

The statistic implicative index of Gras: a distance between the contingency and the a-priori

Filippo Spagnolo¹

Abstract

The analysis “a priori” of a didactic situation there is a very important moment of experimental verification. In this article is presented a “distance” to introduce a priori analysis in the theory implicative of the variables and classes of variables of “Regis Gras Theory”.

Résumé

L’analyse a priori d’une situation didactique c’est un moment très important du control expérimental. Dans cet article on présente une “distance” pour introduire l’analyse a priori dans la théorie implicative des variables et classes de variables de Regis Gras.

Riassunto

L’analisi a priori di una situazione didattica è un momento molto importante del controllo sperimentale. In questa nota si presenta una “distanza” per introdurre l’analisi a priori nella teoria implicative di variabili e classi di variabili di Regis Gras.

The problem that has tried to face R.Gras² has been that to be able to answer to the following question: "Gived binary variable **a** and **b**, in which measure I can assure that in a population, from every observation than **a** it necessarily follows that of **b**? ". Or also in more lapidary way: "it is true that if **a** then **b**? ".

In general the answer is not possible and the researcher is had to be satisfied with an implication "almost" true. With the implicative analysis of R.Gras try to measure the degree of validity of a implicative proposition among varying binary and not. This statistic tool is set on searches concerning the Didactics of the Mathematics.

The modeling of the binary case is introduced.

A population is given E and a set of variable V, is wanted to give statistic meaning to the wide implication **a** \Rightarrow **b**.

Is A and B the set of under respective populations where the variable **a** and **b** take the value 1 (true). The intensity of the implication is formally expressed:

$$\varphi(a, \bar{b}) = 1 - \Pr ob[\text{card}(X \cap \bar{Y}) \leq \text{card}(A \cap \bar{B})] \quad [1]$$

¹G.R.I.M. Gruppo Ricerca Insegnamento delle Matematiche, Dipartimento di Matematica e Applicazione, Via Archirafi n.34, 90123 Palermo (Italia).

²Régis Gras, L’implication statistique (Nuovelle méthode exploratoire de données), R.D.M., La Pensée Sauvage, Grenoble, 1996.

X and Y are two under set of E, aleatory parts of E and that they respectively have the same cardinality of A and B. it is the complementary one of Y in comparison to E. it is the complementary one of B in comparison to E. it represents the fact not to possess the character b.

And it will be said:

$$[a \Rightarrow b \text{ acceptable to the threshold } \alpha(a, \bar{b}) = 1 - \alpha] \Leftrightarrow \text{Prob}[\text{card}(X \cap \bar{Y}) \leq \text{card}(A \cap \bar{B})] \leq \alpha$$

Where:

$$n_a = \text{card}A, n_b = \text{card}B, n_{a \wedge \bar{b}} = \text{card}(A \cap \bar{B}).$$

$$q(a, \bar{b}) = \frac{n_{a \wedge \bar{b}} - \frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}}} \quad [2]$$

$q(a, \bar{b})$ it represents the index of implication: indicative of the not implication than a on b.

The intensity of implication is given by the following formula:

$$\varphi(a, \bar{b}) = 1 - \text{Prob}[Q(a, \bar{b}) \leq q(a, \bar{b})] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{q(a, \bar{b})}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad [3]$$

$Q(a, \bar{b})$ it is the centered variable and redoubt deduced by the aleatory variable $\text{card}(X, \bar{Y})$ what it follows the law of Poisson of parameter

$n\pi = np(a)p(\bar{b}) = \frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}$ We suppose to have the two variable with the respective values drawn by a questionnaire type true / false:

	a	b
1.	1	1
2.	1	1
3.	0	1
4.	0	0
5.	1	1
6.	1	1
7.	0	1
8.	1	0
9.	0	0
10.	1	1
	6/	7/
	10	10

Example of calculation of the index of intensity of implication $a \Rightarrow b$:

$$n_a = 6$$

$$n_{\bar{b}} = 3$$

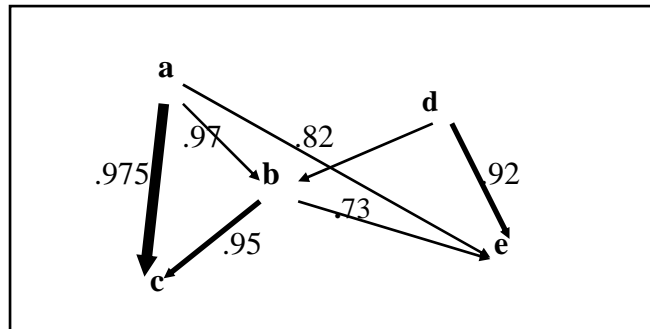
$$n_{a \wedge \bar{b}} = 1$$

$$q(a, \bar{b}) = \frac{1 - \frac{6 \cdot 3}{10}}{\sqrt{\frac{6 \cdot 3}{10}}} = -0,67$$

If the intensity of implication is enough small the two variable they won't be tied up. If $(a, b) = 0,75$ is a 75% confidence level for the implication as the probability that $\text{card}(X \cap Y)$ is smaller than 1 it is 0,25 (in general if the level of confidence is inferior to 95% not it acceptable). The level of confidence must be calculated

with the formula³ [5]. But naturally if the data to disposition are numerous the use it will be necessary of the computer.

The representation of a graphe of relationship of partial order induced by the intensity of implication by the possibility to visualize a didactic situation where they intervene more variables. The thickness of the arm points out the intensity that is nearby generally numerically suitable as in the following figure:



Implicative Cohesion is defined when for example dates three variables a, b, c is observed that $\varphi(a, \bar{b}) = 0.97$, $\varphi(b, \bar{c}) = 0.95$, $\varphi(a, \bar{c}) = 0.97$, then the oriented class from a toward c admits a good cohesion. He would not have been the same if we had respectively had the values 0.82, 0.38, 0.48.

In the hypothesis that the values of $a \Rightarrow b$ and $b \Rightarrow a$ result equal the arrows of the graph won't have the direction. The notion of statistic implication has been wide variable: numerical, modal, of interval (fuzzy)

And' builds from the group LINA⁴ a program on PC that allows to swiftly enough do the implicative analysis. The program calls Chic (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive) that it allows different statistics:

- statistics elementary type middle, varianza, correlations among variables;
- the analysis of the similarities of Lerman⁵;

³The value of q has to result negative so that the intensity of implication is acceptable.

Particularly $q(a, \bar{b}) \leq -1.64 \Leftrightarrow \varphi(a, \bar{b}) \geq 0.95$.

⁴ Laboratoire d'informatique de Nantes Atlantiques, Ecole Polytechnique de l'Université de Nantes (Prof. R. Gras). The software CHIC it is available to the following address: Prof.R.Gras IRMAR Institut Mathématique Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, Francia.

⁵ This operation follows the index of similarity of Lermann and classification the variable according to hierarchical levels. The index of similarity of Lerman follows the law of Poisson and comes so defined:

- The implicative analysis according to R.Gras, with the following information:
 1. Implicative Graph;
 2. Implicative hierarchy and the Meaningful Knots where the classes of the hierarchy are formed⁶;
 3. The individuals' contribution in the meaningful walks of the graph and to the meaningful classes of the hierarchy;
 4. Comparison among the implicative graph and the inclusive graph.

Implicative analysis and a-priori analysis.

In the implicative analysis an important problem that is transmitted us by the research in didactics is that related to the relationship among the analysis a-priori of one determined didactic situation and the relationship with the

$$s(a, b) = \frac{n_{a \wedge b} - \frac{n_a n_b}{n}}{\sqrt{\frac{n_a n_b}{n}}}$$

and it is tied up to the index of implication from the relationship :

$$\frac{q(a, \bar{b})}{s(a, b)} = -\sqrt{\frac{nb}{n\bar{b}}}$$

The index of similarity of Lermann and the implication of Gras also furnishing at times us information on the variable in the same direction they differ in the sense that similarity can be had without implication and vice versa.

⁶ The implicative hierarchy of the classes furnishes us some information on the implication among classes of variable. To be able to build a graph for the implicative hierarchy of the classes is necessary to introduce the concept of implicative cohesion:

$$\varphi(a, \bar{b}) = \text{Pr ob}(Q(a, \bar{b}) > q(a, \bar{b}))$$

The entropy of the event $(Q(a, \bar{b}) > q(a, \bar{b}))$ will be E :

$$E = -p \text{Log}_2(p) - (1 - p) \text{Log}_2(1 - p)$$

$$p = \varphi(a, \bar{b})$$

The entropy is maximum when $p = 0.5$

The entropy is least when $p = 1$ o $p = 0$ ($0 \text{Log}_2(0) = 0$)

Cohesion among a and b, $c(a, b) = \sqrt{1 - E^2}$ se $p \geq 0.5$

in contrary case $c(a, b) = 0$.

The implication does him for following aggregations of classes of implication. The principle is that to gather to every footstep of aggregation the couple of variable or the couple of classes of variable in that the maximum cohesion introduces it covers it considered.

The information that draws furnishes a profit tool to establish what classes of variable implicate other classes of variables and to what level.

experimental data. In the factorial analysis this relationship is checked by the use of the additional variable and additional Individuals. The additional variable and the additional Individuals have the purpose to build a statistic model of the analysis a-priori.

In the implicative analysis the problem was not set there actually to this moment. Through interviews with Regis Gras I have thought about introducing a distance among an implication a-priori so sort:

$$Q(a, \bar{b}) = \frac{0 - \frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}}} = -\sqrt{\frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}}$$

[4]

where in the formula 2 are set $n_{a \wedge \bar{b}} = 0$ that is the case is considered a-priori that to \bar{b} (in the set representation is the case of the complete inclusion). To this index Q corresponds an intensity of implication calculated with the formula 3 and suitable with Φ .

We are under the conditions to be able to define a distance among this implication theoretical a-priori and the experimental implication now, where $n_{a \wedge \bar{b}}$ not necessarily equal to 0.

Such distance will come so introduced:

$$\Delta = \sum_{i,j} \frac{1}{\Phi(a_i, \bar{b}_j)} [\Phi(a_i, \bar{b}_j) - \varphi(a_i, \bar{b}_j)]^2$$

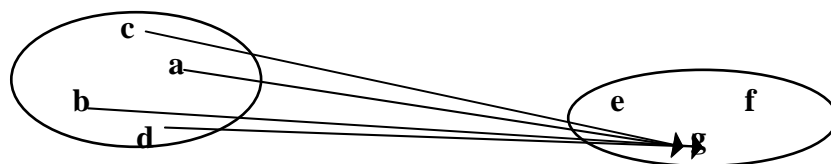
[5]

where the term $\frac{1}{\Phi(a_i, \bar{b}_j)}$ normalizes the distance.

When that is the value of this distance draws near then to 0 the relationship among our analysis a-priori and the contingency they don't get further. He can be sustained in relation of experimental analysis that a $0 \leq \Delta \leq 0.25$ can be considered acceptable. The case negative limit is 1.

But in an a-priori analysis we don't have only the case of simple implications, it will need therefore to extend the formula 5 to the case of classes of variable that they implicate classes of variable.

The first footstep will be that to extend the formula to the case in which n variables implicate an only variable. And in this case it will be enough to calculate that is the single implications of the variable the Δ_i and then to make the arithmetic average of the distances Δ_i . We can visualize this procedure:



But if we have to consider the implication among the variable to, b, c, d and and, f, g we have then to consider the distances $\Delta_{(a,g)}$, $\Delta_{(b,g)}$, $\Delta_{(c,g)}$, $\Delta_{(d,g)}$ and to make an average among these 4 distances, to make the same thing with the variable and and f. The following formula synthesizes the procedure:

$$\Delta_{(a,b,c,d),(e,f,g)} = \frac{1}{3} \left[\frac{\Delta_{(a,g)} + \Delta_{(b,g)} + \Delta_{(c,g)} + \Delta_{(d,g)}}{4} + \frac{\Delta_{(a,e)} + \Delta_{(b,e)} + \Delta_{(c,e)} + \Delta_{(d,e)}}{4} + \frac{\Delta_{(a,f)} + \Delta_{(b,f)} + \Delta_{(c,f)} + \Delta_{(d,f)}}{4} \right]$$

[6]

Both in the formula on the distance among the theoretical implication among two variable and the implication related to the contingency, and in the distance among the implication between classes of theoretical variable and classes of variable of the contingency we don't have any reference theoretical respect to the comparative validity.

A possibility could be that of χ^2 .

In this paper he is wanted to try this theoretical modelling in a research in didactics regarding the Epistemological Obstacles⁷.

The theoretical-experimental model for the individualization of the epistemological obstacles has been analyzed both through the factorial analysis and the implicative analysis. While for the factorial analysis it is possible to set an analysis a-priori through the introduction of supplementary variable and/or of supplementary individuals that puts in evidence the fundamental characteristics of the analysis a-priori, in the implicative analysis a this has not been possible to do in the paper already quoted.

Particularly, as it regards the factorial analysis, the used technique has been that to insert an supplementary individual that had the "profile" of the student that has as "epistemological obstacle" the Postulate of Eudoxe-Archimede. In this paper we won't penetrate there on the matters concerning the Postulate⁸ but we will face the matters related to the statistic model for the interpretation of a possible a-priori analysis.

For a best understanding of the text we introduce a chart regarding the single questions related to the questionnaires of the final experiment (Spagnolo, 1995). we also Insert the questionnaires in appendix for an easier reading of the work.

⁷ F.Spagnolo (1995), Obstacles épistémologiques: Le Postulat d'Eudoxe-Archimede, Tesi di Dottorato, Quaderni di Ricerca in Didattica, Supplemento al n.5, Palermo.

⁸ For this we postpone to the already quoted work.

Q1 (9a)	Connaissance du P.E.-A. en termes opérationnels. Il faut déterminer un n tel que le multiple du segment $na > b$. ($a < b$). Formulation directe du Postulat. La représentation avec des petits tirets donne une liaison avec la mesure. Réponses attendue : $n > 4$.
Q2 (10a)	Question semblable à la précédente, mais le segment b est beaucoup plus grand et le segment a a été dessiné plus petit. Réponses attendue : $n > 19$. Formulation directe du Postulat.
Q3 (11a)	Répondre affirmativement à l'existence du $n / na > b$. Formulation directe du Postulat.
Q4 (11b)	Donner une justification à la réponse donnée dans la question précédente. Formulation directe du Postulat.
Q5 (12a)	Connaissance du P.E.-A en terme opérationnel. Il faut déterminer un n tel que $(1/n)a < b$. Réponses attendue : $n > 3$. Formulation inverse du Postulat.
Q6 (13a)	Répondre affirmativement à l'existence du $n / (1/n)a < b$. Formulation inverse du Postulat.
Q7 (14a)	Formulation linguistique différente de la question précédente: "...il est toujours possible...".
Q8 (15a)	Changement du Point de vue: Modèle du "Veronese", non-Archimédien, en Géométrie. Réponse attendue: Affirmer la non validité du Postulat.
Q9 (18a)	Changement du Point de vue, L'élève doit suivre la construction évoquée dans la proposition X.1. ⁹ d'Euclide et conclure à sa validité (angles rectilignes).
Q10 (19a)	Changement du Point de vue, Validité de la proposition X,1 (angles curvilignes). (la question 17 indique comment confronter des angles curvilignes entre eux). L'élève doit effectuer une construction et conclure à la validité du PEA.
Q11 (20a)	Contexte généralisé (comparaison d'angles curviligne et rectiligne). L'élève doit rejeter la validité de la proposition X.1 dans ce cas.
Q12 (20b)	Résister aux contradictions avec la contingence: l'élève qui donne une justification de la X,1 (un contexte non Archimédien).
Q13 (20c)	Pour réussir, l'élève donne un argument pour le rejet de du procédé de la X,1 dans un contexte non Archimédien.
Q14 (21a)	Confirmation: l'obstacle persiste: Affirmer la validité de la proposition X,1, pour un élève, c'est montrer qu'il ne parvient pas à éprouver son modèle interprétatif dans un contexte plus général.
Q15 (22a)	Confirmation de la position Q13: 1 = Affirmer la non validité de la proposition X,1.
Q16 (3a)	Les élèves doivent chercher une relations d'ordre entre 3 triangles.

⁹Proposition X.1: Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

Q17 (4a)	Relation d'ordre entre 3 triangles (autres contextes).
Q18 (5a)	Relation d'ordre entre 3 triangles (autres contextes).
Q19 (6a)	R.O. entre angles rectilignes
Q20 (7a)	R.O. entre angles curviligne (paraboles).
Q21 (8a)	R.O. entre angles curvilignes (contingence).
Q22 (16a)	R.O. inclusion entre angles rectilignes.
Q23 (17a)	R.O. inclusion entre angles contingences.
Q24 (17b)	R.O. inclusion entre angles curviligne et contingence.

In an a-priori analysis regarding the epistemological obstacle we can individualize the following implications among groups of variables.

The elements held meaningful in the Model regarding the epistemological obstacle are substantially:

1. the resistance;
2. the persistence;
3. the change of the point of view;
4. the generalization.

In this brief note we will examine only the following implications:

1. If the obstacle withstands and persists then a change of the point of view it will be had [If (Q12, Q13, Q14, Q15) then (Q8, Q9, Q10)].
2. if the obstacle withstands and persists then a generalization it will be had [If (Q12, Q13, Q14, Q15) then (Q11)].

The students that will have a model of obstacle that Withstands and it Persists then will be also able to change the point of view. Or also all the students that have answered to the matters concerning the resistance and persistence of the obstacle have answered to the change of the point of view.

The formula [4] we can also write it:

$$Q(a, \bar{b}) = -\sqrt{\frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}}$$

[7]

The observed champion consisted of 107 students of the first year of course of degree in mathematics (academic year 1994/95).

The questionnaires have been given in an only solution in maximum once of 2 hours. The only support to disposition, besides the sheets of the questionnaire, a sheet of obtainable shiny paper to application.

The a-priori table of the implications it is the following:

$\Phi_{12,8}=0.99^{10}$	$\Phi_{12,9}=0.99$	$\Phi_{12,10}=1$
$\Phi_{13,8}=0.75$	$\Phi_{13,9}=0.79$	$\Phi_{13,10}=0.83$
$\Phi_{1248}=0.99$	$\Phi_{14,9}=0.91$	$\Phi_{14,10}=0.99$
$\Phi_{15,8}=1$	$\Phi_{15,9}=1$	$\Phi_{15,10}=1$

The table related to the contingency is the following:

$\varphi_{12,8}=0.98$	$\varphi_{12,9}=0.88$	$\varphi_{12,10}=0.65$
$\varphi_{13,8}=0.75$	$\varphi_{13,9}=0.79$	$\varphi_{13,10}=0$
$\varphi_{1248}=0.66$	$\varphi_{14,9}=0.99$	$\varphi_{14,10}=0.65$
$\varphi_{15,8}=0.79$	$\varphi_{15,9}=0.82$	$\varphi_{15,10}=0.67$

The relative distance is so calculated:

$$\Delta_{(12,13,14,15),(8,9,10)} = \frac{1}{3} \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\frac{1}{0.99}(0.99-0.98)^2 + \frac{1}{0.75}(0.75-0.75)^2 + \frac{1}{0.99}(0.99-0.66)^2 + (1-0.79)^2}{4} \right] + \\ & \left[\frac{\frac{1}{0.99}(0.99-0.88)^2 + \frac{1}{0.79}(0.79-0.79)^2 + \frac{1}{0.99}(0.99-0.99)^2 + (1-0.82)^2}{4} \right] + \\ & \left[\frac{(1-0.65)^2 + \frac{1}{0.83}(0.83-0)^2 + \frac{1}{0.99}(0.99-0.65)^2 + (1-0.67)^2}{4} \right] \end{aligned} \right\} = 0.116$$

The value of this distance 0.116 are inclusive among 0 and 0.25 that it results to be acceptable, therefore the a-priori analysis regarding the implication between the resistance and the persistence of the obstacle he is confirmed by the contingency.

The distance regarding the implication between the resistance and persistence of an obstacle and the generalization of the context has the following value¹¹:

$$\Delta_{(12,13,14,15),(11)}=0.319$$

what it results of few greater of the value pointed out by theoretical and experimental considerations.

You could make then some considerations on the model regarding the epistemological obstacle:

1. The context regarding the generalization all is played on an only matter and of the new matters should perhaps be added for specifying better this important element of the model;

¹⁰ In this particular case $n_{12} = 14$, $n_{\bar{8}} = 53$, $q_{12,8} = -0.70$.

¹¹ The calculations are not brought concerning this distance.

“Quaderni di Ricerca in Didattica”, n.7, 1997.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

2. Does the context regarding the generalization put in discussion the model?
3. Is this introduced distance meaningful?

Bibliography

- Agrawal R. et als (1993). *Mining association rules between sets of items in large databases*, Proc. of the ACM SIGMOD'93.
- Bodin, A. (1996). *Improving the Diagnostic and Didactic Meaningfulness of Mathematics Assessment in France*, Annual Meeting of the American Educational Research Association AERA - New-York
- Couturier R. (2001). *Traitement de l'analyse statistique implicative dans CHIC*, Actes des Journées sur la « Fouille dans les données par la méthode d'analyse implicative »
- Gras R. (1979). *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques*, Thèse d'Etat, Université de Rennes 1.
- Gras R. (2000). *Les fondements de l'analyse implicative statistique*, Quaderni di Ricerca in Didattica, Palermo, <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno9.htm>
- Gras R., Diday E., Kuntz P. et Couturier R. (2001). *Variables sur intervalles et variables-intervalles en analyse implicative*, Actes du 8ème Congrès de la Société Francophone de Classification de Pointe à Pitre, 17-21 décembre 2001, pp 166-173.
- R. Gras, R. Couturier, F. Guillet, F. Spagnolo (2005), Extraction de règles en incertain par la méthode statistique implicative, *Comptes rendus des 12èmes Rencontres de la Société Francophone de Classification, Montréal 30 mai-1^{er} juin 2005, UQAM*, p. 148-151.
- Lagrange J.B. (1998). *Analyse implicative d'un ensemble de variables numériques ; application au traitement d'un questionnaire aux réponses modales ordonnées*, Revue de Statistiques Appliquées, XLVI (1), p. 71-93.
- Lerman I.C. (1981) Classification et analyse ordinale des données, Dunod, Paris
- Lerman I.C., Gras R., Rostam H. (1981). *Elaboration et évaluation d'un indice d'implication pour des données binaires*, I et II, Mathématiques et Sciences Humaines n° 74, p. 5-35 et n° 75, p. 5-47.
- Spagnolo F. – R. Gras (2004), *Fuzzy implication through statistic implication: a new approach in Zadeh's framework*, 23rd International Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society, NAFIPS (IEEE), Banff, Canada, Edited by Scott Dick-Lukasz Kurgan-Petr Musilek-Witold Pedrycz-Mark Reformat (IEEE Catalog 04TH8736, ISBN 0-7803-8376-1), pagg 425-429, Vol I.
- Spagnolo F., L'Analisi Statistica Implicativa : uno dei metodi di analisi dei dati nella ricerca in didattica delle Matematiche, Troisième Rencontre Internationale A.S.I. (Analyse Statistique Implicative), Octobre 2005, Palermo. Supplemento 2 al n.15 “Quaderni di Ricerca in Didattica” http://math.unipa.it/~grim/asi/suppl_quad_15_2.htm .

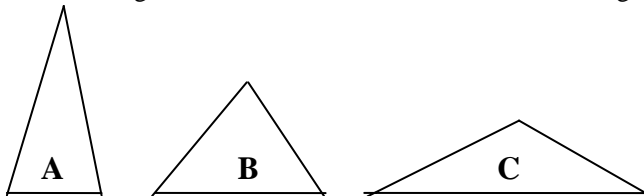
Annexe 1

Questionnaire on Archimedean sets and not Archimedean sets.

QUESTIONNAIRE 0

- 1- Marque la réponse ou les réponses qui, à ton avis, sont correctes¹²:
- Le mot “multiple” peut signifier:
 - a) être plus grand que.....
 - b) être n fois que.....
 - c) Donne la définition que tu estimes la plus correcte:
- 2-
- Le mot “sous-multiple” peut signifier:
 - a) être plus petit que.....
 - b) être 1/n fois que.....
 - c) Donne la définition que tu estimes la plus correcte:

- Q16** - Les triangles suivants sont ordonnés comme dans la figure $A < B < C$.



Quelle est, pour toi, une relation d'ordre possible?

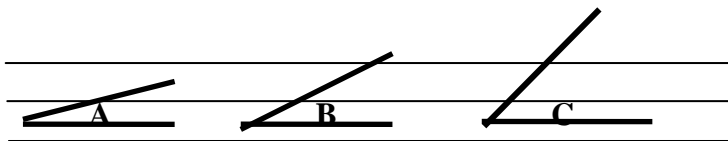
- Q17** - En se référant à la figure de l'exercice précédent, en tenant compte des triangles ordonnés de la manière suivante $C < B < A$.

Quelle est, pour toi, une relation d'ordre possible?

- Q18** - En se référant à la figure de l'exercice Q3, en tenant compte des triangles ordonnés de la manière suivante $C \leq A < B$.

Quelle est, pour toi, une relation d'ordre possible?

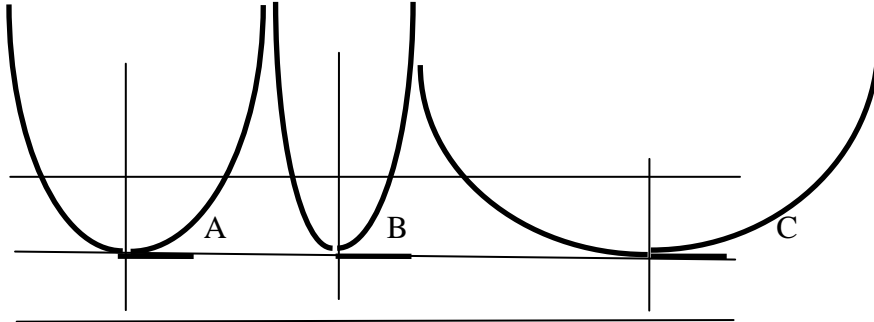
- Q19** - En tenant compte des angles ordonnés de la manière suivante $A < B < C$.



Quelle est, pour toi, une relation d'ordre possible?

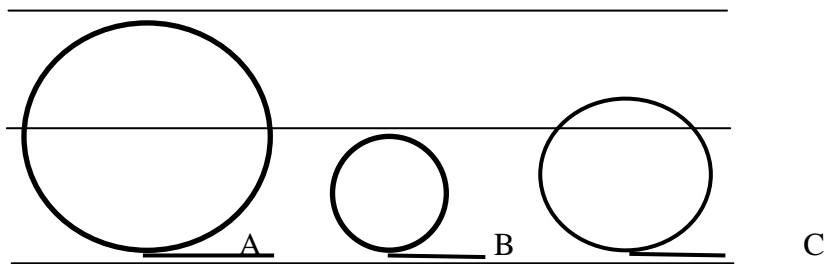
¹²Les deux premières questions n'ont pas été utilisées dans l'analyse des données.

Q20 - En tenant compte des paraboles ordonnées suivantes $A < B < C$.



Quelle est, pour toi, une relation d'ordre possible?

Q21 - En tenant compte des circonférences suivantes et des angles formés par les circonférences et par les segments tangents, ces angles étant ordonnés ainsi : $A < B < C$.



Quelle est, pour toi, une relation d'ordre possible?

Q1 - Soient deux segments **a** et **b** donnés (avec $a < b$), trouve un nombre naturel n tel que $na > b$.



$n = \dots\dots\dots$

Q2 - Soient deux segments **a** et **b** donnés (avec $a < b$), trouve un nombre naturel n tel que $na > b$.



$n = \dots\dots\dots$

Q3 - En se référant à l'exercice précédent, considérons le segment **b** très grand, est-il toujours possible de trouver un nombre naturel n tel que $na > b$?

Q4 Donne une raison à la réponse

Q5 - Soient deux segments donnés **a** et **b** avec $a < b$:



Quel est le nombre naturel n qui vérifie cette relation $(1/n)a < b$?

$n = \dots\dots\dots$

- Q6** - En se référant à l'exercice précédent, existera-t-il dans tous les cas (avec $b < a$) un nombre naturel n tel que $(1/n)a < b$?
- Q7** - En se référant à l'exercice précédent, on considère le segment b très petit. Est-il toujours possible de trouver un nombre naturel n tel que $(1/n)a < b$?

QUESTIONNAIRE du “VERONESE”

Définition du segment.

Soient deux points **A** et **B** donnés qui appartiennent au système formé par un nombre fini de droites équidistantes, on appelle **segment AB** l'ensemble des points qui suivent **A** et précèdent **B**.

Exemple 1

Considérons la demi-droite naturelle:

0 1 2 3 4 5 6 7 ... n n+1 ...>

A **B**

Le segment **AB** est l'ensemble (3,4,5,6).

Exemple 2

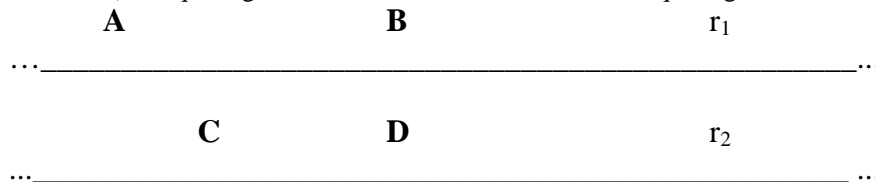
Considérons le système formé par deux droites réelles parallèles r_1 et r_2 .

Par système on entend un modèle dans lequel il y a seulement les deux droites réelles.

On introduit dans ce modèle la relation d'ordre suivante entre segments:

1) Si deux **segments AB** et **CD** appartiennent à la même droite, la relation d'ordre coïncide avec la relation usuelle d'Euclide ($AB < CD$ si on translate **CD** tel que **A** coïncide avec **C** et **B** précède **D**).

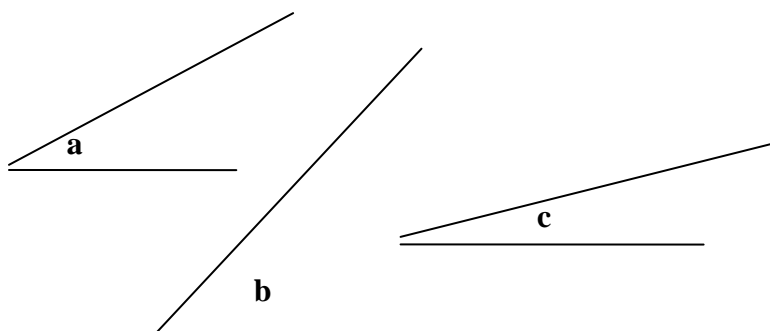
2) Chaque segment de la droite r_1 est inférieur à chaque segment de la droite r_2 .



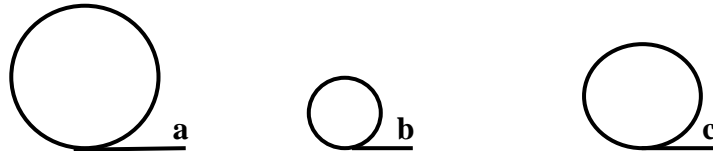
- Q8** - En se référant à la figure, le segment **AB** est inférieur au segment **CD**. Dans ce cas, existe-t-il un multiple de **AB** qui dépasse le segment **CD**?
 Donne une raison à la réponse

QUESTIONNAIRE SUR LA PROPOSITION d'EUCLIDE X,1

Q22 - Considère les angles rectilignes a), b), c) suivants et mets en ordre selon la relation d'ordre d'inclusion:



Q23 - Considère les angles curvilignes a), b), c) suivants, mets en ordre selon la relation d'ordre d'inclusion:

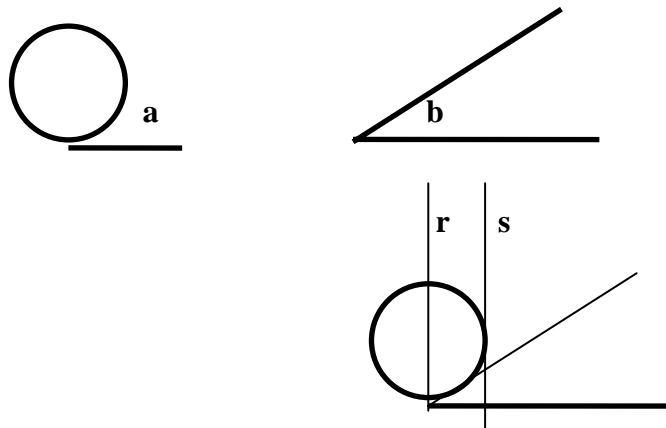


(OBSERVATION: Remarque qu'une relation équivalente à cette donnée peut être définie en considérant les inverses des rayons des circonférences.)

Q24 Écris la relation entre r_a (rayon de la circonférence relatif à l'angle a), r_b (rayon de la circonférence relatif à l'angle b), r_c (rayon de la circonférence relatif à l'angle c):

Lis attentivement

On considère maintenant les angles a) et b) suivants. En se référant à la figure qui superpose les deux angles, on dit que $a < b$ si la partie de a comprise entre les droites r et s (pour le point d'intersection) est incluse dans la partie de b comprise entre les droites.



PROPOSITION X,1 D'EUCLIDE

“Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.”

Exemple 1

Considérons les segments a et b:



- On construit la moitié de **b**: dans ce cas **b** est formé de 16 tirets, sa moitié sera de 8 tirets:

$\frac{b}{2}$

- On construit la moitié de **b/2**: dans ce cas **b/2** est formé de 8 tirets, sa moitié sera de 4 tirets:

$\frac{b}{4}$

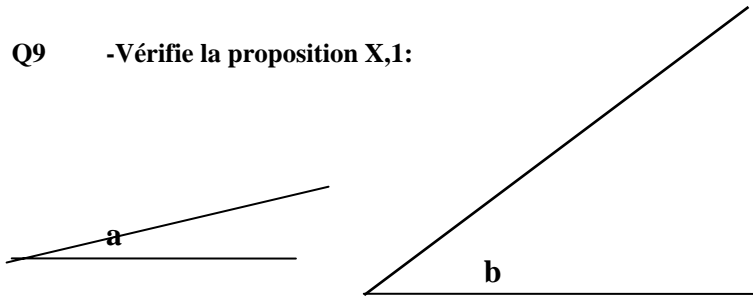
On construit la moitié de **b/4**: Dans ce cas **b/4** est formé de 4 tirets, sa moitié sera de 2 tirets:

$\frac{b}{8}$

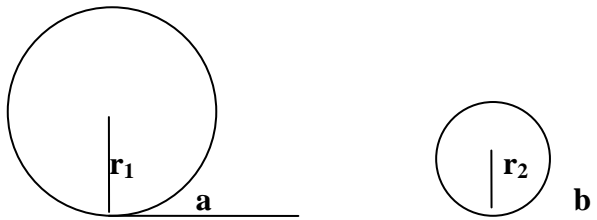
--

Maintenant **b/8** est plus petit que **a**, et la proposition X,1 est vérifiée dans ce cas particulier.

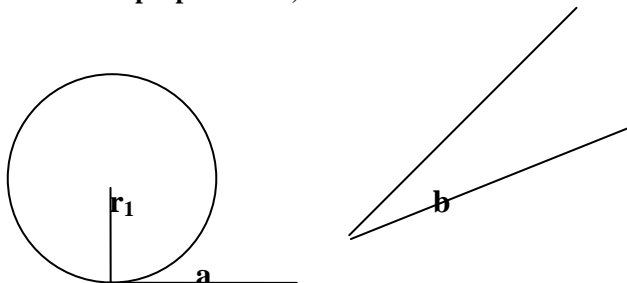
Q9 -Vérifie la proposition X,1:



Q10 - Vérifie la proposition X,1
 (On peut utiliser la relation d'ordre mise en évidence par l'observation de la question Q17)



Q11 - Vérifie la proposition X,1



- Q12** - En relation avec la proposition X,1, que peux-tu dire de la question Q20:
- Q13** - La X,1 est valide parce que
- Q14** - La X,1 n'est pas valide parce que.....