Corso di Storia della Matematica
Anno Accademico 2003-2004

LA
MATEMATICA FINANZIARIA

Realizzato da: Costantino Fabbrizi

Titolare del corso: Prof. Pietro Nastasi

INTRODUZIONE

La matematica finanziaria è la branca di matematica che si occupa dei problemi di carattere finanziario. L'evoluzione dell'economia, dall'antichità ai giorni nostri, ha ampliato il campo d'azione della MF, aiutata dalle continue scoperte che i matematici hanno raggiunto nel corso dei secoli.
L'introduzione della moneta (nelle sue varie forme) come terzo elemento nello scambio di beni e servizi ha semplificato e contemporaneamente aumentato la circolazione dei beni, passando da uno schema economico di tipo M-M' ad uno del tipo M-D-M'.
Nel corso dei secoli (con l'evoluzione dei mercati, il progresso e le scoperte geografiche) si è arrivati ad un modello di tipo: D-M-D' che predomina la moneta come bene da investire per l'acquisto e la successiva vendita di beni o servizi finalizzata ad un ritorno di moneta D' maggiore di D.
La necessità di reperire finanziamenti per iniziare il ciclo economico porta la nascita delle prime agenzie di credito (le banche) dando vita ad uno schema economico del tipo: D-D' che sintetizza i problemi di carattere finanziario.
Fin dalle tavolette babilonesi ed i papiri egiziani troviamo di problemi che prendono spunto da situazioni di vita quotidiana. Ancora oggi, a livello didattico elementare, i problemi sono di natura pratica. Proprio per tal motivo sarebbe assurdo supporre la nascita della matematica (così come qualsiasi altra scienza) finalizzata a se stessa, senza nessun impatto con la realtà e la vita sociale.
L'economia, punto fondamentale della vita sociale di un paese, ha avuto dalla matematica un valido aiuto per la soluzione di problemi sia a livello microeconomico sia di carattere macroeconomico. Per tale ragione la MF oggi si può considerare la parte della matematica che ha maggior impatto con la realtà. Paradossalmente, però, la MF non trova largo spazio all'interno del palcoscenico matematico, che privilegia argomentazioni più astratte e di carattere pratico apparentemente minore; forse perché la formazione matematica è mirata alla conoscenza di argomenti di carattere algebrico o geometrico o forse perché la MF risolve problemi tecnici dando una maggiore attenzione al risultato a scapito del metodo risolutivo.
Prima di affrontare la trattazione della MF citiamo da alcuni manuali alcune definizioni che ci renderanno più chiaro il campo d'azione della MF stessa.

La matematica finanziaria si occupa di quelle operazioni di scambio che hanno per oggetto soltanto importi di denaro, e che pertanto si chiamano finanziarie. [B. De Finetti, Lezioni di Matematica Finanziaria, Roma, Edizioni Ricerche, 19681.

Di solito si presume che, quando si impiega un capitale, l'ammontare di questo non rimanga costante al passare del tempo. Pertanto si presenta il problema di confrontare tra loro capitali che si rendono disponibili a scadenze diverse. (...) Questo è il problema fondamentale della matematica finanziaria, dove, si badi bene, quello che interessa è solo il numero delle unità monetarie che costituiscono il capitale e non questioni di carattere economico, quali la svalutazione delle moneta, le variazioni del suo potere di acquisto e simili. [C.F. Manara, P. Canetta, Elementi di matematica finanziaria, Milano, Vita e Pensiero, 19921.

Il tema centrale della MF è la valutazione di importi di denaro non immediatamente disponibili, in condizioni di certezza oppure condizionati dal verificarsi di certi eventi. (...) elementi essenziali della valutazione finanziaria sono non solo l'importo, ma anche l'epoca in cui si manifestano le varie prestazioni monetarie. [G. Zambruno, Matematica per l'economia e la finanza, Milano, MacGraw-Hill, 1992].

LE ORIGINI DELLA MF: L'ARITMETICA COMMERCIALE

Cominciamo a dare alcune nomenclature e formule fondamentali in uso nell'aritmetica commerciale.

Indicando con

- C = Capitale investito
- i = tasso di rendimento
- t = tempo d'impiego,

si definisce interesse in un regime di capitalizzazione semplice il valore:

$$I = C \cdot i \cdot t$$

Indicando con M (= Montante) la somma del Capitale investito e degli Interessi prodotti, si ha:

$$M = C + I = C + (C \cdot i \cdot t) = C \cdot (1+it).$$

Si chiama legge d'interesse composto la funzione:

$$M = C \cdot (1+i)^t$$

Da questa ricaviamo la formula dell'interesse composto:

$$M - C = C \cdot (1+i)^t - C = C \cdot [(1+i)^t - 1].$$

La legge d'interesse composto viene fuori dalla capitalizzazione degli interessi. Questi ultimi, infatti, vengono pagati periodicamente e, sommati al Capitale iniziale, costituiscono il Capitale per il periodo successivo: in questo modo gli interessi producono interessi. In formule:

$I = C \cdot i\ t$	$M = C \cdot (1+i)$	per $t = 1$
$I = C \cdot i\ t$	$M = C \cdot (1+i)(1+i) = C \cdot (1+i)^2$	per $t = 2$
$I = C \cdot i\ t$	$M = C \cdot (1+i)^2 \cdot (1+i) = C \cdot (1+i)^3$	per $t = 3$

In presenza di periodi di capitalizzazione frazionati abbiamo la formula

$$M = C \cdot (1+i)^n \cdot (1+if)$$

dove il tempo $t = n + f$ ed $0 < f < 1$

Come si può facilmente notare, a parte il periodo di capitalizzazione nell'interesse composto, tutti i valori sono tra loro proporzionali e la ricerca delle formule inverse risulta particolarmente semplice.
Ad esempio, volendo calcolare in regime di capitalizzazione semplice, noti gli altri valori, avremo che:

$$I = C \cdot \mathbf{i} \cdot t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{i} = I/C{\cdot}t$$

Osserviamo inoltre che, sia per il regime semplice che per la capitalizzazione composta, il Montante è proporzionale al Capitale. Per cui, posto C = 1 abbiamo:

$$M = M(i,t)$$

Da ciò la possibilità di sintetizzare i conti attraverso la costruzione di tavole di riferimento di cui riportiamo come esempio:

$(1 + i)^n$

anni (n)	5,50%	5,75%	6%	6,25%
1	1,0550 0000	1,0575 0000	1,0600 0000	1,0650 0000
2	1,1130 2500	1,1183 0625	1,1236 0000	1,1289 0625
3	1,1742 4128	1,1826 0886	1,1910 1600	1,1994 6289
4	1,2388 2465	1,2506 0833	1,2624 7696	1,2744 2932
5	1,3069 6001	1,3225 1888	1,3382 2588	1,3540 8115
6	1,3788 4281	1,3985 6371	1,4185 9112	1,4387 1123
7	1,4546 7916	1,4789 8113	1,5036 3026	1,5286 3068
8	1,5346 8651	1,5640 2254	**1,5938 4807**	1,6241 7009
9	1,6190 9427	1,6539 5384	**1,6894 7896**	1,7256 8073
10	1,7081 4446	1,7490 5618	1,7908 5548	1,8335 3577
11	1,8020 9240	1,8469 2692	1,8982 9856	1,9481 3568
12	1,9012 0749	1,9559 8046	2,0121 9647	2,0698 8999
13	2,0057 7390	2,0684 4934	2,1329 2826	2,1992 5812
14	2,1160 9146	2,1873 8519	2,2609 0396	2,3367 1175
15	2,2324 7649	2,3131 5982	2,3965 5819	2,4827 5623

L'introduzione delle tavole ci offre la possibilità di esaminare il caso del tempo nella capitalizzazione composta e di introdurre un nuovo argomento.

L'INTERPOLAZIONE LINEARE

Oggi la determinazione del tempo nella formula:

$$M = C \cdot (1+i)^t$$

e' data da:

$$t = [\log M/C]/[\log(1+i)]$$

Ma, in epoche in cui il logaritmo deve ancora arrivare (John Napier visse a cavallo tra il XVI ed il XVII secolo) la determinazione del tempo risulta particolarmente laboriosa ed approssimativa.
L'algoritmo da seguire sarà quello dell'interpolazione lineare, un metodo antico in uso sin dagli antichi egizi e legato fortemente al metodo della falsa posizione.
Consideriamo, ad esempio, il seguente problema:

Il capitale di € 3.000 è stato impiegato al tasso del 6%. Determinare dopo quanto tempo esso dà come montante la somma di € 4.840.
Essendo:

$$C = 3.000,\ M = 4.840,\ i = 0{,}06 \quad \text{si ha che} \quad 4.840 = 3.000 \cdot (1{,}06)^t$$

In questo caso il tasso e' riportato sulla tavola sicché possiamo fare uso di quest'ultima. Si ha:

$$(1{,}06)^t = [4.840]/[3.000] = 1{,}61333$$

e leggendo i valori sulla tavola, in corrispondenza della colonna 6%, vediamo che 1,61333 e' compreso fra $(1{,}06)^8 = 1{,}59385$ e $(1{,}06)^9 = 1{,}68948$. Procedendo allora per interpolazione lineare fra i valori di t, dalla seguente tabella dei valori:

Valori di t	Valori di $(1{,}06)^t$
8	1,59385
8 + p	1,61333
9	1,68948

si trae la proporzione:

$$(9 - 8) : (8+p - 8) = (1{,}68948 - 1{,}59385) : (1{,}61333 - 1{,}59385)$$

da cui: $p = 0{,}204$

e quindi:

$$t = 8 + p = 8 + 0{,}204 = 8{,}204$$

pari a 8 anni, 2 mesi e 13 giorni.

Come si può notare da questo esempio fatto, il metodo dell'interpolazione lineare, sebbene non consideri la teoria dei logaritmi, è un calcolo approssimativo. Ciò in quanto si ammette che esista proporzionalità fra le variazioni dei valori che si scrivono sulla colonna di sinistra e le variazioni dei valori che si scrivono sulla colonna di destra. Il calcolo, seppure approssimativo, ha una differenza con i valori reali irrisoria ed è dunque considerato esatto, a meno di variazioni trascurabili.

UN COMMERCIANTE MATEMATICO:

FIBONACCI

Leonardo Pisano detto Fibonacci è considerato il più grande matematico cristiano del Medioevo. Nacque verso il 1170, figlio di un funzionario comunale che svolgeva le sue funzioni presso l'ufficio di notaio della Repubblica di Pisa. Il padre, verso il 1192, fu inviato in missione alla dogana di Bougie (città in prossimità di Algeri) e da qui invitò il figlio a raggiungerlo, perché si addestrasse nell'uso dei procedimenti aritmetici che gli arabi avevano forse appresi dagli indiani e diffondevano in tutti i loro domini. Leonardo, oltrepassando il programma paterno, spinse i propri studi sino alla parte più elevata dell'aritmetica araba. Rapito dal fascino di queste nuove conoscenze, lasciò Bougie e percorse l'intero bacino del Mediterraneo, alternando la mercatura con gli studi matematici.

Nel corso di questi viaggi, aveva 1incontrato illustri eruditi che gli avevano fatto conoscere gli *Elementi* di Euclide, le idee di al-Khwarizmi e forse anche *l'Aritmetica* di Diofanto.

Sullo scorcio del XII secolo ritornò in patria e al principio del secolo successivo (1202) scrisse la sua opera più famosa il *Liber Abaci*, cui arrise tale successo da richiedere, per incitamento del suo amico Michele Scoto, una seconda stesura (ultimata nel 1228). La parte algebrica dell'opera è chiaramente derivata da al-Khwarizmi, come confessa lo stesso Leonardo quando (p. 406), a margine del capitolo «Incipit pars tertia de soluzione quorundam questionum secundum Modum algebre et almuchabale, scilicet ad proportionem et restaurationem», apponeva la parola: «Maumeht», con .chiaro riferimento al matematico Mohammed ibn Musa al-Khwarizmi. A lui si deve infatti la composizione - sotto il regno (813-833) di al-

Mamun - del celebre *Libro del Calcolo dell'algébra e dell'almuqabala*, di cui Roberto di Chester (già traduttore del Corano) aveva fatto (nel 1145) una traduzione in latino.

Il Liber Abaci è certamente l'opera più nota di Leonardo: è un lavoro colossale in cui sono presentate le "novem figure" degli indiani e il "signum" 0, le operazioni sugli interi e le frazioni, le prove per 7, 9, 11, 13, i criteri di divisibilità per 9, la ricerca del massimo comun divisore e dei minimo comune multiplo, le regole di acquisto e vendita, gli scambi monetari, le regole del tre semplice e del tre composto, ecc. Infine, la sezione algebrica è dedicata interamente allo studio delle equazioni algebriche quadratiche, secondo i metodi di al-Khwarizmi, Abu Kamil e al-Karaji

Noi sorvoleremo sugli studi algebrici svolti da Fibonacci per giungere direttamente ai problemi di carattere finanziario (pag. 267-273).
Nel suo Liber Abaci Fibonacci affronta la MF proponendo 4 problemi inversi (calcolo del tasso, del tempo, del capitale iniziale) sorvolando su quelli diretti.
Affrontiamo il primo che così recita:

Quidam prestavit libras 100 ad usuras IIII.or denariorum per libram in mense supra quandarn dornurn, ex qua recoligebat in uno quoque anno nomine pensionis libras 30; et in capite uniuscuiusque anni debebat discomputare ipsas libras 30 de capitali, et lucro dietarum 100 librarurn. Queritur, quot annis, et mensibus, et diebus, et horis domum tenere debebat.

Per chi, come me, non ha conoscenze di latino è giusto dare la traduzione:

Un tale ha prestato 100 libre all'interesse di 4 denari per libra al mese sopra una certa casa, dalla quale ricavava, ogni anno, a titolo di affitto, 30 libre; e all'inizio di ogni anno doveva detrarre quelle 30 libre dal capitale e dall'interesse delle dette 100 libre. Si chiede quanti anni, e mesi, e giorni ed ore doveva tenere la casa.

Fibonacci comincia col calcolare il **tasso annuo** da quello **mensile** (ricordando che **1 libra = 20 soldi e 1 soldo = 12 denari**): 4 d. per una libra al mese. Poiché Id. = (1/12) s., allora il tasso è di (4/12) s. per 1 **libra al mese,** cioè **4** s. **per 1 libra all'anno;** e poiché ls. è 1/20 di libra, si tratta di un **tasso** di 4/20 di libra all'anno, cioè di **1/5 di libra all'anno (20%),** come lui dice. Il che implica che **5 libre** all'inizio di un anno diventano **6 libre** all'inizio dell'anno successivo. Leonardo così continua (daremo direttamente, per semplicità, la traduzione italiana):

E poiché l'affitto si detrae ogni anno dal capitale e dall'interesse, questo problema si assimila al seguente problema di viaggi: cioè che un tale aveva 100 libre, con le quali a ogni viaggio di 5 faceva 6; e spendeva 30 libre; si domanda quanti viaggi faceva con esse: se ti ricordi di quella regola [di viaggi], sono da investigare con attenzione le diminuzioni del capitale di anno in anno. Poiché di 5 si fa 6, prendi 1/5 di 100, cioè 20, ed aggiungi a 100, saranno 120; e tanto ebbe fra capitale e interesse nel primo anno: da cui togli l'affitto, cioè 30, rimangono 90 libre: mancano [perciò] 10 libre per arrivare a 100 libre, tale è la diminuzione [del capitale] nel primo anno. Ancora, prendi 1/5 delle 90 libre restanti. nel capitale del primo anno, saranno 18; che aggiungi a **90.** saranno 108; da cui togli l'affitto del secondo anno, resteranno 78 libre; da 90 mancano [dunque] 12 libre, che rappresentano la diminuzione del secondo anno. Ora, nel primo anno il suo capitale diminuì di 10 libre. Nel secondo diminuisce di 12 libre; dunque le diminuzioni avvengono proporzionalmente, cioè da 10 a 12, cioè come 10 sta a 12, ovvero come 5 sta a 6, così 12, che è la diminuzione del secondo anno, starà alla diminuzione del terzo anno. Pertanto moltiplicherai 6 per 12, e dividerai per 5, ottenendo $\frac{2}{5}14$ [noi, in forma mista, scriveremmo 14 + 2/5], che è la diminuzione del terzo anno: che moltiplica ancora per 6 e dividi per 5, ottenendo $\frac{2}{5}\frac{1}{5}17$, che è la diminuzione del quarto anno(….).

Conviene fermarsi un attimo per spiegare intanto sia l’origine che il significato dell’originale simbolo di Fibonacci: si tratta di moltiplicare 14 2/5 per 6/5.

Ora questo prodotto dà:

$$\left(14+\frac{2}{5}\right)\times\frac{6}{5}=\frac{72}{5}\times\frac{6}{5}=\frac{432}{25}=17+\frac{7}{25}=17+\frac{5}{25}+\frac{2}{25}=17+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\frac{1}{5}.$$

Dunque la scrittura di Fibonacci, $\frac{2}{5}\frac{1}{5}17$, segnala (da destra verso sinistra) rispettivamente: la parte intera (17), poi il secondo addendo (1/5) ed infine il terzo addendo (2/5 di 1/5 già scritto).

Il testo continua: moltiplica il risultato precedente ancora per 6/5 e ottieni così la diminuzione del quinto anno, cioè $\frac{2}{5}\frac{3}{5}\frac{3}{5}20$. Il calcolo si fa nella stessa maniera:

$$\frac{2}{5}\frac{1}{5}17\times\frac{6}{5}=\left(17+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\frac{1}{5}\right)\times\frac{6}{5}=\frac{432}{25}\times\frac{6}{5}=\frac{2592}{125}=20+\frac{92}{125}=$$
$$20+\frac{75}{125}+\frac{17}{125}=20+\frac{3}{5}+\frac{15}{125}+\frac{2}{125}=\frac{2}{5}\frac{3}{5}\frac{3}{5}20$$

Naturalmente, come indica Fibonacci, la procedura si può velocizzare:
dovendo moltiplicare $\frac{2}{5}\frac{1}{5}17\times\frac{6}{5}$**,** basta moltiplicare il numeratore della frazione intera (cioè 2) per 6/5, si otterrà 12/5, cioè **2** + 2/5. Si scrive la frazione 2/5 e l'intero **2** si somma al prodotto del secondo numeratore (cioè 1) per 6/5: si ottiene 8/5, cioè **1** + 3/5. Si scrive la frazione 3/5 a destra della precedente 2/5 e l'intero **1** si somma al prodotto di 17 per 6/5: si otterrà 103/5 = **20** + 3/5. L'ultima frazione si affianca alla destra delle due precedenti e l'intero 20 si scrive a destra della frazione.
Un'altra iterazione darà la diminuzione del sesto anno: $\frac{2}{5}\frac{0}{5}\frac{2}{5}\frac{4}{5}24$. Sommando tutte le sei diminuzioni si ottiene $\frac{2}{5}\frac{2}{5}\frac{2}{5}\frac{1}{5}99$, cioè una somma poco inferiore a 100 libre, il che significa che resta da estinguere questo residuo per una parte del settimo anno.

Noi fermiamo qui l'azione di Fibonacci ed i suoi laboriosi calcoli per rielaborare il problema con linguaggio e metodo risolutivo moderno.
Il problema viene tradotto (usando il simbolo € al posto della libra) così:

In quanto tempo si estingue un prestito di € 100, al tasso annuo del 20%, se viene rimborsato con rate costanti annue di € 30, equivalenti all'usufrutto di una casa ceduta al mutuante?

Le rate costanti di € 30 costituiscono una rendita di **n** termini annui (**n** incognita) al tasso del 20%, di cui conosciamo il valore attuale, € 100. Si tratta allora di risolvere l'equazione, nell'incognita **n**:

$$100 = 30 \cdot (1-v^n)/i$$

dove $\mathbf{v} = (1+i)^{-1}$ ed i = 0,20. Il valore di **v** è tabulato e quindi facile da calcolare. Con l'uso dei logaritmi giungiamo ad una soluzione del tipo:

$$(1{,}2)^{-n} = 1 - (2/3) \quad \text{ossia} \quad n = \log 3/\log 1{,}2 = 6{,}0256851$$

che equivale a **6 anni 9 giorni e 6 ore**.

Oltre alla risoluzione del problema Fibonacci usa l'analogia con il problema dei viaggi per il calcolo del **debito residuo**, distinguendo dalla rata costante la parte che serve per estinguere il debito e quella che costituisce l'interesse. In questo modo elabora uno schema riassuntivo che altro non è che il "piano d'ammortamento progressivo" che qui riportiamo:

anni	Calcolo D_s	D_s	Calcolo C_s	C_s	Calcolo I_s	I_s
0		100				
1	100x1,2-30	90	100-90	10	30-10	20
2	90x1,2-30	78	90-78	12	30-12	18
3	78x1,2-30	63,6	78-63,6	14,4	30-14,4	15,6
4	63,6x1,2-30	46,32	63,6-46,32	17,28	30-17,28	12,72
5	46,323x1,2-30	25,584	46,32-25,584	20,736	30-20,736	9,264
6	25,584x1,2-30	0,7008	25,584-0,7008	24,8832	30-24,8832	5,1168

E' intuitivo che, rimanendo costanti le rate e decrescendo le quote interessi (perché calcolate sul debito residuo), *le quote capitali risultino crescenti*. Precisamente, *crescono in progressione geometrica di ragione* (1+i).

Infatti, dall'essere $I_s = D_{s-1} \cdot i$, si ha:

$$I_{s+1} = Ds \cdot i = (D_{s-1} – C_s) \cdot i = D_{s-1} \cdot i – C_s \cdot i = I_s – C_s \cdot i.$$

Dunque la (s+I)-rna quota interessi diminuisce, rispetto alla precedente, di $C_s \cdot i$; perché la rata rimanga costante, di altrettanto deve crescere la quota capitale, cioè:

$$C_{s+1} = C_s + C_s \cdot i = C_s \cdot (1 + i).$$

E' dunque corretto il procedimento di Fibonacci di ottenere le quote capitale, a partire dalla prima, moltiplicando successivamente per 6/5 = 1,2 (= 1 + 0,20). Si osservi che, in generale, per l'ultimo anno (quando il rimborso è previsto in **n** anni, con n intero) si deve avere: $\mathbf{C_n = D_{n-1}}$ e perciò la rata **R** è data da:

$$R = I_n + C_n = D_{n-1} \cdot i + C_n = C_n \cdot i + C_n = C_n \cdot (1 + i)$$

che può interpretarsi così: *nella progressione geometrica delle quote capitali, 1'(n+1)-mo termine è la rata*. Questo fatto serve.per controllo del piano.

Ad esempio, se consideriamo un prestito di € 1000,00 ammortizzato in 5 anni al tasso del 5%, la rata costante da trovare è:

$$R = 1.000 \cdot 0{,}230975 = 230{,}98$$

E da ciò, redigendo il piano d'ammortamento, otteniamo che:

S	Rs	Is	Cs	Ds
0	—	—	—	1.000
1	230,98	50,00	180,98	819,02
2	230,98	40,95	190,02	629,00
3	230,98	31,45	199,52	429,48
4	230,98	21,47	209,50	219,98
5	230,98	11,00	219,98	—

Ora, Fibonacci si è accorto che il debito residuo alla fine del sesto anno è ? 0. Egli interpreta tale debito (0,7008) come l'importo di una rata complementare da versare alla scadenza di un tempo **t** (incognito), entro il settimo anno. Ciò lo porta a calcolare la **settima** quota capitale (moltiplicando la sesta per 6/5) e ottenere il tempo incognito, stabilendo la proporzione che C_7: 1 = 0,7008 : x, e perciò: x = 097008/C_7
In questo modo Fibonacci perviene al risultato di «dies 8, et hore 13/29 5; et tantum tenuit ispe domum, ultra annos 6 inventos» (dove 13/29 5 va interpretato come 5 ore + 13/29 di ora). Una buona approssimazione, se la si confronta col valore ottenuto attraverso il calcolo logaritmico che ci aveva fornito il valore di circa **6 anni, 9 giorni e 6 ore.**

–

IL MODELLO DI BASE DELLA Matematica Finanziaria

Affrontiamo adesso la discussione sulla costruzione di un modello della MF, un metodo spesso usato in matematica per dare una visione realistica e concreta degli argomenti che si trattano.

A differenza dei modelli matematici, però, tale modello possiede delle discrepanze con la realtà, causate dalla semplicità del modello stesso che non tiene conto di tutte le variabili presenti (considerando che il dominio su cui agiscono le variabili è fortemente influenzato da scelte umane possiamo comprendere la difficoltà nell'inserire tutte le variabili possibili, a discapito della semplicità che il modello offre).

Un caso analogo, ad esempio, si riscontra nel pensiero della scuola economica classica sugli investimenti macroeconomici legati alla variazione dei tassi d'interesse offerti dalle banche.

Prima di introdurre il modello, però, occorre parlare dei risultati ottenuti dal grande matematico francese Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) tratti dal suo Course d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique.

L'EQUAZIONE FUNZIONALE DI CAUCHY ED IL CORSO D'ANALISI ALGEBRICA

Augustin-Louis Cauchy nacque a Parigi nel 1789, l'anno mirabile della *Rivoluzione* per eccellenza. Nel 1805 entrò alla appena fondata *Ecole Polythécnque,* per studiare ingegneria. Poiché la sua salute era malferma, Lagrange e Laplace gli consigliarono di dedicarsi alla matematica.

La sua vita professionale si svolse tra *l'Ecole Politéchnique*, *la Sorbonne* e il *Collège de France,* ma la politica doveva avere effetti inaspettati sulla sua carriera. Ardente

realista e sostenitore dei Borboni, si rifiutò di giurare fedeltà alla nuova monarchia quando, nel 1830, Luigi Filippo divenne Re di Francia. Diede quindi le dimissioni dal suo posto di professore all'*Ecole* e si esiliò volontariamente a Torino, dove per 8 anni insegnò latino e italiano. Rientrato a Parigi nel 1838, insegnò in numerosi istituti religiosi fino a quando il governo che andò al potere dopo la rivoluzione del 1848 abolì il giuramento di fedeltà. Così Cauchy assunse la cattedra di Astronomia matematica alla Facoltà di scienze della Sorbona. Reintrodotto il giuramento di fedeltà nel 1852, Napoleone III, nel timore di perdere i servizi del matematico, dispensò Cauchy dal prestarlo. A questo gesto di condiscendenza dell'imperatore, Cauchy rispose donando il suo stipendio ai poveri di Sceaux, dove viveva.
Cauchy, che fu professore mirabile e uno dei più grandi matematici mai esistiti, morì nel 1857.
Gli interessi di Cauchy erano universali. Conosceva la poesia del suo tempo e fu autore di un'opera sulla metrica ebraica. In matematica scrisse più di 700 lavori, secondo in questo solo a Eulero. Le sue opere riempiono 26 volumi e abbracciano tutti i campi della matematica. In meccanica scrisse importanti lavori sull'equilibrio delle aste rigide e delle membrane elastiche e sulle onde nei mezzi elastici. In ottica si occupò della teoria delle onde, che era stata iniziata da Fresnel, e della dispersione e polarizzazione della luce. Fece progredire enormemente la teoria dei determinanti e dimostrò teoremi fondamentali sulle equazioni differenziali ordinarie e a derivate parziali. Infine, sebbene Gauss e Poisson siano accreditati dell'introduzione di alcune idee fondamentali sulle funzioni di variabile complessa, è a Cauchy che si deve la fondazione della teoria delle funzioni complesse.

Con il corso di Analisi algebrica del 1821 si occupò principalmente di limiti e continuità. Noi salteremo la prima parte del Corso per dedicarci al Cap V le cui conclusioni ci serviranno per dimostrare alcuni teoremi del nostro modello.
Cominciamo con la famosa equazione funzionale che porta il suo nome:

Trovare f *:* R ?   R, continua, tale che per ogni x e y reali, si abbia:

(1) $$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

E' noto che la (1) caratterizza le funzioni cosiddette additive [tali cioè che l'immagine della somma (x + y) è uguale alla somma delle immagini].

E' facile verificare che ogni funzione del tipo $z = m\cdot t$ è soluzione della (I); infatti è $f(x + y) = m.(x + y) = m\cdot x + m\cdot y = f(x) + f(y)$. Si badi però che le funzioni del tipo $z = m\cdot t + q$ (con q ? 0) **non verificano** la (1), dal momento che

$$f(x + y) = m.(x + y) + q,$$

mentre

$$f(x) + f(y) = m.(x + y) + 2q$$

Cauchy, nell'ipotesi della continuità, afferma di più**: afferma che ogni soluzione della (1) è della forma y = m·x.**

La dimostrazione di tale affermazione è equivalente al seguente:

Teorema: Ogni soluzione continua dell'equazione funzionale

(1) $$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{per ogni } x,y \text{ ? } R$$

è della forma $f(x) = k\cdot x$, con $k = f(1)$.

Dalla (1) ricaviamo infatti:

$$f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$$

ovvero, ponendo $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$:

$$f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$$

per ogni intero positivo n.

Si consideri poi $x = (n/m) \cdot t$ (con n ed m interi positivi), cioè: $m \cdot x = n \cdot t$; si avrà

$$f(m \cdot x) = f(n \cdot t)$$

da cui, per quanto appena detto, si ottiene:

$$m \cdot f(x) = n \cdot f(t) \quad ? \quad f(x) = (n/m) \cdot f(t).$$

Essendo $x = (n/m) \cdot t$, segue perciò:

$$f((n/m) \cdot t) = (n/m) \cdot f(t)$$

per ogni razionale positivo n/m.

Ponendo nella (1) $y = 0$, otteniamo: $f(x + 0) = f(x) = f(x) + f(0)$, cioè $f(0) = 0$. Ponendo invece $y = -x$, dalla (1) ricaviamo: $f(x - x) = f(0) = 0 = f(x) + f(-x)$; e perciò: $f(x) = - f(-x)$.

Possiamo riassumere tutti i risultati finora trovati dicendo che deve essere sempre:

$$f((n/m) \cdot t) = (n/m) \cdot f(t)$$

ovvero, indicando con q un qualsiasi numero razionale (positivo, nullo o negativo) e ponendo $k = f(1)$:

$$f(q) = q \cdot k$$

Utilizziamo adesso la continuità di f. Per ogni x ? R è possibile trovare una successione di numeri razionali $\{q_n\}$ convergente a x; si ha allora, per ogni x in R:

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} q_n) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} q_n \cdot k = k \cdot x.$$

Cioè ogni soluzione continua della (1) è del tipo $f(x) = k \cdot x$ (con $k = f(1)$).
La stessa tecnica può analogamente risolvere anche la seconda equazione funzionale indicata da Cauchy, cioè l'equazione

(2) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ per ogni x,y ? R

Teorema: Ogni soluzione continua della (2) è della forma: $f(x) = a^{kx}$ $(a > 0)$.
Dalla (2) segue che f non è mai nulla; se infatti esistesse un valore x_0 tale che $f(x_0) = 0$ avremmo (per ogni x,y ? R):

$$f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x - x_0) \cdot f(x_0)$$

Se quindi escludiamo il caso (poco significativo) della funzione identicamente nulla, dobbiamo pensare a f(x) ? 0, per ogni x ? R. In particolare, per $x = y = t/2$, dalla (2) ricaviamo:

$$f(t) = f(t/2 + t/2) = [f(t/2)]^2 > 0 \text{ per t reale}$$

che garantisce che f è sempre positiva.

Possiamo allora considerare i logaritmi di entrambi i membri della (2):

$$\log_a f(x + y) = \log_a f(x) \cdot f(y)$$

cioè

$$\log_a f(x + y) = \log_a f(x) + \log_a f(y).$$

Dall'ultima, ponendo $\log_a f = g$, segue:

$$g(x + y) = g(x) + g(y),$$

cosicché l'equazione funzionale (2) è stata ricondotta alla (1).

Sapendo che è $g(x) = k \cdot x$, per ogni x reale, possiamo concludere che necessariamente dovrà essere $f(x) = a^{kx}$ per ogni x reale.

LA SCHEMATIZZAZIONE DEL MODELLO

Cominciamo ad introdurre gli elementi che compongono tale modello:

- **il capitale impiegato** (**C**, che supporremo sempre = 0)
- **la durata *t* dell'impiego**
- **il montante M prodotto al tempo *t* dal capitale C**.

I tre valori non sono indipendenti ma legati da determinate relazioni che abbiamo precedentemente illustrato.
Ad esempio supporremo che il montante sia additivo rispetto alla variabile C e che la funzione M sia non decrescente rispetto a t.
Ipotizzando che il montante rimanga costante per tempi nulli possiamo dare una schematizzazione assiomatica del modello:

- $\mathbf{A_1}$ M dipende **solo** da C e da t: $M = M(C, t)$.
- $\mathbf{A_2}$ $M(C_1 + C_2, t) = M(C_1, t) + M(C_2, t)$, per ogni $C_1, C_2 > 0$
- $\mathbf{A_3}$ $t_2 > t_1 \Rightarrow M(C, t_2) = M(C, t_1)$
- $\mathbf{A_4}$ $M(C, 0) = C$.

Ovviamente, una schematizzazione così semplice comporta delle differenze con la realtà evidenti. Possiamo qui discutere le più rilevanti:

L'assioma $\mathbf{A_1}$ identifica le variabili prese in considerazione dal modello, escludendone altre che, in certi contesti, potrebbero a ragione essere ritenute rilevanti, ma che qui si preferisce trascurare. Questo primo assioma opera dunque una semplificazione della situazione problematica da modellizzare.

L'assioma $\mathbf{A_2}$ è il vero cardine della MF classica. Esprime una proprietà fondamentale del montante rispetto alla variabile C, la **proprietà additiva,** cioè che il montante di un capitale, somma di due altri, è la somma dei montanti dei due capitali. L'assioma è sempre più inattuale. Basti pensare al caso d'impieghi bancari: l'ammontare del deposito condiziona solitamente le condizioni alle quali può essere effettuato (investendo 10.000 euro si ottengono condizioni migliori che investendo separatamente due volte 5.000).

L'assioma $\mathbf{A_3}$ esclude che un capitale possa perdere valore nel tempo. Se intendiamo come "valore" **il valore monetario,** non c'è dubbio che l'assioma sia pienamente realistico. Se invece intendiamo come "valore" **il valore reale**, che determina il potere d’acquisto (quantità di beni acquistabili con l'unità monetaria), allora esso è del tutto irrealistico.

L'assioma $\mathbf{A_4}$ ignora del tutto i costi accessori (bolli, diritti fissi, ...). A causa di tali costi, nella pratica non accade che il disimpiego immediato di un capitale non intacchi il capitale impiegato.

Nonostante queste deficienze di carattere pratico, il modello appena esposto è largamente utilizzato in concreto. La ragione di ciò sta nella giustificazione che sì da alle discrepanze rilevate.
Il primo assioma, infatti, si limita ad identificare le variabili che agiscono, il secondo (forse il più paradossale) è accettabile se si considerano modesti incrementi di capitale (che in definitiva risultano i più frequenti), il terzo si limita a considerare il valore monetario solo a livello nominale, ed infine il quarto può considerarsi pienamente in regola divenendo ormai pratica diffusa il conteggio dei costi fissi al di fuori del calcolo del montante.

Una volta fatte le dovute premesse passiamo ad esaminare maggiormente le relazioni che intercorrono tra le variabili enunciando alcuni teoremi (conseguenze degli assiomi)

Teorema 1: La funzione di due variabili $M = M(C, t)$ è crescente anche rispetto alla prima variabile C.

Il significato del teorema è immediato: $C_2 > C_1 \Rightarrow M(C_2, t) > M(C_1, t)$, cioè il montante è crescente rispetto al capitale.

Dimostrazione: Supposto $C_2 > C_1$, cioè $C_2 - C_1 > 0$, si ha subito (da $\mathbf{A_3}$ e $\mathbf{A_4}$) che $M(C, t) = M(C, 0) = C \quad (\forall C = 0, \forall t = 0)$.

Dopo di che, il nostro teorema si stabilisce immediatamente:

$$M(C_2, t) = M(C_1 + C_2 - C_1, t) = M(C_1, t) + M(C_2 - C_1, t); \qquad \text{per } \mathbf{A_2}$$

Essendo, per quanto detto or ora, $M(C_2 - C_1, t) = M(C_2 - C_1, 0)$, segue che:

$$M(C_2, t) = M(C_1, t) + M(C_2 - C_1, 0); \qquad \text{per } \mathbf{A_3}$$

$$M(C_2, t) = M(C_1, t) + (C_2 - C_1). \qquad \text{per } \mathbf{A_4}$$

In definitiva: $M(C_2, t) > M(C_1, t)$, dal momento che $C_2 - C_1 > 0$.

Dunque, come già anticipato, la funzione $M(C, t)$ è strettamente crescente anche rispetto alla variabile C.

Sempre la storia della pratica commerciale suggerisce la proporzionalità fra montante e capitale investito (a parità di tempo di impiego). Anche questa proprietà è un teorema nel nostro modello. Ma si può addirittura andare più avanti e enunciare il nostro teorema in maniera più precisa:

Teorema 2: Le funzioni M(C, t) che soddisfano gli assiomi $\mathbf{A_1 - A_4}$ sono tutte e sole quelle del tipo M(C, t) = C·f(t), dove f(t) è definita su [0,T] (oppure su [0,T), eventualmente T = + 8) e gode delle seguenti proprietà:

(i) f(0) = 1, (ii) f(t) è monotona non decrescente.

Dimostrazione: L'assioma $\mathbf{A_2}$ non è altro che l'equazione di Cauchy estesa alle funzioni di due variabili: se ci si chiede, infatti, quali funzioni godano della proprietà:

f(x + y, z) = f(x,z) + f(y,z) per ogni x,y,z ? R

la risposta è immediata: sono le funzioni f(v,z) = v·f(z), con f(z) funzione arbitraria di z. Ciò permette di asserire che **M(C,t) = C·f(t);** inoltre f(t) deve essere non decrescente per rispettare l'assioma $\mathbf{A_3}$ [M(C,t_2) = M(C,t_1)] e deve aversi f(0) = 1 per rispettare l'assioma $\mathbf{A_4}$ [M(C,0) = C].

E' ovvio che si può porre C = 1 e M(1, t) = f(t). Il problema della determinazione del montante è infatti risolto una volta che si sceglie la funzione f(t): il montante al tempo t, di un capitale qualunque al tempo 0, si ottiene infatti moltiplicando l'importo del capitale per f(t). Ne segue immediatamente il significato di f(t): **esso rappresenta il montante in t di un capitale unitario investito all'epoca 0**. Possiamo a questo punto porre le seguenti definizioni:

Def. 1: Ogni funzione f(t), definita su [0,T] (oppure su [0,T), eventualmente [0,+8 e ivi monotona non decrescente e con f(0) = 1, è detta *funzione di capitalizzazione o fattore di montante.*

Def. 2: Una famiglia di fattori di montante {f(t; a)} , dipendenti da un parametro a, crescenti in R^+, con f(0) = 1, è detta **regime di capitalizzazione.**

Def. 3: Una certa f(t, a*), con a* ? R^+, è detta **legge di capitalizzazione** appartenente al regime {f(t; a)}

Ad esempio, tutte le funzioni del tipo:

$$f(t) = 1 + a\cdot t \quad (a > 0)$$

sono ammesse come funzioni di capitalizzazione, in quanto crescenti in R^+, e tali che f(0) = l.

Lo stesso si può dire per le funzioni

$$f(t) = e^{at} \qquad (a > 0)$$

e analogamente per le funzioni

$$f(t) = \log (at + e) \quad (a > 0).$$

Una volta introdotto il concetto di regime di capitalizzazione e considerando che tutte le funzioni che agiscono nel sistema sono del tipo:

$$f(t) = M(1,t)$$

avanziamo alcune considerazioni e formuliamo alcune ipotesi sulla variazione della funzione in funzione del tempo, dando origine ai più noti regimi di capitalizzazione.
Supponendo f(t) derivabile, considero:

- **Ipotesi I** f(t + h) – f(t) è proporzionale a f(t) ed h
- **Ipotesi II** f(t + h) – f(t) è proporzionale ad h
- **Ipotesi III** f(t + h) – f(t) è proporzionale a f^2(t) ed h
- **Ipotesi IV** f(t + h) – f(t) è proporzionale a G(f(t)) ed h

E' immediato notare che l'ipotesi IV raggruppa le altre 3 considerando la funzione G come caso generale delle precedenti ipotesi. La ragione per cui differenziamo le quattro ipotesi sarà poi nota alla fine, quando individueremo i diversi tipi di regimi di capitalizzazione.

Ipotesi I f(t + h) - f(t) = d(t)·f(t)·h

dove d(t) = 0 è la costante di proporzionalità in t.
Si ha subito:

$$[f(t + h) - f(t)]/h = d(t) \cdot f(t)$$

e, per la derivabilità di f(t)**:**

$$f (t) = d(t) \cdot f(t)$$

ovvero:

$$f'(t)/f(t) = d(t)$$

Integrando fra 0 e t**,** si ha subito:

$$\log f(t) = \int_0^t d(s)ds \quad \text{cioè} \quad f(t) = e^{\int_0^t d(s)ds}$$

Ipotesi Il $f(t + h) - f(t) = a(t)\cdot h$ $(a(t) = 0)$

dove a(t) è la costante di proporzionalità in t.

Si ha subito:

$$f'(t) = a(t)$$

e dunque:

$$f(t) = 1 + \int_0^t a(t)dt$$

Ipotesi III $f(t + h) - f(t) = b(t)\cdot f^2(t)\cdot h$ $(b(t) = 0)$

dove b(t) è la costante di proporzionalità in t.

Come prima, si ha subito:

$$f'(t) = b(t)\cdot f^2(t)$$

e perciò :

$$1 - 1/f(t) = \int_0^t b(s)ds \quad \text{cioè} \quad f(t) = 1/[1 - \int_0^t b(s)ds\ ].$$

Ipotesi IV $f(t + h) - f(t) = G(f(t))\cdot h\cdot s\,(t)$ $(s\,(t) = 0)$

dove s(t) è la costante di proporzionalità in t.

Ancora una volta, si ha :

$$f'(t) = s(t)\cdot G(f(t))$$

da cui, ponendo f(t) = u, si ricava la f(t), definita implicitamente da:

$$\int_1^{f(x)} \frac{du}{G(u)} = \int_0^t s(s)ds$$

Specializzando, come si è detto, la forma della funzione G, si otterranno le prime tre ipotesi, sulle quali concentreremo ora la nostra attenzione.

Infatti, se consideriamo nella prima ipotesi:

$$f(t) = e^{\int_0^t d(s)ds} \text{ si ha } d(t) = d, \text{ cost.} = 0, \text{ si ha } f(t) = e^{dt}.$$

Nella seconda ipotesi basta porre:

$$a(t) = a = 0, \text{ per avere } f(t) = 1 + \int_0^t a(s)ds = 1 + at$$

Ed infine nella terza ipotesi:

$$f(t) = 1/[1 - \int_0^t b(s)ds\ ] \text{ ponendo } b(t) = b \text{ cost.} = 0 \text{ si ha}$$

$$f(t) = 1/[1 - b\cdot t]$$

I regimi corrispondenti alle prime due ipotesi sono quelli storici: si tratta rispettivamente della capitalizzazione composta (o esponenziale) e della capitalizzazione semplice. Il regime corrispondente all'**Ipotesi III** si suole chiamare "regime degli interessi anticipati".

I regimi di capitalizzazione semplice e composta hanno proprietà che ne determinano la caratterizzazione. Per dimostrare ciò occorre prima dare un paio di definizioni su particolari tipi di leggi di capitalizzazione

Def. 4: Una legge di capitalizzazione f(t) è detta **scindibile** se, per ogni t, t = 0 con t> t, si ha:

$$f(t + t) = f(t) \cdot f(t)$$

Il significato della definizione è chiaro: per la scindibilità, si richiede che il montante per la durata (t + t) non vari disinvestendo in un'epoca intermedia t e reinvestendo immediatamente fino alla scadenza originaria.

Def. 5: Una legge di capitalizzazione f(t) è detta ad **interessi additivi** se, considerati due intervalli temporali anche non consecutivi, di lunghezza t e t (con t, t = 0) si ha:

$$[f(t) - 1] + [f(t) - 1] = [f(t + t) - 1].$$

Ancora una volta, il significato della definizione è chiaro, quando si rifletta che l'espressione [f(t) – 1] è il totale degli "interessi" maturati fino a t: perciò, interrompendo un investimento e reinvestendo immediatamente, gli interessi non subiscono variazioni.

La **def. 4** dà la caratterizzazione del regime di capitalizzazione composta; la **def. 5** caratterizza il regime semplice. Ciò risulta dimostrato dai seguenti teoremi che, nel volgere della dimostrazione, si avvalgono delle conclusioni di Cauchy fatte nel Corso di Analisi algebrica precedentemente illustrato

Teorema 3: Condizione necessaria e sufficiente affinché una legge di capitalizzazione sia scindibile è che sia del tipo:

$$f(t) = e^{dt} \qquad (d = 0).$$

Dimostrazione: Posto log f = f , l'equazione che definisce la scindibilità diventa:

$$f(t) + f(t) = f(t + t)$$

che è l'equazione di Cauchy, soddisfatta da tutte e sole le funzioni $f(t) = d \cdot t$.

Da cui la conclusione:

$$f(t) = e^{f(t)} = e^{d \cdot t}.$$

E' facile verificare che né il regime di capitalizzazione semplice **(Ipotesi II)** né quello della capitalizzazione ad interessi anticipati **(Ipotesi III)** godono della proprietà di scindibilità. Nel primo caso, infatti, risulta: $f(t) \cdot f(t) > f(t + t)$; mentre nel secondo caso risulta: $f(t) \cdot f(t) < f(t + t)$, come si verifica subito.

Il regime di capitalizzazione semplice gode però della proprietà degli interessi additivi, specificata dalla **def. 5** e dimostrabile dal seguente teorema (che ne da la caratterizzazione):

Teorema 4: Condizione necessaria e sufficiente affinché una legge di capitalizzazione sia ad interessi additivi è che sia dei tipo:

$$f(t) = 1 + a \cdot t.$$

Dimostrazione: Posto f(x) - 1 = ?(x), l'equazione che definisce l'additività degli interessi diviene:

$$? (t) + ? (t) = ? (t + t),$$

che è ancora l'equazione di Cauchy, soddisfatta come sappiamo da tutte e sole le funzioni:

$$? (t) = a \cdot t, \text{ da cui: } f(t) - 1 = a \cdot t \text{ e perciò: } f(t) = 1 + a \cdot t.$$

Una volta dimostrato che le funzioni che intervengono nel modello esposto sono del tipo f(t), possiamo generalizzare il tutto introducendo più variabili temporali (ad esempio distinguendo l'**epoca d'impiego** dall'**epoca di riscossione)**.
Anche in questo caso, però, una volta dati gli assiomi che caratterizzano il modello, riusciremo a ricondurre le funzioni in esso agenti ad equazioni funzionali di Cauchy.
Infatti, indicando con **x** l'epoca d'impiego e con **y** l'epoca di riscossione, gli assiomi vengono così riformulati:

- **A'$_1$** M dipende **solo** da C, da x e da y, con 0=x=y e 0=y=T
- **A'$_2$** $M(C_1 + C_2; x, y) = M(C_1 ; x, y) + M(C_2 ; x, y)$
- **A'$_3$** $y_2 > y_1 \Rightarrow M(C ; x, y_2) > M(C ; x, y_1)$
- **A'$_4$** $M(C ; x, x) = C$, per ogni x.

Utilizzando le argomentazioni del modello precedentemente esposto, possiamo dimostrare il seguente:

Teorema 5: Le funzioni M(C; x, y) che soddisfano gli assiomi $A'_1 - A'_4$ sono tutte e sole quelle del tipo:

$$M(C; x, y) = C \cdot F(x, y)$$

Dove F(x, y) è definita per 0 = x = y e per 0 = y = T (oppure 0 = y < T, eventualmente T = +8) e gode delle seguenti proprietà:

(i) F(x, x) = 1 per ogni x (ii) F(x, y) è non decrescente rispetto ad y.

Naturalmente, se la dipendenza da x e da y si riduce alla dipendenza dalla differenza y – x = t, si ricade nel modello semplificato:

$$F(x, y) = F(x, x+t) = f(t).$$

CONCLUSIONE

E’ evidente da ciò che abbiamo visto che questa parte di matematica è forse maggiormente indicata per uno studio del settore commerciale, allontanandosi dalla matematica classica.

Ma è altresì vero che, facendo un riscontro con la realtà, la MF occupa indubbiamente una posizione privilegiata rispetto all’analisi o a qualsiasi altra parte della matematica, forse perché, negli ultimi anni, la scienza matematica ha assunto un carattere troppo astratto e poco identificabile con la realtà.

Forse il modo meccanico di operare mediante formule e prontuari hanno ridotto la MF ad appendice dell’economia e della tecnica commerciale, ma sebbene sottovalutata, la MF offre una tangibile risposta a chi, profanamente, si interroga sull’utilità e della matematica in generale nella vita quotidiana.