1/3\pi r^2 h_{cono}) = \\ &= \pi(9cm^2)(12cm) - 2[1/3\pi(9cm^2)(4cm)] = \\ &= 108\pi cm^3 - 24\pi cm^3 = 84\pi cm^3 \end{aligned}$$

$$P = (1,4g/cm^3)(84\pi cm^3) = 117,6\pi g$$

Il solido del problema ha pertanto una superficie di $320,44cm^2$ circa approssimando per difetto a meno di un millimetro quadrato, un volume di circa $263,894cm^3$ approssimando per difetto a meno di un millimetro cubo e un peso di circa $369g$, sempre approssimando per difetto a meno di un grammo.

3.6 Per iniziare la geometria

Docente: Sylviane Beltrame, Classe 1^a - a.s. 2004/05,
Liceo scientifico "Marinelli", Udine
Tempo: 1 ora in classe con lavoro a casa.

3.6.1 Relazione

3.6.1.1 La conversazione clinica

In una classe prima del liceo scientifico, in settembre all'inizio delle lezioni, il docente introduce un tema che sarà un filo conduttore per tutto il biennio: l'organizzazione del pensiero e delle conoscenze, iniziando con una rapida conversazione clinica ([16]), riportata nei protocolli, che sollecita gli studenti a parlare di organizzazione nella loro vita quotidiana.

Da essa risulta che, per gli studenti, organizzare significa:

ordinare: cronologicamente (pianificare la vita, il tempo libero)
da causa a effetto (studio della Storia)
per importanza o difficoltà (i compiti)
classificare: con criteri pratici (il guardaroba)
in una struttura predefinita (in un tema: introduzione - parte centrale - conclusione)
sotto altri punti di vista (il viaggio: luoghi, interessi, tempi)

L'organizzazione e soprattutto la sua rappresentazione grafica servono a:
evidenziare (le idee chiavi in un tema),
memorizzare, non perdere (il filo del ragionamento, gli oggetti),
capire meglio (è una questione visiva. . .),
dare sicurezza (non mi perdo per strada, previsioni economiche),
ottimizzare il tempo.

Le rappresentazioni citate sono:
formattazione del testo (titoli, punti, blocchi),
schemi con riquadri e freccie.

3.6.1.2 Il primo capitolo della geometria

In classe 1^a liceo scientifico l'introduzione della geometria razionale costituisce un passo delicato: gli alunni arrivano dalla scuola media con un approccio intuitivo alla geometria e con delle conoscenze ben sviluppate sulle figure e loro proprietà. Si tratta di convincerli a mettere provvisoriamente da parte queste conoscenze e ad affrontare il metodo assiomatico partendo praticamente da zero: si spiega loro che l'obiettivo dello studio è diverso, non consiste nel ritrovare una somma di nozioni che possiedono già ma nel capire lo sviluppo della geometria a partire da alcuni concetti primitivi e imparare ad usare il metodo deduttivo. Si dà il primo paragone del gioco degli scacchi: i pezzi (scacchiera e pedine) acquistano un senso se si conoscono le regole con le quali interagiscono. . . poi il gioco diventa interessante e formativo. Dopo un inquadramento storico della nascita del metodo ipotetico deduttivo con gli Elementi di Euclide, si apre il libro di testo [6] che presenta una introduzione minuziosa (anche troppo!) delle nozioni fondamentali. Sarebbe noioso e lunghissimo intraprenderne una lettura commentata in

[6] Dodero, Barboncini, Manfredi: *Moduli e lineamenti di Matematica per il biennio delle scuole superiori*, Ghisetti e Corvi Editori

classe. L'importante è capire la differenza fra assioma, concetto primitivo, definizione, teorema senza pretendere che gli studenti memorizzino tutti gli assiomi enunciati.

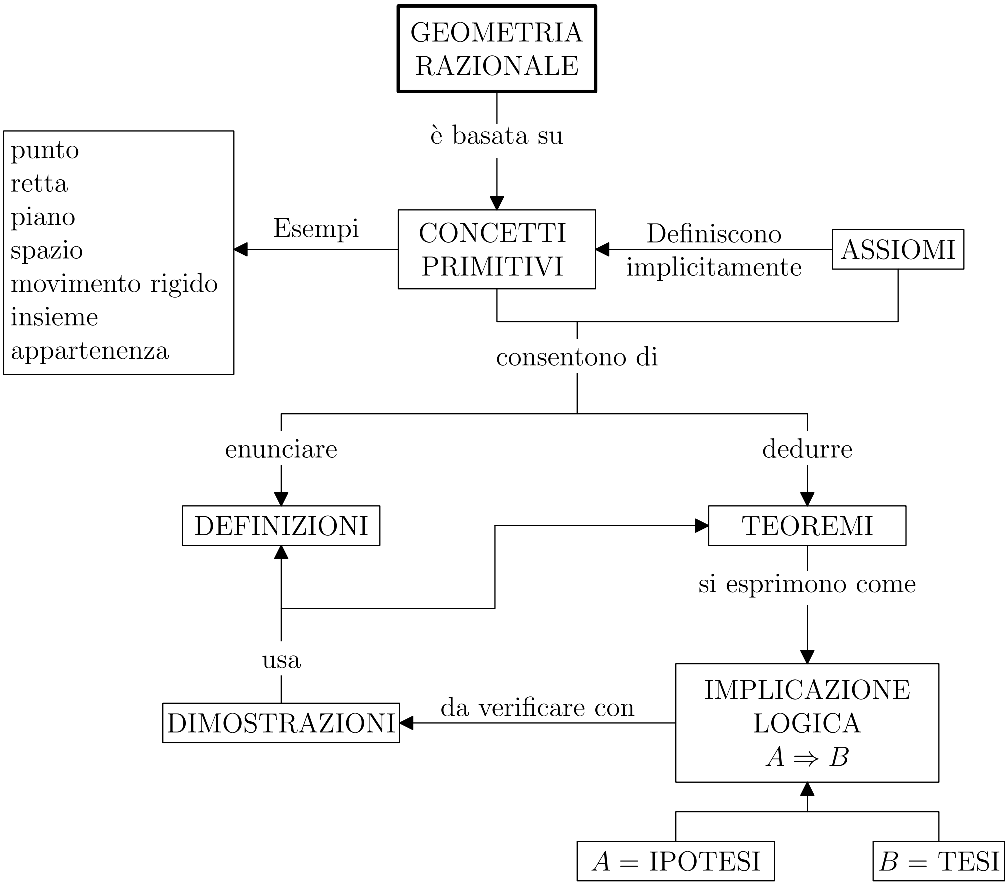
Per raggiungere questo obbiettivo si chiede agli studenti di eseguire una lettura organizzata del primo capitolo di geometria, trascrivendo in un'opportuna tabella classificatoria enunciati e definizioni.

A titolo di esempio, ecco l'inizio della classificazione realizzata:

Concetti primitivi	*Assiomi*	*Definizioni*	*Teoremi*
insieme, elemento, punto, retta, piano, spazio	assiomi di appartenenza (P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7)	figura geometrica, rette complanari, rette incidenti, rette parallele	
	assiomi di ordinamento (P8, P9)	insieme denso	T1. La retta contiene infiniti punti, è densa e illimitata T2. Per un punto del piano passano infinite rette
		fascio di rette proprio	

Si sfrutta cosí la motivazione e l'impegno richiesto da una situazione operativa per facilitare l'apprendimento di contenuti astratti.

Successivamente all'attività di classificazione eseguita singolarmente da ogni studente, si chiede globalmente alla classe di realizzare una mappa concettuale, tracciata dall'insegnante alla lavagna con i suggerimenti e la partecipazione degli studenti (hanno già conoscenza del metodo per costruire una mappa e ne hanno già realizzate alcune in Algebra).



3.6.2 Protocolli

3.6.2.1 Conversazione clinica

I Cosa vi viene in mente sentendo la parole organizzazione? Quando vi organizzate e come? esempi?

A Una festa, la lista degli invitati, poi si chiama la gente, dove farla, quando.

A Organizzare il tempo libero, si seleziona le cose che si vuol fare, in che ordine.

A Pianificare la propria vita, schematizzare = dare un ordine.

I Gli schemi danno sempre un ordine?

A No ad esempio studiando la storia si mettono in ordine gli eventi studiando la causa-effetto.

A Ma una causa può avere vari effetti senza ordine.

I Vi organizzate per i compiti?

A Inizio con i piú difficili fino ai piú semplici, perché passo piú tempo sui difficili e quindi è meglio lasciare i piú facili per la fine quando si è piú stanchi.

A Per fare un tema si deve aver in testa quello che si vuol dire, organizzare i punti, poi si elaborano per iscritto.

A Si ha in testa le idee principali, si scrivono dei titoli, dei punti, si cerca di trovare i collegamenti fra loro.

A Faccio una traccia: introduzione, parte centrale, conclusione. Poi in questo tre blocchi si mettono le idee, i concetti da esprimere. Ma anche in ogni blocco si parte da un'idea principale poi altre arrivano attorno.

A Io scrivo le idee abbreviate su un foglio.

A Io butto giú sulla carta le idee come mi vengono, una segue l'altra, non sento il bisogno di prevedere uno schema.
...

A Organizzarmi mi serve a fare tutto senza dimenticare le cose essenziali.

A Serve a non divagare, a non lasciarmi distrarre, a non perdere tempo, a ottimizzarlo.

I Esempio di organizzazione per ricordare?

A Fare uno schema, in storia, in storia dell'arte: argomenti, spiegazioni vicino, collegamenti.

I Come lo scrivi?

A Con riquadri e frecce. Prima si cercano le parole chiave.
. . .

A Per organizzare un viaggio penso alle tappe, i luoghi, cosa mi interessa, quanto mi fermo.

A Organizzare il guardaroba, per stagione. I tipi di vestiti, per categorie: maglie, pantaloni.

A L’ordine degli oggetti, in camera, per non perderli, ognuna al proprio posto.

I Cos’è il proprio posto delle cose?

A Ad esempio il posto piú vicino sulla scrivania per le cose che si usano piú frequentemente.

I Nel test d’ingresso di matematica, come vi siete organizzati per risolvere l’esercizio dove si parlava di tre personaggi con tre mestieri da attribuire ad ognuno?

A Per esclusione. Ho scritto i tre nomi e sotto ho scritto le informazioni per ognuno, i dati ben staccati e cerco di creare un filo logico. Cosí non mi perdo per strada, non perdo tempo.

A Anch’io ho fatto cosí, ad esempio capivo che se uno non era sposato, l’altro non poteva essere suo suocero, ho fatto delle deduzioni.

A Io ho fatto tutto a mente.

I Bravo chi ha fatto tutto a mente! Ma a cosa può servire scrivere i nomi, i dati in ordine. . . ?

A Se si scrive è una questione visiva, aiuta la comprensione, ti da sicurezza.

A Secondo me scrivere è un modo per sostituire la memoria e fissare l’attenzione, perché quando si pensa a risolvere un problema la distrazione può cancellare tutti i dati pensati in quel momento, quindi scrivere è un modo per trasferire la memoria e salvarla. Diventi piú veloce e piú sicuro.

I Altro?

A Si possono organizzare cose importanti, a lunga durata, tipo un anno sportivo, scegliere i giorni per gli allenamenti, senza troppi compiti, che vadano bene anche agli altri compagni.

A Io mi organizzo anche dal punto di vista economico: mi piace avere le spalle coperte, potere risolvere i problemi, avere una sicurezza. Ad esempio questa estate ho avuto un piccolo incidente con un mezzo noleggiato e sono stato in grado di pagare i danni.

3.6.2.2 La geometria

Prima di tutto, in classe, si osserva come vengono distinti sul libro di testo i vari elementi: carattere in grassetto per i concetti primitivi, lettera P e colore nero per i postulati, lettera D e colore rosso per le definizioni, lettera T e colore blu per i teoremi. Ogni tanto, per rendere la lettura piú scorrevole, queste regole non vengono rispettate e una definizione o una proposizione di rilevanza minore vengono introdotte nel testo semplicemente evidenziate in grassetto.

Come compito-studio a casa, si chiede agli studenti di leggere il capitolo sui primi elementi di geometria (25 pagine), eseguendo contemporaneamente una classificazione sul loro quaderno di teoria, con questa metodologia:

- predisporre quattro colonne intitolate "concetti primitivi - assiomi - definizioni - teoremi"
- i concetti primitivi e le definizioni sono riportato solo con il loro nome
- gli assiomi possono essere riportati a gruppi con un nome collettivo quando c'è (postulati di appartenenza, di ordinamento. . .)
- i teoremi vanno riportati integralmente

Il lavoro è generalmente svolto correttamente e in modo esaustivo. Alcuni ragazzi completano il lavoro con degli accorgimenti propri che perfezionano la classificazione: riprendono i colori usati nel testo per evidenziare le differenti nozioni, completano le colonne da sinistra a destra ma marcano anche la sequenza della loro lettura passando da una riga a quella successiva.

Leggendo le dimostrazioni dei teoremi si osserva che intervengono:

- nella dimostrazione di T1: punto, retta, assioma P9
- nella dimostrazione di T2: punto, retta, assioma P1, teorema T1

quindi la classificazione eseguita, anche se non rende esplicitamente conto della dipendenza fra i vari concetti, la fa intuire grazie alla cronologia delle righe.

"Quaderni di Ricerca in Didattica", n. 17, 2007
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

3.7 Taglio del piano con n rette

Docente: Sylviane Beltrame, Classe 2^a, a.s. 2004/05,
Liceo scientifico Marinelli, Udine
Tempo: 5 ore.

Qual è il numero massimo di parti del piano che si ottengono tagliandolo con n rette?

In una classe 2^a del liceo scientifico, la risoluzione di questo problema è stata il pretesto per fare compiere agli studenti un percorso dalle varie forme del pensiero non strutturato ad una forma organizzata.

Il compito era assegnato come facoltativo e per casa: la novità del problema e i dati di partenza molto semplici, che non richiedono particolari prerequisiti, hanno facilmente conquistato la curiosità di alcuni studenti che hanno prodotto lavori personali e diversificati.

Inizialmente l'attività si è presentata come una sperimentazione dove creatività e intuizione sono state determinanti per portare alla formulazione di una congettura. Il disegno di un numero crescente di rette e il conteggio delle parti di piano create ha costituito la prima fase dell'esperienza, i dati sono stati generalmente raccolti in tabelle o con l'uso di frecce ad imitazione della rappresentazione sagittale di una relazione (vedi allegati: ricerca 1, 2, 3, 4, 5). La notazione in alcuni elaborati richiama il concetto di funzione con le coppie (x, y) oppure (n, P_n). In questo modo, l'organizzazione dei dati e la capacità di collegare le conoscenze di vari ambiti (geometria, algebra, aritmetica) sono state senz'altro di aiuto per riconoscere la ricorrenza della formula $P_{n+1} = P_n + (n + 1)$ e la successiva sistemazione in $P_n = \frac{n^2+n}{2} + 1$.

Infine, la flessibilità e la disponibilità mentale a riorganizzare in modo nuovo un esperimento (disegno diverso delle rette, con pendenza decrescente, vedi ricerca 4) ha permesso una giustificazione convincente della congettura. Questo passo finale è stato compiuto da uno solo studente; in effetti risulta difficile cambiare il tipo di disegno rispetto alla rappresentazione iniziale delle intersezioni di rette e immaginare una nuova strategia.

Successivamente, l'analisi e la correzione di cinque elaborati da parte degli studenti stessi sono state una occasione di riflessione sull'organizzazione del pensiero e la sua comunicazione per tutta la classe, che ha commentato a gruppi gli svolgimenti classificandone l'efficacia comunicativa in base ad una griglia suggerita dall'insegnante.

La ricerca è stata integrata, durante le ore di laboratorio d'informatica, da due approfondimenti relativi al problema del taglio del piano: scrivere in linguaggio Pascal un programma che dato il numero di rette, restituisse il numero di parti di piano e disegnare in Excel il grafico della funzione.

Una volta conclusa l'attività, si è sfruttato il piacere motivante con il quale gli studenti generalmente lavorano al computer, per chiedere loro di realizzare in PowerPoint una presentazione organizzata e sintetica della loro ricerca e dei successivi approfondimenti, immaginando di esporre il problema delle n rette non piú ad un eventuale lettore, ma ad un uditorio, mediante una presentazione di diapositive accompagnate da un commento orale.

Questo nuovo tipo di comunicazione ha richiesto un'organizzazione basata sulle seguenti azioni:

- Individuazione delle fasi principali della ricerca: creazione di una mappa della presentazione
- Scelta dei punti piú significativi di ogni fase e necessità di sintetizzare al massimo il contenuto di ogni diapositiva
- Organizzazione sequenziale del discorso ma con la possibilità di seguire una ramificazione particolare dell'esposizione (tramite alcuni link sulle parole chiave); individuazione delle relazioni esistenti fra i punti chiave
- Uso di tabelle e grafici per comunicare dei dati
- Creazione di animazioni per accompagnare lo spettatore nei vari passi del ragionamento e nel raggiungimento progressivo dell'obiettivo
- Uso dei colori per dare unità e per agevolare la leggibilità
- Scelta di un tema (sfondo diapositive e colori disponibili in Powerpoint) piacevole per stimolare l'attenzione

3.7.1 Protocolli

Le congetture. La consegna agli studenti era:

- Fare una ricerca (facoltativa) sul seguente problema: Qual è il numero massimo di parti del piano che si ottengono tagliandolo con n rette?
- Esplicitare la fase di esplorazione e ricerca.
- Fare una congettura sulla formula che dà il numero di parti del piano.

- Dare eventualmente una dimostrazione o comunque una giustificazione convincente della formula.
- Esporre il tutto per iscritto nel modo piú comprensibile a un ipotetico lettore.

Di seguito si riportano i protocolli originali degli studenti, compresi gli errori che poi saranno corretti in fase di discussione.

Allegato - RICERCA 1

Divisione di un piano con n rette

Taglio il piano con 0 rette → ottengo 1 piano
1 retta → ottengo 2 piani
2 rette → ottengo 4 piani
3 rette → ottengo 7 piani
4 rette → ottengo 11 piani
5 rette → ottengo 16 piani
6 rette → ottengo 22 piani

Osservo che il numero di piani ottenuto utilizzando n rette è uguale alla somma delle parti di piano ottenute per **n-1** rette più il numero **n** delle rette usate.

Esempio:

Per 1 retta = piani che ottengo con 0 rette (1) + 1 = 2

Per 2 rette = piani che ottengo con 1 retta (2) + 2 = 4

Per 3 rette = piani che ottengo con 2 rette (4) + 3 = 7

Per 4 rette = piani che ottengo con 3 rette (7) + 4 = 11

Se faccio le sostituzioni dei valori tra parentesi, come indicato precedentemente, ottengo:

11 = (7) + 4 =

(4) + 3 + 4 =

(2) + 2 + 3 + 4 =

(1) + 1 + 2 + 3 + 4 =

1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4

Qui si osserva che il risultato si ottiene facendo la somma fra il valore 1 e la somma dei valori da 0 a n. Ricordando che tale somma la si può calcolare con la formula n*(n+1)/2 (formula di Gauss), ottengo la seguente relazione

P = 1 + n*(n+1) / 2

Allegato - RICERCA 2

n. rette [x]		n. semipiani [y]	
x0	0	y0	1
x1	1	y1	2
x2	2	y2	4
x3	3	y3	7
x4	4	y4	11
x5	5	y5	16
x6	6	y6	22
x7	7	y7	29
x...	…	y...	…

Utilizziamo la lettera x per determinare il numero delle rette (es. x0 = 0 rette) e la lettera y per determinare i semipiani (es. y0 = 1 semipiano).
Dall'osservazione della tabella sopra riportata si deduce che con 0 rette ci sia 1 piano, non dimostrabile con la formula sottostante perché non è possibile avere -1 rette e 0 piani!!!
L'indice che mettiamo sotto x e y si riferisce al numero delle rette; perciò x3 significa 3 rette e y3 indica il numero dei semipiani delimitati da 3 rette.

yn = yn-1+xn

(il numero delle rette non può essere inferiore a 0)

y7 = y6+x7
y6 = y5+x6
y5 = y4+x5
y4 = y3+x4
y3 = y2+x3
y2 = y1+x2
y1 = y0+x1
y0 = 1

sostituendo:
y0 = 1
y1 = x1+1
y2 = x2+x1+1
y3 = x3+x2+x1+1
y4 = x4+x3+x2+x1+1
y5 = x5+x4+x3+x2+x1+1
y6 = x6+x5+x4+x3+x2+x1+1
y7 = x7+x6+x5+x4+x3+x2+x1+1

da ciò si capisce che:
y1 = 1+1
…
y7 = 7+6+5+4+3+2+1+1

Quindi

yn = xn+xn-1+xn-2+xn-3…xn-n +1

Ricordando la formula di Gauss per la somma di primi n naturali:

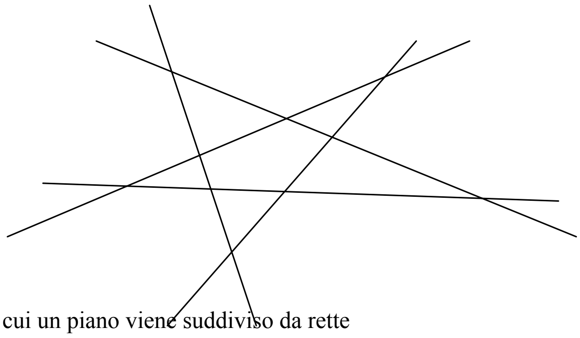
se n è pari: yn = (n/2-1)n+3/2n+1

se n è dispari: yn = [(n-1)/2]n+n+1

Allegato - RICERCA 3

1) Rappresentiamo con una tabella e un disegno la situazione.

n	**Pn**
0	1
1	2
2	4
3	7
4	11
5	16
6	22
n	**?**



Con **n** = numero delle rette
e con **Pn** = numero massimo delle parti in cui un piano viene suddiviso da rette

2) Dopo aver fatto il disegno e completato la tabella di conseguenza, riflettiamo sulla tabella e notiamo che:

P2 = (2 +1) <u>+ 1</u> = **4**
P5 = (5+4+3+2+1) <u>+1</u> = **16**
P6 = (6+5+4+3+2+1) <u>+1</u> = **22**

3) A questo punto proviamo a generalizzare con una formula che abbiamo dedotto e che ci permette di trovare la nostra incognita **Pn**:

Pn = (n+ n-1 + n-2 + . . . +1) + 1

Da questa formula possiamo capire che **Pn** è quindi uguale alla somma dei numeri da **n** compreso a 0 aumentata di **1**

4) Troviamo che in teoria la somma dei primi n numeri naturali si calcola con questa formula:
n * (n+1) /2

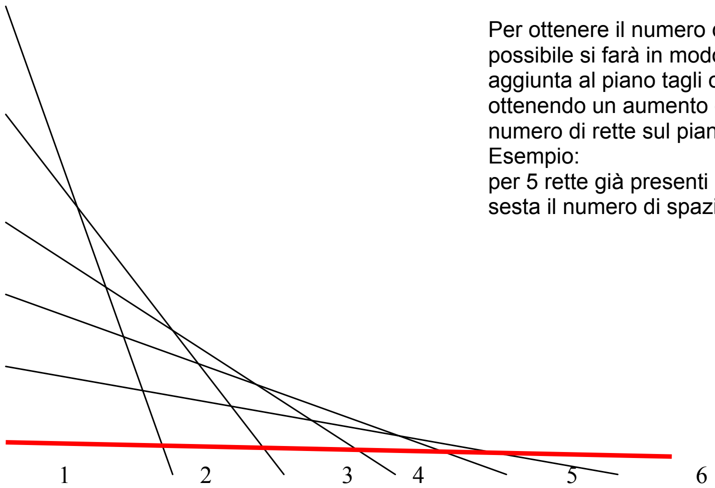
5) Facciamo alcuni esempi per capire meglio quest’ultima formula:
somma degli n naturali da 1 a 8:
1+2+3+4+5+6+7+8
notiamo che:
8+1=2+7=3+6=4+5= **9**
quindi, usando la formula:
(8+1) *8/2 =36
in conclusione 36 è la somma degli n naturali da 1 a 8 compresi

6) Quindi proviamo a sostituire quest’ultima formula al posto della somma dei numeri naturali da n a 0 (n compreso) nella formula che abbiamo dedotto in precedenza (vedi punto 3) e otteniamo:

Pn = [n* (n+1) / 2] +1

Allegato - RICERCA 4

Aumento del numero di spazi presenti su un piano all’ aumento delle rette presenti sul medesimo piano



Per ottenere il numero di rette maggiore possibile si farà in modo che ogni retta aggiunta al piano tagli ogni altra retta ottenendo un aumento delle rette pari al numero di rette sul piano
Esempio:
per 5 rette già presenti sul piano più una sesta il numero di spazi sarà 22

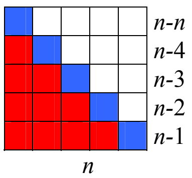
$22 = 16 + 6 \Leftrightarrow 22 = 6 + (1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5)$

Quindi, per n = numero di rette e s numero di spazi:
$s = n + (numero\_di\_spazi\_precedenti)$

Gli spazi iniziali saranno dati da:
$1 + (n-1) + (n-2) + (n-3) + ... + (n-n)$ per $n > 3$

L’1 rappresenta lo spazio iniziale mentre le restanti differenze, il numero delle rette precedenti.
Esempio per n =6:
$s = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + (n-4) + (n-5) + (n-6) + 1$
$\Leftrightarrow s = 7n - 21 + 1 \Leftrightarrow s = 7(6) - 21 + 1 \Leftrightarrow s = 22$

Quindi la formula per n >3 sarà:
$s = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + ... + (n-n) + 1$
$= (n-1) + (n-2) + (n-3) + ... + (n-n)$



$\Leftrightarrow \frac{n^2 - n}{2}$

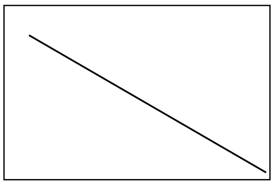
n^2 rappresenta l’ intero quadrato
n rappresenta la diagonale blu
viene diviso per due per ottenere il settore rosso

quindi i piani precedentemente presenti sui piani saranno uguali a: $\frac{n^2 - n + 2}{2}$

e la formula sarà quindi: $s = n + \frac{n^2 - n + 2}{2} \Leftrightarrow s = \frac{n^2 + n + 2}{2}$

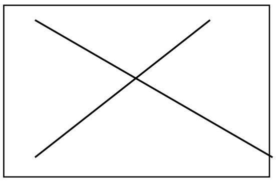
Allegato - RICERCA 5

Taglio il piano con:	**1 retta**	**ottengo**	**2 parti del piano**
	2 rette	**ottengo**	**4 parti del piano**
	3 rette	**ottengo**	**7 parti del piano**
	n rette	**ottengo**	**? parti del piano**



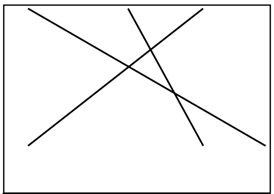
1^ retta: attraversa il piano “intero” e lo divide in 2 semipiani
→ forma 2 parti del piano

parti del piano=1 parte iniziale del piano x 2
↔ ? parti del piano = 1x2



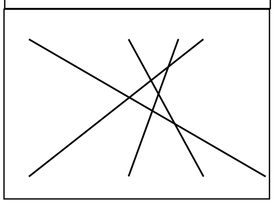
2^ retta: attraversa i 2 semipiani e divide ciascuno in 2
→ forma 4 parti del piano

parti del piano=2 parti del piano iniziali x 2
↔ ? parti del piano = 2x2



3^ retta: attraversa 3 delle 4 parti in cui è diviso il piano e le divide in 2 parti → forma 7 parti del piano

parti del piano=3 parti iniziali del piano attraversate dalla retta x 2 + 1 parte del piano non attraversata e quindi non divisa in 2
↔ ? parti del piano = 3x2 +1



4^retta: attraversa 4 delle 7 parti in cui è diviso il piano e le divide in 2 parti → forma 11 parti del piano

parti del piano=4 parti iniziali del piano attraversate dalla retta x 2 + 3 parti del piano non attraversata e quindi non divisa in 2
↔ ? parti del piano = 4x2 +3

Deduco che il numero di parti iniziali del piano che una retta attraversa è pari al numero di rette che tagliano il piano.

Quindi se con 1 retta → ? parti del piano = **1 x 2** +1 +0 ↓ ↓ 2 rette → ? parti del piano = **2 x 2 + 0** +1 +1 ↓ ↓ 3 rette → ? parti del piano = **3 x 2 + 1** +1 +2 ↓ ↓ 4 rette → ? parti del piano = **4 x 2 + 3** +1 +3 ↓ ↓ 5 rette → ? parti del piano = **5 x 2 + 6** +1 +4 ↓ ↓ allora con 6 rette→ ? parti del piano = **6 x 2 +10**	? parti del piano = n rette x 2 + [n1 + n2 + n3 + ... + (n rette – 2)] ↔ ? parti del piano = n rette x 2 + ½ (n rette – 2) [(n rette –2) +1] **↔ ? parti del piano = n rette x 2 + <u>½ (n rette – 2) (n rette –1)</u>** ↑ *(formula di Gauss)*

Analisi delle ricerche prodotte. Su dieci elaborati consegnati, l'insegnante ne ha selezionati cinque come materiale di riflessione per un lavoro di gruppo sull'organizzazione. Sono stati scelti perché sufficientemente completati e per la loro diversità di struttura e di strumenti comunicativi (vedi allegati: ricerca 1, 2, 3, 4, 5)). Gli studenti hanno lavorato a gruppi di 4, durante circa 40 minuti.

Indicazioni per il lavoro di gruppo. Osservare e analizzare 5 ricerche prodotte dai compagni di classe, dal punto di vista della organizzazione della ricerca e della sua comunicazione, classificando le osservazioni in punti forti / punti deboli.

Alcuni degli aspetti da analizzare possono essere ad esempio:

- l'efficacia nella comunicazione (si capisce subito, è difficile da seguire, è noioso. . .)
- c'è un titolo, un elenco di punti successivi? Come si capisce la progressione della ricerca?
- la comprensibilità della notazione, della formalizzazione (è troppo astratto, i nomi delle variabili sono scelti bene o male. . .)
- la presenza di disegni, grafici, tabelle (aiuta, è inutile. . .)
- la dimostrazione è convincente perché. . . . oppure non si capisce. . .

Le osservazioni del gruppo possono essere presentate in una tabella a doppia entrata, su un foglio protocollo aperto, tipo:

	Punti Forti	**Punti Deboli**
Ricerca 1		
Ricerca 2		
Ricerca 3		
Ricerca 4		
Ricerca 5		

Al termine il gruppo esprimerà una sua preferenza per l'elaborato ritenuto piú completo e comprensibile.

Risultati dei lavori di gruppo

	Punti Forti	**Punti Deboli**
Ricerca 1	Molto immediata e di facile comprensione. Titolo. Uso di spaziature e frecce. Buona impaginazione. Chiarimento dopo ogni passaggio. Osservazioni esplicite.	Mancanza di grafici e tabelle. Non vengono usate le variabili. Imprecisione nella terminologia (uso del termine piano invece di parti di piano). Manca la dimostrazione della formula.
Ricerca 2	Ragionamento facile da seguire. Progressione esposta con semplicità e logica. Buona scelta delle variabili. Uso di esempi.	Manca il titolo. Mancanza di disegni. Non c'è una suddivisione in punti. Manca la dimostrazione della formula.
Ricerca 3	Uso di tabelle, disegni e riquadrature. Lavoro diviso in punti. Uso di colori. Simbologia chiara, buona scelta delle variabili. Uso di esempi.	Manca il titolo. Manca la dimostrazione della formula.
Ricerca 4	Titolo. Ragionamento ben articolato. Disegno adeguato per fornire un'idea di dimostrazione. Dimostrazione chiara. Uso di tabelle. Linguaggio efficace. Uso di esempi.	Trattazione veloce. Manca una suddivisione in punti. Tabella poco comprensibile (Gauss).
Ricerca 5	Promemoria iniziale. Successione di disegni con spiegazione. Uso di frecce, buona schematizzazione.	Manca il titolo. Ragionamento incompleto. Linguaggio poco chiaro, non si usano le variabili.

Su 6 gruppi le scelte del miglior elaborato si sono cosí ripartite:

Ricerca 1: 0	Ricerca 2: 2	Ricerca 3: 0	Ricerca 4: 3	Ricerca 5: 1

Presentazione in PowerPoint. Dopo la fase di ricerca e la correzione dei lavori prodotti è stato chiesto agli studenti di preparare una presentazione dell'attività in PowerPoint,

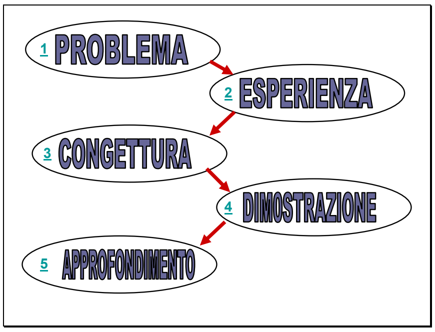
Gli studenti hanno colto un importante aspetto della comunicazione multimediale: ciò che il fruitore percepisce come facile e piacevole è in effetti il risultato di un studio articolato e complesso da parte di chi crea il prodotto.

Fra le varie presentazioni prodotte, quella che maggiormente conciliava la chiarezza dell'esposizione con la sintesi e il risultato estetico è visibile sul sito del liceo Marinelli al seguente indirizzo:

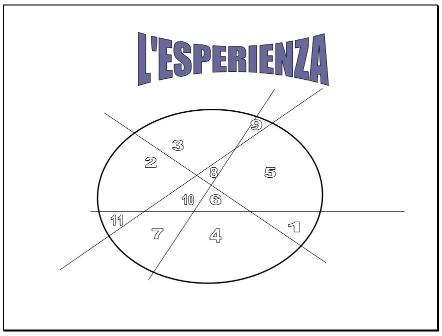
http://www.liceomarinelli.it/m-community/ipertesti/index.htm

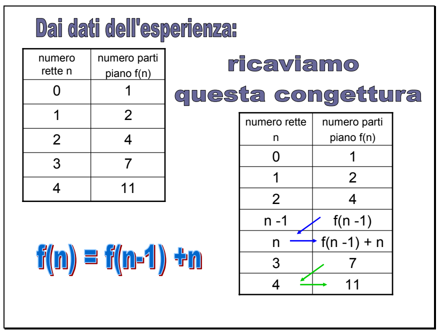
1 

2 

3 

4 

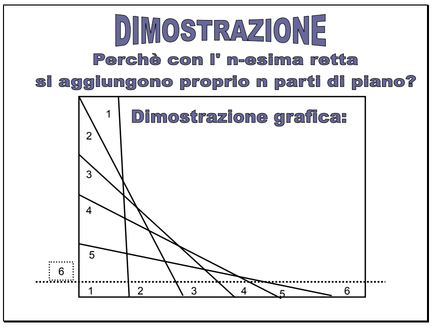
5 

6 

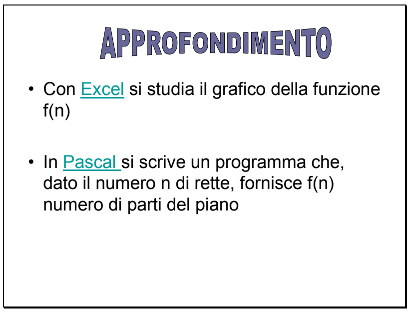
numero rette n	numero parti piano f(n)
0	1
1	2
2	4
3	7
4	11

numero rette n	numero parti piano f(n)
0	1
1	2
2	4
n -1	f(n -1)
n	f(n -1) + n
3	7
4	11

7

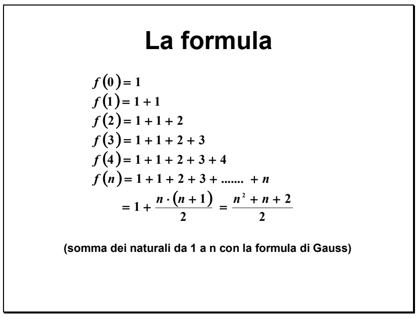


8

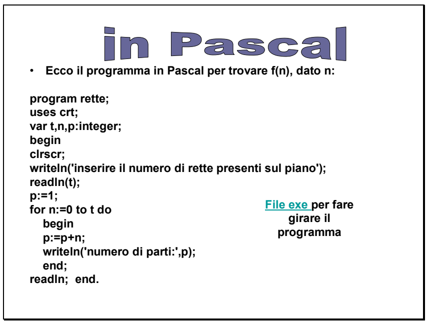


9

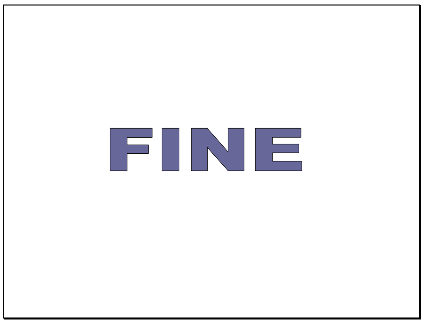
10



11



12



Gli argomenti delle dieci diapositive sono, in sequenza: 1 Titolo, 2 Autori, 3 La mappa, 4 Il problema, 5 L'esperienza, 6 Analisi dei dati, 7 Dimostrazione 8 Laboratorio di Informatica, 9 Approfondimento con Excel, 10 La formula, 11 Approfondimento con Pascal, 12 Fine

"Quaderni di Ricerca in Didattica", n. 17, 2007
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

3.8 Geometria . . . illustrata

Docente: Agostino Giovanni Margari, Classe 2^a, a.s. 2002/03,
Liceo scientifico "Magrini". Gemona del Friuli
Tempo: 10 ore.

3.8.1 Relazione

Le difficoltà incontrate da uno studente nell'intraprendere lo studio della geometria razionale dipendono da molti fattori, in primo luogo la motivazione.

Uno studente si avvia nello studio della geometria razionale dopo aver acquisito, in modo intuitivo nel precedente ciclo di studi, delle nozioni di geometria che gli hanno consentito di affrontare e risolvere problemi anche complessi, pertanto non può essere entusiasta della prospettiva di dover esaminare nuovamente un insieme di concetti che ritiene di aver già assimilato e proficuamente utilizzato.

È relativamente semplice illustrare il fatto che l'obiettivo dello studio è diverso. Questo non consiste piú nello sviluppo delle strategie che consentono la risoluzione di problemi con gli strumenti che la geometria fornisce, bensí nello studio della geometria stessa, ossia nella valutazione della validità dei suoi strumenti, limitando l'uso dell'intuizione a pochi concetti primitivi ed assiomi e applicando il metodo deduttivo per ottenere tutte le conoscenze geometriche organizzate in una solida struttura.

La consapevolezza di questa motivazione può però essere acquisita solo attraverso lo studio della geometria; in fondo l'allievo ha il primo vero contatto con il metodo deduttivo in questo contesto, pertanto è privo dell'esperienza necessaria per poter effettivamente comprendere la motivazione illustrata.

Lo studio della geometria razionale ha cosí inizio confidando nella diligenza dello studente e nell'entusiasmo che può essere generato dai primi risultati positivi nello studio. L'evoluzione che si richiede all'allievo è notevole. Il nuovo obiettivo di studio comporta non solo il cambiamento del punto di vista da cui si analizza la geometria, ma anche uno stravolgimento del metodo con cui la si studia. Nei precedenti cicli di studi l'allievo operava una sintesi delle illustrazioni dei concetti che facevano affidamento sulle sue capacità di intuizione e memorizzava le formule che gli consentivano di affrontare i problemi proposti.

Nello studio della geometria razionale l’allievo invece è invitato a non ricorrere all’intuizione, eccetto che in rare occasioni, non ha formule, ma enunciati di teoremi da memorizzare, inoltre i problemi richiedono uno sviluppo totalmente diverso da quello oramai familiare e l’unico aspetto che sembra persistere, le “giustificazioni” di quanto si deve memorizzare, non è piú sintetizzabile, qualsiasi modifica sembra compromettere il risultato.

L’allievo che, quando l’insegnante introduce la geometria razionale, è sufficientemente concentrato nello studio e diligentemente analizza i primi concetti che sono illustrati, ha buone probabilità di effettuare l’evoluzione richiesta, ma lo studente che in questa fase non è adeguatamente concentrato e trascura l’esame approfondito delle nozioni introduttive, ritenendo di esserne già in possesso, incontrerà notevoli difficoltà.

Il metodo di studio precedentemente utilizzato, infatti, gli consentirà di memorizzare le definizioni e gli enunciati dei teoremi, ma non lo aiuterà a comprendere e assimilare le dimostrazioni, compromettendo quindi anche lo sviluppo della capacità di affrontare e risolvere i problemi. Le dimostrazioni, infatti, ad un’analisi superficiale, risultano simili alle “giustificazioni” piú o meno intuitive delle regole geometriche precedentemente apprese, pertanto rischiano di essere trattate nello studio in modo analogo, ossia operando una sintesi in cui sono evidenziati gli aspetti salienti, processo, questo, molto difficile da effettuare su una catena di deduzioni, per cui nella maggior parte dei casi il risultato è privo di significato.

È necessario introdurre dei mediatori didattici per evidenziare, anche ad un’analisi superficiale, le profonde differenze fra una dimostrazione e una giustificazione intuitiva, in modo da coinvolgere tutti gli allievi.

Il modello testuale, con cui di solito sono fornite le dimostrazioni, può quindi essere affiancato da un modello grafico con cui è possibile far emergere la struttura delle dimostrazioni consentendo, in tal modo, un’analisi piú approfondita del metodo deduttivo, senza l’eccessivo appesantimento che la terminologia e gli strumenti della rigorosa logica matematica comportano.

Un aspetto paradossale è che proprio la geometria euclidea che opera un’astrazione sulla realtà al fine di analizzarne le proprietà “spaziali”, non è provvista di una rappresentazione grafica, primo modello che essa utilizza.

Le figure utilizzate in una dimostrazione, come pure le animazioni non forniscono uno schema della dimostrazione, che potrebbe essere parzialmente colto analizzando l'evoluzione cronologica delle informazioni acquisite nel suo sviluppo. Una possibile analogia potrebbe essere il tentativo di descrivere il lavoro di una troupe cinematografica mediante l'analisi del solo lungometraggio prodotto.

Un mediatore didattico da introdurre per superare i problemi evidenziati è quello delle mappe (simili a quelle concettuali) in cui alcuni nodi rappresentano le relazioni presenti nella dimostrazione ed altri le dipendenze logiche.

Affiancare un modello grafico a quello testuale sicuramente favorisce la comprensione del messaggio e facilita la sua memorizzazione, ma tale operazione, per essere proficua deve tener conto dei seguenti due aspetti:

- la compatibilità del tempo necessario per lo sviluppo delle mappe con quello, già esiguo, dedicato allo sviluppo del programma di geometria;
- l'aumento delle competenze richieste all'allievo; l'uso delle mappe, infatti, necessita dell'apprendimento dei metodi per il loro sviluppo e delle regole di lettura, tutto ciò può comportare il superamento di altre difficoltà.

L'esiguo tempo a disposizione è un ottimo deterrente relativamente all'introduzione di ulteriori mediatori didattici, in questo caso delle mappe, poiché l'introduzione di altre modalità, per comunicare le stesse informazioni, sembra avvenire solo sottraendo tempo alla trattazione degli argomenti indispensabili per la visione d'insieme della geometria razionale.

Si potrebbe rispondere che la qualità è piú importante della quantità, ma vi è un modo piú sottile per superare lo scetticismo verso l'introduzione di questa metodologia, infatti è sufficiente analizzare le informazioni presenti su una lavagna alla fine della dimostrazione di un teorema o dello sviluppo di un esercizio: oltre all'immancabile figura relativa all'oggetto in esame, vi sono l'ipotesi, la tesi, le relazioni dedotte dall'ipotesi e i riferimenti agli assiomi e ai teoremi impiegati, ossia vi sono tutti i concetti chiave a cui si è fatto riferimento. In pratica la mappa che si vuol introdurre in qualche modo è già utilizzata, anche se non esplicitamente e non osservando quelle regole che potrebbero arricchire il messaggio trasmesso. È necessario "solo" introdurre quei criteri e quelle convenzioni che consentono la deduzione dei rapporti presenti fra i concetti chiave nello sviluppo di una dimostrazione, mediante la sola analisi della loro disposizione su un piano o della disposizione di simboli che li rappresentano.

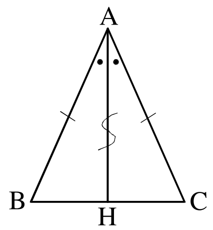
Un'introduzione graduale all'uso delle mappe, evitando la presentazione diretta di questo strumento nella sua forma ottimale e favorendone, invece, lo sviluppo in modo euristico, attraverso una serie di considerazioni, convenzioni, rielaborazioni da parte del gruppo classe può evitare l'impressione di un ulteriore sovraccarico delle competenze da far acquisire agli allievi.

In concreto, l'attività si è svolta cosí: si è preso in esame uno dei primi teoremi relativi ai triangoli isosceli. Mentre progrediva lo studio della geometria, si affinavano le proposte di rappresentazione da parte degli studenti e il teorema, scelto per la sua semplicità, fungeva da campione per provare l'efficacia della rappresentazione proposta. Quindi l'attività, che in questa relazione sembra cosí pesante e compatta, si è svolta in diversi momenti dell'anno scolastico.

È stato scelto il teorema:

In ogni triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice è la mediana della base.

Ad un allievo è stata fatta scrivere sulla lavagna la dimostrazione del teorema, facendo riferimento a quella presentata sul libro di testo. [7]



Sia ABC il triangolo isoscele di base BC: l'*ipotesi* è $AB = AC$, $\widehat{BAH} = \widehat{HAC}$; la *tesi* è $BH = HC$.

Per la *dimostrazione* si confrontino i due triangoli BHA, CHA.

Essi hanno il lato AH in comune, $AB = AC$ per ipotesi e $\widehat{BAH} = \widehat{HAC}$ pure per ipotesi: per il primo criterio di congruenza dei triangoli sono quindi congruenti. Dalla congruenza dei due triangoli, per l'assioma relativo alla congruenza dei poligoni, risulta $BH = CH$.

La dimostrazione è effettivamente facile, di conseguenza la risposta alla domanda sull'avvenuta comprensione di quanto illustrato è stata unanimemente positiva.

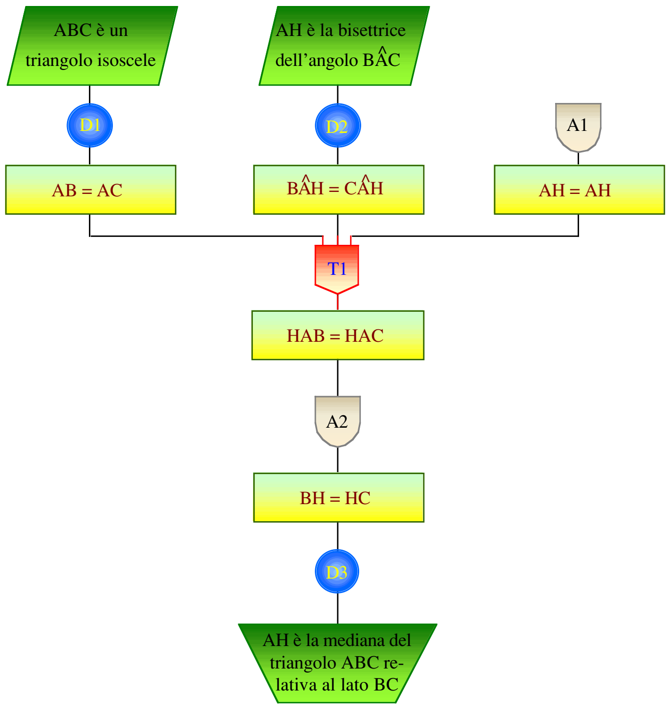
È stato fatto notare come questa dimostrazione è adatta per stabilire una metodologia in quanto, senza difficoltà cognitive, è possibile concentrare l'attenzione sul metodo di indagine; inoltre dall'analisi accurata della dimostrazione risulterà evidente che anche le illustrazioni piú semplici e ovvie a volte nascondono fra le righe importanti informazioni che rischiano di passare inosservate.

[7] W. Maraschini, M. Palma: *Il nuovo ForMat*, B2 Manuale, Paravia

La richiesta successiva è stata quella di individuare i diversi elementi presenti nell'enunciato, l'ipotesi e la tesi, e nella dimostrazione, ossia i teoremi, gli assiomi e le definizioni coinvolti e le relazioni dedotte. È seguita una discussione sulle modalità proposte dagli studenti per evidenziare i diversi elementi, elencando pregi e difetti: diversi colori, diverse sigle, tabelle contenenti enunciati con le relative sigle disposti nell'ordine suggerito dalla dimostrazione, grafo che rappresenta la dipendenza logica. Uno dei primi risultati ottenuti dal confronto delle proposte è stata la seguente tabella

Ip1	ABC è un triangolo isoscele
D1	Definizione di triangolo isoscele
R1	$AB = AC$
Ip2	AH è la bisettrice dell'angolo $\widehat{BAC}$
D2	Definizione di bisettrice
R2	$\widehat{BAH} = \widehat{HAC}$
A1	L'uguaglianza fra figure piane è una relazione di equivalenza
R3	$AH = AH$
T1	Primo criterio di congruenza dei triangoli
R4	$BHA = CHA$
A2	Assioma relativo alla congruenza dei poligoni
R5	$BH = HC$
D3	Definizione di mediana
TS1	AH è la mediana del triangolo ABC relativa al lato BC

Successivamente, per esplicitare la dipendenza logica fra gli elementi rilevati, è stato sviluppato il seguente grafico



e la relativa tabella associata

D1	Definizione di triangolo isoscele
D2	Definizione di bisettrice
D3	Definizione di mediana
A1	L’uguaglianza fra le figure del piano è una relazione di equivalenza
A2	Assioma relativo alla congruenza dei poligoni
T1	Primo criterio di congruenza dei triangoli

Per esemplificare le capacità di sintesi di uno schema è stata fatta rilevare la facilità con cui è possibile produrre mediante esso piú modelli testuali della stessa dimostrazione.

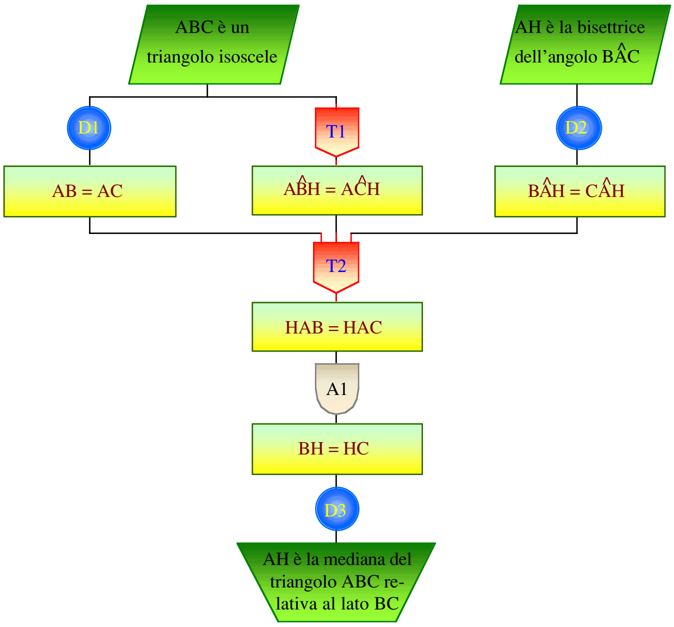
L'indipendenza dei primi tre rami dello schema consente di ricavare, procedendo con una lettura dall'alto verso il basso, sei differenti modelli testuali ed altrettanti è possibile ricavarne con una lettura che, pur lasciando inalterata la direzione, è effettuata nel verso che va dal basso verso l'alto.

Lo schema considerato è quindi la sintesi di almeno dodici modelli testuali e viceversa, da ciascuno di questi modelli si può ottenere lo stesso schema.

È stato cosí possibile sottolineare come l'illustrazione di una dimostrazione sia suscettibile di elaborazioni personali, ma queste non possono alterare i contenuti dello schema ottenuto e della relativa tabella associata, quando ciò accade, in effetti, si sta illustrando un'altra dimostrazione, che può essere alternativa a quella di partenza, ma non coincidente con essa. In questo caso, avendo due o piú dimostrazioni di uno stesso teorema, è possibile stabilire quella ottimale attraverso il confronto dei corrispondenti schemi con le relative tabelle associate in quanto in questo modo sono illustrati sia gli elementi coinvolti, sia le dipendenze logiche.

È stato inoltre evidenziato come la costruzione stessa di uno schema della dimostrazione di un teorema con la relativa tabella associata, ne consente un'analisi piú accurata, in quanto comporta un allontanamento dall'uso del linguaggio quotidiano, con il quale si è a volte sicuramente piú immediati, ma meno rigorosi.

Sono state studiate altre modalità con cui lo schema può essere utilizzato. Se ne è ricavato un metodo che aiuta nel costruire una dimostrazione ancora non nota e ha permesso di trovarne una seconda per il teorema esaminato, avente il seguente schema:



Con la relativa tabella associata

D1	Definizione di triangolo isoscele
D2	Definizione di bisettrice
D3	Definizione di mediana
A1	Assioma relativo alla congruenza dei poligoni
T1	Teorema relativo agli angoli alla base di un triangolo isoscele
T2	Secondo criterio di congruenza dei triangoli

Il teorema scelto e le rappresentazioni trovate, pur nella loro semplicità hanno permesso di discutere e chiarire concetti ed argomenti di importanza generale per il metodo deduttivo.

3.8.2 Protocolli

Si riportano ora in dettaglio le proposte e le considerazioni degli studenti.

La prima proposta fatta da un'allieva per rappresentare il teorema scelto e la dimostrazione relativa è stata quella di utilizzare un codice basato sui colori, usando penne di diverso colore nello scrivere i differenti elementi.

Il suggerimento ha avuto un discreto successo, ma sono state anche evidenziate alcune difficoltà che tale convenzione comporta, come ad esempio la perdita di informazioni nel caso in cui fosse necessario utilizzare delle fotocopie in bianco e nero, oppure la poca praticità nel gestire tale codice alla lavagna mediante gessetti colorati.

Pur non rinunciando alla proposta, è emersa in questo modo l'esigenza di affiancare a tale codice un'ulteriore convenzione consistente nell'associare, ad ogni elemento presente nella dimostrazione, un identificatore alfanumerico la cui parte letterale individui la categoria di appartenenza: "D" per le definizioni, "A" per gli assiomi, "P" per i postulati, "T" per i teoremi, "Ip" per le ipotesi, "Ts" per la tesi e "R" per le relazioni.

La seconda parte, quella numerica, è utilizzata per differenziare gli identificatori relativi agli elementi appartenenti ad una medesima categoria.

Questa seconda convenzione consente di illustrare il risultato dell'analisi della dimostrazione mediante la seguente tabella.

Ip1	$AB = AC$
Ip2	$\widehat{BAH} = \widehat{HAC}$
TS1	$BH = HC$
A1	La congruenza fra figure piane è una relazione di equivalenza
R1	$AH = AH$
T1	Primo criterio di congruenza dei triangoli
R2	$HAB = HAC$
A2	Assioma relativo alla congruenza dei poligoni

Ovviamente, si può utilizzare il codice dei colori anche nella precedente tabella.

Un allievo, particolarmente attento alla gestione del tempo nello svolgimento dei compiti, ha avanzato la proposta di far riferimento, nel caso di sviluppo di differenti dimostrazioni, agli identificatori già utilizzati, cioè di scrivere, nell’analisi degli elementi di una successiva dimostrazione l’identificatore senza esplicitare nella seconda colonna il teorema ad esso associato, quando tale associazione è già stata espressa.

Dopo aver rilevato che la proposta, in effetti, è il primo passo verso l’adozione di identificatori “generali”, che consentono di individuare un elemento in modo univoco nell’ambito dell’intera geometria razionale studiata, sono state analizzate le problematiche connesse con il loro utilizzo.

Questi consentono senz’altro una descrizione piú sintetica degli elementi presenti in una dimostrazione, infatti nella seconda colonna della tabella è necessario esplicitare le descrizioni solo in corrispondenza delle relazioni costituenti l’ipotesi, di quelle costituenti la tesi e di quelle peculiari della dimostrazione considerata, inoltre, mediante la parte numerica, è possibile indicare l’ordine con il quale gli elementi sono stati presentati e ciò consente, nel momento in cui si ricercano dimostrazioni alternative di un teorema, una valutazione rapida, anche se non esaustiva, di eventuali autoreferenzialità, per cui il ricorso a teoremi aventi un identificatore con una parte numerica maggiore di quella del teorema da dimostrare è possibile solo dopo aver constatato che quest’ultimo non è, a sua volta, utilizzato nelle loro dimostrazioni.

Il ricorso agli identificatori generali presenta anche risvolti negativi, infatti la descrizione sintetica è possibile solo se l’associazione fra elementi ed identificatori è condivisa da almeno tutto il gruppo classe, ciò comporta la memorizzazione, da parte degli allievi, di tutte le coppie identificatore - elemento presenti in una tabella generale, con un notevole dispendio di energie e con la non tanto remota possibilità di distogliere l’attenzione dall’analisi delle relazioni esistenti fra i diversi elementi della geometria, obiettivo principale dello studio.

Un compromesso fra le opposte esigenze è stato trovato contemplando la possibilità di utilizzare degli identificatori relativi, ossia validi solo per una singola dimostrazione, accanto a quelli generali, in modo da ridimensionare la necessità di dover memorizzare tutte le coppie identificatore - elemento presenti nella tabella generale.

Pertanto il risultato dell’analisi degli elementi presenti in una dimostrazione è una tabella in cui sono presenti identificatori relativi, con l’associata descrizione, e quelli generali.

L’uso contemporaneo di due tipologie di identificatori ha comportato l’adozione di regole per la loro distinzione: si è deciso di intervenire attraverso il formato della parte numerica degli identificatori generali, imponendo che questa fosse costituita da quattro cifre (è improbabile, se non impossibile, la presenza di oltre 999 elementi di uno stesso tipo in una singola dimostrazione, e quindi la possibilità di confusione fra le due tipologie di identificatori), le prime due indicanti il capitolo in cui è stato introdotto l'elemento, le altre due per il numero progressivo (in questo modo si rende possibile l'ampliamento degli elementi relativi ad un argomento limitando la nuova numerazione).

La possibilità di utilizzare le due tipologie di identificatori consente, nel caso in cui non si ricordi con sicurezza la tabella degli identificatori generali e non la si può consultare, oppure nel caso in cui non la si può condividere con gli interlocutori, come accade in questa trattazione, di poter comunque procedere, mediante gli identificatori relativi, con l'analisi degli elementi presenti nella dimostrazione.

Dopo aver stabilito le modalità di costruzione della tabella che consente di sintetizzare l'analisi degli elementi presenti in una dimostrazione, ne sono state analizzate le modalità d'uso nello studio.

Gli allievi sono stati invitati a confrontare nuovamente la tabella ottenuta con l'enunciato e la dimostrazione del teorema per trovare delle inesattezze dovute alla necessità di sintesi.

Dopo un'attenta analisi è stato rilevato il fatto che le relazioni che nella dimostrazione sono indicate come ipotesi e come tesi, in effetti, non sono presenti nell'enunciato del teorema, ma sono state da questo dedotte; inoltre è stato sottolineato come l'esigenza di esprimere nella tabella sotto forma di relazione il fatto che i due triangoli BHA e CHA hanno il lato HA in comune, abbia fatto emergere l'implicito utilizzo dell'assioma che afferma che la relazione di congruenza fra le figure del piano è una relazione di equivalenza.

Per quanto rilevato, la dimostrazione del teorema dovrebbe essere cosí sviluppata:

> Sia ABC il triangolo isoscele di base BC: l'*ipotesi* è ABC è un triangolo isoscele e AH è la bisettrice dell'angolo $\widehat{BAC}$;
> la *tesi* è: AH è la mediana del triangolo ABC relativa al lato BC.
> ABC è per ipotesi un triangolo isoscele, pertanto per definizione si ha la relazione $AB = AC$.
> Inoltre, sempre per ipotesi, AH è la bisettrice dell'angolo $\widehat{BAC}$, quindi per definizione si ha $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$.

In fine, grazie all'assioma che afferma che la relazione di congruenza fra le figure del piano è di equivalenza, si ha le ralazione $AH = AH$. Le tre relazioni ottenute, $AB = AC$, $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$ e $AH = AH$, consentono di dedurre, attraverso l'utilizzo del primo criterio di congruenza dei triangoli, che $HAB = HAC$, da cui segue, per l'assioma relativo alla congruenza dei poligoni, che $BH = CH$, ossia che, per la definizione di mediana, la bisettrice AH coincide con la mediana relativa al lato BC.

Pertanto il risultato relativo all'analisi degli elementi utilizzati nella dimostrazione del teorema considerato è dato dalla tabella già riportata:

Ip1	ABC è un triangolo isoscele
D1	Definizione di triangolo isoscele
R1	$AB = AC$
Ip2	AH è la bisettrice dell'angolo $\widehat{HAC}$
D2	Definizione di bisettrice
R2	$\widehat{BAH} = \widehat{HAC}$
A1	La congruenza fra figure piane è una relazione di equivalenza
R3	$AH = AH$
T1	Primo criterio di congruenza dei triangoli
R4	$HAB = HAC$
A2	Assioma relativo alla congruenza dei poligoni
R5	$BH = HC$
D3	Definizione di mediana
Ts1	AH è la mediana del triangolo ABC relativa al lato BC

Nello sviluppo di questa tabella degli indicatori si è avuto l'accortezza di riportare alla fine la tesi e gli elementi a lei strettamente collegati, in modo da far osservare come in questo caso possa essere utilizzata per facilitare il ricordo della dimostrazione: la seconda colonna descrive tutti i passaggi che collegano l'ipotesi alla tesi, ciò che la differenzia dalla dimostrazione è la mancanza dei connettivi che legano le proposizioni atomiche individuate.

Successivamente è stato sottolineato come la rilevazione effettuata è stata possibile in quanto nella dimostrazione considerata nessun elemento è stato utilizzato piú volte, mentre nel caso in cui ciò accade la lettura dei descrittori presenti nella seconda colonna non favorisce in modo puntuale il ricordo dell'effettivo sviluppo della dimostrazione.

Stimolati dall'idea di poter disporre di una descrizione sintetica delle dimostrazioni, dopo una breve discussione, gli allievi hanno proposto di poter affiancare alla tabella descrivente gli elementi presenti nella dimostrazione, la sequenza degli identificatori, in modo da poter illustrare tramite essa il percorso che lega l'ipotesi alla tesi anche nel caso in cui un elemento è utilizzato piú volte.

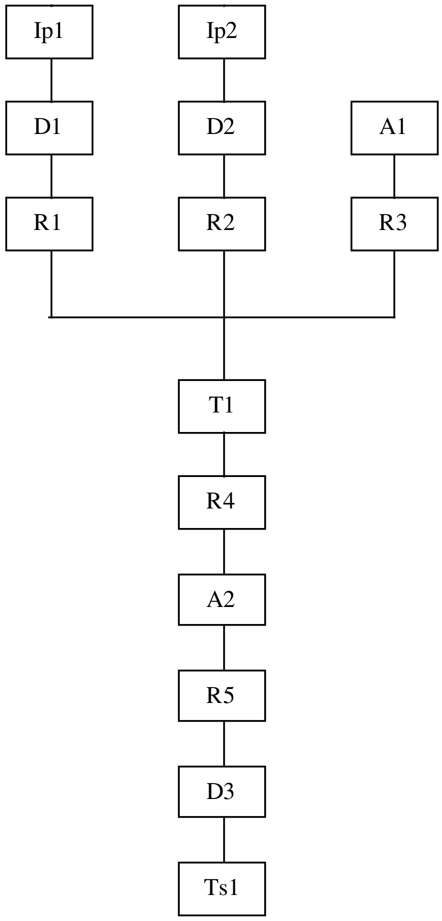
Pur apprezzando il suggerimento ho fatto notare come questa idea potesse sottintendere uno sviluppo sequenziale delle dimostrazioni e ciò è decisamente lontano dalla realtà, anche per dimostrazioni brevi come quella considerata.

La tabella sviluppata si può considerare come un aiuto mnemonico, ma non come una sintesi estrema della dimostrazione. Uno sviluppo sequenziale, infatti, presuppone che ogni affermazione è una conseguenza logica della precedente, e ciò non accade, ad esempio, nella dimostrazione considerata, dove le prime tre affermazioni sono del tutto indipendenti dalle seconde tre, pertanto la sequenza degli identificatori è solo un aiuto per ricordare i punti essenziali della dimostrazione, ma non descrive la sua struttura.

La delusione per la mancata acquisizione di uno strumento che consentisse uno sviluppo sintetico delle dimostrazioni, si è trasformata in profondo interesse nel momento in cui è stato loro proposto di collaborare al fine di realizzarlo.

Si è deciso di privilegiare la direzione dall'alto verso il basso nella lettura di un foglio.

Per non creare equivoci nell'interpretare la disposizione degli identificatori, si è deciso di racchiuderli in rettangoli e di collegarli con segmenti al fine di evidenziare le reciproche relazioni, ottenendo cosí il seguente schema:



Infine per evidenziare le differenti categorie a cui appartengono gli elementi indicati dagli identificatori si è deciso di utilizzare al posto dei rettangoli delle figure, simboli aventi la funzione di identificatori, sviluppando la seguente convenzione:

Simbolo	Categoria
Ip1	Ipotesi
Ts1	Tesi
R1	Relazione
D1	Definizione
P1	Postulato
A1	Assioma
T1	Teorema

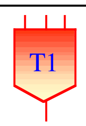


Figura 1

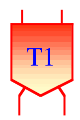
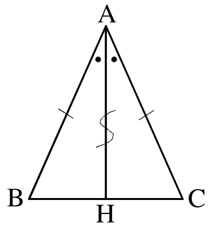
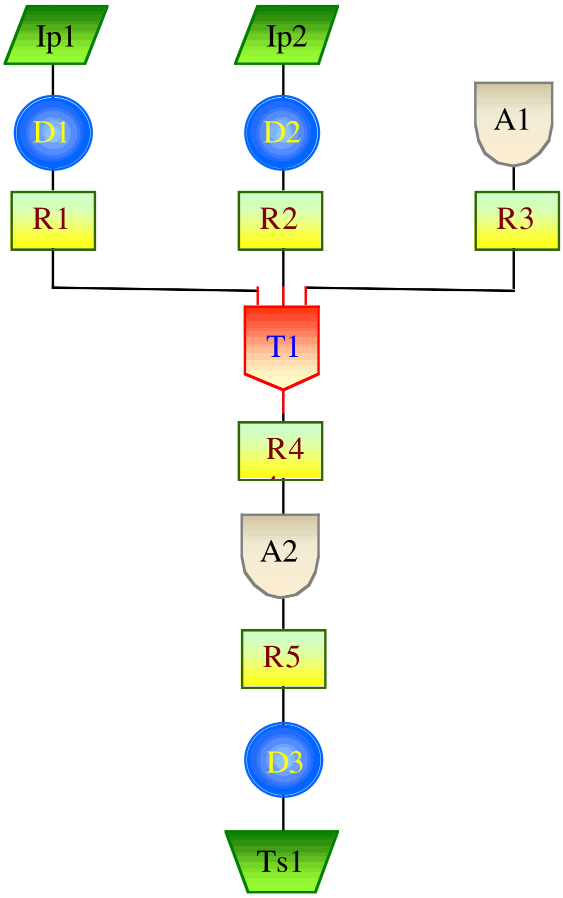


Figura 2

Particolare attenzione è stata dedicata nella scelta del simbolo per rappresentare i teoremi, decidendo di considerare parte integrante di esso i segmenti che ne consentono i collegamenti alle relazioni che rappresentano l’ipotesi e a quelle che rappresentano la tesi, in questo modo un teorema, avente un’ipotesi costituita da tre relazioni e una tesi costituita da una relazione, è rappresentato dal simbolo della figura 1, mentre un teorema, avente un’ipotesi costituita da due relazioni e una tesi costituita anch’essa da due relazioni, è rappresentato dal simbolo della figura 2.

Si è deciso di effettuare tale scelta perché talvolta, soprattutto nello sviluppo delle dimostrazioni complesse, è possibile che non sia abbastanza evidenziato il ruolo svolto da una relazione nell’ipotesi di un teorema utilizzato, ciò può accadere soprattutto quando questa è da considerare come ipotesi in piú teoremi. Dopo aver considerato tutte le convenzioni stabilite, relativamente al teorema considerato si è ottenuto:



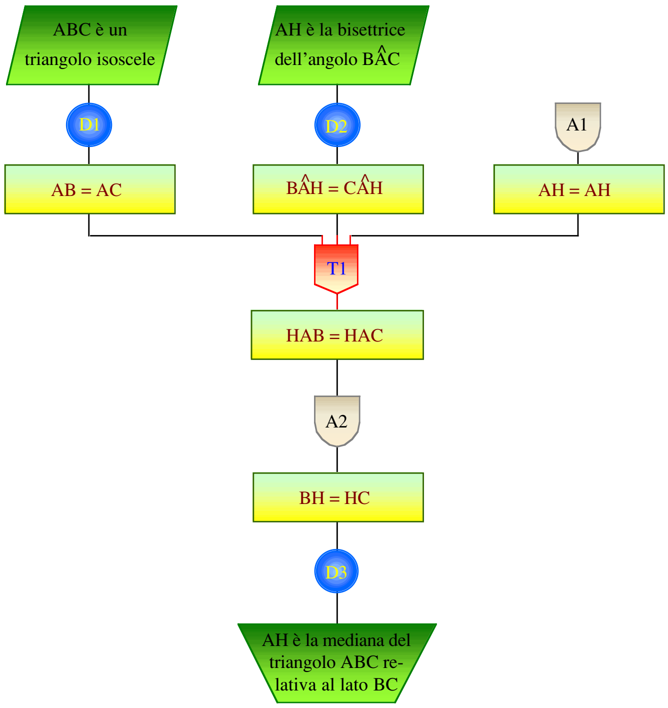


con la relativa tabella associata

Ip1	ABC è un triangolo isoscele
Ip2	AH è la bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$
Ts1	AH è la mediana del triangolo ABC relativa al lato BC
R1	AB = AC
R2	$B\hat{A}H = C\hat{A}H$
R3	AH = AH
R4	HAB = HAC
R5	BH = HC
D1	Definizione di triangolo isoscele
D2	Definizione di bisettrice
D3	Definizione di mediana
A1	L'uguaglianza fra le figure del piano è una relazione di equivalenza
A2	Assioma relativo alla congruenza dei poligoni
T1	Primo criterio di congruenza dei triangoli

In seguito, si è deciso di descrivere le relazioni peculiari del teorema direttamente nello schema stesso; di conseguenza anche la tabella risulta piú facilmente consultabile e, nel caso in cui si utilizzano i simboli generali, non piú necessaria.

Con questa ulteriore considerazione si è giunti alla illustrazione definitiva della dimostrazione del teorema considerato, come riportato nella relazione.



D1	Definizione di triangolo isoscele
D2	Definizione di bisettrice
D3	Definizione di mediana
A1	L’uguaglianza fra le figure del piano è una relazione di equivalenza
A2	Assioma relativo alla congruenza dei poligoni
T1	Primo criterio di congruenza dei triangoli

Se fosse possibile far riferimento alla tabella dei simboli generali la figura e lo schema sarebbero sufficienti ad illustrare la dimostrazione del teorema.

La classe, a questo punto, ha proposto di limitare l'illustrazione delle dimostrazioni dei teoremi al solo sviluppo dello schema, pertanto è stato necessario ribadire che questo strumento consente di comprendere meglio l'indipendenza della dimostrazione dal modello testuale, ma non può sostituire tale modello, in quanto tutte le convenzioni stabilite sono note solo al gruppo classe, di conseguenza è necessario codificarle per poter utilizzare lo schema considerato per comunicare.

Allora alcuni allievi hanno manifestato la loro delusione in quanto non ravvisavano nello schema quello strumento desiderato per consentire lo sviluppo sintetico delle dimostrazioni.

L'obiettivo che li aveva interessati sembrava loro irraggiungibile. Per esemplificare le capacità di sintesi di uno schema è stata fatta rilevare la facilità con cui è possibile produrre mediante esso piú modelli testuali della stessa dimostrazione.

Nella lettura del precedente schema, procedendo dall'alto verso il basso, non vi è un preciso ordine in cui devono essere considerati i suoi primi tre rami, essendo essi indipendenti.

Le affermazioni relative ad essi sono:

- Per ipotesi, ABC è un triangolo isoscele, pertanto per definizione si ha la relazione $AB = AC$.
- Per ipotesi, AH è la bisettrice dell'angolo $\widehat{BAC}$ e quindi, per definizione si ha la relazione $\widehat{BAH} = \widehat{HAC}$.
- Per l'assioma che afferma che la relazione di uguaglianza fra le figure del piano è una relazione di equivalenza, si ha la relazione $AH = AH$.

Essi possono essere letti in sei modi differenti e pertanto sono possibili sei modelli testuali della stessa dimostrazione.

Inoltre lo schema, pur lasciando inalterata la direzione di lettura, può essere letto nel verso che va dal basso verso l'alto, generando in tal modo il seguente modello testuale della dimostrazione:

> Sia indicato con ABC il triangolo isoscele di base BC e con AH la bisettrice del suo angolo al vertice.
>
> Ipotesi: ABC è un triangolo isoscele; AH è la bisettrice dell'angolo $\widehat{BAC}$.
>
> Tesi: AH è la mediana del triangolo ABC relativa al lato BC.

La tesi che si vuol dimostrare, per la definizione di mediana, si può esprimere con la relazione $BH = HC$.

La validità di questa relazione può essere dedotta mediante l'assioma relativo alla congruenza dei poligoni, dalla congruenza dei triangoli $HAB = HAC$ che, a sua volta, è vera grazie al primo criterio di congruenza dei triangoli, essendo verificate le tre relazioni $AB = AC$, $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$, $AH = AH$.

La prima di queste è ottenuta, mediante la definizione di triangolo isoscele, dall'ipotesi "ABC è un triangolo isoscele"; la seconda, mediante la definizione di bisettrice, dall'ipotesi "AH è la bisettrice dell'angolo $\widehat{BAC}$" e infine la terza è una conseguenza dell'assioma che afferma che la relazione di uguaglianza fra le figure del piano è una relazione di equivalenza.

Anche in questo caso, per l'indipendenza dei primi tre rami, sono possibili sei differenti versioni della lettura dello schema, pertanto, in totale da questo si possono ricavare ben dodici modelli testuali della dimostrazione e viceversa, da ciascuno di questi modelli si può ottenere lo stesso schema.

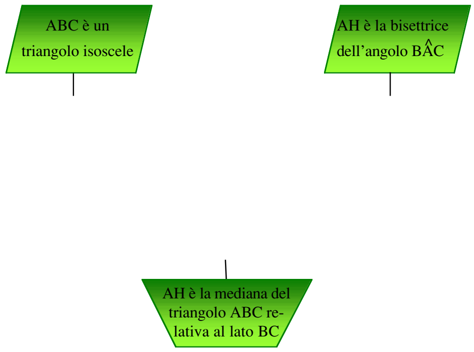
Lo schema considerato è quindi la sintesi di almeno dodici modelli testuali della stessa dimostrazione.

A questo punto è stato evidente come, nel momento in cui si deve affrontare un problema, sia preferibile sviluppare lo schema prima del modello testuale.

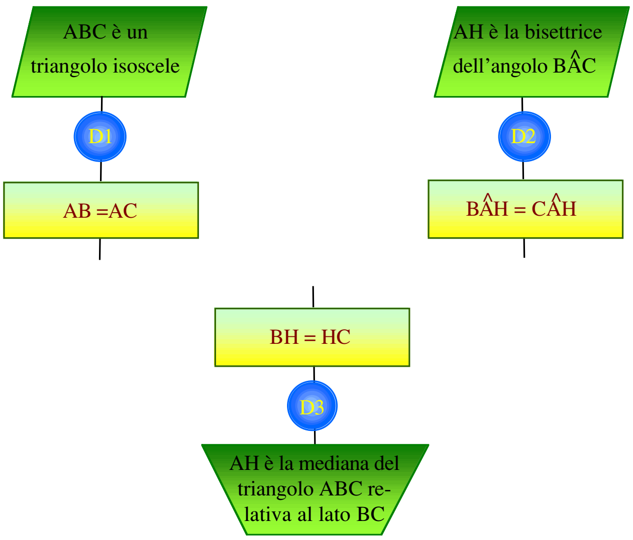
Per esemplificare la modalità con cui lo schema può essere utilizzato per costruire una dimostrazione non conosciuta, è stato proposto agli allievi di ignorare la dimostrazione del teorema considerato e di valutare la possibilità di generare il suo schema attraverso delle considerazioni sull'enunciato.

Inizialmente si è quindi esaminato attentamente il solo enunciato.

Successivamente sono state rappresentate le informazioni presenti nell'enunciato attraverso le corrispondenti parti dello schema, ottenendo:



Poi è stato fatto notare che, pur ignorando la dimostrazione, possono essere introdotti nello schema altri elementi, utilizzando le conoscenze precedenti:



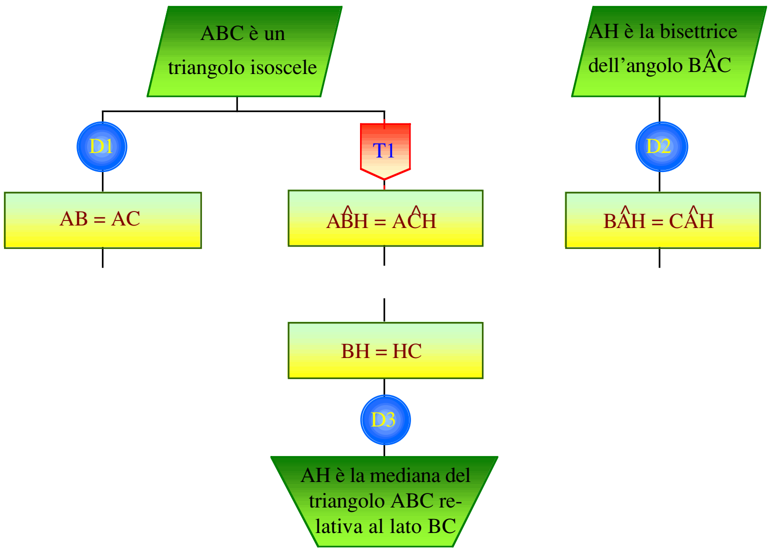
D1	Definizione di triangolo isoscele
D2	Definizione di bisettrice
D3	Definizione di mediana

I cinque elementi mancanti per la ricostruzione completa dello schema sono quelli piú difficili da scegliere, infatti l'assioma A1 e la relazione che deriva dalla sua applicazione non sono elementi deducibili dall'ipotesi, quindi risulta difficile motivare la loro presenza nello schema.

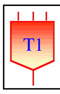
Le proposte: "Dall'analisi della figura" oppure "utilizzando l'intuizione", non sono ovviamente soddisfacenti.

La prima perché bisognerebbe specificare le modalità con cui procedere nell'indicata analisi, la seconda perché il riferimento all'intuizione rende aleatoria la possibilità di portare a termine il lavoro intrapreso e deresponsabilizza l'esecutore, che non può certo essere accusato di "mancata intuizione".

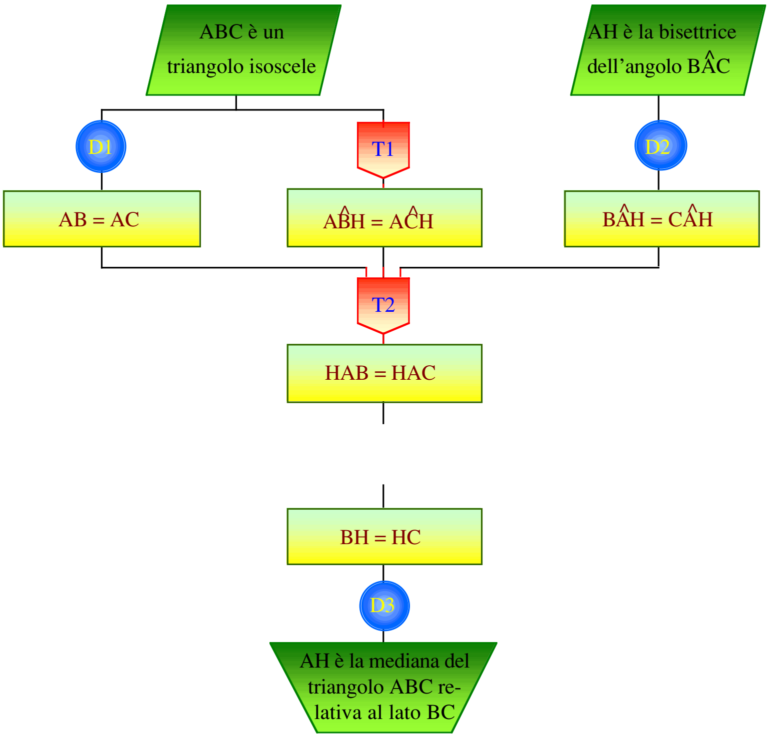
Gli allievi sono quindi stati invitati a introdurre altri elementi nello schema ignorando la dimostrazione e utilizzando le conoscenze della geometria, e in questo modo si è ottenuto:



ed è stata aggiunta nella tabella dei simboli la riga:

	Teorema relativo agli angoli alla base di un triangolo isoscele

Dall'osservazione che le relazioni $\widehat{ABH} = \widehat{ACH}$, $AB = AC$ e $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$, considerate relativamente ai triangoli ABH e ACH, costituiscono l'ipotesi del secondo criterio di congruenza dei triangoli, è stato dedotto che:



D1	Definizione di triangolo isoscele
D2	Definizione di bisettrice
D3	Definizione di mediana
T1	Teorema relativo agli angoli alla base di un triangolo isoscele
T2	Secondo criterio di congruenza dei triangoli

Analizzando lo schema precedente, è risultato evidente come l'assioma relativo alla congruenza dei poligoni consenta di concludere la dimostrazione del teorema considerato, ottenendo cosí l'illustrazione definitiva riportata nella relazione.

È stata ricavata, in questo modo, una seconda dimostrazione del teorema considerato dal cui schema, come nel caso precedente, è possibile derivare dodici modelli testuali.

L'aver trovato una dimostrazione alternativa ha fatto emergere il problema del confronto fra due dimostrazioni per stabilire quella ottimale utilizzando gli schemi.

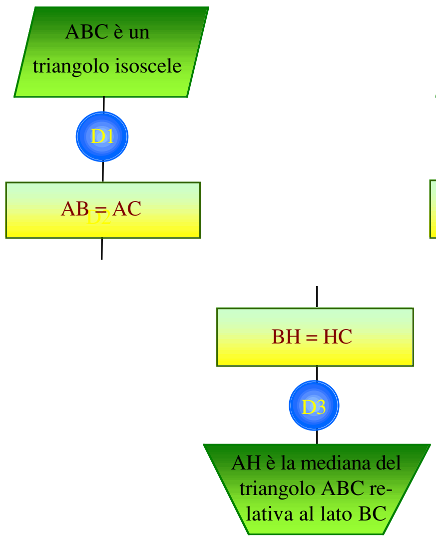
La semplicità delle due dimostrazioni ha consentito di individuare un criterio per effettuare il confronto. I due schemi hanno, infatti, lo stesso numero di elementi e una struttura analoga. Ciò che differenzia il secondo dal primo è la presenza di un teorema (quello rappresentato nel secondo schema con l'identificatore "T1") al posto di un assioma (quello rappresentato nel primo schema con l'identificatore "A1"). Il grado di complessità dei due schemi è quindi equivalente, a meno che non si voglia considerare il numero delle deduzioni necessarie per collegare l'ipotesi alla tesi, facendo riferimento direttamente ai concetti primitivi, ai postulati e agli assiomi. In questo caso è necessario sostituire nel secondo schema il simbolo del teorema avente come identificatore "T1" con lo schema che ne rappresenta la dimostrazione, operazione, questa, non necessaria nel primo schema in cui, in corrispondenza al sostituito teorema "T1" vi è un assioma al quale non è associabile nessuno schema, pertanto risulta evidente il risultato del confronto.

Una valida obiezione al modo con cui è stato generato il secondo schema, è la richiesta di stabilire un criterio con il quale selezionare le relazioni utili alla dimostrazione di un teorema, fra tutte quelle che possono essere dedotte dalla sua ipotesi attraverso le conoscenze già acquisite della geometria razionale.

Per esplicitare una possibile soluzione del problema gli allievi sono stati invitati a riflettere sull'atteggiamento adottabile da un individuo che ha intrapreso un viaggio senza conoscere esattamente il percorso che collega la partenza all'arrivo, nel momento in cui, giunto ad un incrocio, deve scegliere fra piú strade disponibili senza avere indicazioni relative alla sua meta. Dopo una breve discussione guidata è emerso che la scelta può essere non casuale solo nel caso in cui l'individuo riconosce, fra i segnali stradali, indicazioni verso obiettivi intermedi.

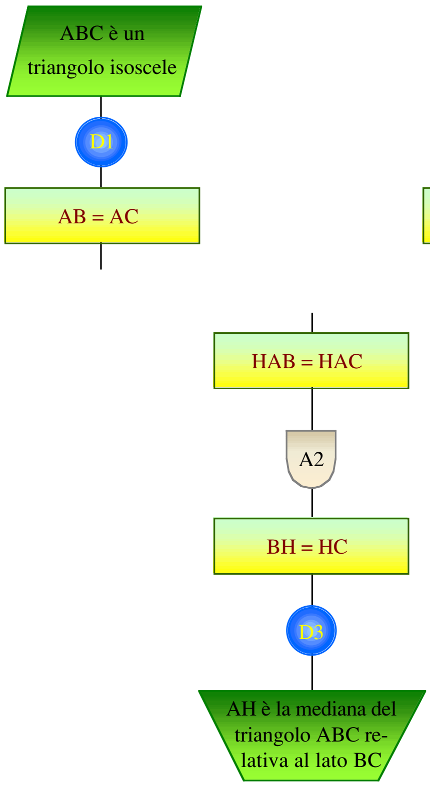
Individuata questa strategia per il viaggiatore, è stato fatto notare come essa possa essere adottata anche nello sviluppo di una dimostrazione, cercando di individuare le possibili relazioni da cui dedurre la tesi. Reiterando questa procedura è a volte possibile determinare a ritroso l'intero percorso che collega l'ipotesi alla tesi con facilità.

Nel caso in esame, dopo aver esplicitato, mediante le definizioni e facendo riferimento alla figura, l'ipotesi e la tesi, ossia dopo aver individuato i seguenti elementi dello schema:



D1	Definizione di triangolo isoscele
D2	Definizione di bisettrice
D3	Definizione di mediana

si è applicata la strategia individuata determinando l'elemento da cui poter dedurre la relazione $BH = HC$. Una congruenza fra segmenti può essere dedotta per mezzo dell'assioma relativo alla congruenza dei poligoni da quella delle figure a cui appartengono, e, in questo caso, le sole possibili sono i triangoli HAB e HAC. Ecco individuato un altro elemento appartenente allo schema che pertanto diviene:



La congruenza fra i due triangoli può essere dedotta applicando i relativi criteri, di questi il terzo non può essere preso in considerazione in quanto fra le relazioni che ne costituiscono l'ipotesi vi è quella di cui deve essere determinato il valore di verità, quindi rimangono da considerare il primo e il secondo. Nel caso in cui si esamina la possibilità di utilizzare il primo ci si rende conto che due delle relazioni richieste dall'ipotesi del criterio sono quelle dedotte dell'ipotesi del teorema considerato, mentre la terza relazione la si può dedurre mediante l'assioma che afferma che "l'uguaglianza fra le figure del piano è una relazione di equivalenza". In questo modo il primo schema del teorema considerato è ricostruito senza effettuare alcuna congettura. Nel caso in cui si esamina, invece, la possibilità di utilizzare il secondo criterio di congruenza dei triangoli ci si rende conto, in modo analogo, che due delle relazioni richieste dalla sua ipotesi sono quelle dedotte dall'ipotesi del teorema considerato, e che anche la terza relazione può essere da questa dedotta mediante l'applicazione del teorema relativo agli angoli alla base del triangolo isoscele. In questo modo anche il secondo schema del teorema considerato è ricostruito attraverso una modalità differente da quella con cui è stato generato.

Gli schemi, introdotti per aver a disposizione uno strumento per analizzare e studiare in modo approfondito le dimostrazioni dei teoremi, sono cosí diventati uno strumento per affrontare i problemi proposti.

Il percorso didattico effettuato ha consentito, inoltre, di sottolineare l'importanza dello studio e dell'attenta considerazione delle convenzioni, sia quando queste sono stabilite nell'ambito della classe, sia quando sono proposte dagli autori dei libri di testo, infatti gli allievi hanno potuto constatare attraverso l'esperienza diretta come queste sono spesso il risultato di numerose riflessioni e della mediazione fra diverse esigenze.

3.9 Gli zeri di un polinomio

Docente: Sylviane Beltrame, Classe 2^a, a.s. 2004/05,
Liceo scientifico "Marinelli". Udine
Tempo: 10 ore.

3.9.1 Relazione

"Durante quest'anno scolastico abbiamo trattato l'argomento riguardante i polinomi di grado superiore al primo. Abbiamo studiato i metodi per ricavarne gli zeri, organizzando i concetti all'interno di una mappa e approfondendo l'argomento attraverso l'uso di programmi quali Turbo Pascal, Derive, Microsoft Excel e Cabri Geometre. In queste pagine vogliamo presentare la nostra attività, completa di tutti gli aspetti che l'hanno composta e arricchita con ulteriori approfondimenti."

È con queste frasi che Michela inizia l'ipertesto che ha realizzato alla fine dell'anno scolastico sugli "Zeri di un polinomio". In seconda liceo scientifico, gli zeri di un polinomio sono un concetto chiave a partire dal quale si sviluppano i metodi di risoluzione di equazioni e disequazioni di grado maggiore o uguale al secondo. L'insegnante ha dunque focalizzato l'attenzione su questo concetto realizzando insieme alla classe una mappa concettuale allo scopo di evidenziare il ruolo degli zeri nella risoluzione sia di equazioni che di disequazioni; poi ha sollecitato gli studenti, divisi a gruppi di quattro, a produrre un ipertesto sull'argomento (dopo aver dato gli strumenti di base per realizzare un ipertesto con FrontPage).

Questa attività ha richiesto delle capacità organizzative a vari livelli: un'organizzazione dei concetti teorici (una mappa concettuale sull'argomento "zeri di un polinomio"), un'organizzazione pratica per distribuire e coordinare i lavori di gruppo, un'organizzazione delle conoscenze tramite una rete di relazioni, che è peculiarità di ogni ipertesto.

Generalmente i "bravi in matematica" hanno gestito la teoria, i "bravi in Italiano" la parte storica, gli indecisi o comunque chi preferiva non spaziare in un campo troppo vasto ma limitarsi ad attività precise hanno scelto di commentare il laboratorio di Informatica, i "già esperti" di computer hanno lavorato con FrontPage. In effetti nella classe pochissimi studenti sapevano già realizzare un ipertesto, è stata quindi un'occasione di apprendimento e di lavoro in cooperazione dato che spesso i ruoli all'interno del gruppo si sono intersecati e fusi, tutti aiutando tutti.

Prima di iniziare l'esperimento, l'insegnante aveva dichiarato che il lavoro sarebbe stato valutato e che il migliore ipertesto sarebbe stato pubblicato online sul sito del liceo. Dato che erano state coinvolte due classi seconde, l'insegnante si è ritrovato 12 ipertesti da valutare. Un voto (fino a 10/10) è stato assegnato ad ognuno dei 4 aspetti dell'ipertesto: la teoria matematica, la storia, la completezza del laboratorio di informatica, la struttura dell'ipertesto. I voti complessivi si sono distribuiti da un minimo di 23 a un massimo di 33 quarantesimi, con 5 ipertesti che hanno raggiunto il punteggio 32 o 33. Un'ulteriore valutazione è stata richiesta a tutti gli studenti che, durante un'ora di laboratorio, hanno visionato i 12 lavori e espresso le loro preferenze. Globalmente la scelta degli studenti ha coinciso con quella dell'insegnante.

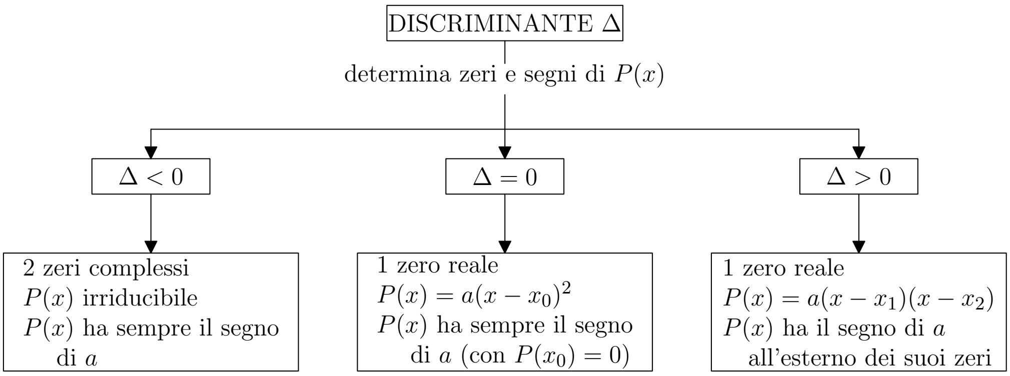
Mentre i 5 lavori selezionati sono stati inseriti nell'archivio del liceo, il miglior lavoro è visibile sul sito del Liceo Marinelli, nella sezione lavori degli studenti, al seguente indirizzo:

www.liceomarinelli.it (M-community, vita al liceo… ipertesti realizzati dagli studenti).

3.9.2 Protocolli

Alla fine delle unità didattiche equazioni / disequazioni di grado superiore al primo, gli studenti sono stati sollecitati a produrre a piccoli gruppi una mappa concettuale allo scopo di evidenziare il ruolo degli zeri nella risoluzione sia di equazioni che di disequazioni di grado superiore al primo.

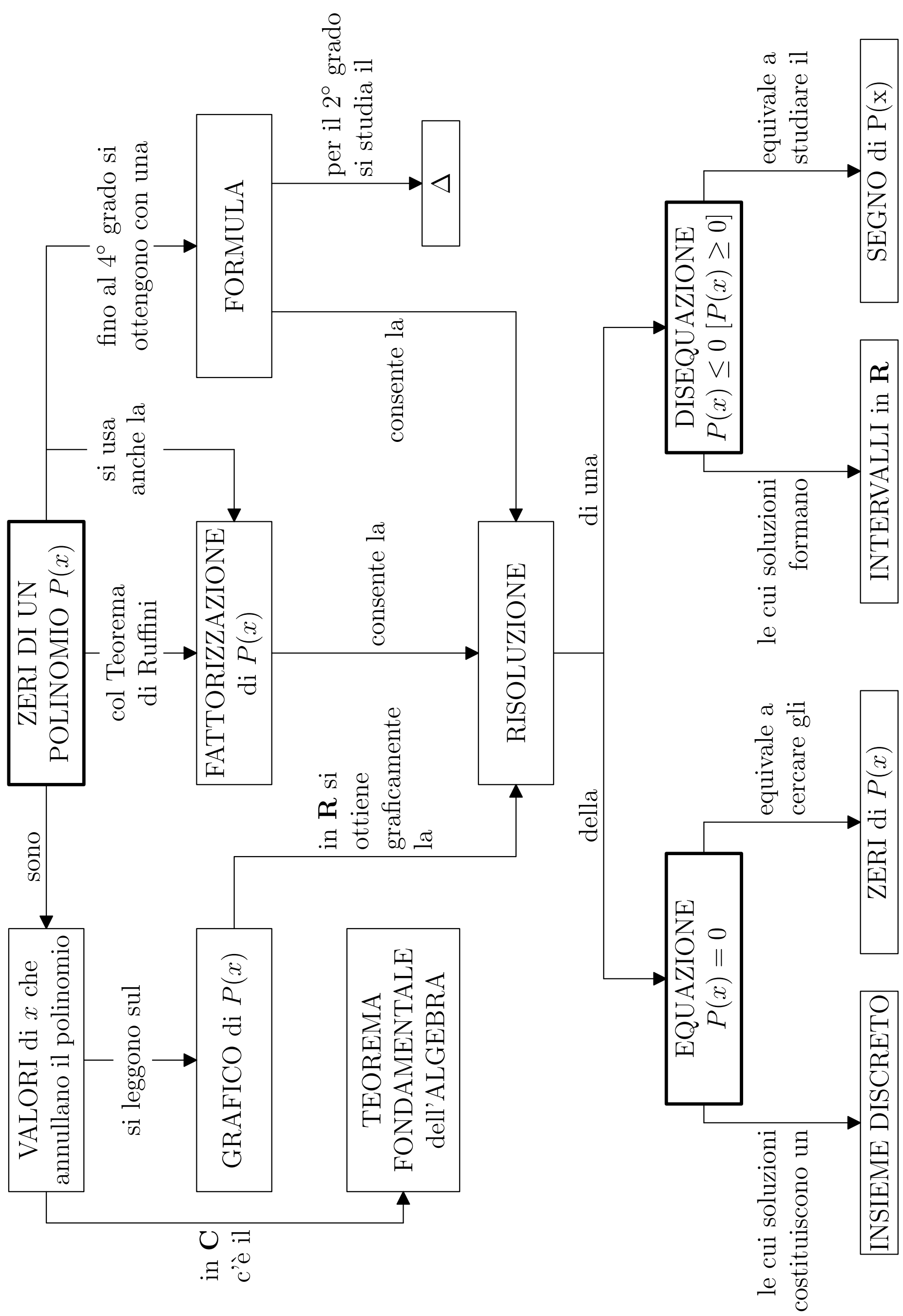
Gli studenti hanno inizialmente confuso la richiesta con un invito a disegnare uno schema operativo della ricerca degli zeri. Hanno disegnato dei diagrammi ad albero articolati attorno al segno del discriminante del polinomio di 2° grado, con i vari casi e le relative formule, riproponendo praticamente strutture già messe a disposizione dall'insegnante durante le lezioni, come il seguente schema:



Successivamente, la mappa è stata realizzata alla lavagna con suggerimenti degli studenti e guida dell'insegnante.

Nella mappa appaiono tutte le occasioni di incontro e utilizzo degli zeri durante il percorso didattico: in calcolo letterale nella fattorizzazione dei polinomi (Teorema di Ruffini), nella risoluzione di equazioni e disequazioni tramite la formula di secondo grado oppure con fattorizzazione, nelle varie attività di laboratorio informatico dove si è appreso a interpretare i grafici di funzioni polinomiali.

La mappa è stata il punto di partenza dell'ipertesto, conteneva le conoscenze essenziali da esporre, già collegate fra di loro tramite relazioni; non è stato quindi ritenuto necessario un'ulteriore presentazione dell'argomento, la mappa stessa permette la navigazione fra i concetti grazie ad alcuni link su quelli piú importanti per darne un commento.


ZERI DI UN POLINOMIO $P(x)$
sono
VALORI di x che annullano il polinomio
si leggono sul
GRAFICO di $P(x)$
in **C** c'è il
TEOREMA FONDAMENTALE dell'ALGEBRA
col Teorema di Ruffini
FATTORIZZAZIONE di $P(x)$
si usa anche la
fino al 4° grado si ottengono con una
FORMULA
per il 2° grado si studia il
Δ
consente la
consente la
in **R** si ottiene graficamente la
RISOLUZIONE
di una
della
DISEQUAZIONE $P(x) \leq 0$ $[P(x) \geq 0]$
equivale a studiare il
SEGNO di P(x)
le cui soluzioni formano
INTERVALLI in **R**
EQUAZIONE $P(x) = 0$
equivale a cercare gli
ZERI di $P(x)$
le cui soluzioni costituiscono un
INSIEME DISCRETO

Nella classe di 24 alunni, l'insegnante ha chiesto di formare 6 gruppi di 4 studenti e di distribuire il lavoro a seconda delle preferenze e delle competenze. Le consegne ad ogni componente del gruppo erano le seguenti:

a) Teoria matematica. Riscrivere la mappa già costruita in classe, dandole una forma definitiva e chiara tramite un programma di gestione del disegno; sotto il link dei concetti chiave, sintetizzare la relativa teoria matematica curando gli eventuali collegamenti fra i vari concetti.

b) Storia della matematica. Ricercare su Internet la vita dei matematici che hanno avuto un ruolo importante nella risoluzione di equazioni (Cardano, Ruffini, Gauss, Abel, Galois); fare una sintesi della vita e delle scoperte scientifiche, mettendo l'accento sulle opere riguardanti i polinomi e le equazioni; strutturare il testo, con un ritratto del matematico, in modo di rendere la lettura invitante e non troppo dettagliata.

c) Laboratorio di informatica. Ritrovare (o rifare) i file riguardanti le varie attività di laboratorio informatico effettuate durante l'anno su l'argomento Polinomi - Equazioni - Disequazioni e presentarli con una piccolo commento. Durante l'anno scolastico erano stati realizzati: un programma in Pascal per risolvere un'equazione di 2° grado, una costruzione con Excel del grafico di una parabola a coefficienti variabili, una costruzione con Cabri del grafico di un polinomio di 3° grado a coefficienti variabili, la risoluzione con Derive di equazioni di 2°, 3°, 4° e 5° grado con una interpretazione grafica delle soluzioni.

d) Realizzazione dell'ipertesto con FrontPage. Riunire tutti i lavori dei compagni di gruppo e inserirli in una struttura di ipertesto, preferibilmente con un indice sempre consultabile.

L'attività è stata svolta essenzialmente in classe, con una durata di 8 ore durante il laboratorio di Informatica (una alla settimana), e ha richiesto anche due incontri pomeridiani a casa durante i quali gli studenti si sono confrontati e hanno riunito i propri lavori.

Bibliografia

[1] ANTINUCCI F.: *La scuola si è rotta. Apprendere tra libri e computer*, Laterza (2003)

[2] AUSUBEL D.P.: *Educazione e processi cognitivi*, Angeli (1990)

[3] AZZALI E., VISINTIN I.: *La formazione dei concetti geometrici nel primo ciclo: dalle sensazioni alle immagini mentali*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 16 n. 9, 821–858 (1993).

[4] AZZALI E., VISINTIN I.: *Primi concetti di geometria nello spazio: un'esperienza nel secondo ciclo della scuola elementare*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 21A, n. 2, 111–155 (1998)

[5] AZZALI E., VISINTIN I.: *Percepisco, immagino, conosco*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 26A–B, n. 6, 739–747 (2003)

[6] COLOMBO BOZZOLO C. *Problemi di aritmetica*, Quaderno didattico n. 10, Centro Ric. Didatt, "Ugo Morin"

[7] DAMIANO E.: (a cura di) *Guida alla didattica per concetti*, Iuvenilia (1995)

[8] DEHAENE S.: *Il pallino della matematica*, Oscar Mondadori, Milano 2000

[9] DUVAL R.: *L'apprendimento in matematica richiede un funzionamento cognitivo specifico?*, La matematica e la sua didattica, n. 1, 17–42, Pitagora Editrice (1999)

[10] ECO U.: *Ecco l'angolo retto*, L'Espresso, 28/4/2005, pag 230

[11] FERRARI P.: Matematica ed educazione: il ruolo fondamentale dei linguaggi, Seminario Nazionale di Didattica della Matematica, Pisa, marzo 2003

[12] GIANGRANDI P.: (a cura di) *Numeri e Macchine*, Catalogo della Mostra, Università di Udine, MATHESIS (2000)

[13] LAKOFF G., NÚÑEZ, R.: *Where Mathematics come from? How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York (2000)

[14] LODOLI M: *La lingua rap*, in La Repubblica, del 19/04/2005, pag. 21

[15] MAGNANI L.: *Epistemic Mediators and Model-Based Discovery in Science*, in *Model-Based Reasoning Science, Technology, Values*, edited by L.Magnani and N.J. Nersessian, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York (2002), pagg. 305–329

[16] NUCLEO DI RICERCA IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA (Univ. di Udine) *Mappa concettuale e conversazione clinica: due tecniche della didattica per concetti nell'insegnamento della matematica*, Quaderni di Ricerca in Didattica del GRIM, n. 10, 1–61, Palermo, (2001)

[17] NUCLEO DI RICERCA IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA (Univ. di Udine) *Il percorso didattico secondo la didattica per concetti*, Quaderni di Ricerca in Didattica del GRIM, n. 11, 1–43, Palermo, (2002)

[18] PELLEREY M.: Introduzione a [21]

[19] PICCOLINO M.: *Lo zufolo e la cicala. Divagazioni galileiane tra la scienza e la sua storia*, Bollati Boringhieri (2005)

[20] PIERANTONI R.: *La trottola di Prometeo. Introduzione alla percezione acustica e visiva*, Laterza (1996)

[21] RESNICK L..B., FORD W.W.: *Psicologia dellla matematica e apprendimento scolastico*, SEI, Collana Scuola & Educazione (1991)

[22] SIMONE R.: *La terza fase*, Laterza, Bari (2002)

[23] TELFENER U., CASADIO L.: *Sistemica*, Bollati Boringhieri, Torino (2003)

[24] VICENTINI C., GRASSI S.: *"La misura del cerchio" di Archimede e il numero* π, Tesina SSIS, a.a. 2003-2004, Università di Udine

[25] VICENTINI C.: *Once upon a time mathematics. (part 2) in Proceedings of HPM 2004 History and Pedagogy of Mathematics Fourth Summer University, History and Epistemology of Mathematics*, Proceedings of the Uppsala ICME 10 Satellite Meeting, Uppsala (2004)

Indice