

## **L’analisi a-priori e l’indice di implicazione statistica di Gras**

**Filippo Spagnolo<sup>1</sup>**

### **Abstract**

The analysis “a priori” of a didactic situation there is a very important moment of experimental verification. In this article is presented a “distance” to introduce a priori analysis in the theory implicative of the variables and classes of variables of “Regis Gras Theory”.

### **Résumé**

L’analyse a priori d’une situation didactique c’est un moment très important du control expérimental. Dans cet article on présente une “distance” pour introduire l’analyse a priori dans la théorie implicative des variables et classes de variables de Regis Gras.

### **Riassunto**

L’analisi a priori di una situazione didattica è un momento molto importante del controllo sperimentale. In questa nota si presenta una “distanza” per introdurre l’analisi a priori nella teoria implicativi di variabili e classi di variabili di Regis Gras.

### ***Analisi implicativa tra variabili***

Il problema che ha cercato di affrontare R.Gras<sup>2</sup> è stato quello di poter rispondere alla seguente questione: “Date delle variabili binarie **a** e **b**, in quale misura posso assicurare che in una popolazione, da ogni osservazione di **a** segue necessariamente quella di **b**?”. O anche in maniera più lapidaria :”E’ vero che se **a** allora **b**?”.

In generale la risposta non è possibile ed il ricercatore si deve accontentare di una implicazione “quasi” vera. Con l’analisi implicativa di R.Gras si cerca di misurare il grado di validità di una proposizione implicativa tra variabili binarie e non. Questo strumento statistico viene messo a punto su ricerche riguardanti la Didattica delle Matematiche.

Viene presentata la modellizzazione del caso binario.

Siano date una popolazione **E** e un insieme di variabili **V**, si vuole dare significato statistico alla implicazione larga **a**  $\Rightarrow$  **b**.

---

<sup>1</sup>G.R.I.M. Gruppo Ricerca Insegnamento delle Matematiche, Dipartimento di Matematica e Applicazione, Via Archirafi n.34, 90123 Palermo (Italia).

<sup>2</sup>Régis Gras, L’implication statistique (Nouvelle méthode exploratoire de données), R.D.M., La Pensée Sauvage, Grenoble, 1996.

Siano A e B gli insiemi delle sotto popolazioni rispettive dove la variabile a e b prendono il valore 1 (vero). L'intensità della implicazione viene espressa formalmente:

$$\varphi(a, \bar{b}) = 1 - \text{Pr ob}[\text{card}(X \cap \bar{Y}) \leq \text{card}(A \cap \bar{B})] \quad [1]$$

X e Y sono due sotto insiemi di E, parti aleatorie di E e che hanno la stessa cardinalità rispettivamente di A e B.  $\bar{Y}$  é il complementare di Y rispetto ad E.  $\bar{B}$  é il complementare di B rispetto ad E.  $\bar{b}$  rappresenta il fatto di non possedere il carattere b.

E si dirà:

$$[a \Rightarrow b \text{ accettabile alla soglia } \varphi(a, \bar{b}) = 1 - \alpha] \Leftrightarrow \text{Pr ob}[[\text{card}(X \cap \bar{Y}) \leq \text{card}(A \cap \bar{B})] \leq \alpha$$

Dove:

$$n_a = \text{card}A, n_b = \text{card}B, n_{a \wedge \bar{b}} = \text{card}(A \cap \bar{B}).$$

$$q(a, \bar{b}) = \frac{n_{a \wedge \bar{b}} - \frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}}} \quad [2]$$

$q(a, \bar{b})$  rappresenta l'indice d'implicazione: indicatore della non implicazione di a su b.

L'intensità d'implicazione viene data dalla seguente formula:

$$\varphi(a, \bar{b}) = 1 - \text{Pr ob}[Q(a, \bar{b}) \leq q(a, \bar{b})] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{q(a, \bar{b})}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad [3]$$

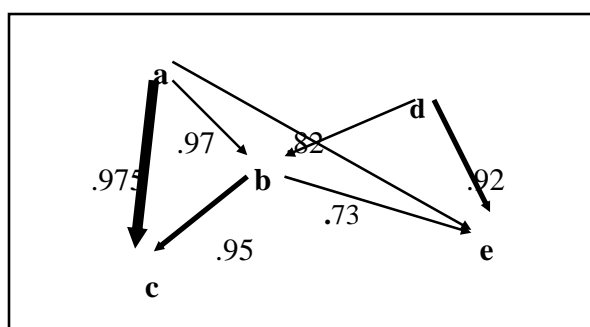
$Q(a, \bar{b})$  é la variabile centrata e ridotta dedotta dalla variabile aleatoria  $\text{card}(X, \bar{Y})$  che segue la legge di Poisson di parametro  $n\pi = np(a)p(\bar{b}) = \frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}$ .

Supponiamo di avere le due variabili con i rispettivi valori ricavati da un questionario di tipo vero/falso:

	a	b	<p style="text-align: center;"><i>Esempio di calcolo dell'indice di intensità di implicazione</i></p> <p style="text-align: center;"><math>a \Rightarrow b:</math></p> $n_a = 6$ $n_{\bar{b}} = 3$ $n_{a \wedge \bar{b}} = 1$ $q(a, \bar{b}) = \frac{1 - \frac{6 \cdot 3}{10}}{\sqrt{\frac{6 \cdot 3}{10}}} = -0,67$
1.	1	1	
2.	1	1	
3.	0	1	
4.	0	0	
5.	1	1	
6.	1	1	
7.	0	1	
8.	1	0	
9.	0	0	
10.	1	1	
	6/ 10	7/ 10	

Se l'intensità d'implicazione è abbastanza piccola le due variabili non saranno legate. Se  $\varphi(a,b)=0,75$  è un livello di confidenza del 75% per l'implicazione in quanto la probabilità che  $\text{card}(X \cap Y)$  sia più piccola di 1 è 0,25 (In generale se il livello di confidenza è inferiore al 95% non lo si ritiene accettabile). Il livello di confidenza va calcolato con la formula<sup>3</sup> [5]. Ma naturalmente se i dati a disposizione sono numerosi sarà necessario l'uso del computer.

La rappresentazione di un grafo di relazione d'ordine parziale indotto dall'intensità di implicazione da la possibilità di visualizzare una situazione didattica dove intervengono più variabili. Lo spessore del braccio indica l'intensità che generalmente è indicata numericamente accanto come nella seguente figura:



Viene definita coesione implicativa quando per esempio date tre variabili **a**, **b**, **c** si osserva che  $\varphi(a,\bar{b}) = 0.97$ ,  $\varphi(b,\bar{c}) = 0.95$ ,  $\varphi(a,\bar{c}) = 0.97$ , allora la classe orientata da **a** verso **c** ammette una buona coesione. Non sarebbe stato lo stesso se avessimo avuto rispettivamente i valori 0.82, 0.38, 0.48.

Nella ipotesi che i valori di  $a \Rightarrow b$  e  $b \Rightarrow a$  risultano uguali le frecce del grafo non avranno la direzione. La nozione di implicazione statistica è stata estesa anche a variabili modali e variabili numeriche.

E' stato messo a punto dal gruppo I.R.MA.R.<sup>4</sup> un programma su PC che consente di fare l'analisi implicativa abbastanza celermente. Il programma si chiama CHIC (Classification Hiérachique Implicative et Cohésive) che permette differenti statistiche:

- statistiche elementari tipo media, varianza, correlazioni tra variabili;
- l'analisi delle similarità di Lerman<sup>5</sup>;

<sup>3</sup>Il valore di q deve risultare negativo affinché l'intensità di implicazione  $\varphi$  sia accettabile.

In particolare  $q(a,\bar{b}) \leq -1.64 \Leftrightarrow \varphi(a,\bar{b}) \geq 0.95$ .

<sup>4</sup>Istituto di ricerca Matematica di Rennes, Università di Rennes I, prof. Regis Gras. Il programma CHIC è disponibile al seguente indirizzo: Prof.R.Gras IRMAR Institut Mathématique Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, Francia.

<sup>5</sup>Questa operazione segue l'indice di similarità di Lermann e classifica le variabili secondo livelli gerarchici. L'indice di similarità di Lerman segue la legge di Poisson e viene così definito:

- L'analisi implicativa secondo R.Gras, con le seguenti informazioni:
  1. Grafo Implicativo;
  2. Gerarchia implicativa e i Nodi Significativi dove si formano le classi della gerarchia<sup>6</sup>;
  3. Contribuzione degli individui nei cammini significativi del grafo e alle classi significative della gerarchia;
  4. Comparazione tra il grafo implicativo ed il grafo inclusivo.

### **Analisi implicativa e analisi a-priori**

Nell'analisi implicativa un problema importante che ci viene trasmesso dalla ricerca in didattica è quello relativo al rapporto tra l'analisi a-priori di una determinata situazione didattica e il rapporto con i dati sperimentali. Nell'analisi fattoriale questo rapporto è controllato dall'utilizzo delle variabili supplementari e

---

$$s(a,b) = \frac{n_{a \wedge b} - \frac{n_a n_b}{n}}{\sqrt{\frac{n_a n_b}{n}}}$$

ed è legato all'indice di implicazione dalla relazione:

$$\frac{q(a, \bar{b})}{s(a,b)} = -\sqrt{\frac{nb}{n\bar{b}}}$$

L'indice di similarità di Lermann e l'implicazione di Gras pur fornendoci informazioni sulle variabili nella stessa direzione a volte differiscono nel senso che si può avere similarità senza implicazione e viceversa.

<sup>6</sup>La gerarchia implicativa delle classi ci fornisce delle informazioni sulla implicazione tra classi di variabili. Per poter costruire un grafo per la gerarchia implicativa delle classi è necessario introdurre il concetto di coesione implicativa:

$$\varphi(a, \bar{b}) = \text{Pr } ob(Q(a, \bar{b}) > q(a, \bar{b}))$$

L'entropia dell'evento  $(Q(a, \bar{b}) > q(a, \bar{b}))$  sarà E:

$$E = -p \log_2(p) - (1-p) \log_2(1-p)$$

$$p = \varphi(a, \bar{b})$$

E è massima quando  $p = 0.5$

E è minima quando  $p = 1$  o  $p = 0$  ( $0 \log_2(0) = 0$ )

Coesione tra a e b,  $c(a,b) = \sqrt{1 - E^2}$  se  $p \geq 0.5$

in caso contrario  $c(a,b) = 0$ .

L'implicazione si fa per aggregazioni successive di classi d'implicazione. Il principio è quello di riunire ad ogni passo di aggregazione la coppia di variabili o la coppia di classi di variabili che presentano la massima coesione nella tappa considerata.

L'informazione che se ne ricava fornisce un utile strumento per stabilire quali classi di variabili implicano altre classi di variabili ed a quale livello.

Individui supplementari. Le variabili supplementari e gli Individui supplementari hanno lo scopo di costruire un modello statistico dell’analisi a-priori.

Nell’analisi implicativa non ci si era posti il problema sino a questo momento. Attraverso colloqui con Regis Gras<sup>7</sup> ho pensato di introdurre una distanza tra una implicazione a-priori così fatta:

$$Q(a, \bar{b}) = \frac{0 - \frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}}} = -\sqrt{\frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}} \quad [4]$$

dove nella formula **2** si é posto  $n_{a \wedge \bar{b}} = 0$ , cioè si é considerato il caso a-priori che  $a \rightarrow b$  (nella rappresentazione insiemistica é il caso della inclusione completa). A questo indice  $Q$  corrisponde una intensità di implicazione calcolata con la formula **3** ed indicata con  $\Phi$ .

Siamo adesso nelle condizioni di poter definire una distanza tra questa implicazione teorica a-priori e l’implicazione sperimentale, dove  $n_{a \wedge \bar{b}}$  non é necessariamente uguale a 0.

Tale distanza verrà così introdotta:

$$\Delta = \sum_{i,j} \frac{1}{\Phi(a_i, \bar{b}_j)} [\Phi(a_i, \bar{b}_j) - \varphi(a_i, \bar{b}_j)]^2 \quad [5]$$

dove il termine  $\frac{1}{\Phi(a_i, \bar{b}_j)}$  normalizza la distanza.

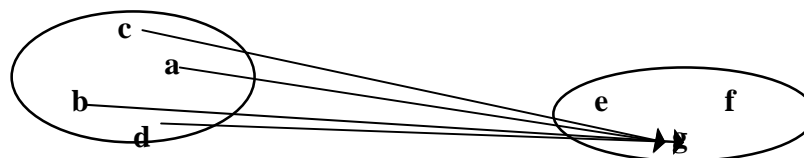
Quando cioè il valore di questa distanza si avvicina a 0 allora la relazione tra la nostra analisi a-priori e la contingenza non si discostano. Si può sostenere in base ad analisi sperimentali che un  $0 \leq \Delta \leq 0.25$  possa essere considerato accettabile. Il caso limite negativo é 1.

Ma in una analisi a-priori non abbiamo solo il caso di semplici implicazioni, bisognerà quindi estendere la formula **5** al caso di classi di variabili che implicano classi di variabili.

Il primo passo sarà quello di estendere la formula al caso in cui  $n$  variabili implicano una sola variabile. Ed in questo caso basterà calcolare le singole implicazioni delle variabili cioè i  $\Delta_i$  e poi fare la media aritmetica delle distanze  $\Delta_i$ . Possiamo visualizzare questo procedimento:

---

<sup>7</sup>In occasione di una sua visita a Palermo nell’ambito degli incontri seminari del GRIM (14 e 15 marzo 1997).



Ma se dobbiamo prendere in considerazione l'implicazione tra le variabili **a**, **b**, **c**, **d** ed **e**, **f**, **g** dobbiamo allora considerare le distanze  $\Delta_{(a,g)}$ ,  $\Delta_{(b,g)}$ ,  $\Delta_{(c,g)}$ ,  $\Delta_{(d,g)}$  e fare una media tra queste 4 distanze, fare la stessa cosa con le variabili e ed f . La formula seguente sintetizza il procedimento:

$$\Delta_{(a,b,c,d),(e,f,g)} = \frac{1}{3} \left[ \frac{\Delta_{(a,g)} + \Delta_{(b,g)} + \Delta_{(c,g)} + \Delta_{(d,g)}}{4} + \frac{\Delta_{(a,e)} + \Delta_{(b,e)} + \Delta_{(c,e)} + \Delta_{(d,e)}}{4} + \frac{\Delta_{(a,f)} + \Delta_{(b,f)} + \Delta_{(c,f)} + \Delta_{(d,f)}}{4} \right]$$

[6]

Sia nella formula sulla distanza tra l'implicazione teorica tra due variabili e l'implicazione relativa alla contingenza, sia nella distanza tra l'implicazione tra classi di variabili teoriche e classi di variabili della contingenza non abbiamo nessun riferimento teorico riguardo alla validità comparativa.

Una possibilità potrebbe essere quella del  $\chi^2$ .

In questo lavoro si é voluto provare questa modellizzazione teorica in un lavoro di ricerca didattica riguardante gli Ostacoli Epistemologici<sup>8</sup>.

Il modello teorico-sperimentale per l'individuazione degli ostacoli epistemologici é stato analizzato sia attraverso l'analisi fattoriale che l'analisi implicativa. Mentre per l'analisi fattoriale é possibile mettere a punto una analisi a-priori attraverso l'introduzione di variabili supplementari e/o di individui supplementari che mettano in evidenza le caratteristiche fondamentali dell'analisi a-priori, nell'analisi implicativa questo non é stato possibile fare nel lavoro già citato.

In particolare, per quanto riguarda l'analisi fattoriale, la tecnica utilizzata é stata quella di inserire un individuo supplementare che avesse il "profilo" dell'allievo che ha come "ostacolo epistemologico" il Postulato di Eudosso-Archimede. In questa sede non ci addentreremo sulle questioni riguardanti il Postulato<sup>9</sup> ma affronteremo le questioni relative al modello statistico per l'interpretazione di una eventuale analisi a-priori.

<sup>8</sup>F.Spagnolo (1995), *Obstacles épistémologiques: Le Postulat d'Eudoxe-Archimede*, Tesi di Dottorato, Quaderni di Ricerca in Didattica, Supplemento al n.5, Palermo.

<sup>9</sup>Per questo rimandiamo al già citato lavoro.

Per una migliore comprensione del testo introduciamo una tabella riguardante le singole domande relative ai questionari dell’esperimento finale (Spagnolo, 1995). Inseriamo anche i questionari in appendice per una lettura più agevole del lavoro.

<b>Q1</b> (9a)	Connaissance du P.E.-A. en termes opérationnels. Il faut déterminer un $n$ tel que le multiple du segment $na > b$ . ( $a < b$ ). Formulation directe du Postulat. La représentation avec des petits tirets donne une liaison avec la mesure. Réponses attendue : $n > 4$ .
<b>Q2</b> (10a)	Question semblable à la précédente, mais le segment $b$ est beaucoup plus grand et le segment $a$ a été dessiné plus petit. Réponses attendue : $n > 19$ . Formulation directe du Postulat.
<b>Q3</b> (11a)	Répondre affirmativement à l’existence du $n / na > b$ . Formulation directe du Postulat.
<b>Q4</b> (11b)	Donner une justification à la réponse donnée dans la question précédente. Formulation directe du Postulat.
<b>Q5</b> (12a)	Connaissance du P.E.-A en terme opérationnel. Il faut déterminer un $n$ tel que $(1/n)a < b$ . Réponses attendue : $n > 3$ . Formulation inverse du Postulat.
<b>Q6</b> (13a)	Répondre affirmativement à l’existence du $n / (1/n)a < b$ . Formulation inverse du Postulat.
<b>Q7</b> (14a)	Formulation linguistique différente de la question précédente: “...il est toujours possible...”.
<b>Q8</b> (15a)	Changement du Point de vue: Modèle du “Veronese”, non-Archimédien, en Géométrie. Réponse attendue: Affirmer la non validité du Postulat.
<b>Q9</b> (18a)	Changement du Point de vue, L’élève doit suivre la construction évoquée dans la proposition X.1. <sup>10</sup> d’Euclide et conclure à sa validité (angles rectilignes).
<b>Q10</b> (19a)	Changement du Point de vue, Validité de la proposition X,1 (angles curvilignes). (la question 17 indique comment confronter des angles curvilignes entre eux). L’élève doit effectuer une construction et conclure à la validité du PEA.
<b>Q11</b> (20a)	Contexte généralisé (comparaison d’angles curviligne et rectiligne). L’élève doit rejeter la validité de la proposition X.1 dans ce cas.
<b>Q12</b> (20b)	Résister aux contradictions avec la contingence: l’élève qui donne une justification de la X,1 (un contexte non Archimédien).
<b>Q13</b> (20c)	Pour réussir, l’élève donne un argument pour le rejet de du procédé de la X,1 dans un contexte non Archimédien.
<b>Q14</b> (21a)	Confirmation: l’obstacle persiste: Affirmer la validité de la proposition X,1, pour un élève, c’est montrer qu’il ne parvient pas à éprouver son modèle interprétatif dans un contexte plus général.
<b>Q15</b> (22a)	Confirmation de la position Q13: 1 = Affirmer la non validité de la proposition X,1.
<b>Q16</b> (3a)	Les élèves doivent chercher une relations d’ordre entre 3 triangles.
<b>Q17</b> (4a)	Relation d’ordre entre 3 triangles (autres contextes).
<b>Q18</b> (5a)	Relation d’ordre entre 3 triangles (autres contextes).
<b>Q19</b> (6a)	R.O. entre angles rectilignes
<b>Q20</b> (7a)	R.O. entre angles curviligne (paraboles).
<b>Q21</b> (8a)	R.O. entre angles curvilignes (contingence).
<b>Q22</b> (16a)	R.O. inclusion entre angles rectilignes.
<b>Q23</b> (17a)	R.O. inclusion entre angles contingences.
<b>Q24</b> (17b)	R.O. inclusion entre angles curviligne et contingence.

<sup>10</sup>Proposition X.1: Deux grandeurs inégales étant proposées, si l’on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, et si l’on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

In una analisi a-priori riguardante l’ostacolo epistemologico possiamo individuare le seguenti implicazioni tra gruppi di variabili.

Gli elementi ritenuti significativi nel Modello riguardante l’ostacolo epistemologico sono sostanzialmente:

- la resistenza;
- la persistenza;
- il cambiamento del punto di vista;
- la generalizzazione.

In questa breve nota esamineremo soltanto le seguenti implicazioni:

1. Se l’ostacolo resiste e persiste allora si avrà un cambiamento del punto di vista [Se (Q<sub>12</sub>, Q<sub>13</sub>, Q<sub>14</sub>, Q<sub>15</sub>) allora (Q<sub>8</sub>, Q<sub>9</sub>, Q<sub>10</sub>)].
2. Se l’ostacolo resiste e persiste allora si avrà una generalizzazione [Se (Q<sub>12</sub>, Q<sub>13</sub>, Q<sub>14</sub>, Q<sub>15</sub>) allora (Q<sub>11</sub>)].

Gli allievi che avranno un modello di ostacolo che Resiste e Persiste allora saranno anche in grado di cambiare il punto di vista. O anche tutti gli allievi che hanno risposto alle questioni riguardanti la resistenza e persistenza dell’ostacolo hanno risposto al cambiamento del punto di vista.

La formula [4] la possiamo anche scrivere:

$$Q(a, \bar{b}) = -\sqrt{\frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}} \quad [7]$$

Il campione osservato constava di 107 allievi del primo anno di corso di laurea in matematica (anno accademico 1994/95).

I questionari sono stati somministrati in un’unica soluzione in un tempo massimo di 2 ore. L’unico supporto a disposizione, oltre ai fogli del questionario, un foglio di carta lucida ottenibile a richiesta.

La tabella a-priori delle implicazioni é la seguente:

$\Phi_{12,8}=0.99^{11}$	$\Phi_{12,9}=0.99$	$\Phi_{12,10}=1$
$\Phi_{13,8}=0.75$	$\Phi_{13,9}=0.79$	$\Phi_{13,10}=0.83$
$\Phi_{14,8}=0.99$	$\Phi_{14,9}=0.91$	$\Phi_{14,10}=0.99$
$\Phi_{15,8}=1$	$\Phi_{15,9}=1$	$\Phi_{15,10}=1$

---

<sup>11</sup>In questo caso particolare  $n_{12} = 14$ ,  $n_{\bar{8}} = 53$ ,  $q_{12,8} = -0.70$ .



La tabella relativa alla contingenza é la seguente:

$\varphi_{12,8}=0.98$	$\varphi_{12,9}=0.88$	$\varphi_{12,10}=0.65$
$\varphi_{13,8}=0.75$	$\varphi_{13,9}=0.79$	$\varphi_{13,10}=0$
$\varphi_{14,8}=0.66$	$\varphi_{14,9}=0.99$	$\varphi_{14,10}=0.65$
$\varphi_{15,8}=0.79$	$\varphi_{15,9}=0.82$	$\varphi_{15,10}=0.67$

La relativa distanza é così calcolata:

$$\Delta_{(12,13,14,15),(8,9,10)} = \frac{1}{3} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{\frac{1}{0.99}(0.99-0.98)^2 + \frac{1}{0.75}(0.75-0.75)^2 + \frac{1}{0.99}(0.99-0.66)^2 + (1-0.79)^2}{4} \right] + \\ \left[ \frac{\frac{1}{0.99}(0.99-0.88)^2 + \frac{1}{0.79}(0.79-0.79)^2 + \frac{1}{0.99}(0.99-0.99)^2 + (1-0.82)^2}{4} \right] + \\ \left[ \frac{(1-0.65)^2 + \frac{1}{0.83}(0.83-0)^2 + \frac{1}{0.99}(0.99-0.65)^2 + (1-0.67)^2}{4} \right] \end{array} \right\} = 0.116$$

Il valore di questa distanza 0.116 é compreso tra 0 e 0.25 che risulta essere accettabile, quindi l’analisi a-priori riguardante l’implicazione tra la resistenza e la persistenza dell’ostacolo viene confermata dalla contingenza.

La distanza riguardante l’implicazione tra la resistenza e persistenza di un ostacolo e la generalizzazione del contesto ha il seguente valore<sup>12</sup>:

$$\Delta_{(12,13,14,15),(11)} = 0.319$$

che risulta di poco maggiore del valore indicato da considerazioni teoriche e sperimentali.

Si potrebbero quindi fare delle considerazioni sul modello riguardante l’ostacolo epistemologico:

- Il contesto riguardante la generalizzazione é giocato tutto su una sola questione e forse andrebbero aggiunte delle nuove questioni per puntualizzare meglio questo elemento importante del modello;
- Il contesto riguardante la generalizzazione mette in discussione il modello?
- Questa distanza introdotta é significativa?

---

<sup>12</sup>Non vengono riportati i calcoli riguardanti questa distanza.

### **Bibliografia**

- Agrawal R. et als (1993). *Mining association rules between sets of items in large databases*, Proc. of the ACM SIGMOD'93.
- Bodin, A. (1996). *Improving the Diagnostic and Didactic Meaningfulness of Mathematics Assessment in France*, Annual Meeting of the American Educational Research Association AERA - New-York
- Couturier R. (2001). *Traitement de l'analyse statistique implicative dans CHIC*, Actes des Journées sur la « Fouille dans les données par la méthode d'analyse implicative »
- Gras R. (1979). *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques*, Thèse d'Etat, Université de Rennes 1.
- Gras R. (2000). *Les fondements de l'analyse implicative statistique*, Quaderni di Ricerca in Didattica, Palermo, <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno9.htm>
- Gras R., Diday E., Kuntz P. et Couturier R. (2001). *Variables sur intervalles et variables-intervalles en analyse implicative*, Actes du 8ème Congrès de la Société Francophone de Classification de Pointe à Pitre, 17-21 décembre 2001, pp 166-173.
- R. Gras, R. Couturier, F. Guillet, F. Spagnolo (2005), Extraction de règles en incertain par la méthode statistique implicative, *Comptes rendus des 12èmes Rencontres de la Société Francophone de Classification, Montréal 30 mai-1<sup>er</sup> juin 2005, UQAM*, p. 148-151.
- Lagrange J.B. (1998). *Analyse implicative d'un ensemble de variables numériques ; application au traitement d'un questionnaire aux réponses modales ordonnées*, Revue de Statistiques Appliquées, XLVI (1), p. 71-93.
- Lerman I.C. (1981) *Classification et analyse ordinaire des données*, Dunod, Paris
- Lerman I.C., Gras R., Rostam H. (1981). *Elaboration et évaluation d'un indice d'implication pour des données binaires*, I et II, *Mathématiques et Sciences Humaines* n° 74, p. 5-35 et n° 75, p. 5-47.
- Spagnolo F. – R. Gras (2004), *Fuzzy implication through statistic implication: a new approach in Zadeh's framework*, 23rd International Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society, NAFIPS (IEEE), Banff, Canada, Edited by Scott Dick-Lukasz Kurgan-Petr Musilek-Witold Pedrycz-Mark Reformat (IEEE Catalog 04TH8736, ISBN 0-7803-8376-1), pagg 425-429, Vol I.
- Spagnolo F., *L'Analisi Statistica Implicativa : uno dei metodi di analisi dei dati nella ricerca in didattica delle Matematiche*, Troisième Rencontre Internationale A.S.I. (Analyse Statistique Implicative), Octobre 2005, Palermo. Supplemento 2 al n.15 “Quaderni di Ricerca in Didattica” [http://math.unipa.it/~grim/asi/suppl\\_quad\\_15\\_2.htm](http://math.unipa.it/~grim/asi/suppl_quad_15_2.htm) .

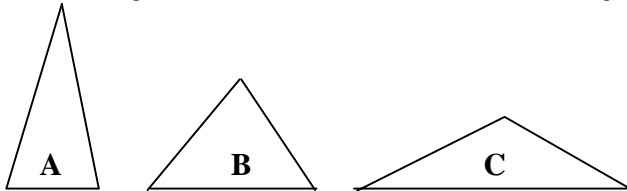
## Annexe 1

### Questionnaire on Archimedean sets and not Archimedean sets.

#### QUESTIONNAIRE 0

- 1- Marque la réponse ou les réponses qui, à ton avis, sont correctes<sup>13</sup>:
- Le mot “multiple” peut signifier:
    - a) être plus grand que.....
    - b) être n fois que.....
    - c) Donne la définition que tu estimes la plus correcte:
  - 2- - Le mot “sous-multiple” peut signifier:
    - a) être plus petit que.....
    - b) être 1/n fois que.....
    - c) Donne la définition que tu estimes la plus correcte:

- Q16 - Les triangles suivants sont ordonnés comme dans la figure  $A < B < C$ .



Quelle est, pour toi, une relation d'ordre possible?

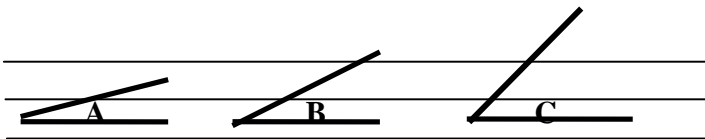
- Q17 - En se référant à la figure de l'exercice précédent, en tenant compte des triangles ordonnés de la manière suivante  $C < B < A$ .

Quelle est, pour toi, une relation d'ordre possible?

- Q18 - En se référant à la figure de l'exercice Q3, en tenant compte des triangles ordonnés de la manière suivante  $C \leq A < B$ .

Quelle est, pour toi, une relation d'ordre possible?

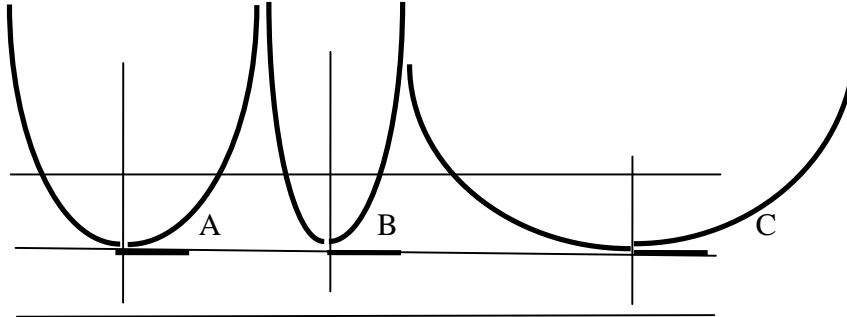
- Q19 - En tenant compte des angles ordonnés de la manière suivante  $A < B < C$ .



Quelle est, pour toi, une relation d'ordre possible?

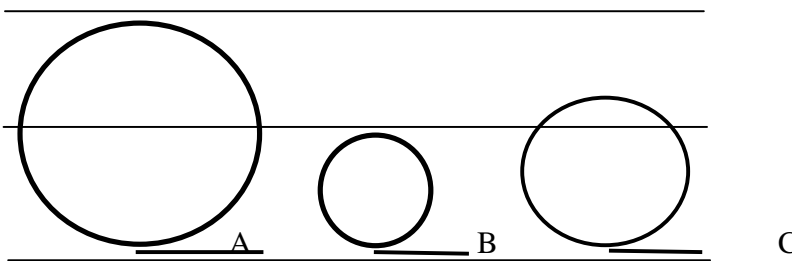
<sup>13</sup>Les deux premières questions n'ont pas été utilisées dans l'analyse des données.

**Q20** - En tenant compte des paraboles ordonnées suivantes  $A < B < C$ .



Quelle est, pour toi, une relation d'ordre possible?

**Q21** - En tenant compte des circonférences suivantes et des angles formés par les circonférences et par les segments tangents, ces angles étant ordonnés ainsi :  $A < B < C$ .



Quelle est, pour toi, une relation d'ordre possible?

**Q1** - Soient deux segments **a** et **b** donnés (avec  $a < b$ ), trouve un nombre naturel  $n$  tel que  $na > b$ .



$n = \dots\dots\dots$

**Q2** - Soient deux segments **a** et **b** donnés (avec  $a < b$ ), trouve un nombre naturel  $n$  tel que  $na > b$ .



$n = \dots\dots\dots$

**Q3** - En se référant à l'exercice précédent, considérons le segment **b** très grand, est-il toujours possible de trouver un nombre naturel  $n$  tel que  $na > b$ ?

**Q4** Donne une raison à la réponse .....

**Q5** - Soient deux segments donnés **a** et **b** avec  $a < b$ :



Quel est le nombre naturel  $n$  qui vérifie cette relation  $(1/n)a < b$ ?

$n = \dots\dots\dots$

- Q6** - En se référant à l'exercice précédent, existera-t-il dans tous les cas (avec  $b < a$ ) un nombre naturel  $n$  tel que  $(1/n)a < b$  ?
- Q7** - En se référant à l'exercice précédent, on considère le segment  $b$  très petit. Est-il toujours possible de trouver un nombre naturel  $n$  tel que  $(1/n)a < b$  ?

### QUESTIONNAIRE du “VERONESE”

Définition du segment.

Soient deux points **A** et **B** donnés qui appartiennent au système formé par un nombre fini de droites équidistantes, on appelle **segment AB** l'ensemble des points qui suivent **A** et précèdent **B**.

**Exemple 1**

Considérons la demi-droite naturelle:

0 1 2 3 4 5 6 7 ... n n+1 ...>

**A**                      **B**

Le segment **AB** est l'ensemble (3,4,5,6).

**Exemple 2**

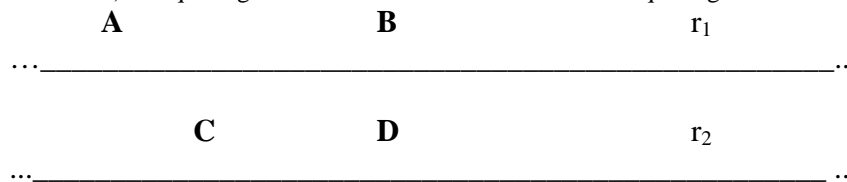
Considérons le système formé par deux droites réelles parallèles  $r_1$  et  $r_2$ .

Par système on entend un modèle dans lequel il y a seulement les deux droites réelles.

On introduit dans ce modèle la relation d'ordre suivante entre segments:

1) Si deux **segments AB** et **CD** appartiennent à la même droite, la relation d'ordre coïncide avec la relation usuelle d'Euclide ( $AB < CD$  si on translate **CD** tel que **A** coïncide avec **C** et **B** précède **D**).

2) Chaque segment de la droite  $r_1$  est inférieur à chaque segment de la droite  $r_2$ .

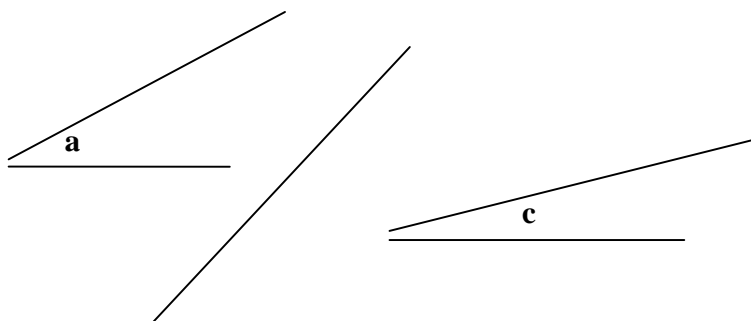


**Q8** - En se référant à la figure, le segment **AB** est inférieur au segment **CD**. Dans ce cas, existe-t-il un multiple de **AB** qui dépasse le segment **CD**?

Donne une raison à la réponse .....

### QUESTIONNAIRE SUR LA PROPOSITION d'EUCLIDE X,1

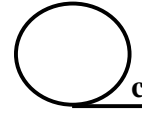
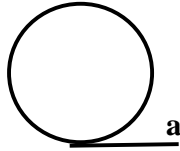
**Q22** - Considère les angles rectilignes a), b), c) suivants et mets en ordre selon la relation d'ordre d'inclusion:



**b**

---

**Q23** - Considère les angles curvilignes a), b), c) suivants, mets en ordre selon la relation d'ordre d'inclusion:

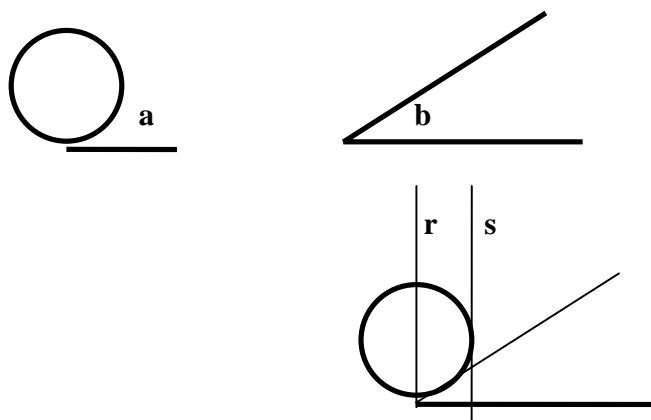


**(OBSERVATION: Remarque qu’une relation équivalente à cette donnée peut être définie en considérant les inverses des rayons des circonférences.)**

**Q24** Écris la relation entre  $r_a$  (rayon de la circonférence relatif à l’angle  $a$ ),  $r_b$  (rayon de la circonférence relatif à l’angle  $b$ ),  $r_c$  (rayon de la circonférence relatif à l’angle  $c$ ):

**Lis attentivement**

On considère maintenant les angles  $a$  et  $b$  suivants. En se référant à la figure qui superpose les deux angles, on dit que  $a < b$  si la partie de  $a$  comprise entre les droites  $r$  et  $s$  (pour le point d’intersection) est incluse dans la partie de  $b$  comprise entre les droites.



**PROPOSITION X,1 D’EUCLIDE**

“Deux grandeurs inégales étant proposées, si l’on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l’on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l’on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.”

**Exemple 1**

Considérons les segments  $a$  et  $b$ :



- On construit la moitié de  $b$ : dans ce cas  $b$  est formé de 16 tirets, sa moitié sera de 8 tirets:

$b/2$

-----

- On construit la moitié de  $b/2$ : dans ce cas  $b/2$  est formé de 8 tirets, sa moitié sera de 4 tirets:

$b/4$

----

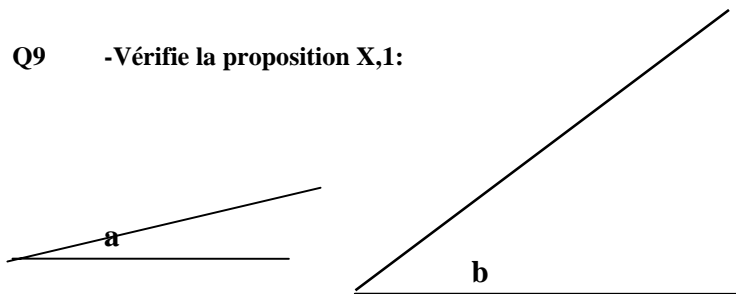
On construit la moitié de  $b/4$ : Dans ce cas  $b/4$  est formé de 4 tirets, sa moitié sera de 2 tirets:

$b/8$

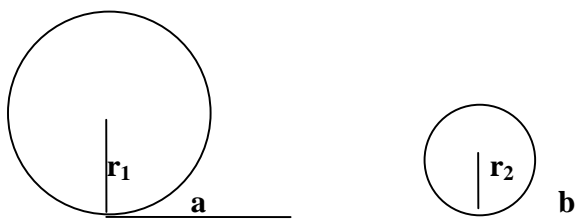
--

Maintenant  $b/8$  est plus petit que  $a$ , et la proposition X,1 est vérifiée dans ce cas particulier.

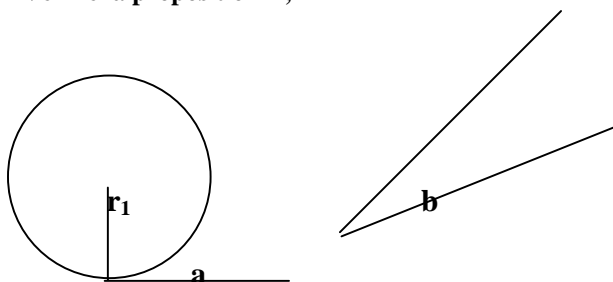
**Q9** - Vérifie la proposition X,1:



**Q10** - Vérifie la proposition X,1  
(On peut utiliser la relation d'ordre mise en évidence par l'observation de la question Q17)



**Q11** - Vérifie la proposition X,1



**Q12** - En relation avec la proposition X,1, que peux-tu dire de la question Q20:  
**Q13** - La X,1 est valide parce que .....  
**Q14** - La X,1 n'est pas valide parce que.....