Considerazioni sul ruolo dei "saperi matematici" oggi

Filippo Spagnolo[1]

1.0 Il documento sui saperi.

La discussione sui "saperi" ha avuto in Italia alcuni periodi "caldi" in corrispondenza al dibattito sulle riforme scolastiche, anche se queste non sempre sono state attuate.

Il recente dibattito sui "saperi" ha avuto ed avrà invece una risonanza particolare visto che in questo caso la riforma è già in atto e si preannuncia come epocale per tutti i cicli scolastici dalla scuola materna all'università.

Ci si riferisce al documento del 3.3.1998 sui "Contenuti esenziali per la formazione di base". Le indicazioni, riprese da parecchi commentatori[2], mettono in evidenza alcuni percorsi privilegiati e soprattutto invitano alla ricerca di "nuclei concettuali fondanti" delle discipline. In Italia questa ricerca, per quanto riguarda le matematiche, è stata ed è oggetto di continue riflessioni epistemologiche, storico-epistemologiche e didattiche da parte dei gruppi di Ricerca in Didattica delle Matematiche operanti in parecchie sedi universitarie.

La teoria dell'argomentazione, le questioni di verità e l'epistemologia in generale vengono demandate alla filosofia. Tradizionalmente erano state appannaggio della matematica che viene in qualche modo relegata alla sola attività di modellizzazione fisica e scientifica. L'attività di modellizzare è un'attività che abbraccia sia la matematica pura che la matematica applicata. Ma non è certo a questo che si riferisce il documento del '98. Si riferisce forse ad una attività concreta dell'operare dal momento che si fa riferimento all'attività dei ragazzi che "non perdano il piacere di matematizzare" da eccessi di formalismo. Questa posizione potrebbe anche essere accettata se poi in seguito non si dicesse: "privilegiando il problema del problem solving e comprendendo che la matematica nelle applicazioni è spesso quella che conduce a soluzioni approssimate, dal momento che quelle esatte sono difficili, se non impossibili da trovare in problemi complessi". Nessun esplicito riferimento alle questioni culturali delle matematiche soprattutto in relazione alla recente storia del '900. Si pensi, ad esempio, alle problematiche relative "la modellizzazione del ragionamento", al messaggio di Euclide sull'argomentare.

Il passaggio dall'ottocento al novecento è stato ed è; per la riorganizzazione dei saperi, un momento molto importante. Ed è per questo che una riflessione sul paradigma delle matematiche tra '800 e '900 si ritiene utile[3].

1.1 Il Paradigma delle Matematiche sino all''800.

Possiamo individuare due modi di vedere l'attività matematica nella cultura classica. Da una parte vi è l'attività di concettualizzazione di Platone che ha avuto un ruolo importante in quello che noi oggi chiamiamo "matematizzazione delle realtà" .

Altro discorso riguarda Aristotele che, attraverso l'organizzazione della logica bivalente, caratterizzerà il modo di argomentare nella cultura occidentale. La geometria Euclidea, primo linguaggio strutturato nella storia della matematica, rappresenta un modello della logica bivalente Aristotelica. In particolare l'argomentazione farà un passo in avanti notevole con lo strumento della "dimostrazione per assurdo".

---

[1] Componente del G.R.I.M. (Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche, Dipartimento di Matematica dell'Università, Palermo. Indirizzo INTERNET: **http://dipmat.math.unipa.it/~grim.**

[2] Uno di questi tra i più autorevoli è Lucio Russo, Segmenti ebastoncini (Dove sta andando la scuola?), Feltrinelli, 1998.

[3] Una trattazione organica di questo passaggio si trova in: F. Spagnolo, Insegnare le matematiche nelle scuole secondarie, La Nuova Italia, Firenze, 1998.

Il paradigma della matematica, in questo momento è quello relativo alla Geometria Euclidea attraverso i seguenti significati:

- La Geometria Euclidea come prima rappresentazione del mondo fisico: questo è anche il messaggio recuperato da Platone.
- La Geometria Euclidea come modello della Logica bivalente e quindi modello di riferimento dell'argomentare nella cultura occidentale: il messaggio Aristotelico.
- La Geometria come sistema ipotetico-deduttivo. Messaggio recepito a partite dalla fine dell'800. Hilbert lo riprende per rifondare la Geometria Euclidea. I Bourbakisti[4] ne hanno fatto un programma per la classificazione delle Matematiche negli anni '30. Corrisponde a quello che oggi la comunità matematica definisce come Modelli Sintattici e Modelli Semantici[5].

La Geometria come sistema ipotetico-deduttico porta ad una consapevolezza matura di questo paradigma nella comunità scientifica occidentale.

L'algebra viene acquisita nel mondo occidentale soltanto nel 1200 con Fibonacci ed avrà una maturazione di circa 600 anni prima di essere riorganizzata come linguaggio autonomo e grammaticalmente definito.

L'analisi Classica avrà forse un periodo di sistematizzazione inferiore (dal '600 alla seconda metà dell'800) ma un dibattito più accentuato per la sua riorganizzazione. Si pensi alla disputa Newton-Leibnitz, alle critiche di Berkeley[6], alla difficoltosa genesi di "funzione continua"[7] ed infine alla sistemazione dei Numeri Reali (Dedekind).[8]

Il paradigma tenderà a cambiare nel momento in cui si cercherà di cominciare a sistematizzare i linguaggi matematici a partire dagli inizi del '900. Questa attività è naturalmente compresa in misura preponderante nel lavoro del secolo precedente. Nel senso che, come abbiamo visto per l'algebra e l'analisi, la loro storia veniva da più lontano, ma l'intensa attività dell'800 su molti linguaggi matematici ha avuto il riconoscimento nel secolo successivo.

Quella che viene chiamata come "Crisi dei Fondamenti" in molti testi di Filosofia o Storia della Logica e delle Matematiche altro non è che una prima *sistematizzazione* delle **Matematiche**. La consapevolezza dei linguaggi matematici comincia a prendere corpo con questa "Crisi dei Fondamenti". In tale momento confluiscono sia la comunità dei Matematici che dei Filosofi ed una terza categoria nascente e cioè quella dei Logici. Sarà quest'ultima che tenterà di tirare le fila del problema sino ai giorni nostri.

---

[4] Sotto lo pseudonimo di "Bourbaki" si celano un gruppo di matematici francesi che negli anni 30 operano una classificazione strutturalista dei linguaggi matematici secondo le: a) strutture algebriche; b) strutture d'ordine; c) strutture topologiche. Piaget negli anni '50 tenta una corrispondenza tra questa classificazione strutturalista delle matematche e le strutture d'apprendimento: a) psicomotricità; b) lateralizzazione; c) conoscenza dello spazio (J. Piaget et alii, L'insegnamento della matematica, La Nuova Italia, Firenze, 1969). Questa corrispondenza veicolò, negli anni settanta in Italia, l'approccio strutturalista per l'insegnamento delle matematiche.

[5] M. Luisa Dalla Chiara Scabia, *Modelli sintattici e semantici delle teorie elementari*, Feltrinelli, 1968, Milano.

[6] George Berkeley (1685, 1753) arcivescovo, fu uno dei critici più severi nei confronti del calcolo infinitesimale soprattutto per quanto riguarda la sintassi del linguaggio. Le sue critiche, che avevano motivazioni teologiche, furono di grande aiuto alla comunità matematica per una migliore sistemazione del calcolo infinitesimale.

[7] Si veda a questo proposito il testo di Imre Lakatos, *Dimostrazioni e Confutazioni*, Feltrinelli, 1979, Milano.

[8]Bottazzini, *Il flauto di Hilbert (Storia della matematica moderna e contemporanea)*, Utet, 1990, Torino. M. Kline, *Storia del pensiero matematico* (2 volumi), Einaudi, 1992, Torino.

1.3 La riflessione oggi sui fondamenti: Risvolti su discipline recenti come Informatica, Cibernetica, Intelligenza Artificiale.

Lo studio sui fondamenti delle matematiche ha avuto, almeno sino agli anni trenta, come soggetti attivi i Matematici ed i Logici[9].

Oggi i Matematici pare che non si preoccupino molto dei problemi fondazionali delle matematiche, la sistemazione operata dai Bourbakisti ha in qualche modo fornito un quadro di riferimento accettato da molti nella comunità matematica.

La posizione di comodo del "Platonista nei giorni feriali e Formalista nei giorni festivi" lascia intendere che:

1- l'attività di scoprire nuovi teoremi riferentesi al mondo delle idee giustifica una attività non necessariamente inseribile nella evoluzione storica dei linguaggi matematici e nei linguaggi naturali come linguaggi di mediazione per raggiungere la formalizzazione;

2- la comunicazione al mondo esterno dei risultati richiede una dignitosa rigorizzazione. Per rigorizzazione si intende un "rigore" accettato dalla comunità dei matematici in un determinato periodo storico.

Mentre rimangono i Logici a tentare di riorganizzare l'esistente in termini epistemologicamente soddisfacenti[10].

In questi ultimi anni si sono inseriti, nei problemi riguardanti i fondamenti, gli informatici teorici e coloro che si occupano di cibernetica e/o intelligenza artificiale. Le problematiche portanti sono legate:

- alla possibile simulazione delle attività di pensiero con una macchina;
- alla identificazione dei processi mentali con processi algoritmico-meccanici.

---

[9] Uno dei movimenti neopositivisti particolarmente attivi è stato il *"circolo di Vienna"* (1929-1936) che attraverso la lettura critica del *Tractatus Logico-Philosophicus* di L. Wittgenstein (1922) dedussero l'impostazione logico-sintattica dell'analisi critica del valore conoscitivo delle scienze. Tra i più autorevoli esponenti: M. Schlick, R. Carnap, O. Neurath, F. Waismann, K. Gödel, K. Popper.

[10] In particolare K. Gödel (Brünn 1906 - Priceton 1978) rappresenta uno degli esponenti del Circolo di Vienna più significativo per quanto riguarda i risultati che hanno inciso non solamente nell'ambito dei fondamenti delle matematiche e della logia ma anche nell'informatica teorica e nell'intelligenza artificiale. Analizziamo brevemente le questioni proposte da Gödel:

· Problema sintattico: Sino a che punto possiamo essere certi delle nostre deduzioni in un sistema formale ben definito?
· Problema semantico: Quale è il significato di "vero" in un sistema formale?

I passi del ragionamento di Gödel sono i seguenti:

· Si costruisce una formula aritmetica G che rappresenta la proposizione metamatematica: "la formula G non é dimostrabile". Le espressioni di una teoria formalizzata sono trasformate attraverso sequenze di prodotti di numeri primi, per cui ad ogni espressione corrisponde un numero di Gödel. Quindi le espressioni metamatematiche diventano proposizioni aritmetiche e quindi formalizzabili.

2° Si dimostra che G è dimostrabile se e solo se "non G" è dimostrabile.

3° Si dimostra che G è una formula aritmeticamente vera (nel senso che afferma che ogni intero possiede una certa proprietà aritmetica, che può essere esattamente definita ed è posseduta da qualsiasi intero assegnato.

1° Teorema di Gödel:

· Dato che G è vera e nello stesso tempo indecidibile possiamo concludere che l'Aritmetica non è completa. (anche se si potessero aggiungere altri assiomi, si può sempre costruire un'altra formula vera ma indecidibile).

2° Teorema di Gödel:

· Non è possibile dimostrare l'autocompatibilità dell'aritmetica con gli strumenti dell'aritmetica stessa. (Ogni sistema sufficientemente potente, assiomatizzabile è incapace di dimostrare una proposizione la quale esprima, in modo canonico, la coerenza del sistema)

Conseguenze dei teoremi di Gödel:

· Possiamo capire la nostra mente o il nostro cervello?
· Possiamo simulare con un computer la nostra mente o il nostro cervello?
· Che relazione esiste tra verità e computabilità?
· Vi sono interpretazioni del teorema di Gödel in altre discipline?

Queste due problematiche rimettono continuamente in discussione i modelli teorici interpretativi e nello stesso tempo le questioni fondazionali ad essi relative.

La situazione dinamica in cui si trova la comunità scientifica della Cibernetica e dell'Intelligenza artificiale è ben messa in evidenza dalla seguente frase di Penrose[11]: "Il cervello non somiglia a un computer ma piuttosto a un computer che cambia continuamente."

I logici dal canto loro si sono ben inseriti nel dibattito anche se, al loro interno, si pongono problemi riguardo al ruolo della logica. Se cioè la logica sia solo uno strumento utilizzato dall'informatica o se vi può essere un'interazione dialettica.

L'Informatica teorica si occupa prevalentemente di teoria dei linguaggi, calcolabilità, connessionismo (reti neuronali), teorie della complessità.

La Cibernetica oggi analizza prevalentemente gli stessi argomenti mettendo l'accento sugli aspetti fondazionali dell'intelligenza artificiale.

"È accettato da una parte rilevante della comunità scientifica dell'Intelligenza Artificiale, ma non da tutta, che un utile punto di partenza è l'assunzione dell'algoritmicità dei processi mentali o, detto in altro modo, l'ipotesi computazionale della mente."[12]

Mentre l'Informatica teorica si muove su ambienti di lavoro abbastanza inseribili nella classificazione Bourbakista, la Cibernetica aggiunge il problema della complessità come problema aperto nell'ambito della teoria del significato.

1.4 Quale è oggi la posizione ?

Se oggi si facesse la stessa operazione che Hilbert fece con i "problemi aperti" della matematica agli inizi del secolo, come afferma H. Wang [op. cit.][p. 260] potremmo indirizzarci verso:

- Certezza e necessità (sintetico a priori o no);
- esistenza matematica (e metodi di costruzione);
- forza trainante della matematica (utilità, attrattiva estetica e "arte per l'arte", mode e loro cause, curiosità);
- attività matematica (notazione e abbreviazione, euristica, il fenomeno dei matematici non vedenti);
- natura delle dimostrazioni matematiche (formalizzazione ed evidenza intuitiva);
- esposizione, insegnamento e meccanizzazione della matematica (problemi di comunicazione piuttosto che di ottenimento di nuovi frammenti di matematica, possibilità di una critica matematica come analogo della critica letteraria);
- matematica pura in contrapposizione a matematica applicata (criterio per giudicare il valore dei modelli matematici di situazioni empiriche, distanza dalle applicazioni);
- matematica come "linguaggio".

Le Matematiche come linguaggi in una prospettiva Metalogica possono darci la possibilità di poter riflettere su due dei punti segnalati da Wang e cioè quelli riguardanti l'insegnamento e la Matematica come "linguaggio".

In questa prospettiva evidentemente la *Pragmatica* ha un ruolo rilevante e la possibilità di poter *modellizzare le "Situazioni di Insegnamento"* rappresenta una sfida interessante. Viene anche presa in considerazione la ricerca nel settore dell'intelligenza artificiale che consentirebbe di acquisire dei dati riguardanti lo studio del "contesto" attraverso tutti gli strumenti che si ritengono indispensabili: logiche modali, intenzionali, ecc.

---

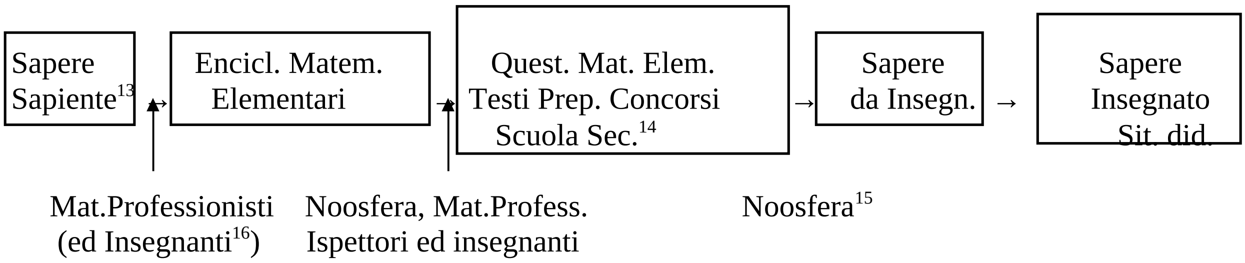
[11] R. Penrose, *La mente nuova dell'imperatore (La mente, i computer, le leggi della fisica),* Rizzoli, 1992, Milano.

[12] S. Termini, *Alcune osservazioni sui fondamenti dell'intelligenza artificiale*, Agora, n.9, 1990, Universitade de Santiago de Compostela. (p. 52)

2.0 Quali saperi e perché bisogna trasmettere?

Le considerazioni del paragrafo precedente mettono in evidenza il ruolo delle riflessioni epistemologiche del '900 come momento unificante nella riflessione epistemologica delle discipline di "saperi" che hanno delle relazioni significative tra Matematiche, Informatica, Logica, Filosofia, Neuroscienze, Intelligenza Artificiale, ecc..

Il ripensamento sui "Saperi" essenziali deve poter partire dalle seguenti considerazioni riguardanti i passaggi della "trasposizione didattica":



Le Matematiche Elementari, frutto di elaborazione da parte di associazioni culturali (Mathesis), Istituzioni ufficiali, riviste specializzate e divulgative, rappresentano le mediazioni tra il Sapere Sapiente della ricerca ed il Sapere da Insegnare[17].

Questa mediazione ha avuto nella tradizione Italiana due momenti particolari. Il primo riguarda il passaggio tra il Sapere Sapiente e l'Enciclopedia delle Matematiche Elementari visto come nuovo momento del Sapere Sapiente da riorganizzare nuovamente nei testi di preparazione ai concorsi delle scuole secondarie superiori e finalmente disponibile a poterlo riorganizzare come Sapere da insegnare da parte delle istituzioni scolastiche.

---

[13] Il "sapere" è il prodotto culturale di una istituzione che ha per obiettivo di individuare, di analizzare e di organizzare le conoscenze al fine di facilitarne la comunicazione, il loro uso sotto forma di conoscenza o di saperi e la produzione di altri saperi. Le "conoscenze" sono i mezzi trasmissibili (per imitazione, comunicazione, ecc.) ma non necessariamente esplicabili, per controllare una situazione e ottenere un certo risultato conformemente ad una attesa o ad una esigenza sociale. 4Per ulteriori approfondimenti su "Sapere" e "Conoscenza" vedi F. Spagnolo, Insegnare le matematiche nelle scuole secondarie, o.c., capitolo 5).

[14]Ci riferiamo in particolare ad alcuni testi per la preparazione post universitaria degli insegnanti di matematica che in un determinato periodo storico hanno consentito questo passaggio molto importante nella trasposizione didattica:

- M. Cipolla, *La Matematica Elementare nei suoi fondamenti nei riguardi didattici e negli sviluppi superiori*, I^{a} Edizione del 1927, Arti grafiche Cav. Uff. Giuseppe Castiglia, Palermo, Via Saladino. In edizione più recente: *Matematica Elementare* (curata da L. Chiara), 6^{a} edizione, 1962, Ed. Palumbo, Palermo.
- A. Chiellini - R. Giannarelli, *L'esame orale di matematica*, 1962, Libreria eredi V. Veschi, Roma.
- A. Chiellini - L. Santoboni, *Raccolta di temi di matematica per la preparazione ai concorsi*, 1959, Libreria eredi V. Veschi, Roma.
- Pietro Tortorici, *Quaderni Didattici sulle matematiche Complementari*, Arti Grafiche A. Renna, Palermo, 1952. (13 quaderni monografici che trattavano gli argomenti per la preparazione ai concorsi)

[15] Per "Noosfera" si intende l'insieme di Associazioni, Istituzioni Ufficiali, riviste, ecc. (cap. 5.3 nota).

[16]Sino alla seconda metà del secolo numerosi insegnanti universitari provenivano dalla scuola secondaria superiore.

[17] Le "Matematiche Elementari" hanno riorganizzato in modo sistematico gli approcci a concetti matematici singoli e a linguaggi matematici organici in relazione all'insegnamento. Quindi il loro ruolo di mediazione tra il "Sapere Sapiente" della ricerca matematica ed il "Sapere da Insegnare" risulta ben chiaro nella tradizione Italiana dalla fine dell'ottocento ad oggi.

In questa impostazione le Matematiche Elementari assumono un ruolo importante. Esse rappresentano il riferimento dei possibili percorsi matematici per poter definire e quindi introdurre un determinato concetto matematico o un argomento completo.

2.1 Perché insegnare le matematiche?

Dopo avere individuato le motivazioni socio-culturali che consentono di poter stabilire in un determinato periodo storico la scelta dei saperi matematici da trasmettere ci si pongono ulteriori questioni:

- Quali contenuti irrinunciabili privilegiare oggi per l'insegnamento/apprendimento delle matematiche?
- Esistono dei nodi concettuali fondanti?
- I nodi fondanti sono collegabili ad invarianti cognitive dei linguaggi matematici?
- Che cosa significa sviluppare il pensiero algebrico, pensiero aritmetico, ecc.. ?

Cerchiamo di riassumere in una tabella alcune di queste considerazioni tentando dei possibili collegamenti:

Contenuti matematici irrinunciabili. · **L'argomentazione rappresenta elemento portante[18] (comune a tutti i contenuti).** · **Modellizzare come momento iniziale per costruire linguaggi matematici (comune a tutti i contenuti).**	**Invarianti cognitive dell'apprendimento dei linguaggi matematici. (Sono quelle invarianti che vengono riscontrate nelle fondamenta dei linguaggi matematici e che hanno un ruolo importante nei processi di apprendimento).**	**L'operatività: Il pensiero matematico**· (Per pensiero relativo ad un determinato linguaggio matematico (pensiero aritmetico, pensiero algebrico, ecc..) si intende la padronanza della sintassi e di numerosi campi semantici significativi per una determinata classe di problemi. Di fronte ad un problema nuovo essere in grado di saper utilizzare il linguaggio in modo appropriato).
Linguaggio Aritmetico (attraverso i possibili approcci).	· Classificare; · Mettere in Relazione; · Individuare sistemi di riferimento variabili (i punti di vista).	1) Il pensiero Aritmetico: · Essere in grado di risolvere problemi riuscendo ad utilizzare sintassi e semantica del linguaggio. (Specifico della scuola dell'obbligo ma con una diversa consapevolezza nella scuola secondaria). 2) Il pensiero algoritmico. (Trasversale a tutti i livelli scolastici con livelli di consapevolezza diversi)
Linguaggio dell'Algebra elementare	· Classificare; · Mettere in Relazione; · Individuare sistemi di riferimento variabili (i punti di vista).	Il pensiero Algebrico: · Essere in grado di risolvere problemi riuscendo ad utilizzare sintassi e semantica del linguaggio. (Comincia ad essere preparato nelle classi terminali della scuola dell'obbligo e nella scuola secondaria).
L'algebra delle grandezze geometriche:	· Classificare; · Mettere in Relazione;	Il pensiero proporzionale: · Essere in grado di risolvere problemi

[18] L'argomentare come messaggio consapevole del '900 ed completamente inserito nella storia della cultura occidentale. Si pensi a contenuti come Logica, Geometria Euclidea, Analogie strutturali (vedi programmi scuola media). In questa classificazione non si inserisce un altro elemento importante che è tipico dell'evoluzione matematica del '900 il rapporto tra discreto e continuo, tra analisi classica e l'informatica che basa le sue fondamenta teoriche sulla Matematica discreta. Riuscire ad armonizzare questi due aspetti sarà il problema dell'insegnamento delle matematiche nel prossimo secolo.

(Il ruolo dei razionali come modello matematico unificante di diversi percorsi matematici: similitudine, probabilità, proporzioni, ecc..)	· Individuare sistemi di riferimento variabili (i punti di vista).	riuscendo ad utilizzare sintassi e semantica del linguaggio. (Viene preparato nella scuola primaria con la pre-proporzionalità[19] e completato nella scuola dell'obbligo).
Statistica e Probabilità (diversi approcci: frequentista, soggettivista, oggettivista, assiomatico)	· Classificare; · Mettere in Relazione; · Individuare sistemi di riferimento variabili (i punti di vista)	1) Il pensiero Probabilistico: · Essere in grado di risolvere problemi riuscendo ad utilizzare sintassi e semantica del linguaggio. (Trasversale a tutti i livelli scolastici con livelli di consapevolezza diversi) 2) Il pensiero Statistico[20]
Linguaggio della Geometria Euclidea: · La Geometria Euclidea come prima rappresentazione del mondo fisico. · La Geometria Euclidea come modello della Logica bivalente e quindi modello di riferimento dell'argomentare nella cultura occidentale: il messaggio Aristotelico. · La Geometria come sistema ipotetico-deduttivo.	· Classificare; · Mettere in Relazione; · Individuare sistemi di riferimento variabili (i punti di vista)	Il pensiero Geometrico: · Essere in grado di risolvere problemi riuscendo ad utilizzare sintassi e semantica del linguaggio. (Trasversale a tutti i livelli scolastici con livelli di consapevolezza diversi) · L'aspetto argomentativo della geometria euclidea è stato considerato trasversale a tutti i contenuti matematici. · L'aspetto ipotetico-deduttivo può cominciare dalla scuola dell'obbligo per potersi completare, con livelli di consapevolezza sempre più raffinati, nella scuola secondaria superiore.

[19] Un approccio alle tematiche riguardanti la pre-proporzionalità e la proporzionalità si possono trovare:
- nel n.8 (1999) dei "Quaderni di Ricerca in Didattica" pubblicati dal GRIM di Palermo ed in rete al seguente indirizzo INTERNET: http://dipmat.math.unipa.it/~grim.

Nel n.1 (1999) della rivista "Ricerca in Didattica" dell'IRRSAE-Sicilia.

[20] Se le Matematiche sono dei linguaggi allora la "Statistica" é un linguaggio ma di natura differente rispetto all'aritmetica o all'algebra.
Possiamo considerare allora la statistica come un "metalinguaggio" (o una meta-scienza come dice G.Prodi) nel quale sono presenti:
- diversità di impostazioni e dei significati che variano al variare del contesto;
- gli organizzatori cognitivi sono quindi molto ampi (Intervento Ottaviani) e utilizzano quelle di tutte le altre discipline;
- nei linguaggi matematici si cerca di dare "significato", e nella statistica?
- Quando si parla di approccio alle formule e approccio ai dati non é forse la separazione tra approccio sintattico e approccio semantico?

Altro discorso per la probabilità:
- per motivazioni di ordine storico-epistemologico;
- per i possibili legami tra probabilità e...logica (ad es.)
- per il tipo di pensiero che viene indotto.

3.0 Gli indicatori individuati da alcuni soggetti della Noosfera.

Individuare indicatori significativi per i saperi irrinunciabili è un'impresa complessa. La scelta è caduta sui "Programmi Ministeriali" e sui "Programmli dei Concorsi a Cattedre". Tale scelta sembra essere la più indicata soprattutto in vista della formulazione dei programmi nella nuova riforma dei cicli scolastici.

3.1 I programmi ministeriali della scuola elementare, medie e superiori.

Il nostro riferimento è agli attuali programmi ministeriali:

- 1979 Programmi Scuola Media
- 1981-1985 Programmi Scuola Elementare
- 1988-1992 Brocca e P.N.I.(Piano Nazionale dell'Informatica)[21].

Sia i programmi Brocca che i programmi del Piano Nazionale dell'Informatica sono stati sperimentati in tutto il territorio nazionale. Tale sperimentazione non è stata mai estesa completamente a tutte le scuole secondarie superiori.

Analizziamo adesso i "temi" trattati nei singoli programmi:

Scuola Media (1979):

- La geometria come prima rappresentazione del mondo fisico;
- Insiemi numerici;
- Matematica del certo e del probabile;
- Problemi ed equazioni;
- Il metodo delle coordinate;
- Trasformazioni geometriche;
- Corrispondenze; Analogie strutturali.

Scuola elementare (1985):

- Aritmetica
- Geometria e misura
- Logica
- Probabilità, statistica e Informatica
- Problemi

Scuola Materna (Orientamenti del 1991)

Campo di esperienza: Lo spazio, l'ordine, la misura. Capacità di raggruppamento, ordinamento, quantificazione e misurazione di fatti e fenomeni della realtà,. Soluzione di problemi mediante l'acquisizione di strumenti che possano diventare a loro volta oggetto di riflessione e di analisi[22].

- Raggruppare, ordinare, contare, misurare: ricorso a modi più o meno sistematici di confrontare e ordinare, in rapporto a diverse proprietà, grandezze ed eventi; uso di oggetti o sequenze o

---

[21] Il P.N.I. è stato un tentativo negli anni '80 per poter armonizzare l'insegnamento della matematica del discreto con quella del continuo. Tale operazione si è pensato fosse la più corretta per evitare che la cultura informatica (matematica del discreti) potesse prendere il sopravvento sulla matematica del continuo più tradizionalmente legata allo sviluppo delle matematiche della fine dell'ottocento (analisi matematica in particolare).

[22] Gli orientamenti della scuola materna mettono in evidenza alcuni dei nodi concettuali che sono stati trattati precedentemente in questo lavoro sia per quanto riguarda i contenuti che per quanto riguarda la ricerca degli invarianti cognitivi: classificare, mettere in relazione, cambiare il sistema di riferimento. Altra indicazione importante è il riferimento alla risoluzione consapevole di problemi: è questa la strada per potere dare significato ai concetti matematici partendo da questioni concrete.

simboli per la registrazione; impiego diretto di alcuni semplici strumenti di misura; quantificazioni, numerazioni, confronti;
- Localizzare: ricorso a modi, spontanei o guidati di esplorare il proprio ambiente, viverlo, percorrerlo, occuparlo, osservarlo, rappresentarlo; ricorso a parole, costruzioni, modelli, schemi, disegni; costruzione di sistemi di riferimento che aiutano il bambino a guardare la realtà da più punti di vista, coordinandoli gradualmente fra loro.

I programmi Brocca per il biennio:
- Geometria del piano e dello spazio;
- Insiemi numerici e calcolo (algebrico);
- Relazioni e funzioni;
- Elementi di probabilità e statistica;
- Elementi di logica e informatica;
- Laboratorio di informatica.

3.2 Osservazioni sulla ricerca in didattica in Italia in relazione ai programmi ministeriali.

Tra il 1975 ed il 1980[23] vengono creati in Italia dei Gruppi di Ricerca in Didattica delle Matematiche in parecchie sedi universitarie della penisola. I prodotti relativi alle riflessioni teorico-sperimentali vengono pubblicati, anche se ancora nei programmi ministeriali non compare né statistica né probabilità:
- G.Prodi, *Matematica come scoperta* (3 volumi con guide per gli insegnanti), Ed. D'Anna. Il testo ha un approccio metodologico per "problemi" e privilegia il momento della scoperta. I problemi proposti agli allievi devono consentire un utilizzo dei linguaggi matematici i più svariati. Proprio per questo motivo i primi capitoli sono dedicati alla probabilità e statistica (descrittiva e induttiva). La probabilità aiuta l'attività euristica nella risoluzione di problemi. La statistica viene presa in considerazione per il suo apporto di collegamento tra la matematica e un gran numero di scienze naturali ed umane. Il terzo volume riguardante l'Analisi Matematica (in collaborazione con E. Magenes) si serve del linguaggio probabilistico soprattutto nell'introduzione delle successioni.
- F.Speranza-A.R.Dell'Acqua, *Matematica* (1, 2, 3, 4, 5), Ed. Zanichelli. Le matematiche sono vissute come linguaggi e viene privilegiata (nella prima edizione) la sistematizzazione Bourbakista. Ha rappresentato un buon testo di riferimento per la preparazione dell'insegnante. Gli elementi riguardanti la probabilità sono presenti, come nella impostazione classica, nel capitolo introduttivo all'analisi. In una nuova edizione dal titolo "Il linguaggio della Matematica" (3 vol., 1979) nei complementi al 1° volume compare sia la probabilità che la statistica. Nel terzo volume vi é una sistematizzazione della statistica e della probabilità. L'approccio metodologico é quello a spirale. Uno stesso argomento viene ripreso in periodi successivi.
- L.Lombardo Radice-L.M.Proia, *Il metodo matematico* (3 volumi), Ed.Principato. L'approccio é ancora per problemi ma con una angolazione di tipo storico-culturale. Viene privilegiato il "metodo" matematico. Già nel primo volume un capitolo é dedicato alla probabilità (Anche nel caso entra la matematica: calcolo combinatorio, probabilità, genetica). Nel secondo volume si ritorna sulla probabilità, sulla correlazione, la formula di Bayes ed infine la definizione assiomatica di probabilità. Anche in questo caso l'approccio metologico é a spirale attraverso delle sistematizzazioni formali successive.

---
[23] G.Prodi, Una scuola senza memoria, Lettera Pristem, n.24, 1997.

· V.Villani-B.Spotorno, *Matematica, idee metodi* (2 volumi), Ed. La Nuova Italia. L'approccio segue la metodologia della scoperta scientifica: "il *momento induttivo* in cui, dopo essere "inciampati" in un problema, si intuiscono e si formulano le sue possibili soluzioni (anche tra loro diverse); *il momento della riflessione e sistemazione teorica* dei procedimenti usati a livello intuitivo; *il momento dell'utilizzazione dei procedimenti* elaborati nella teoria, per affrontare e risolvere con metodi "standard" altri problemi, dello stesso tipo di quelli dai quali la teoria ha tratto origine."(presentazione al 1° volume). La statistica e la probabilità sono quindi un motivo conduttore dei due volumi e li ritroviamo completamente integrati nel percorso didattico.

Queste esperienze riuscirono, in parte, ad entrare nelle attività scolastiche dei corsi sperimentali e qualche volta anche in quelli non sperimentali. Servirono molto per la formazione degli insegnanti. Ma la mancata riforma delle secondarie superiori ben presto fece perdere le tracce di questo lavoro. Bisogna dire che le riflessioni teoriche di questi progetti erano soprattutto legate all'innovazione ma già si intravedevano anche le problematiche di ricerca didattica riguardanti i processi di apprendimento .

Osservazioni conclusive:

· I programmi del 1979 della scuola media riprendono il discorso sulla trasposizione didattica delle matematiche.
· I gruppi di Ricerca didattica preparano anche delle interpretazioni alle tracce dei programmi ministeriali. Iniziano in questo momento le prime ricerche organiche sui processi di apprendimento delle matematiche. I riferimenti teorici sono quelli di Piaget.
· Nei programmi ministeriali vi sono anche dei riferimenti all'approccio metodologico.
· Queste ricerche avranno un impulso maggiore con l'entrata in vigore dei programmi per la scuola elementare del 1981.
· Nelle riviste di didattica della matematica si dibattono problemi del tipo: "Che cosa é il pensiero algebrico?", "Quando si raggiunge il pensiero formale sulla probabilità?", ecc...[24].

La quasi totalità delle ricerche didattiche hanno le seguenti caratteristiche:

· si occupano di innovazioni riguardanti i contenuti: riflessioni epistemologiche[25] (approcci alla probabilità, ad esempio), riflessioni storico-epistemologiche (il percorso storico come modello da riprodurre per l'insegn., ad es.).
· si occupano di innovazioni riguardanti la metodologia.
· si occupano di problemi riguardanti i processi di apprendimento dal punto di vista dello psicologo cognitivista: interpretazione dei "comportamenti " degli allievi di fronte ad un problema attraverso diversi schemi di riferimento teorici[26].

3.3 I programmi dei concorsi (1998):

· Elementi di Logica Matematica (coerenza, indipendenza, completezza di un sistema di assiomi);

---

[24] Le riviste di didattica della matematica riferimento di questi lavori sono:
· L'Insegnamento della matetematica e delle scienze integrate, Istituti Filippin, Paderno del Grappa.
· L'Educazione della Matematica, C.R.E.S.M. di Cagliari, viaale merello, 92.
· La Matematica e la sua didattica, Editrice Pitagora, Bologna.

[25] In questo quadro vanno riferiti i lavori riguardanti la "Filosofia della probabilità" (D.Costantini-L.Geymonat, Feltrinelli, 1982) e la storia della Probabilità e statistica.

[26] Altro discorso é il lavoro di epistemologia genetica di Piaget sul raggiungimento del pensiero formale da parte del soggetto per quanto riguarda la probabilità. Questo ci fornisce uno schema di riferimento riguardante i livelli di apprendimento, ma sempre in una situazione sperimentale non di insegnamento/apprendimento.

- Algoritmi e proprietà, algoritmi ricorsivi, Complessità computazionale, Tesi di Church, funzioni non calcolabili e problemi non decidibili;
- Teoria degli insiemi, strutture, algebra lineare.
- Geometria Euclidea, proiettiva, affine. Geometria delle trasformazioni. Trasformazioni topologiche;
- Limiti, calcolo differenziale, la misura, calcolo integrale, serie, equazioni differenziali;
- Calcolo numerico;
- Probabilità;
- Statistica;
- Strumenti informatici per il calcolo numerico e la grafica;
- I principali momenti della storia della matematica.

Osservazioni sui programmi

- L'**analisi** è uno dei 10 temi, mentre nei concorsi precedenti aveva avuto un ruolo prioritario ('800 ai nostri giorni);
- Le **curve algebriche** sono relegate ad un piccolo accenno (tema della geometria);
- Molto più spazio ai **fondamenti** della matematica del continuo e del discreto;
- La **logica** assume un ruolo di primaria importanza per la riflessione sui fondamenti (è il 1° tema);
- I contenuti della matematica del '900 sono usciti fuori dall'ambito prettamente matematico;
- La **storia** come <u>rispolverata culturale</u> è stata presente quasi sempre negli ultimi 50 anni. Sarebbe necessario una riflessione più consapevole del rapporto storia-processi di apprendimento/insegnamento- riflessioni sulla ricerca in didattica delle matematiche.

4.0 Dai Saperi alla Formazione degli insegnanti attraverso la Ricerca in Didattica.

La Ricerca in Didattica, con un suo paradigma di riferimento, con suoi metodi di indagine, rappresenta il nodo centrale di riferimento per il passaggio tra quello che noi oggi pensiamo debba essere trasmesso (Sapere) e la formazione degli insegnanti.

In un paradigma di Ricerca in Didattica vi sono delle ricerche teoriche riguardanti i misconcetti, gli ostacoli epistemologici, lo studio delle concezioni degli allievi riguardo un particolare concetto, lo studio delle variazioni delle concezioni rispetto alle variazioni culturali, di età, ecc…Questo tipo di ricerche riguarda la micro-didattica, quel settore di studi che si occupa dello studio di alcuni argomenti specifici, inseriti beninteso in un certo riferimento teorico, per poterne trarre conclusioni di tipo più generale coinvolgenti anche aspetti della macro-didattica come curricula, insegnamento modulare, messa a punto di situazioni didattiche, ecc…

Il meta-paradigma

La Ricerca in Didattica si pone come un meta-paradigma rispetto ad altri paradigmi di ricerca in scienze dell'educazione in quanto utilizza sia il paradigma della disciplina oggetto di analisi che il paradigma delle scienze sperimentali. La Ricerca in Didattica può essere considerata come una sorta di "Epistemologia Sperimentale"[27].

[27] Per ulteriori informazioni su questo argomento si veda: F. Spagnolo, Insegnare le matematiche nella scuola secondaria, La Nuova Italia, Firenze, 1998.

Se si accetta un paradigma di riferimento sulla ricerca in didattica delle matematiche allora l'auspicata collaborazione tra i diversi ambiti disciplinari avverrà all'interno di un paradigma.

Se si vuole ad esempio stabilire le relazioni con la storia delle matematiche questa risulterà utile nell'analisi a-priori delle situazioni didattiche

Dal punto di vista del *ricercatore* [28] in Didattica delle Matematiche lo studio preliminare delle rappresentazioni epistemologiche e storico-epistemologiche risulta fondamentale per poter poi confrontarsi con la contingenza sperimentale. Più approfondita sarà questa analisi maggiore sarà la possibilità di poter argomentare il fenomeno di insegnamento/apprendimento e di poterlo riprodurre[29] in altre condizioni analoghe. La riproducibilità é sempre di tipo probabilistico come accade con i paradigmi delle scienze umane. Il tipo di storia che viene utilizzato in questo caso può essere ad esempio la storia dell'evoluzione di singoli concetti matematici per quanto riguarda il recupero del significato, la storia dell'evoluzione di determinati modelli assiomatici per quanto riguarda le fasi di sistematizzazione dei linguaggi matematici.

Altra cosa l'utilizzo della storia del punto di vista dell'insegnante e dal punto di vista dell'allievo. Ma questo richiederebbe un discorso a parte.

Il laboratori didattici come ambienti per la formazione degli insegnanti

L'esperienza dei laboratori didattici dell'IRRSAE-Sicilia rappresentano il punto di riferimento per il passaggio dai Saperi alla formazione degli insegnanti.

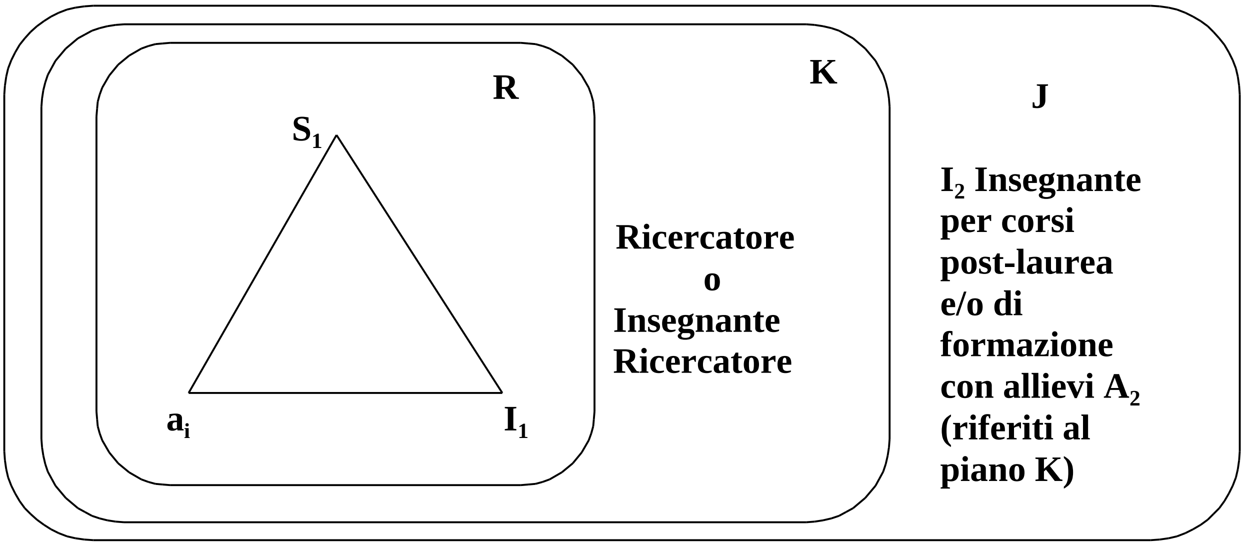
Partendo quindi dallo studio di situazioni didattiche si potrebbero quindi innescare le competenze delle discipline come l'epistemologia, la storia e la psicologia. E' chiaro che a questo punto la ricerca in didattica rappresenterebbe il punto di partenza per il lavoro didattico in questi corsi.

Ma quale è realmente il rapporto di insegnamento in questi corsi di formazione?

Quale il ruolo dell'insegnante?

Quale contenuto sarà oggetto di comunicazione?

Per meglio comprendere la situazione ci serviremo di uno schema qui di seguito rappresentato:



---

[28] La figura del ricercatore può coincidere con quella dell'insegnante, ma in questo caso si parlerà di insegnate/ricercatore, che in questa sua nuova funzione dovrà mettersi da un punto di vista esterno ai fenomeni di insegnamento. L'insegnante/ricercatore non può contemporaneamente essere nel ruolo di insegnante e di ricercatore. Le due funzioni sono separate.

[29] La riproducibilità viene anche assicurata da argomentazioni di tipo statistico strettamente correlate con l'analisi a-priori.

Nel piano **R** abbiamo la situazione di partenza $\mathbf{I_1}$-$\mathbf{S_1}$-$\mathbf{a_i}$ (Insegnate, Sapere, allievo riferito ad una particolare situazione didattica).

Nel piano **K** il Ricercatore o l'insegnate/ricercatore analizza la situazione del piano **R**. Questo rappresenta il suo concreto. Ad esempio l'analisi a-priori di una situazione didattica rientra in questa fase.

Il piano **J** é adesso il nostro punto di riferimento. Sono le lezioni di "didattica disciplinare, "laboratori di didattica disciplinare" che bisognerà organizzare per gli insegnanti/ricercatori. Dover prendere in considerazione gli insegnanti/ricercatori (allievi $\mathbf{I_2}$) é opportuno in quanto il futuro professionista dell'insegnamento delle matematiche dovrà almeno una volta nella sua formazione affrontare i problemi di ricerca relativi alla comunicazione della matematica. Questo gli consentirà in seguito di poter stabilire un proficuo rapporto con la lettura e l'interpretazione dei risultati della ricerca in didattica quando svolgerà il suo lavoro di insegnante come un qualunque altro professionista che si rispetti.

Cerchiamo di riassumere adesso questi passaggi attraverso il seguente schema:

Saperi → Ricerca in Didattica (micro-ricerca: concezioni, ostacoli, misconcetti, eccc...) → Risulati della Ricerca → Fruibilità dei risultati attraverso la messa a punto di situazioni a-didattiche, moduli, ecc.. → Utilizzazione dei risultati precedenti per mettere a punto curricula (macro-didattica).

I laboratori Didattici per la Matematica dell'IRRSAE-Sicilia si muovono proprio in questa direzione. In particolare il contributo di Pergusa si situa proprio nel primo passaggio: dai Saperi alla micro Ricerca in Didattica. Nei successivi incontri dei Laboratori si cercherà di mettere in risalto il passaggio dalla micro didattica alla Fruibilità dei risultati per la messa a punto di situazioni a-didattiche.

Uno schema riassuntivo sulla ricerca in didattica

Che cosa è la Ricerca in Didattica?

- Ricerca con un suo Paradigma;
- Ricerca con un linguaggio proprio;
- Ricerca Teorica: Analisi epistemologica e storico-epistemologica della disciplina relativa ad un determinato Sapere;
- Ricerca Sperimentale:
- Analisi a-priori della situazione-problema;
  6. Individuazione delle ipotesi di Ricerca;
  7. Falsificazione delle ipotesi[30];
  8. Analisi di dati sperimentali relativi a piccoli campioni attraverso strumenti statistici appropriati;
  9. Analisi a-posteriori dei dati sperimentali.

A cosa serve la Ricerca in Didattica?

- Previsione di "fenomeni didattici" attraverso "Modelli attendibili" rispetto alla Ricerca Teorico-Sperimentale. Per "Modelli attendibili" si intendono quei Modelli che consentono la possibilità di far previsioni sui fenomeni didattici;
- Comunicazione dei risultati della Ricerca alla comunità degli Insegnanti attraverso argomentazioni forti come l'analisi a-priori e gli strumenti statistici.

Di che cosa si occupa la Ricerca in Didattica?

- Problemi riguardanti la "comunicazione di una determinata disciplina" attraverso:
- Messa a punto di situazioni a-didattiche appropriate;
  17. Analisi degli errori ed ostacoli derivanti dai processi comunicativi;
  18. Studio degli ostacoli didattici ed epistemologici[31] come:
      - strumenti per la riflessione sulla costruzione di curricula didattici;
      - strumenti per una migliore e più profonda comprensione dei processi comunicativi;
      - strumenti per la messa a punto di situazioni a-didattiche.

Bisognerà formare insegnanti che possano sviluppare una sensibilità particolare per interpretare tali fenomeni. Viene fornito un paradigma di riferimento, assolutamente discutibile e falsificabile, per poter interpretare e soprattutto tentare di insegnare ad interpretare[32] i fenomeni di insegnamento/apprendimento tenendo in considerazione la tradizione Italiana sulle rappresentazioni epistemologiche e storico-epistemologiche.

---

[30] Una ipotesi si dice falsificabile se, sottoposta a verifica sperimentale, può essere messa a dura prova da tentativi sistematici per coglierla in fallo.

[31] Ostacoli didattici: Sono gli ostacoli che si determinano da una non pertinente trasposizione didattica;

- Ostacoli epistemologici: Sono gli ostacoli che hanno un ruolo costitutivo nella conoscenza. Essi sono difficili da evidenziare e difficili da superare. Lo studio di questi ostacoli è però molto importante per l'insegnante perché questi è costretto a mettere in discussione continua le sue conoscenze sia epistemologiche che comunicative.

Gli errori possono mettere in evidenza sia gli ostacoli didattici che epistemologici, essi rappresentano lo strumento indispensabile per capire le situazioni patologiche. Altra cosa sarà il superamento degli ostacoli.

Per ulteriori informazioni sull'argomento cfr.: 1) F. Spagnolo,, o.c.; 2) F. Spagnolo, Les obstacles épistemologiques: Le postulat d'Eudoxe-Archimede, Tesi di Dottorato, Bordeaux, 1995.

[32] Questa é l'esperienza degli IUFM francesi che si occupano specificatamente da più di 15 anni della formazione degli insegnanti di matematica. Il discorso francese andrebbe approfondito su questo versante.