"Quaderni di Ricerca in Didattica", n13, 2003.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

L´UTILISATION DU CALCUL VECTORIEL DANS LA RÉSOLUTION DES EXERCICES DE LA PLANIMETIRE ET DE LA STEREOMETRIE DANS L´ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Mgr. Michaela REGECOVÁ [1]

Resumé

Problematika využitia analytickej metódy a vektorového riešenia geometrických úloh predstavuje v stredoškolskej geometrii hlavnú bariéru v experimentovaní žiakov s geometrickými objektmi v rovine, ci priestore. Vo vyucovaní geometrie na strednej škole je väcšia pozornost sústredená na využitie výpoctovej a konštrukcnej metódy riešenia, pricom náväznost na analytickú a vektorovú geometriu nie je zjavná. Žiakom chýbajú skúsenosti z tejto oblasti i motivácia v podobe úloh s nematematickým kontextom. V clánku sa venujem popisu možných riešení jednej geometrickej úlohy, s následným overením u troch rôznych skupín žiakov. Závery experimentu poukazujú na potrebu skvalitnenia úrovne vyucovania vektorového poctu v rámci analytickej geometrie na strednej škole a ponúkajú námety na další výskum v tejto oblasti.

Résumé

L´utilisation de la méthode analytique et du calcul vectoriel dans la résolution des exercices de la planimétire et de la stereométrie fait le problème fondamental chez des élèves des écoles sécondaires. En général, dans l´enseignement sécondaire, on utilise la méthode du calcul et de la construction. Dans cet article, je propose une analyse a priori d´un exercice géometrique et l´experimentation effectuée avec les trois groupes des élèves. Les résultats de notre expérimentation montrent la nécessite d´augmenter la qualité du niveau de l´enseignement sécondaire du calcul vectoriel dans la géométrie analytique et donnent la possibilite pour une nouvelle recherche.

Riassunto

L'utilizzazione del metodo analitico e del calcolo vettoriale nella risoluzione degli esercizi della planimetria e della stereometria è un problema fondamentale presso gli allievi delle scuole secondarie. In generale, nell'insegnamento secondario, si utilizza il metodo del calcolo e della costruzione. In questo articolo, propongo una analisi a priori di un esercizio geometrico e la sperimentazione effettuata con tre gruppi di allievi. I risultati della nostra sperimentazione mostrano la necessità di aumentare la qualità del livello dell'insegnamento secondario del calcolo vettoriale nella geometria analitica, vengono date nuove idee per nuove ricerche.

[1] Department of Mathematics Education, University "Comenius", Bratislava, Slovak.

1 INTRODUCTION

L´une des domaines apportant des difficultés dans les mathématiques scolaires est indubitablement l´enseignement de la géométrie. On se rencontre toujours avec l´incapacité des élèves d´expérimenter et d´appliquer dans la résolution des problèmes géometriques des connaissances des autres domaines de mathématiques, éventuellement des autres matières. Dans l´enseignement secondaire, les élèves préfèrent des méthodes de calcul et du système de coordonnées à la méthode de construction, de vecteur ou de la méthode analytique. De plus, ils ont une fantaisie insuffisantement développée. Cettes vérité, ainsi qu´une isolation "de temps" de l´enseignement de la géométrie analytique, du calcul vectoriel et de la géométrie de construction et du calcul, poussent mon attention à l´enseignement du calcul vectoriel dans le cadre de la géométrie analytique à l'école secondaire. Le but de notre travail est faire une vérification expérimentale des hypothèses suivantes:

H1 Les étudiants de l´école secondaire ont des difficultés de combiner et d´utiliser efficacement ses connaissances des diverses domaines mathématiques dans la résolution des problèmes géometriques concrets.

H2 Dans la pratique scolaire la habilité des élèves indépendamment résoudre des problèmes ouvertes ou devoirs de caractère "problem solving" se développe insuffisamment. En principe, les élèves font valoir dans la résolution des problèmes des méthodes et algorithmes sur-apprentissages.

H3 Dans la résolution des problèmes géometriques les élèves préfèrent la méthode de calcul et du système de coordonnées à la méthode de construction, de vecteur ou de la méthode analytique.

H4 La motivation des élèves pour utiliser ses connaissances et méthodes de la géométrie analytique et du calcul vectoriel n´est pas très satisfaisante (il manque des problèmes avec le context mathématique), ni élèves ni l´instituteurs n´ont d´expériences.

2 UN PEU DE LA THÉORIE

Notre expérimentation a été analysée dans les niveaux particuliers des situations didactiques, qui sont décrites en théorie des situations didactiques de l´école de la didactique française (Guy Brousseau, Yves Chevallard, A. Sierpinska). Je consigne un tableau d´une structuration des niveaux des situations particulières et leurs milieux respectives d'après Margolinas (1994):

S_3 - situation *noosphérienne*		P_3 - professeur *noosphérien*	M_3 - milieu *de construction*
S_2 - situation *de construction*		P_2 - professeur *constructeur*	M_2 - milieu *de projet*
S_1 - situation *de projet*	E_1 - élève *réflexif*	P_1 - professeur *projeteur*	M_1 - milieu *didactique*
S_0 - situation *didactique*	E_0 - élève	P_0 - professeur	M_0 - milieu *d´apprentissage*
S_{-1} - situation *d´apprentissage*	E_{-1} - élève *apprenant*	P_{-1} - professeur *observateur*	M_{-1} - milieu *de référence*
S_{-2} - situation *de référence*	E_{-2} - élève *agissant*		M_{-2} - milieu *objectif*
S_{-3} - situation *objective*	E_{-3} - élève *objectif*		M_{-3} - milieu *matériel*

fig.3

Méthode de calcul II

On va utiliser une propriété fondamentale d´un triangle équilatéral, c´est que $|AB|=|AC|=|BC|$, alors on sait calculer la longueur du côté *AB*: $|AB|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)^2+(2-2)^2}=4\sqrt{3}$. Comme la longueur de *AC* est égale à la longueur de *BC*, donc $\sqrt{\left(-\sqrt{3}-x\right)^2+(2-y)^2}=\sqrt{\left(3\sqrt{3}-x\right)^2+(2-y)^2}$, alors pour notre sommet $C[x,y]$ du triangle *ABC* on déduit que $x=\sqrt{3}$. Puisque $|BC|=4\sqrt{3}$ (ou $|AC|=4\sqrt{3}$), on obtient $y=-4$ (ou $y=8$). D'après *la figure 4* on déduit que le sommet *C* a pour des coordonnées $[\sqrt{3},-4]$ (ici on utilise l´orthocentre *V*).

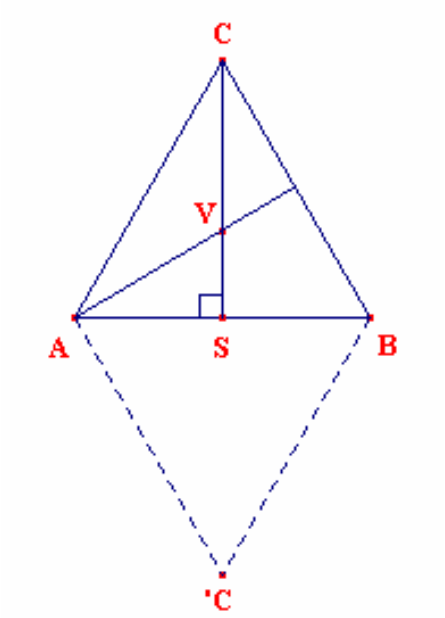

fig.4

Méthode de vecteur

Notre but est à l´aide de la translation des vecteurs choisie adéquatement, déterminer des coordonnées du point inconnu *C*. Dans *ý ABC* on choisit des vecteurs, qui sont toujours determinés par deux points donnés, par exemple d´après *la figure 5* ce sont des vecteurs $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BV}$ a $\overrightarrow{SV}$, où le point *S* est le milieu de *AB*. A l´aide des coordonnées des points donnés $A[-\sqrt{3},2], B[3\sqrt{3},2], V[\sqrt{3},0]$ et à l´aide du milieu du côté *AB* des coordonnées $S=\left[\frac{-\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{2},\frac{2+2}{2}\right]=[\sqrt{3},2]$ on trouve des coordonnées de ces vecteurs:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \left(3\sqrt{3} + \sqrt{3}, 2 - 2\right) = \left(4\sqrt{3}, 0\right)$$
$$\overrightarrow{BV} = V - B = \left(\sqrt{3} - 3\sqrt{3}, 0 - 2\right) = \left(-2\sqrt{3}, -2\right)$$
$$\overrightarrow{SV} = V - S = \left(\sqrt{3} - \sqrt{3}, 0 - 2\right) = (0, -2)$$

En utilisant ces vecteurs on peut se déplacer au point C par exemple du point A soit une fois dans le sens du vecteurs $\overrightarrow{AB}$ (translation au point B), puis dans le sens du vecteurs $\overrightarrow{BV}$ (translation du point B au point V) soit deux fois dans le sens du vecteurs $\overrightarrow{SV}$ (translation de l´orthocentre V au sommet C). De cette façon on applique une propriété du triangle équilatéral, d´après laquelle une médiane et une hauteur au côté respectif sont confondues donc le centre de gravité T et l´orthocentre V sont aussi confondus. La distance du point $T=V$ du sommet de *ý* ABC est deux fois plus grande que du côté qui est situé encontre de ce sommet. Une translation du sommet A au sommet C on peut simplement noter:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BV} + 2 \cdot \overrightarrow{SV} = \overrightarrow{AC}$$

En utilisant des coordonnées du point A, des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BV}$ a $\overrightarrow{SV}$ et des connaissances de la géometrie analytique de la somme des vecteurs (la résultat est un vecteur), on obtient des coordonnées du point inconnu $C[x,y]$:

$$\left(4\sqrt{3}, 0\right) + \left(-2\sqrt{3}, -2\right) + 2 \cdot (0, -2) =$$
$$= \left(4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2 \cdot 0, 0 - 2 - 2 \cdot 2\right) =$$
$$= \left(2\sqrt{3}, -6\right) = \overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AC} = \left(x - \left(-\sqrt{3}\right), y - 2\right)$$

d´où $x = \sqrt{3}$ a $y = -4$, donc $C\left[\sqrt{3}, -4\right]$.

Les coordonnées du sommet C on peut déterminer aussi en utilisant des autres translations, par exemple:

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 3 \cdot \overrightarrow{SV} = \overrightarrow{AC}$$

éventuellement on peut utiliser un vecteur $\overrightarrow{AV}$.

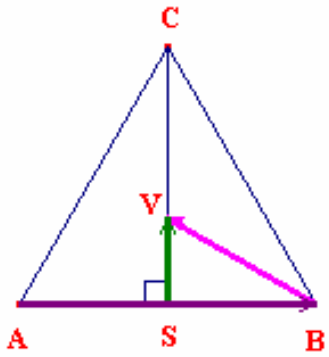

fig.5

Utilisation du barycentre

Dans un triangle équilatéral le centre de gravité T et l´orthocentre V sont confondus, donc on utilise une propriété du centre de gravité T qui devient dans *ý* ABC un barycentre (centre de gravité des points – sommets dans *ý* ABC, *fig.6*):

$$\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0} \qquad (1)$$

Prennant en compte des coordonnées des points *A, B, V=T,* qui sont données, on calcule des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{TA}$ *a* $\overrightarrow{TB}$:

$$\overrightarrow{TA} = \left(-\sqrt{3}-\sqrt{3}, 2-0\right) = \left(-2\sqrt{3}, 2\right)$$
$$\overrightarrow{TB} = \left(3\sqrt{3}-\sqrt{3}, 2-0\right) = \left(2\sqrt{3}, 2\right)$$

et des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{TC}$ dont on détermine de la façon suivante:

$$\overrightarrow{TC} = \left(x-\sqrt{3}, y-0\right) = \left(x-\sqrt{3}, y\right),$$

où $C[x,y]$ est un sommet inconnu dans *ý ABC.*

Après un remplacement des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB}$ *a* $\overrightarrow{TC}$ dans *(1)* et à l´aide des connaissances de la géometrie analytique de la somme des vecteurs (un vecteur) on obtient:

$$\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC} = \vec{0}$$
$$\left(-2\sqrt{3}, 2\right)+\left(2\sqrt{3}, 2\right)+\left(x-\sqrt{3}, y\right) = (0,0)$$
$$\left(-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+\left(x-\sqrt{3}\right), 2+2+y\right) = (0,0)$$
$$\left(-\sqrt{3}+x, 4+y\right) = (0,0)$$

Après une comparaison des coordonnées des vecteurs on a les équations suivantes:

$$-\sqrt{3}+x = 0$$
$$4+y = 0$$

Les coordonnées inconnues du point *C* sont donc $x = \sqrt{3}$ a $y = -4$.

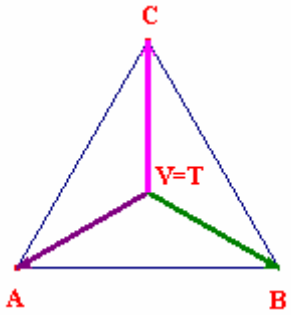

fig.6

* On peut remplacer l´égalité *(1)* par la relation suivante $\frac{A+B+C}{3} = T$ *(2)*

où *A, B, C* sont des sommets de *ý ABC* et *T* est son centre de gravité, c´est à dire un barycentre. Après un remplacement des coordonnées des points *A, B, V=T* et du point inconnu $C[x,y]$ dans *(2),* on obtient:

$$\frac{\left[-\sqrt{3}, 2\right]+\left[3\sqrt{3}, 2\right]+[x,y]}{3} = \left[\sqrt{3}, 0\right]$$

et puis $\left[-\sqrt{3}, 2\right]+\left[3\sqrt{3}, 2\right]+[x,y] = 3\left[\sqrt{3}, 0\right]$

Après l´addition des coordonnées respectives des points:

$$\left[-\sqrt{3}+3\sqrt{3}+x, 2+2+y\right] = \left[3\sqrt{3}, 3\cdot 0\right]$$
$$\left[2\sqrt{3}+x, 4+y\right] = \left[3\sqrt{3}, 0\right]$$

on a des équations suivantes:

$$2\sqrt{3}+x = 3\sqrt{3}$$
$$4+y = 0$$

où des coordonnées inconnues des points C sont $x = \sqrt{3}$ a $y = -4$.

Méthode analytique

Cette résolution détermine des coordonnées du sommet *C*, qui se trouve à l´intersection des deux droites dans *ý ABC*. On peut trouver le point *C* à l´intersection de la droite, sur laquelle se trouve le côté *AC* (ou aussi *BC*) et de la droite $\overleftrightarrow{SV}$ (*S* et le milieu de *AB*) sur laquelle se trouve le hauteur aucôté *AB* (v_{AB}) *(fig.7)*.

Prennant en compte des coordonnées de l´orthocentre $V[\sqrt{3},0]$ et du milieu *S* du côté *AB* des coordonnées $S = \left[\frac{-\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{2}, \frac{2+2}{2}\right] = [\sqrt{3}, 2]$, on détermine un vecteur directeur de la droite $\overleftrightarrow{SV}$:

$$\overrightarrow{SV} = V - S = (\sqrt{3} - \sqrt{3}, 0 - 2) = (0, -2)$$

On a une représentation paramétrique de la droite $\overleftrightarrow{SV}$ (*t Î Ñ*):

$$\overleftrightarrow{SV}: \quad x = \sqrt{3}$$
$$y = -2t$$

A l´aide du vecteur $\overrightarrow{BV}$ on détermine une équation de la droite $\overleftrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{BV} = V - B = (\sqrt{3} - 3\sqrt{3}, 0 - 2) = (-2\sqrt{3}, -2)$$

Alors, on utilise une propriété de la hauteur du côté dans un triangle (l´orthogonalité au côté respectif). Un vecteur $\overrightarrow{BV}$ est un vecteur normal à la droite $\overleftrightarrow{AC}$ donc on a une représentation générale de la droite $\overleftrightarrow{AC}$: $\overleftrightarrow{AC}: \quad \sqrt{3}x + y + 1 = 0$

Le point *C* est à l´intersection des droites $\overleftrightarrow{SV}$ et $\overleftrightarrow{AC}$, donc on obtient ses coordonnées de la résolution du système d´équations (représentations) suivantes (*t Î Ñ*):

$$\overleftrightarrow{SV}: \quad x = \sqrt{3}$$
$$y = -2t$$
$$\overleftrightarrow{AC}: \quad \sqrt{3}x + y + 1 = 0$$

où pour *t = 2* on a $x = \sqrt{3}$ a $y = -4$, donc $C[\sqrt{3}, -4]$.

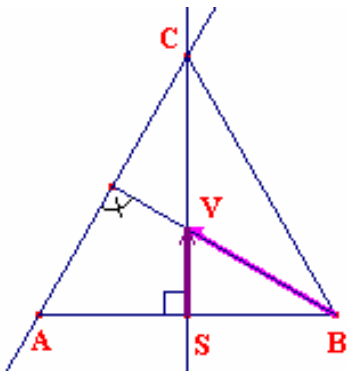

fig.7

*****Le point *C* on peut trouver aussi à l´intersection des côtés *AC* et *BC* dans *ý ABC (fig.8)*. Des représentations analytiques des droites, qui contiennent les deux côtés respectifs de *ý ABC*, on détermine à l´aide des vecteurs $\overrightarrow{BV}$ et $\overrightarrow{AV}$, qui sont des vecteurs normaux aux droites $\overleftrightarrow{AC}$ et $\overleftrightarrow{BC}$ et pour lesquels on obtient:

$$\overrightarrow{BV} = V - B = \left(\sqrt{3} - 3\sqrt{3}, 0 - 2\right) = \left(-2\sqrt{3}, -2\right)$$
$$\overrightarrow{AV} = V - A = \left(\sqrt{3} + \sqrt{3}, 0 - 2\right) = \left(2\sqrt{3}, -2\right)$$

Donc une représentation générale des droites $\overleftrightarrow{AC}$ et $\overleftrightarrow{BC}$ est:

$$\overleftrightarrow{AC}: \quad \sqrt{3}x + y + 1 = 0$$
$$\overleftrightarrow{BC}: \quad \sqrt{3}x - y - 7 = 0$$

Une solution de ce système de deux équations avec deux inconnues est $x = \sqrt{3}$ et $y = -4$ donc ce sont des coordonnées du sommet inconnu C, alors $C\left[\sqrt{3}, -4\right]$.

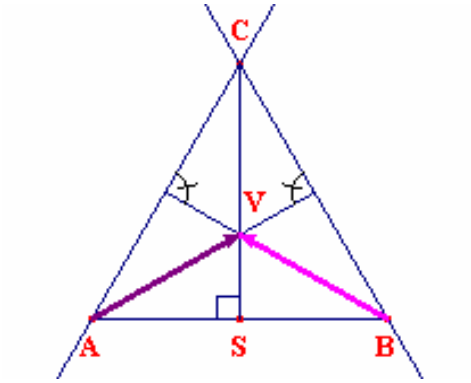

fig.8

6 ANALYSE A PRIORI

6.1 ANALYSE DESCENDANTE

S_3 **-** *<u>situation noosphérienne</u>*

Le milieu de cette situation (*milieu de construction* M_3) est constitué de tous les travaux didactiques lesquels un professeur utilise pour une analyse de l´enseignement. Ce sont avant tout des manuels et des textes d´exercices de mathématiques, des standards, des programmes et progressions de l´enseignement et des autres documents pédagogiques distincts. Dans notre cas, la situation S_3 consiste de l´analyse des différents documents concernant l´enseignement de la géometrie analytique et vectoriel et par conséquence de la formulation des hypothèses citées dans l´introduction de cet article. En vue de la prévision de la réalisation de notre expérimentation aux groupes distincts des élèves, notre préparation à l´expérimentation ne donne aucun renseignement des groupes concrets des élèves, parce que nous ne les avions pas à notre disposition.

S_2 **-** *<u>situation de construction</u>*

Les conclusions de la situation noosphérienne, c´est-à-dire les hypothèses formulées *H1 - H5*, vont servir *de milieu de projet* M_2 de la situation de construction. Un rôle du professeur P_2 est trouver des problèmes qui répondent à toutes les contraintes qu´il a définies dans la situations noosphérienne S_3 et qu´il pourra effectivement réaliser. Ce niveau convient à notre choix du problème.

S_1 **-** *<u>situation de projet</u>*

Dans la situation de projet S_1 le professeur P_1 produit le text du problème, organise les interactions que les élèves auront avec ce texte et prévoit les différentes stratégies que peuvent utiliser les élèves (chap.5). Dans ce niveau l´élève E_1 figure dans la conscience du proffeseur qui organise le travail en groupe à partir de la réalité concrète de sa classe. D´après cela on peut prévoir que les élèves de *la groupe A* appuyeront pour la résolutiom du problème une méthode de calcul et du système de coordonnées. Par contre dans les *groupes B* et *C* on peut

prévoir utilisation d´une méthode analytique et d´une méthode de vecteur. Des difficultés des élèves sont déterminées par des coordonnées irrationnelles des points donnés *A, B, V,* et aussi par l´ignorance de la notion d´orthocentre.

***S*$_0$ -** *<u>situation didactique</u>*

C´est une situation, où se rencontrent l´analyse ascendante et descendante. Le professeur P_0 dans cette situation S_0 gère et dirige l´enseignement. Il est attentif à ce qu´il a déterminé dans l´analyse a priori mais il prend en compte ce qu´auront fait les élèves dans la résolution.

***S*$_{-1}$ -** *<u>situation d´apprentissage</u>*

Dans la situation d´apprentissage, le professeur P_{-1} a un rôle d´observateur. Au niveau P_1 il a prévu certaines stratégies pour les élèves, il dispose de sa propre analyse a priori qui fait une partie *du milieu de référence* $M´´_{-1}$. L´autre milieu ($M´_{-1}$) est constitué des situations S_{-2} qu´il identifie chez les élèves. Il pourra intervenir pour modifier le milieu des élèves et donc la situation dans laquelle ils se trouvent s´il considère qu´elle ne permettra aucun des apprentissages visés. Il se réplace alors en position S_0 pour un travail de dévolution.

6.2 ANALYSE ASCENDANTE de quelques méthodes de la résolution

***S*$_{-3}$ -** *<u>situation objective</u>*

Dans cette situations, les élèves sont instruits avec notre problème donné et avec le milieu M_{-3} de la situation objective. Sa *composante matérielle* est constituée des instruments à écrire, à dessiner et aussi du cadre mathématique du triangle *ABC*, des points *A, B, V* des coordonnées données. *La composante cognitive* est constitué de savoirs, de connaissances qui sont activées au niveau distinct. Ce sont avant tout des propriétés du triangle équilatéral (longueurs des côtés et des angles, coïncidence du centre de gravité et d´orthocentre, des médianes et des hauteurs…), théorème de Pythagore, rapport de section, exercices de construction, système de coordonnées cartésiennes en axes rectangulaires, distance de deux point dans le plan, vecteur… *La composante sociale* est minimisé puisque il n´y a pas de l´intervention souhaitable d´autre acteurs pendant la résolution du problème.

Méthode du système de coordonnées

***S*$_{-3}$ -** *<u>situation objective</u>*

De la composante cognitive potentielle du milieu matériel *M-3* à ce niveau sont activés avant tout des connaissances de système de coordonnées cartésiennes en axes rectangulaires et de propriétés du triangle équilatéral ce qu´il y a l´égalité des longueurs des côtés, coïncidence du centre de gravité et d´orthocentre et rapport de section des médianes par rapport au centre de gravité, et aussi des connaissances de la géometrie de construction.

***S*$_{-2}$ -** *<u>situation de référence</u>*

Dans la situation S_{-2}, l´élève résout le problème activement dans un milieu connu M_{-3}. Il utilise seulement des rélations, schémas et méthodes qui sont pour lui connues. Ainsi il construit des images des points *A, B, V* au système de coordonnées cartésiennes en axes rectangulaires et en utilisant des connaissances de coïncidence du centre de gravité et d´orthocentre dans un triangle équilatéral *ABC* il construit la médiane au côté *AB* avec le point *C*. En utilisant des propriétés du centre de gravité qui partage des médianes par rapport *1:2*, l´élève détermine des coordonnées du point *C*. A ce niveau, l´élève a un caractère d´activité et

il ne touche pas au niveau *de la situation d´apprentissage* S_{-1}. Une intervention de professeur n´est pas nécessaire.

Méthode de calcul I

S_{-3} - situation objective

Parmi des connaissances activées de la composante cognitive du milieu M_{-3} entrent avant tout des connaissances du théorème de Pythagore. Les connaissances du système de coordonnées cartésiennes en axes rectangulaires et de la géometrie de construction sont étouffées.

S_{-2} - situation de référence

L´utilisation des connaissances de coïncidence de la médiane et de la hauteur dans un triangle équilatéral peut les aider, l´élève applique le théorème de Pythagore pour le calcul du longueur de la médiane au côté *AB.* L´élève utilise seulement des rélations connues et ses opérations mentales et cognitives ne doivent pas d´être évidentes. Il peut agir aussi sans stratégie déterminée.

S_{-1} - situation d´apprentissage

A ce niveau l´élève qui résout le problème trouve une réponse à la question suivante„Est-ce que je sais déterminer des coordonnées du points *C* si je connais des coordonnées du milieu *S* du côté *AB* et aussi la longueur de la médiane du côté *AB*?". Dans cette situation l´élève réfléchi plus et formule des réponses aux questions posées.

S_0 - situation didactique

Dans le situation didactique il est possible qu´un travail d´élève soit influencé par l´intervention du professeur. Ce dernier peut faire remarquer l´élève aux coordonnées des points *S* et *V* dans la résolution du problème.

S_1 - situation de projet

Le situation S_1 est caractéristique d´une rôle d´élève qui figure seulement dans la conscience du professeur. Celui prévoit les différentes stratégies que les élèves peuvent utiliser, les erreurs qu´ils peuvent commettre et les difficultés qu´ils peuvent rencontrer.

Méthode de vecteur

S_{-3} - situation objective

L´utilisation d´une méthode de vecteur pour la résolution du problème demande une activation des connaissances du calcul vectoriel, concretement la détermination des coordonneés d´un vecteur, addition des vecteurs, produit d´un vecteur par le réel.

S_{-2} - situation de référence

Dans ce cas une activité d´élève est orienté vers un choix des vecteurs adéquats et ses multiples. En utilisant des connaissances et schémas connues de l´addition des vecteurs, l´élève détermine des coordonnées du point inconnu *C.*

S_{-1} - situation d´apprentissage

Au niveau de situation S_{-1} l´élève réfléchi plus d´une possibilité de plusieurs manières de la résolution.

S_0 - situation didactique

Dans le situation didactique, le travail d´élève est influencé par l´intervention du professeur. Son rôle est faire une institutionnalisation des connaissances nouvelles.

S_1 - situation de projet

Le situation S_1 se caractérise d´une action de professeur qui prévoit les stratégies possibles les erreurs dans la résolution du problème donné. Ainsi il organise son intervention dans le travail des élèves.

Utilisation du barycentre

S-3 **-** *situation objective*

Cette méthode de la résolution suppose l´activation des connaissances du barycentre ainsi que des connaissances du calcul vectoriel (addition des vecteurs, produit d´un vecteur par le réel, détermination des coordonnées d´un vecteur).

S-2 **-** *situation de référence*

Après l´initiation de l´élève au milieu matériel *M-3,* l´élève utilise activement des méthodes connues. Ainsi il détermine des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB}$ *a* $\overrightarrow{TC}$ à l´aide des coordonnées des points *A, B, V=T* qui sont données.

S-1 **-** *situation d´apprentissage*

Au niveau de la situation S_{-1}, l´élève se met au rôle dans lequel il résout le problème donné. En utilisant des vecteurs $\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB}$ *a* $\overrightarrow{TC}$ et des connaissances d´addition des vecteurs, il trouve l´égalité $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\vec{0}$ ou bien $\frac{A+B+C}{3}=T$ **.** A ce niveau, l´argumentation d´élève ne doit pas être évidente et le professeur joue le rôle d´observateur.

S0 **-** *situation didactique*

Dans la situation didactique le professeur peut provoquer des élèves à une comparaison des vecteurs $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}$ *a* $\overrightarrow{TC}$. Alors l´intervention du professeur est possible.

S1 **-** *situation de projet*

Au niveau S_1 le professeur prévoit des stratégies possibles d´élèves et aussi leurs difficultés dans la résolution du problème donné. Il détermine ses interventions sur leurs travaux.

Méthode analytique

S-3 **-** *situation objective*

L´utilisation de la méthode analytique dans la résolution du problème demande une activation des connaissances de la géometrie analytique et vectorielle. Avant tout c´est la représentation paramétrique et générale de la droite dans le plan, la détermination des coordonnées du vecteur et la représentation paramétrique de l´intersection de deux droites.

S-2 **-** *situation de référence*

A ce niveau, l´élève utilise les schémas et les méthodes connues pour déterminer une représentation paramétrique et générale de la droite dans le plan par des points donnés. Dans la situation de référence, des opérations mentales d´élève ne sont pas évidentes. De même, il peut agir sans stratégie ce que se montre comme l´expression irraisonné des équations des droites plusieurs.

S-1 **-** *situation d´apprentissage*

Dans la situation *S1* l´élève se met au rôle du professeur. Il essaie de chercher des représentations favorables pour déterminer des coordonnées du point *C* dans un triangle *ABC.* Le professeur joue le rôle d´observateur et il peut intervenir dans la résolution des élèves.

S0 **-** *situation didactique*

Au niveau S_0 il est possible de supporter une intervention du professeur qui aide auxélèves. Son rôle est aussi de faire une institutionalisation des connaissances et d´analyser méthodes de la résolution les plus favorables.

S1 **-** *situation de projet*

Dans S_1 l´élève figure seulement dans la conscience du professeur qui prévoit des problèmes possibles et des erreurs dans la résolution. Ainsi il planifie son intervention dans le

travail des élèves. Dans cette méthode de la résolution l´intervention prévu du professeur est la plus expressive.

7 RÉSULTATS (analyse a posteriori)

De 43 élèves, ceux qui ont conformé à l´expérimentation, 16 élèves ont résolu notre problème en utilisant *la méthode du système de coordonnées*. Les élèves ont utilisé des coordonnées des points *A, B, V,* donnés dans l´énoncé du problème et en raison des propriétés connues du triangle équilatéral ils ont déterminé des coordonnées du sommet inconnu *C* dans *? ABC* dans le système de coordonnées cartésiennes en axes rectangulaires. La solution du problème a été pour la majorité de ces élèves évidente après la construction du dessin ou après le placement des images des points donnés dans le système de coordonnées cartésiennes en axes rectangulaires et donc ils ont résolu le problème de la façon "je regarde et je vois" (l´appréhension perceptive). Seulement 5 élèves ont explicité la solution en détails. La majorité d´élèves de l´Académie de commerce a utilisé la méthode du système de coordonnées pour la résolution de notre problème (*tab.1*).

La deuxième méthode la plus fréquente était *la méthode de calcul* (7 élèves), donc 4 élèves du lycée de 8 ans ont utilisé le théorème de Pythagore pour le calcul de l'hauteur (la médiane) du côté *AB* dans *? ABC* et deux élèves de septima et un élève de l´Académie de commerce ont profité de l´égalité des longueurs des côtés *AB, BC, AC* dont ils ont déterminé en raison des coordonnées des points donnés.

La méthode de vecteur pour la détermination des coordonnées du point inconnu *C* a été appliqué par 6 élèves (4 élèves du lycée de 4 ans, un élève de septima et un élève de l´Académie de commerce). En travaillant avec des vecteurs, les élèves ont le plus souvent exploité des coordonnées du milieu du côté *AB* qui a été déterminé soit en raison de la relation connue pour calculer des coordonnées du milieu d´un segment ou en utilisant des vecteurs ($S = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$). Puis ils ont déterminé des coordonnées du sommet *C* dans *? ABC* par le vecteur $\overrightarrow{SV}$. Une autre manière consiste la différence des vecteurs $3\overrightarrow{AV} - \overrightarrow{AB}$ donc par le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

L´utilisation du barycentre pour déterminer des coordonnées du point *C* (5 élèves de septima du lycée de 8 ans) a fait une conclusion étonnante qui résulte de notre expérimentation. Dans ce cas les élèves n´ont pas connu la notion du barycentre, pourtant ils ont utilisé des connaissances de l'addition des vecteurs $\overrightarrow{AV} + \overrightarrow{BV} + \overrightarrow{CV} = \overrightarrow{O}$ où *V* est l´orthocentre ou bien le centre de gravité dans un triangle équilatéral *? ABC*. Ainsi pour obtenir des coordonnées du sommet ils ont exploité la relation $\frac{A+B+C}{3} = T$ où *T* est le centre de gravité et *A, B, C* sont des sommets de *? ABC*.

4 élèves du lycée ont appliqu *la méthode analytique* pour la résolution du problème donné et seulement deux élèves dy lycée de 8 ans *la méthode de construction*. Pour une détermination précise d´ordonnée du point *C* ils ont utilisé le théorème de Pythagore et calculé l'hauteur du côté *AB* dans *? ABC*. Les élèves ont indiqué une seule solution correcte (dans notre cas 2 points sont à l´intersections de arcs des cercles) à l'aide des coordonnées de l´ortocentre *V*.

Deux élèves du lycée et un élève de l´Académie de commerce n´ont trouvé aucune manière de la résolution du problème. De 40 élèves qui ont résolu le problème donné par quelques méthodes prévues, 32 élèves ont trouvé la solution correcte les. Les erreurs dans une

telle solution concernaient presque toujours d´une détermination fausse de l´ordonnée du point *C* à laquelle ils ont attaché une valeur positive.

Méthode	***groupe A***	***groupe B***	***groupe C***	**Ensemble**
1. du système de coordonnées	4	-	12	**16**
2. de calcul I	-	-	4	**4**
3. de calcul II	1	-	2	**3**
4. de construction	-	-	2	**2**
5. de vecteur	1	4	1	**6**
6. du barycentre	-	-	5	**5**
7. analytique	-	3	1	**4**
sans solution	1	1	1	**3**
ensemble	**7**	**8**	**28**	**43**

Tab.1: Les nombres des élèves qui ont résolu le problème donné par des méthodes attendues
groupe A – les élèves de l´Académie de commerce
groupe B – les élèves de la classe de 3^{e} de lycée de 4 ans
groupe C – les élèves de septima (de la classe de 7^{e}) du lycée de 8 ans

8 CONCLUSION

Une première phase de la réalisation des buts de notre travail était dans l´accomplissement de l´expérimentation concernant l´utilisation du calcul vectoriel dans l´enseignement sécondaire de la géométrie analytique et consistant d´un problème de la planimetrie.

Ensemble, 43 élèves ont participé à notre expérimentation. La majorité d´eux (36 élèves) ont fréquenté des classes de mathématiques du lycée (28 élèves de septima, 8 élèves de la classe de 3^{e}) et 7 élèves étaient de l´Académie de commerce. Malgré la réalisation de notre expérimentation sur un groupe d´élèves statistiquement insuffisant, nous avons montré la vérification de nos hypothèses. Les conclusions de cette expérimentation montrent avant tout en faveur d´avancer notre hypothèse *H3* car plus que la moitié des élèves ont résolu le problème donné par la méthode du système de coordonnées ou par la méthode de calcul. A ce point, nous étions étonné par le nombre l´élèves qui ont résolu notre problème par 1a méthode de vecteur ou par l´utilisation des propriétés du barycentre. Ce nombre a été comparable avec le nombre d´élèves qui ont préféré la méthode de calcul.

Du point de vue de la capacité d´utiliser les connaissances d´autre domaines mathématiques dans la résolution des problèmes géometriques (hypothèse *H1*), les élèves de septima ont été les plus prêts à la résolution du problème donné par toutes les méthodes possibles. Mais cela on ne peut pas généraliser car les nombres d´élèves dans des groupes expérimentales distinctes ne sont pas comparables.

Ce qu´une capacité d´élèves d´expérimenter dans la résolution des problèmes géometriques ne se développe pas suffisamment à la pratique scolaire et ce que des élèves utilisent dans la résolution avant tout des méthodes et des algorithmes connues (hypothèse *H2*) est affirmé aussi par des résolution d´élèves de la classe de 3^{e} du lycée de 4 ans. Quand les élèves ont appris la géométrie analytique ils ont essentiellement préféré la résolution par la méthode analytique et par la méthode de vecteur. Pour une vérification de la capacité d´élèves d´expérimenter dans la résolution il est souhaitable de donner des problèmes pendent

une autre expérimentation aux élèves de la classe de 4e car chez eux on peut prévoir l´adoption de la majorité des connaissances de la géométrie sécondaire.

Les différences dans les résolutions des lycéens et des élèves de l´Académie de commerce indiquent le niveau et la différente quantité d´apprentissage qui est établi dans l´enseignement secondaire distinct. A ce point, il sera mieux dans la phase suivante de notre travail expérimenter avec des élèves des classes du lycée, les élèves qui ne sont pas orientés spécialement vers l´enseignement des mathématiques. Les différences dans les résolutions des élèves du lycée de 8 et 4 ans on ne peut pas généraliser car il y a moins les élèves de la de classe 3e. Mais ces élèves dans la résolution ont préféré la méthode analytique et la méthode de vecteur.

Pour la vérification de l'hypothèse *H4* ainsi que pour la vérification de la capacité des élèves d´utiliser des connaissances de la géométrie analytique et vectorielle dans la résolution des problèmes géometriques il est souhaitable de donner dans la phase suivante de notre travail expériementale des problèmes de la solution la plus favorable à la méthode analytique et vectorielle ou on utilise des propriétés du barycentre.

9 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Balacheff N. (1993): Artificial Intelligence and Real Teaching. In C. Keitel and K. Ruthven (Eds.), Learning from Computers: Mathematics Education and Technology, Springer-Verlag, Berlin

Balacheff N. (1998): Une étude des processus de preueres en mathématiques chez des éléves de college, Grenoble

Bereková H., Földesiová L., Hríbiková I., Regecová M., Trencanský I. (2001): Slovník teórie didaktických situácií, 1. cast, Zborník 4 bratislavského seminára z teórie vyucovania matematiky, UK Bratislava

Brousseau G. (1986): Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques, Recherches en Didactique des Mathématiques, La Pensée sauvage, Grenoble

Brousseau G. (1998): Théorie des situations didactiques, La Pensée sauvage édition, BP 141, Grenoble

Brousseau G. (1990): Le contrat didactique: le milieu, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 9/3 pp. 309-336, ed. La Pensée sauvage, Grenoble

Chevallard Y. (1989): Le concept de rapport au savoir, Séminaire Didatech 1988-1989, Grenoble

Chevallard Y. (1991): La transposition didactique - du savoir savant au savoir enseigné, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble

Kremžárová L. (2003): La géométrie comme outil de modélisation, http://dipmat.math.unipa.it/~grim/articles.htm

Margolinas C. (1994): Double analyse d´un épisode: cercle épistémologique et structuration du milieu, in Vingt ans de didactique des Mathématiques en France, La Pensée sauvage

Peller F. a kol. (1999): Matematika – Podklady na prijímacie testy pre uchádzacov o štúdium, Ekonóm, Bratislava

Robert A., Lattuati M., Pennincky J. (1999): L´enseignement des mathématiques au lycée, Ellipses, Paris

Sarazy B. (1995): Le contrat didactique, Revue Française de Pédagogie 112
Sierpinska A. (2001): Teória didaktických situácií, http://www-didactique.imag.fr
Spagnolo F. (1999): La recherche en didactique des mathématiques: un paradigme de référence, Zborník príspevkov na seminári z teórie vyucovania matematiky, Bratislava
Trencanský I. (2001): Možnosti teórie didaktických situácií na zefektívnenie ucenia, Zborník 4 bratislavského seminára z teórie vyucovania matematiky, UK Bratislava

Les références ne sont pas encore completisées.