Dall'analisi a-priori di una situazione problema *alla falsificabilità delle ipotesi sul pensiero proporzionale*.

Maria Gabriella Savoja[1]

Sommario

L'esperienza di un corso di formazione presso l'IRRSAE-Sicilia[2] è stata l'occasione per riflettere sugli aspetti metodologici della ricerca in didattica delle matematiche.

L'analisi a-priori di una situazione/problema sul pensiero proporzionale è stato il riferimento per lo studio degli strumenti sperimentali della falsificabilità delle ipotesi di ricerca. (Età degli alunni: 14-15 anni).

Summary

The experience of a training course of IRRSAE-Sicilia has been the opportunity to reflect about methodological aspects of research in mathematical education.

A-priori analysis of a situation/problem on to proportional thought has been the reference for experimental instruments study of falsificability about the research hypothesis. (Age of pupils: 14-15)

Résumé

L'expérience d'un cours de formation de l'IRRSAE-Sicilia a été l'occasion pour réfléchir sur les aspects méthodologiques de la recherche en didactique des mathématiques.

L'analyse a-priori d'une situation/problème sur la pensée proportionnelle a été le référence pour l'étude des instruments expérimentals de la falsificabilité des hypothéses de la recherche. (Age des élèves: 14-15)

---

[1] Docente di Matematica dell'I.T.A.S. "L. Russo" di Caltanissetta. Componente del G.R.I.M.

[2] I.R.R.S.A.E., Istituto Regionale di Ricerca, Sperimentazione e Aggiornamento Educativi.

Dall'analisi a-priori di una situazione problema
alla falsificabilità delle ipotesi sul pensiero proporzionale.

Maria Gabriella Savoja

1.0 Introduzione

Il corso organizzato dall'IRRSAE Sicilia sul tema ***Ricerca in Didattica***[3] è stato l'occasione per una riflessione sul Paradigma della Ricerca in Didattica[4].

L'approccio sistemico "Sapere – Allievo – Insegnante - Situazione didattica" è stato il riferimento di studio.

Lo studio delle possibili relazioni riguarda la Ricerca in Didattica che ha dei contenuti, dei metodi e quindi un paradigma.

Per conoscere il paradigma della ricerca è necessario avere:

- Un linguaggio adatto.
- Strumenti metodologici adeguati.
- Strumenti statistici appropriati.

Dal punto di vista dell'insegnante padroneggiare con gli strumenti della Ricerca in Didattica significa poter:

- Rendersi conto del ruolo positivo dello studio degli errori degli allievi di fronte ad un compito disciplinare preciso.
- Avere la possibilità di costruire un quadro teorico di riferimento a cui attingere per la soluzione dei problemi didattici.
- Avere criteri di scelta autonomi per individuare all'interno delle ipotesi prefigurate quella più funzionale alla situazione contingente.
- Avere strumenti per comunicare i processi e i risultati della ricerca.

La Ricerca in Didattica è quindi un elemento qualificante della professionalità docente. E' importante, pertanto:

- Riconoscere le fasi della Ricerca in Didattica.
- Costruire analisi a-priori sulle situazioni/problema individuate.
- Formulare ipotesi di Ricerca congruenti con l'analisi a-priori.
- Produrre una documentazione fruibile da parte di chi non ha partecipato all'esperienza e che riporti il modello di procedura per la Ricerca in Didattica.

2.0 Il lavoro preliminare: l'analisi a-priori di una situazione problema

Il compito assegnato al gruppo è stato il seguente*:*

Individuare delle situazioni /problema riguardanti la padronanza teorica ed operativa del Pensiero ***proporzionale/pre-proporzionale*** *utilizzando i linguaggi matematici.*

Attraverso la riflessione sui possibili percorsi s'individui un'unica situazione/problema sulla quale si centrerà l'analisi a priori.

Il gruppo[5] *ha il compito di trascrivere l'analisi a priori e di preparare una comunicazione per l'intergruppo.*

---

[3] "Isola delle Femmine" (Palermo), 15-19 dicembre 1997.

[4] I riferimenti teorici della ricerca sono i seguenti:

Brousseau G., *Thèorie des situations didactiques*,1998, Grenoble, ed. la Pensée Sauvage.

Spagnolo F., *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*, 1998, Firenze , La Nuova Italia.

[5] Il gruppo di lavoro è composto dai seguenti docenti di Matematica: Picardo Liliana e Savoja Maria Gabriella dell'ITAS "L. Russo" di Caltanissetta, Urzì Maria dell'Istituto Magistrale AINIS di Messina.

Affrontare il problema presuppone un'analisi di possibili percorsi epistemologici e storico-epistemologici attinenti al pensiero pre-proporzionale e proporzionale nell'ambito dell'aritmetica, della geometria elementare euclidea, della geometria analitica e dell'universo delle grandezze.

I riferimenti storico-epistemologici presi in considerazione possono schematicamente riassumersi:

- per l'aritmetica il postulato di Eudosso Archimede che sottende il problema del multiplo e sottomultiplo; la ricerca del quarto proporzionale in problemi interpretabili numericamente, che si concretizza in diverse strategie come quella del "metodo della falsa posizione" in un contesto prealgebrico;
- per la geometria elementare euclidea gli elementi di Euclide libro V e parte del VI, teoria delle proporzioni fra grandezze omogenee ed archimedee, l'assiomatizzazione hilbertiana;
- per la geometria analitica l'algebrizzazione della geometria: l'equazione della retta (proporzionalità diretta), l'equazione dell'iperbole (proporzionalità indiretta) ;
- per le grandezze l'evoluzione dei sistemi di misura.

Si è così cercato di individuare una situazione che pur presentandosi articolata non risultasse particolarmente complessa.

2.1 La situazione problema e le strategie risolutive

Il gruppo ha scelto di lavorare sul seguente problema:

Una macchina in 8 ore confeziona 600 scatole contenenti 12 bottiglie ciascuna.
Quante scatole riesce a confezionare in 14 ore se ogni scatola contiene 6 bottiglie?

I componenti del gruppo hanno proposto diverse strategie di risoluzione che vengono qui di seguito descritte ed analizzate secondo l'ordine di presentazione.

Strategia n. 1 (Riduzione all’unità)

L'elemento su cui si ferma l'attenzione è "l'unità" bottiglia;

- le scatole vengono viste come gruppi di bottiglie, ciò giustifica la prima operazione:

(600 scatole) x (12 bottiglie / ore) = 7.200 bottiglie;

- si cerca successivamente il numero di bottiglie prodotte in un'ora :

(7.200 bottiglie) : (8 ore) = 900 bottiglie / ore;

- si trova il numero di bottiglie prodotte in 14 ore :

(900 bottiglie / ore) x (14 ore) = 12.600 bottiglie;

- ma le bottiglie si raggruppano a 6 a 6 ottenendo così il numero delle scatole prodotte in 14 ore :

(12.600 bottiglie) : (6 bottiglie / scatola) = 2.100 scatole.

<u>Analisi</u>

Si caratterizza come procedimento di riduzione all'unità, dove di volta in volta l'unità è la bottiglia, l'ora o la scatola.

Probabilmente nell'esecuzione l'allievo lavora con gli scalari, tralasciando le grandezze pur essendo consapevole delle dimensioni dei risultati che via via ottiene e del risultato finale.

L'utilizzo delle grandezze con la loro dimensione richiederebbe dimestichezza con le grandezze derivate come per esempio nella prima operazione :

(600 scatole) x (12 bottiglie / ore) = 7.200 bottiglie.

La risoluzione del problema attraverso questa strategia rientra in un processo pre-proporzionale.

Strategia n. 2 (Procedimento dicotomico)
L'osservazione sulla seguente relazione tra i dati 14 e 8:

$$14 = 8 + 4 + 2$$

e cioè che 14 viene espresso come somma di addendi ognuno la metà del precedente a partire da 8, induce un processo di analoga scomposizione del numero delle scatole:

ore	**8**	**4**	**2**
scatole	**600**	**300**	**150**

processo dal quale si evidenzia il numero totale di scatole da 12 bottiglie prodotte in 14 ore :

$$600 + 300 + 150 = 1050.$$

L'osservazione che il numero di bottiglie per scatola (6) è, nel caso richiesto, la metà rispetto alla situazione iniziale (12), porta alla determinazione della soluzione :

1050 scatole con **12** bottiglie
2100 scatole con **6** bottiglie.

<u>Analisi</u>

Si caratterizza come procedimento dicotomico che prevede una logica di tipo informatico per la descrizione locale delle variabili :

14 = 8 + 4 (metà di 8) + 2 (metà di 4).

L'utilizzo della metà fa rientrare la strategia in una logica pre-proporzionale.

Strategia n. 3 (Frazione come operatore)
L'osservazione sulla seguente relazione tra i dati 14 e 8 :

$$8 : 600 = 14 : \frac{x}{2}$$

dove 14 è espresso come somma di due addendi 8 e i suoi $\frac{3}{4}$ porta ad una analoga visione del numero delle scatole da 12 bottiglie prodotte in 14 ore :

$$600 + \frac{3}{4} \text{ x } (600 \text{ x } 2) = 1.500$$

e dunque:

$$1500 + 600 = 2100$$

scatole da sei bottiglie.

Analisi

Il processo si articola sull'utilizzo di una frazione come operatore e su una scomposizione di tipo additivo :

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

configurandosi come processo pre-proporzionale.

Strategia n. 4

Il procedimento utilizza una tabella a tre variabili : ORE, SCATOLE e BOTTIGLIE, in questa situazione gli operatori agiscono su due delle tre variabili per volta :

ORE	SCATOLE	BOTTIGLIE
8	600	12
: 8	**: 8**	
1	75	12
1	75	12
x 14	**x 14**	
14	1050	12
14	1050	12
x 2	**x2**	
28	2100	12
28	2100	12
: 2		**: 2**
14	2100	6

Strategia n. 4 bis (Tabelle a 3 variabili) (più sintetico)

Nella variante che segue gli ultimi due operatori non sono gli stessi per le due variabili, bensì uno l’inverso dell’altro :

ORE	SCATOLE	BOTTIGLIE
8	600	12
: 8	**: 8**	
1	75	12
1	75	12
x 14	**x 14**	
14	1050	12
14	1050	12
	x 2	**: 2**
14	2100	6

Analisi

Una visione d'insieme in una tabella a tre variabili consente una individuazione dei ruoli e delle relazioni tra le grandezze, suggerendo percorsi di tipo creativo, che introducono l'elemento 28, non presente nel testo superando così l'utilizzo dell'operatore inverso (vedi penultimo rigo della tabella della strategia 4).

L'operatore inverso appare invece nella tabella della strategia 4 bis.

Entrambe le strategie si caratterizzano come pre-poporzionali.

Strategia n. 5 (Tabelle a 2 variabili) (più analitico)

Il procedimento guarda a coppie le grandezze la cui variabilità viene osservata attraverso le seguenti tabelle :

a) Con solo gli operatori:

	ore		**scatole**	
	8		600	
: 8		**: 8**		
	1		X	**x = 75**

	scatole		**bottiglie**	
	75		12	
x 2		**: 2**		
	X		6	**x = 150**

	scatole		**ore**	
	150		1	
x 14		**x 14**		
	X		14	**x = 2100**

b) Con frecce:

		ore		**scatole**		
↓		8		600	↓	
	: 8		**: 8**			
		1		X		**x = 75**

		scatole		**bottiglie**		
↑		75		12	↓	
	x 2		**: 2**			
		X		6		**x = 150**

		scatole		**ore**		
↓		150		1	↓	
	x 14		**x 14**			
		X		14		**x = 2100**

In appendice si trovano due diversi modi di rappresentare la stessa strategia.

<u>Analisi</u>

Una visione a coppie delle grandezze porta ad una organizzazione dei dati in tabelle a 2 variabili, secondo una logica proporzionale anche se ancora senza formalizzazione.

Strategia n. 6 (Pre-strategia)

Una osservazione preliminare che trasforma le 600 scatole da 12 bottiglie in 1200 scatole da 6 bottiglie :

600 scatole 12 bottiglie
1200 scatole 6 bottiglie

riporta il problema ad una proporzionalità diretta :

$$8 : 1200 = 14 : X$$

e dunque:

$$X=2100 \text{ scatole.}$$

Analisi

L'osservazione preliminare del considerare le scatole tutte da 6 bottiglie consente di eliminare una variabile e dunque di trattare il problema nell'ambito del pensiero proporzionale formalizzato.

I lavori del gruppo continuano con una riflessione sulla padronanza teorica e operativa del pensiero proporzionale e/o pre-proporzionale espressa dalla 1^ strategia.

3.0 Alcune considerazioni sulla riformulazione del Testo in relazione alle diverse strategie analizzate.

Durante la discussione sull'analisi dei possibili errori è emersa l'esigenza di apportare modifiche al testo per guidare l'alunno verso l'utilizzo di corrette procedure. Ad ogni riformulazione si è effettuata un'analisi di riduzione degli errori e di strategie risolutive.

Il testo base preso in esame è il seguente:

Una macchina in 8 ore confeziona 600 scatole contenenti 12 bottiglie ciascuna.
Quante scatole riesce a confezionare in 14 ore se ogni scatola contiene 6 bottiglie?

Il gruppo ha prodotto sei testi modificati e di ciascuno di essi è stata analizzata la possibilità di restringere il campo degli errori e delle false interpretazioni. I testi analizzati sono i seguenti:

TESTO 1	
Una macchina confeziona 600 scatole contenenti ciascuna 12 bottiglie, impiegando 8 ore. Quante scatole saranno confezionate in 14 ore se ogni scatola contiene 6 bottiglie?	
COMMENTO	La struttura generale del testo non cambia, ma viene meglio sottolineato il diverso numero di elementi contenuti nelle scatole.
ERRORI	Nessuno degli errori ipotizzati viene eliminato.
STRATEGIE	Non indirizza verso strategie particolari.

TESTO 2
600 scatole contenenti 12 bottiglie ciascuna vengono confezionate in 8 ore da una macchina. Quante scatole di 6 bottiglie vengono confezionate in 14 ore?

COMMENTO	Il problema si concentra sui dati essenziali.
ERRORI	La sequenza ordinata degli elementi: scatole, bottiglie e ore, sia nella prima che nella seconda parte, permette di evidenziare meglio le grandezze che intervengono nel problema.
STRATEGIE	La sequenza in scatole, bottiglie e ore porta alla costruzione di tabelle e indirizza verso l'utilizzo delle strategie: 1 (riduzione all'unità, di tipo pre-proporzionale) , 4 (tabella a tre variabili, di tipo pre - proporzionale) e 5 (tabella a due variabili, di tipo proporzionali).

TESTO 3	
Una macchina confeziona scatole da 12 bottiglie ciascuna. In 8 ore vengono prodotte 600 scatole. Se la macchina confezionasse scatole da 6 bottiglie, quante scatole produrrebbe in 14 ore?	
COMMENTO	Frasi brevi per una migliore comprensione del testo che risulta concentrato su una variabile: le scatole.
ERRORI	Potrebbe eliminare gli errori: PP1b (scambia le 14 ore con 8) e PP1c (non completa la risoluzione fermandosi ad un dato intermedio).
STRATEGIE	Indirizza verso la strategia 5 (costruzione di tabelle, di tipo proporzionale).

TESTO 4	
Una macchina in 8 ore confeziona 600 scatole contenenti 12 bottiglie ciascuna. Quante scatole da 12 bottiglie riesce a confezionare in 14 ore? Quante scatole da 6 bottiglie riesce a confezionare in 14 ore?	
COMMENTO	L'introduzione di un altro quesito allerta l'alunno sul punto chiave del problema.
ERRORI	Elimina tutti gli errori tranne: PP1a (non dimensiona le grandezze) e PP1d (errori di grammatica del linguaggio).
STRATEGIE	Induce all'utilizzo delle strategie: 2 (Metodo dicotomico, di tipo pre-proporzionale), 4 (tabella a tre variabili, di tipo pre - proporzionale) e 5 (tabella a due variabili, di tipo proporzionale).

TESTO 5	
Una macchina confeziona scatole da 12 bottiglie ciascuna. In 8 ore vengono prodotte 600 scatole. Quante bottiglie produce in un'ora? Supponiamo di dover confezionare scatole che contengono 6 bottiglie ciascuna. Quante scatole confezionerà in 14 ore?	
COMMENTO	L'introduzione di una domanda nella parte centrale ha diviso i dati.
ERRORI	Potrebbe eliminare gli errori: PP1b (scambia le 14 ore con 8) e PP1c (non completa la risoluzione fermandosi ad un dato intermedio).
STRATEGIE	Semplifica il percorso e guida l'allievo verso la strategia 1 (riduzione all'unità).

TESTO 6	
Una macchina in 8 ore confeziona 600 scatole contenenti 12 bottiglie ciascuna. Supponiamo ora di dover confezionare scatole che contengono 6 bottiglie ciascuna. Quante scatole confezionerà in 8 ore? E quante in 14 ore?	
COMMENTO	Si introduce un altro quesito che permette di non utilizzare un dato (numero complessivo di bottiglie) semplificando la soluzione.
ERRORI	Si eliminano gli errori: PP1a (non dimensiona le grandezze), PP1b e PP1e (possibilità di scambiare le variabili) e PP1c (non completa la risoluzione fermandosi ad un dato intermedio).
STRATEGIE	Tutti i procedimenti risultano semplificati perché si può eliminare una variabile interna che non influenza la soluzione (numero complessivo delle bottiglie). Il testo non indirizza verso una particolare strategia.

Il gruppo ritiene che quanto elaborato possa essere sufficiente per un'"Analisi a-priori "; un ulteriore affinamento dell'indagine prevede una verifica sperimentale.

4.0 Analisi a-priori della 1^strategia[6]

STRATEGIA RISOLUTIVA **PP1** (Riduzione all'unità)

1° Fase (600 scatole) x (12 bottiglie) = 7200 bottiglie

2° Fase (7200 bottiglie) : (8 ore) = 900 bottiglie all'ora

3° Fase (900 bottiglie / ore) x (14 ore) = 12.600 bottiglie

4° Fase (12.600 bottiglie) : (6 bottiglie/scatole) = 2.100 scatole

Si osserva che, nel caso in esame, l'algoritmo risolutivo del problema è costituito da una sequenza di operazioni ciascuna delle quali ha come argomenti il risultato della operazione immediatamente precedente e/o uno o più dati inizialmente noti, secondo un impianto teorico proprio di una struttura moltiplicativa che non rende ancora esplicito il sussistere di una relazione (di proporzionalità) tra le grandezze in gioco.

In questo senso la prima strategia evidenzia un approccio al problema di tipo pre-proporzionale.

ANALISI DEGLI ERRORI

Le suddette considerazioni conducono il gruppo ad interrogarsi sulla natura dei possibili errori nei quali il soggetto può eventualmente incorrere; vengono ipotizzati e discussi i seguenti comportamenti:

- **PP1a** : non individua le grandezze
  1° 600 x 12 = 7.200 bottiglie;
  2° (600 x 12)/ 8 = 900 bottiglie in 1 ora;
  3° 900 x 14 = 12.600 bottiglie;
  4° 12.600 / 6 = 2.100 scatole.

[6] Per poter meglio focalizzare l'attenzione sulla scelta delle ipotesi di ricerca in didattica verrà presentata l'analisi a-priori una sola strategia e precisamente la 1^.

- **PP1b**: cambia il passaggio 2°

1° = PP1a;
2° (600 x 12) / 14 =514,2;
3° 514,2 / 6=85,7.

- **PP1c**: si ferma al passaggio 3° del PP1a

12.600 bottiglie.

- **PP1d**: con errori di tipo aritmetico (grammatica del linguaggio)

600 x 12 =72.000 : 8 = 900 x 14 =12.600 : 6 = 2.100.

- **PP1e**: 1°, 2° e 3° passaggio uguali al PP1a cambia il 4° passaggio e scrive

12.600 / 2.

Questi comportamenti si configurano come altrettante variabili didattiche che però non esauriscono lo spazio degli eventi possibili. Può infatti esistere un certo grado di correlazione tra due o più comportamenti, interpetrabile come nuova informazione sul piano della possibilità di controllo di una situazione problema. A tal proposito vengono formulate le seguenti congetture:

- rimozione degli errori nei casi PP1a, PP1c e PP1e mediante introduzione delle grandezze con conseguente ritorno al caso PP1.
- i casi PP1c e PP1d possono portare al PP1a.

Si hanno, così, le seguenti implicazioni:

PP1a ----------> PP1 (i)
PP1c ----------> PP1a --------> PP1 (ii)
PP1c ----------> PP1 (iii)
PP1c ----------> PP1a (IV i)
PP1e ----------> PP1a --------> PP1 (V i)
PP1e ----------> PP1 (VI i)
PP1d ----------> PP1a (VII i)

Gli errori dovranno, nella fase sperimentale successiva, essere raccolti nella seguente tabella:

PP1	**PP1a**	**i**	**ii**	**iii**	**IV i**	**V i**	**VI i**	**VII i**

5.0 Le Ipotesi della Ricerca relative all'analisi a-priori fatta

Sulla base delle risultanze dell'analisi a-priori il gruppo stabilisce di centrarsi sulla strategia 1 "Riduzione all'unità" e relativa analisi degli errori. Stabilisce altresì di collocarsi nella fascia di età compresa tra i 10 e i 15 anni. Seguendo il percorso di metodo proposto nell'informazione il gruppo passa, quindi, alla formulazione delle seguenti ipotesi di ricerca:

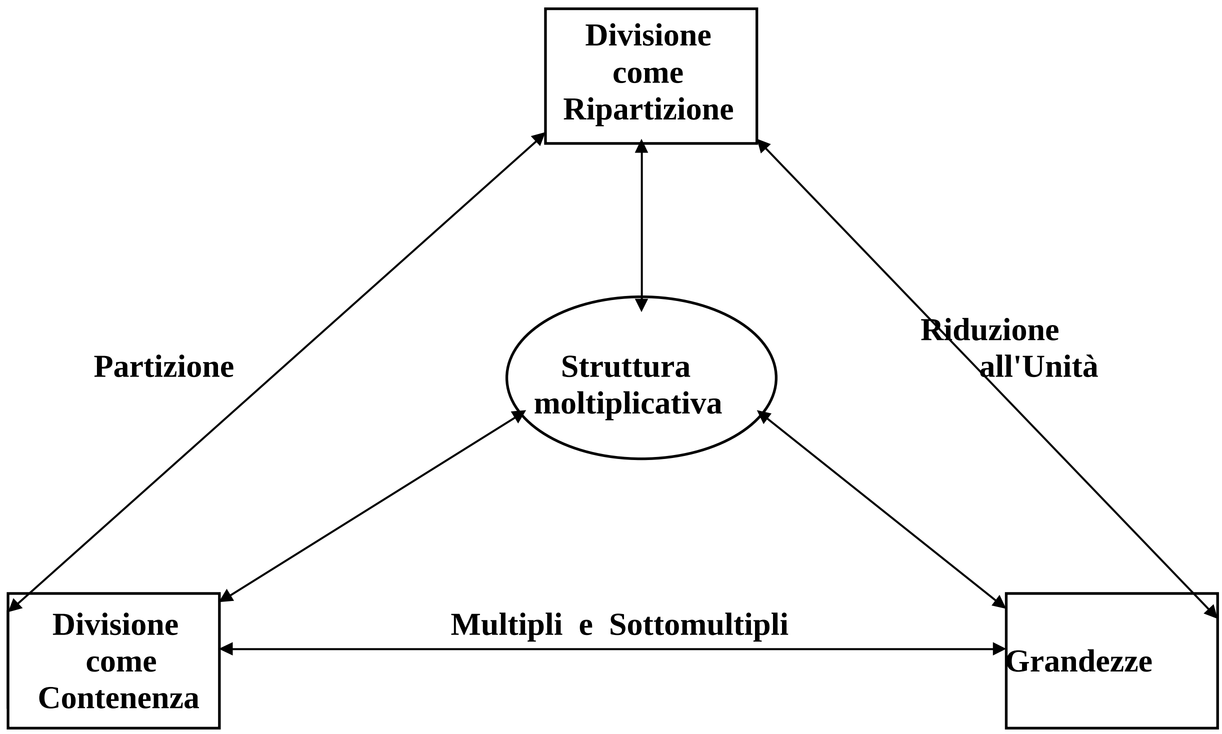
1. Se l'allievo (10-13 anni) conosce la divisione per ripartizione allora la strategia 1 viene acquisita.
2. Se ha compreso la moltiplicazione come somma ripetuta di addendi tutti uguali allora può effettuare il primo passaggio. Se sa riconoscere l'unità (indivisibile), se ha compreso la divisione per ripartizione e sa individuare le grandezze può effettuare i passaggi successivi.
3. Se gli allievi utilizzano nell'uguaglianza termini omogenee (cose dello stesso tipo) allora sanno risolvere la strategia.
4. Se ha interiorizzato la divisione come contenenza allora usa correttamente grandezze derivate. (8 -11 anni)
5. Se ha acquisito la struttura moltiplicativa allora: a) comprende la divisione come ripartizione (pensiero reversibile); b) mettere in relazione grandezze multiple e sottomultiple. (9 -11 anni)
6. Se l'allievo ha acquisito il concetto di frazione come classe di equivalenza allora può evolvere verso il pensiero proporzionale. (12 -15 anni)
7. Se il pensiero è "fortemente" aritmetico è più difficile un approccio al pensiero dimensionale.
8. Se gli allievi sono in grado di stabilire una corrispondenza uno a uno tra un certo insieme di operazioni concrete/figurative e un certo insieme di operazioni aritmetiche allora gli stessi riusciranno ad attuare la strategia 1.

Il gruppo concorda di concentrare il proprio lavoro su tre nuclei tematici che considera preminenti e riformula le ipotesi di ricerca nel seguente modo: a) Se l'alunno ha acquisito la struttura moltiplicativa allora è in grado di effettuare: 1) la riduzione all'unità; 2) la divisione come ripartizione.

b) Se l'alunno ha acquisito il concetto di divisione come contenenza allora è in grado di usare correttamente le grandezze derivate.

c) Se l'alunno possiede il controllo dimensionale allora ha il dominio della coerenza interna del percorso risolutivo di una classe di problemi che si modellizzano attraverso la struttura moltiplicativa e la riduzione all'unità.

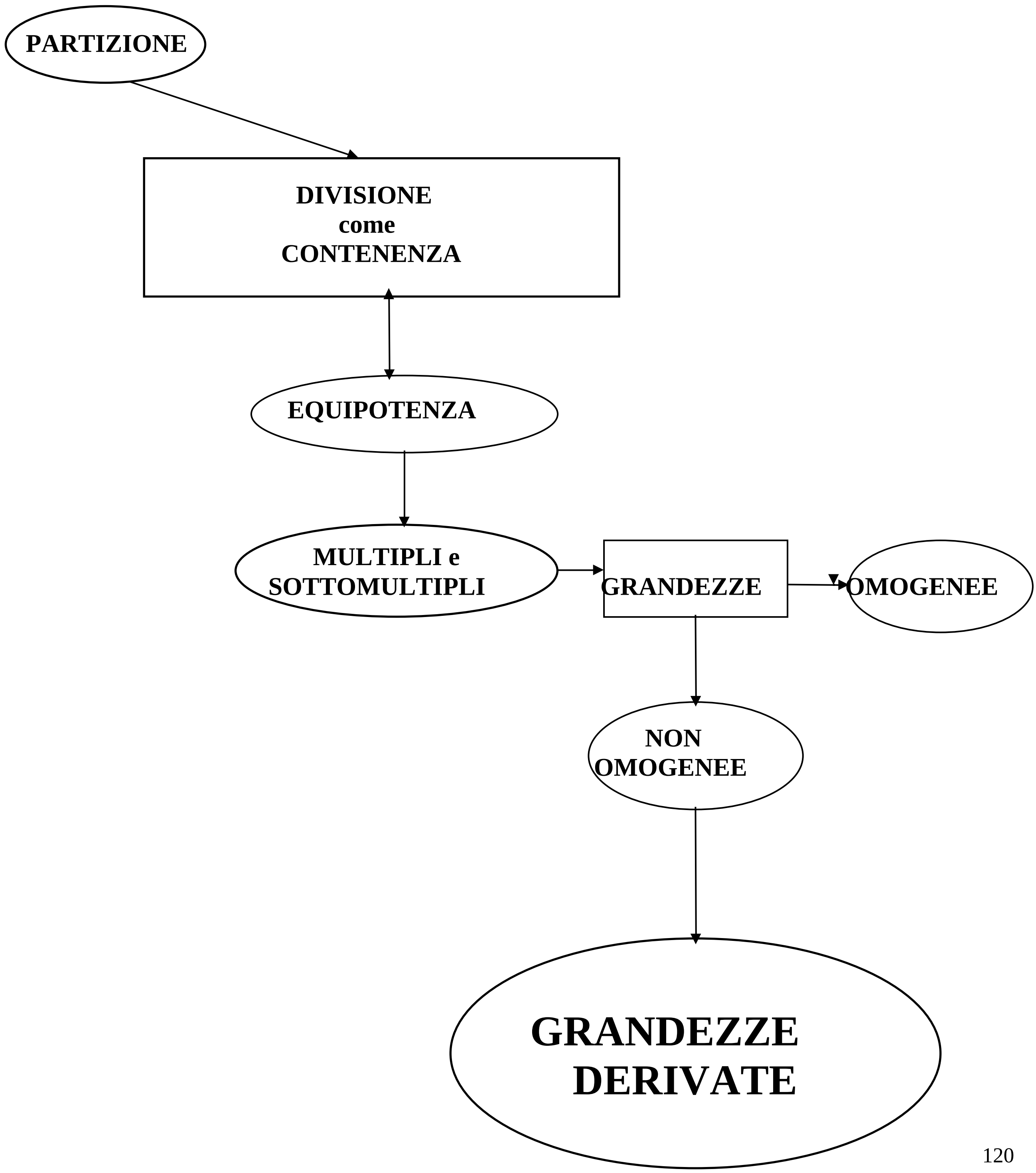
Ciò si può schematizzare in tal modo:



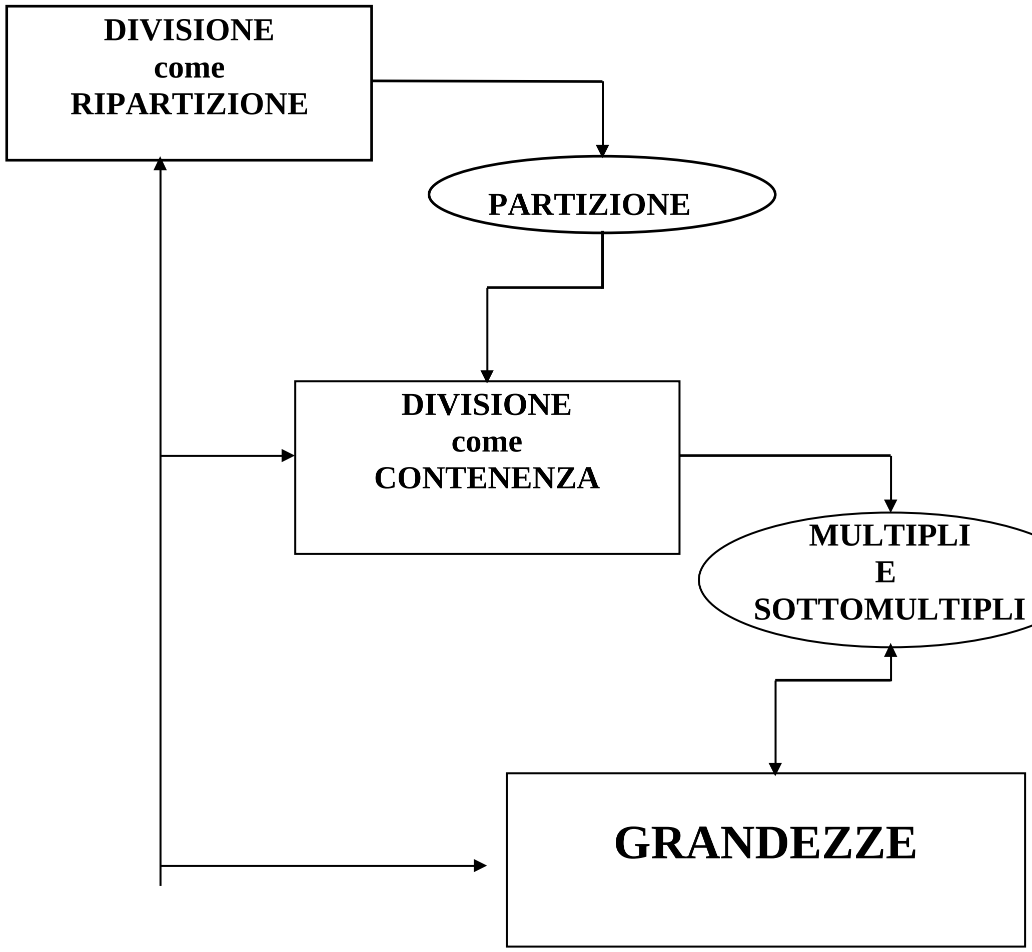
5.1 La scelta di una "ipotesi"

***Se** l'alunno ha acquisito il concetto di divisione come contenenza*
***allora** è in grado di usare correttamente le grandezze derivate.*

Premesso che il gruppo ha utilizzato prevalentemente il paradigma pedegogico-curriculare e paradigma epistemologico disciplinare della matematica, esso ha effettuato un processo a ritroso per individuare i il concetti che precedono il concetto di divisione come contenenza. Si suppone che l'allievo possieda i concetti di partizione e di equipotenza per poter pervenire al concetto di divisione come contenenza, ma dal concetto di equipotenza discendono il concetto di multiplo e di sottomultiplo e quindi il concetto di grandezze omogenee e non omogenee per concludere con il concetto di grandezza derivata secondo il seguente schema:



Nell'analizzare l'ipotesi b) si individuano come possibili elementi di raccordo con le ipotesi a) e c) rispettivamente i concetti di partizione e di multipli e sottomultipli come da tabelle seguente:



5.3 Gli strumenti per la falsificazione delle ipotesi

Gli strumenti di ricerca individuati sono:

- il questionario a risposta aperta, che può essere anonimo o firmato se l'insegnante vuole conoscere la situazione per effettuare interventi di recupero;
- l'intervista a coppia con l'ausilio di un registratore, senza la presenza dell'insegnante, per ricavare informazioni intorno al grado di sviluppo del processo cognitivo.

5.3.1 Questionario

Questa non è una scheda di verifica, quindi non verrà valutata ai fini del profitto.
Il questionario è anonimo.
Il tempo massimo per la compilazione è di 60 minuti.
Non sono ammesse cancellature; in caso contrario la risposta verrà considerata nulla.
Non è ammessa la calcolatrice.

Buon lavoro!!!

1. Dato l'insieme dei numeri naturali da 1 a 11. Rappresenta mediante il diagramma di Venn la suddivisione secondo pari e dispari.

2. Dividi i tuoi compagni di classe in gruppi scegliendo un opportuno criterio che tenga conto di queste condizioni:
   a) ogni tuo compagno deve stare in un solo gruppo;
   b) nessun compagno deve stare fuori da un gruppo;
   c) tutti i gruppi devono formare la totalità della tua classe.

3. Dato l'insieme degli alunni di una classe e l'insieme delle loro sedie. Come sono tra loro i due insiemi?

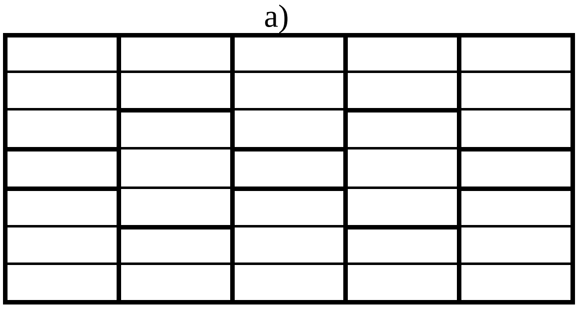
4. Dato l'insieme formato dai numeri 1,3,4,7,9 e l'insieme delle vocali della parola "aiuole". Cosa hanno in comune i due insiemi?

5. Dati i numeri 5 e 7 sono di più i multipli di cinque o quelli di sette? (Motiva la risposta)

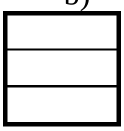
6. Elenca i sottomultipli di 12 e di 20. Stabilisci quali sono quelli comuni.

7. Date le seguenti figure:

a)



b)



Quante volte la figura b) è contenuta nella figura a)?

8. Scrivi sotto forma di espressione matematica il risultato del quesito precedente.

9. Determina il peso specifico di un oggetto avente il peso di 20gr e il volume di 4 cm^3.

10. Sapendo che una macchina percorre un tragitto di 640Km alla velocità costante di 80 Km/h. Quanto tempo impiega? (Specifica nelle operazioni le unità di misura)

5.3.2 La tabulazione dei risultati per rendere chiuso il questionario

1° quesito

1A	Risposta esatta.
1B	Non individua la partizione.
1C	Raggruppa gli elementi, ma non segna la partizione.
1D	Effettua una partizione errata.
1E	Indica solo il numero dei sottoinsiemi.
1F	Effettua una partizione su un insieme diverso da quello dato.

2° quesito

2A	Risposta esatta.
2B	Individua un criterio accettabile, ma non effettua una partizione corretta.
2C	Non esplicita il criterio, ma effettua una partizione corretta.
2D	Risposta errata.

3° quesito

3A	Risposta esatta.
3B	Risponde: insiemi non confrontabili.
3C	Personalizza la risposta.
3D	Individua la corrispondenza, ma non precisa che è biunivoca.
3E	Risposta errata.

4° quesito

4A	Risposta esatta.
4B	Risposta errata.

5° quesito

5A	Risposta esatta.
5B	Risposta corretta senza motivazione.
5C	Risponde correttamente dando una motivazione errata.
5D	Confonde i multipli con i sottomultipli.
5E	Risposta errata.

6° quesito

6A	Risposta corretta.
6B	Sbaglia solo i sottomultipli di un numero.
6C	Scrive esattamente i sottomultipli dei numeri e individua solo in parte quelli comuni.
6D	Scrive esattamente i sottomultipli, ma sbaglia quelli comuni.
6E	Sbaglia i sottomultipli di entrambi i numeri, ma non quelli comuni.
6F	Confonde i sottomultipli con i multipli.
6G	Risposta errata.

7° quesito

7A	Risposta esatta.
7B	Risposta errata.

8° quesito

8A	Risposta esatta.
8B	Risposta errata.

9° quesito

9A	Risposta esatta.
9B	Risponde esattamente, ma sbaglia le grandezze.
9C	Sbaglia il rapporto, ma non le grandezze.
9D	Risposta errata.

10° quesito

10A	Risposta esatta.
10B	Risponde esattamente, ma sbaglia le grandezze.
10C	Sbaglia il rapporto, ma non le grandezze.

10D Risposta errata.

TABELLA DI CHIUSURA DEL QUESTIONARIO

Risposte / Alunni	**1A**	**2A**	**......**	**10C**	**10D**
1					
2					
.....					
29					
30					

Eventuali risposte non previste verranno tabulate a parte.

5.3.3 La consegna per l'intervista

Risolvete il problema in massimo 30 minuti, mettendovi d'accordo sulla risoluzione scritta che dovete consegnare.

Attenzione!!!

Non sono ammesse cancellature.

Se cambiate idea su quello che avete scritto non cancellatelo, ma riscrivetelo.

Abbiate cura di mantenere acceso il registratore quando lavorate.

PROBLEMA PROPOSTO

Una macchina in 8 ore confeziona 600 scatole contenenti 12 bottiglie ciascuna.
Quante scatole riesce a confezionare in 14 ore se ogni scatola contiene 6 bottiglie?

6.0 Analisi dei risultati dei questionari con lo CHIC[7]

Il questionario è stato somministrato nell'anno scolastico 1997-98 in due classi dell'Isituto Tecnico Femminile "L. Russo" di Caltanissetta e dell'Istituto Magistrale AINIS di Messina, dai docenti Liliana Picardo, Maria Gabriella Savoja e Maria Urzì.

Il campione comprendeva, per quanto riguarda l'Istituto Tecnico Femminile, una prima classe dell'indirizzo Periti Aziendale e Corrispondenti in Lingue Estere e una prima classe dell'indirizzo sperimentale Linguistico Moderno formate entrambe da 25 alunne; per quanto riguarda l'Istituto Magistrale da una seconda classe del Liceo Linguistico e da una seconda classe del Liceo Sociopedagogico per un totale di 30 alunne.

La durata della somministrazione della prova è stata di 120 minuti e non è stata data la consegna di rispondere a tutti i quesiti.

I risultati sono stati tabulati su una tabella, già predisposta durante il corso residenziale di Capaci, ma che è stata rielaborata in alcuni punti poiché la varietà degli errori è stata superiore alle previsioni.

Per l'analisi dei risultati è stato utilizzato lo strumento informativo CHIC. Per poter trascrivere i dati sul foglio elettronico è stato necessario indicare con 1 le risposte esatte e con lo 0 tutti i vari tipi di risposte non esatte. In questo modo il grafico non evidenzia i reali processi logici seguiti dagli alunni in quanto non evidenzia le conoscenze parziali. Non è

[7] Software statistico per l'analisi implicativa di R. Grasv vedi quaderno di ricerca in didattica n.7, R. Gras, Metodologia d'analisi implicativa.

possibile, quindi, avere un riscontro tra grafico e voto ottenuto dagli studenti. Un aiuto, invece, è possibile ricavarlo per quanto concerne le correlazioni tra i quesiti proposti.

In dettaglio, dall'analisi dei risultati dell'Istituto Magistrale è emerso, dopo avere eliminato i dati relativi ai quesiti Q1 e Q9 perché non significativi in quanto le risposte ai quesiti sono risultate tutte esatte (Q1) o tutte errate (Q9), che:

1. la matematizzazione di una relazione tra grandezze viene posta allo stesso livello del concetto di equipotenza e tali concetti presuppongono il concetto di ripartizione in classi. Pertanto potremo concludere che se l'alunno possiede il concetto di partizione (Q2) allora riesce a stabilire relazioni di equipotenza (Q4) e a formalizzare relazioni di contenenza (Q8);
2. l'alunno che possiede il concetto di corrispondenza biunivoca (Q3) riesce a stabilire una corrispondenza tra una parte e il tutto di grandezze geometriche (Q7);
3. l'alunno che possiede il concetto di multiplo e sottomultiplo (Q5 e Q6) riesce anche a stabilire relazioni corrette tra grandezze dimensionate omogenee e non omogenee.

I livelli I° e II° consentono il raggiungimento del III° livello.

Per quanto riguarda l'analisi delle implicazioni non risultano legami significativi se si considera la percentuale del 95%, solo abbassando la percentuale di implicazione al 65% si notano dei legami significativi.

Appare privo di implicazioni Q8 mentre il Q7 risulta conseguenza di Q6, Q4 e Q3 ovvero il concetto di ripartizione di una grandezza risulta conseguenza dei concetti di relazione tra insiemi, di corrispondenza biunivoca e di sottomultiplo.

Q6 a sua volta implica Q2 ovvero la ripartizione di una grandezza implica il concetto di partizione di un insieme. Quest'ultima implicazione conferma l'asserto proposto nell'ipotesi di ricerca che "*Il modello di pensiero (è) rivolto unicamente alle grandezze omogenee quale quello della geometria euclidea anche nella lingua naturale*."

Dall'analisi dei risultati dell'Istituto Tecnico Femminile è emerso, per la classe prima Linguistico, quanto segue:

1. l'alunno che stabilisce relazioni corrette fra grandezze omogenee (Q9) possiede in concetto di multiplo e sottomultiplo di un numero (Q6);
2. l'alunno che stabilisce relazioni corrette di equipotenza (Q4) riesce a stabilire relazioni corrette fra grandezze omogenee (Q6).

Il primo livello ed il secondo livello sono collegati.

3. l'alunno che possiede il concetto di corrispondenza biunivoca (Q3) possiede anche il concetto di multiplo e di sottomulltiplo di un numero (Q5).
4. l'alunno che possiede il concetto di insieme allora possiede anche il concetto di sottoinsieme (Q7) riesce a stabilire una corrispondenza tra una parte e il tutto (Q8).
5. l'alunno che possiede il concetto di insieme (Q1) riesce ad effettuare la partizione di un insieme (Q2).

Il quesito Q10 non risulta collegata ad altri quesiti.

Per la classe prima del Perito Aziendale e Corrispondente in Lingue Estere è emerso che:

1. l'alunno che possiede il concetto di sottomultiplo di un numero (Q6) possiede il concetto di insieme (Q1).
2. l'alunno che formalizza relazioni di contenenza (Q8) riesce a muoversi agevolmente nelle grandezze omogenee (Q10).
3. l'alunno che possiede il concetto di relazione di equipotenza (Q5) riesce a stabilire relazioni corrette tra grandezze di dimensioni omogenee (Q4).

I livelli due e tre sono collegati.

4. l'alunno che possiede il concetto di grandezza omogenea (Q10) formalizza relazioni di contenenza (Q7 e Q8).
5. l'alunno che possiede il concetto di corrispondenza biunivoca (Q3) riesce a muoversi agevolmente tra grandezze non omogenee (Q9).

Il quesito Q2 non è collegato agli altri quesiti.

7.0 Considerazioni conclusive

Il software statistico CHIC è risultato uno strumento utile per l'analisi delle implicazioni soprattutto per le considerazioni fatte sulle ipotesi.

Da alcune correlazioni è emerso che certi percorsi logici degli allievi sembrano in contrasto con la struttura della disciplina e i percorsi didattici proposti dai docenti nell'attività didattica.

Le concezioni degli allievi a questo riguardo andrebbero analizzate con più cura.

Da una lettura del protocollo dell'intervista (vedi Appendive allegata) viene confermato il ruolo delle concezioni degli allievi in contrasto con il lavoro curriculare dell'insegnante.

Il presente lavoro è soltanto l'inizio di una serie di altri lavori che hanno come obiettivo:

- uno studio più accurato delle concezioni degli allievi sul pensiero proporzionale correlato con l'insegnamento curriculare attraverso le argomentazioni della ricerca in didattica delle matematiche.
- Una riflessione teorico/sperimentale sulla metodologia utilizzata per la ricerca in didattica.

BIBLIOGRAFIA

1. Enriques, *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna*: 1) Libri I-IV (1925), Ed. Alberto Stock, Roma; 2) Libri V-IX (1930), Ed. Zanichelli, Bologna; 3) Libro X (1932), Ed. Zanichelli, Bologna; 4) Libri XI-XIII (1935), Ed.Zanichelli, Bologna.
2. Hilbert, *I fondamenti della geometria*, *Feltrinelli*, Milano, 1970
3. M. Cipolla, *La Matematica Elementare nei suoi fondamenti nei riguardi didattici e negli sviluppi superiori*, I[a] Edizione del 1927, Arti grafiche Cav. Uff. Giuseppe Castiglia, Palermo, Via Saladino. In edizione più recente: *Matematica Elementare* (curata da L. Chiara), 6[a] edizione, 1962, Ed. Palumbo, Palermo.
4. Veronese, *Fondamenti di Geometria*, Tipografia del Seminario, Padova, 1891
5. Frajese - Maccioni, *Gli Elementi di Euclide*, Classici UTET, 1970.
6. Enriques, *Gli elementi di Euclide e la critica moderna*, A. Stock, Roma, 1925.(libro V, p. 12)
7. *Enciclopedia delle Matematiche Elementari (a cura di L. Berzolari)*, U. Hoepli ed., 1972 (ristampa).
8. M. Kline, *Storia del pensiero matematico*, Editore Einaudi, Torino, 1991 (2 Volumi).
9. F. Spagnolo, *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*, La Nuova Italia, Firenze, 1998.
10. G. Brousseau, *Théorie des situations didactiques*, La Pensée sauvage, Grenoble, 1998.
11. CNRS, *Pratique de l'Analyse des Donnèes*, Paris, Dunod, 1984 (I vol: *Analyse des correspondances exposé élémentaire*; II Vol: *Abrégé théorique études de Cas Modèle*).
12. G. Brousseau, *Stratégies de l'analyse statistique*, Université Bordeaux I, LADIST, 1993.
13. G. Brousseau, *Fiches de Statistiques non parametriques pour la didactique,* Université Bordeaux I, 1993, LADIST.
14. G. B.Flores d'Arcais, *Metodi statistici per la ricerca psicologica*, Firenze, Giunti Barbera, 1968.
15. R. Gras, *L'implication statistique (Nouvelle méthode exploratoire de données, Recherches en Didactique des Mathématiques),* La Pensée sauvage, Grenoble,1996.
16. B. Escofier-Jerôme Pagès, *Analyse factorielles simples et multiples (objectifs, méthodes et interpretation*, Paris, Dunod, 1990.

APPENDICE

INTERVISTA A DUE RAGAZZI della classe 1^ C P.A.C.L.E. dell'ITAS "L. Russo" di Caltanissetta.

M	*Una macchina in 8 ore confeziona 600 scatole contenenti 12 bottiglie ciascuna.* ***Quante scatole riesce a confezionare in 14 ore se ogni scatola contiene 6 bottiglie?***
F	Cominciamo a scrivere i dati. Tempo impiegato = 8h. 600 scatole come le scriviamo?
M	Mettiamo: Scatole = 600.
F	*Contenenti 12 bottiglie!* Scriviamo: Capienza = 12 bottiglie. Capienza? *Quante scatole riesce a confezionare?* Quindi n° scatole?
M	*Quante scatole riesce a confezionare in 14 ore se ogni scatola contiene 6 bottiglie?* T_2 = 14h.
F	E $capienza_2$ = 6 bottiglie. Abbiamo scritto i dati, ma non ho capito cosa dobbiamo trovare. Rileggiamolo. Vuol dire che in ogni scatola ci sono 12 bottiglie e sono 600? Giusto?
M	Si.
F	*Quante scatole riesce a confezionare in 14 ore se ogni scatola contiene 6 bottiglie?* Ma è semplicissimo! Ogni scatola dovrà contenere 6 bottiglie. Quindi le bottiglie dimezzano. Possiamo risolverlo con la proporzione.
M	Si.
F	Una macchina confeziona 600 scatole e ogni scatola contiene 12 bottiglie. Se facciamo 12b x 600 otteniamo il totale delle bottiglie.
M	E cioè 7.200.
F	7.200 bottiglie in 8h. Perfetto. *Quante scatole riesce a confezionare in 14 ore se ogni scatola contiene 6 bottiglie?* Dobbiamo utilizzare questo criterio. Noi abbiamo il tempo e quindi le ore e quante bottiglie ci sono in ogni scatola.
M	La macchina riesce a fare sempre lo stesso numero di bottiglie in 1h, quindi in 8h ha prodotto 7.200 bottiglie. Ma noi abbiamo 14h!
F	Dobbiamo trovare quante bottiglie fa all'ora. In 8h quanti minuti ci sono?.
M	Fai 600 : 8 = 75. In 1h riesce a fare 75 scatole da 12.
F	Moltiplica per 8 deve fare 600.
M	Si.
F	Perfetto. 75 scatole da 12 bottiglie all'ora. Quindi dobbiamo fare 75 x 14 .
M	No. Prima devi dividere.
F	Per 2 ?
M	Considera che le bottiglie sono la metà.
F	75: 2?
M	Si. 75 : 2= 37,5. Cioè 37 scatole e mezza ogni ora.
F	Non è un numero sano! Moltiplica per 14.
M	37,5 x 14 = 525. Cioè 525 scatole in 14h.
F	Non può essere.
M	Perché non può essere? Ricordati che le bottiglie dimezzano nelle scatole.
F	Infatti, quindi ne deve fare di più.
M	No.
F	Non capisco il tuo ragionamento. Mi sono persa. Se sono di meno, ne deve fare di più.
M	Sono di meno.
F	Voglio fare una cosa: 75 x 14 = 1050. 1050?
M	1050, perché no?
F	**Quante scatole riesce a confezionare in 14 ore se ogni scatola contiene 6 bottiglie?**
M	1050 scatole in 14h.
F	Si, ma da quante? Da 6 o da 12 bottiglie?
M	Da 6.

F	No, perché non ho diviso.
M	1050 : 2 = 525.
F	Non può essere, devono essere di più. E poi il 14 dove è?
M	Aspetta.
F	Che stupidi che siamo!! Lo abbiamo fatto a minuti.
M	Come a minuti.
F	Lo abbiamo trasformato a minuti. Quindi dobbiamo trasformare 14h a minuti.
M	Quando lo hai trasformato?
F	8h non lo abbiamo fatto diventare…
M	No. Non abbiamo fatto niente.
F	Allora facciamolo.
M	Trasformiamo 8h in minuti. Corrisponde a 480 minuti.
F	8h?
M	Si.
F	14h invece?
M	14h trasformato in minuti viene 840.
F	Proviamo.
M	Cosa? Non ha senso.
F	Ma se facciamo una semplice proporzione può essere che viene. Le due grandezze sono direttamente proporzionali. Giusto?
M	8 sta…
F	Ore deve stare ad ore come bottiglie deve stare a bottiglie e cioè 8 : 600 = 14 : x.
M	8 : 600 = 14 : x ?
F	Quindi x = (600 * 14)/8 . Quando viene?
M	2.400
F	Non può essere.
M	Diviso due fa 1.200.
F	Questo può essere perché abbiamo utilizzato tutti i dati.
M	No. 300 scatole ogni ora?
F	Perché no. Dovrebbe venire il doppio di quanto dovrebbe venire per 8h. 75 scatole da 12 bottiglie in 1h dovrebbero venire il doppio da 6 in 1h . Quindi facendo 2.400:14… Ma cosa fai?
M	Aspetta. 150 x 14 = 2.100
F	Come ti viene 2.100? Cosa stai facendo?
M	Hai detto che devono venire il doppio in 1h, quindi ho fatto: 75 x 2 = 150 e poi 150 x 14 = 2.100
F	E' giusto? Voglio fare un conto. Se faccio il numero totale delle bottiglie diviso 8 devo ottenere un numero doppio di 600. E invece no, quindi è giusto. Facciamo il ragionamento.
M	Va bene. Considerando che in un'ora vengono prodotte 75 scatole.
F	Ogni ora si producono 75 scatole da 12 bottiglie. Naturalmente il ragionamento è quello che la macchina ne fa sempre lo stesso numero.
M	Certo.
F	Questo conto non mi convince. Scriviamo il procedimento: 600 : 8 = 75 scatole all'ora. Quindi se consideriamo 75 scatole da 12 bottiglie all'ora, scatole da 6 dovrebbe farne il doppio in un'ora.
M	Certo che deve farne di più. Impiega più tempo.
F	Quindi dobbiamo fare 75 x 2 = 150.
M	Si, quindi 150 scatole da 6 bottiglie in un'ora. Adesso dobbiamo moltiplicare per le ore complessive e cioè 14.
F	Perfetto. Quindi 150 x 14 = 2.100 scatole da sei bottiglie all'ora. Possiamo fare una prova?
M	Si.

F	Se in 8h ne produce 600. In 16h ne produce 1.200. Quindi 2.400 da 6 bottiglie.
M	Ma in un’ora ne produce 150, quindi in due ore ne produce 300. Quindi se a 2.400 – 300 abbiamo 2.100.
F	E’ giusto.
M	Anche secondo me.