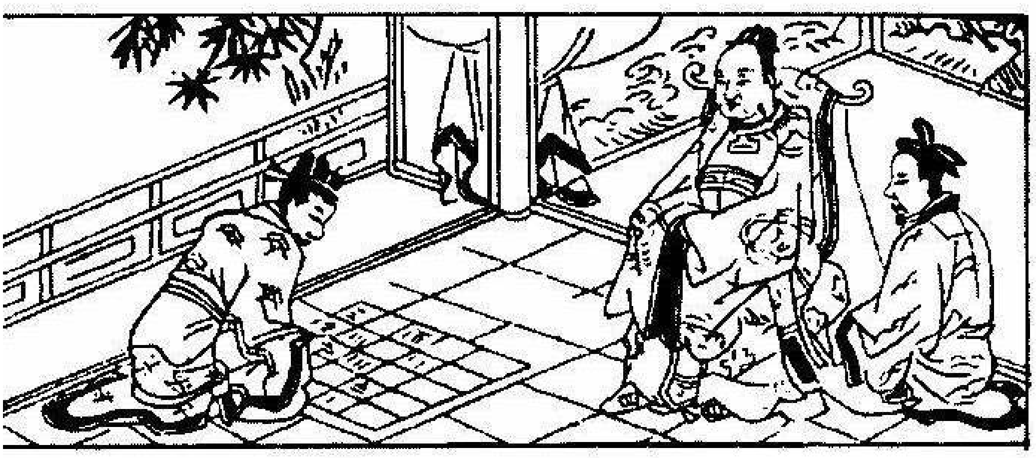
Università degli studi di Palermo
Corso di laurea in matematica per l'informatica e la comunicazione scientifica
Anno Accademico 2003/04

Tesina di Storia della Matematica



Le basi della Matematica nella tradizione cinese

Docente
Pietro Nastasi

Realizzato da
Valeria Spagnolo

Indice

Le basi della Matematica nella tradizione cinese

1.0 Il contesto storico.

Nella storia della Cina il millennio compreso tra il 206 a.C., avvento della dinastia Han, e il 907 d.C. fine della dinastia Tang è caratterizzato da uno sviluppo pressocché ininterrotto in campo scientifico e tecnologico.
I grandi mutamenti sociali e lo sviluppo della crescita economica hanno posto numerosi ed urgenti problemi di misurazione e di computo che hanno favorito lo sviluppo della matematica.

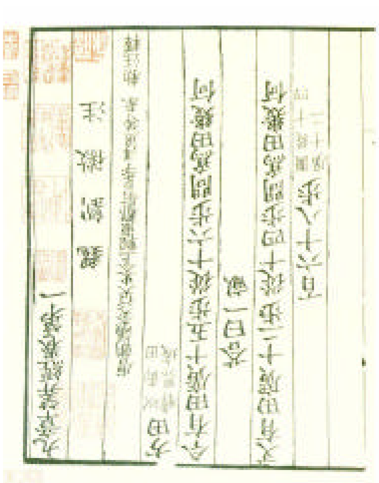
2.0 Le "bacchette", l'abaco e il canone dei Nove Capitoli

Nei primi documenti della storia cinese i numeri naturali da 1 a 9 erano rappresentati da segni particolari, a cui noi oggi diamo il nome di cifre. Sono state ritrovate delle iscrizioni su ossa di animali e gusci di tartaruga o sulle monete. Per i numeri maggiori di 9 si avevano delle combinazioni di cifre utilizzando potenze di dieci.
Questa combinazione permetteva di esprimere i numeri naturali relativamente grandi, il più grande numero che è stato trovato è 30.000.
La notazione standard per i numeri della Cina antica risale alla fine del I millennio a.C. Non esisteva un segno per lo zero. Dal VIII sec d.C. fu introdotta in Cina la notazione indiana, la quale usava punti per le posizioni vuote nella moltiplicazione e nella divisione.

Gli strumenti più antichi di calcolo tradizionali cinesi, per la rappresentazione dei numeri, erano le bacchette e successivamente l'abaco.
Per quanto riguarda lo zero nel caso delle bacchette veniva quindi indicato da una "posizione" vuota, nel caso dell'abaco vi era una disposizione particolare.
Quello che possiamo dire è che lo zero si può indicare come un "Metasegno" questo significa che all'assenza di oggetti (che possiamo considerare un simbolo) viene assegnato un "simbolo". Possiamo collocare la presenza dello zero non prima del XII secolo, anche se le basi concettuali vi erano già da prima. I primi riferimenti alle bacchette si possono fare risalire a dei testi più antichi dove si parla di strumenti chiamati: *ce, suan, chou, chousuan, chouce, e suanchou*, i quali vengono considerati dagli studiosi moderni identici alle bacchette per il calcolo chiamati comunemente *suanzi* a partire dalla dinastia **Song** (960-1279)**.** Come significato di bacchette si usava il termine *Suan* e si ritrova sia nella *Storia della dinastia Han (anteriore)* sia nei *Nove Capitoli*. Invece il termine *zhi(che significa "il numero mediante le bacchette)* si trova sia nel trattato filosofico intitolato *"Libro del Maestro dello Huainan (Huainanzi, 139 a.C.ca.),* sia nel più antico trattato matematico il *"Libro dei procedimenti matematici (Suanshu shu).*

Nel capitolo *"Cerimonia (della gara) con l'arco nel distretto (Xiang she li)* del *Cerimoniale (Yili)"*, un classico del confucianesimo, si deduce che questi bastoncini venivano usati per tenere il conto dei colpi andati a segno nel corso di una gara di tiro con l'arco e mai per rappresentare numeri su una superficie di calcolo. Nel capitolo *Note* i bastoncini vengono definiti "bastoncini freccia" ed erano 80, la lunghezza dei singoli bastoncini era "1 *chi*" cioè 23 cm ca.
Un passo che fu citato frequentemente, riguardante il calcolo con le bacchette, si trova nel *Libro della vita e della virtù*: ‹shan shu bu yong chou ce› tradotta come ‹un buon matematico non usa bastoni né pezzi di bambù›.
I termini *chou* e *ce* si riferiscono alle bacchette, in realtà si basano sul significato moderno del termine *shu* (numero, contare).
Nel trattato Taoista la parola *shu* aveva un significato più ampio sia per il contare sia per l'ambito divinatorio, infatti le bacchette erano degli strumenti che servivano per pianificare campagne militari per prevedere l'esito di operazioni militari.
Per quanto riguarda il metodo di risoluzione dei sistemi di equazioni lineari che si trovano nel Canone della Matematica di Liu Hui, si parla di bacchette colorate rosse e nere che rappresentano i coefficienti delle equazioni.
Alcune fonti affermano che il segno di un numero veniva rappresentato da bacchette a sezione triangolare e quadrata.
La forma triangolare è associata al "principio positivo" yang ed è collegata al cielo,al cerchio e ai numeri dispari appunto il numero 3.
La forma quadrata è associata al "principio negativo" ying ed è collegato alla terra, al quadrato ed ai numeri pari appunto il numero 4.
La scomparsa delle bacchette si può datare tra il periodo a cavallo fra il XV e il XVI sec e la fine del XVII sec.
La sostituzione con l'abaco avvenne in maniera molto rapida in quanto la praticità e la velocità furono due buone ragioni per divulgare questo strumento fra diverse categorie di cittadini impegnati costantemente in operazioni di calcolo (mercanti, artigiani e funzionari). In seguito avvenne tra i matematici più prestigiosi.

2.1 Il Canone dei "Nove Capitoli"



I *Nove Capitoli sui procedimenti matematici* è il più antico testo cinese di matematica, tramandato dalla tradizione scritta; fu composto probabilmente tra il I sec. a.C. e il I sec. d. C., il titolo è attestato in una iscrizione su un recipiente per misure di capacità autenticato dal Ciambellano della Tesoreria dello Stato (*Dasinong*) nel 179 d.C.
Questo testo divenne un Canone (*jing*) che è stato oggetto di numerosi commenti.
I primi due Liu Hui 263 e Li Chunfeng 656 sono stati tramandati assieme al testo.
È con la dinastia Song 1084 che si assiste ad una piena valorizzazione dei *Nove Capitoli*, che vengono ulteriormente arricchiti di nuovi commentari: Procedimenti dettagliati del Canone dell'Imperatore Giallo di Jia Xian prima metà dell'XI, e Spiegazione dettagliata dei

Nove Capitoli sui metodi matematici di Yang Hui 1261. In questo periodo i Nove capitoli viene considerato il più importante classico matematico, messo al pari dei classi del confucianesimo.

STRUTTURA DEI NOVE CAPITOLI

Il testo consta principalmente di problemi, delle loro soluzioni e degli algoritmi di risoluzione.
Capitolo 1*: *Campo rettangolare (fang tien)
Questo capitolo descrive algoritmi per effettuare i principali calcoli sulle frazioni, operando sui numeratori e i denominatori. Contiene anche algoritmi per calcolare l'aerea di figure fondamentali o "campi" quali rettangolo, triangolo, cerchio, corona circolare etc..

Capitolo 2: *miglio e grano spulato (sumi)*
Questo capitolo è dedicato alla descrizione della regola del tre e ad alcune sue applicazioni. Tale regola è utilizzata soprattutto per il calcolo dell'equivalenza tra cereali secondo i tassi ufficiali stabiliti dalla tesoreria e relativi al pagamento in natura delle imposte.

Capitolo 3: *parti pesate secondo il grado (shuaifen)*
L'argomento principale di questo capitolo riguarda l'algoritmo per suddividere un tutto in parti non uguali. La prima applicazione riguarda la distribuzione di gratificazioni tra funzionari di status differente.

Capitolo 4: *piccola larghezza (shao guang)*
Il capitolo raccoglie vari tipi di divisione, nozione che include divisione con numeri frazionari ma anche estrazioni di radice concepite come divisione (radici quadrate e cubiche, radici circolari e sferiche).

Capitolo 5: *discussione di opere (shang gong)*
Dedicato in particolare all'esecuzione di opere pubbliche, questo capitolo descrive algoritmi per il calcolo del volume dei principali solidi: parallelepipedo e cilindro, prisma trapezoidale, piramide e tronco di piramide a base quadrata, tetraedro, cono e tronco di cono, etc..

Capitolo 6: *pagare le tasse sul trasporto in modo equo (junshu)*
Riguarda un'equa distribuzione di tasse e di compiti tra varie unità amministrative.
I problemi qui raccolti richiedono di solito combinazioni della regola del tre.

Capitolo 7: *eccesso e difetto (ying bu zu)*
Il capitolo è dedicato alle cosiddette " regole della doppia falsa posizione".

Capitolo 8: *misure in un quadrato (fangcheng)*
Nel capitolo è descritto un algoritmo per risolvere sistemi di n equazioni lineari in n incognite; esso viene progressivamente generalizzato lungo tutto il capitolo.

Capitolo 9: *base e altezza (gougu)*
Le basi e le altezze sono i cateti di un triangolo rettangolo. L'algoritmo con cui inizia il capitolo è l'equivalente del "Teorema di Pitagora". Naturalmente la relazione pitagorica non è mai vista in forma di teorema. Uno dei problemi è risolto mediante una equazione di secondo grado. Questa è una operazione aritmetica che coinvolge due numeri, G e g, corrispondenti ai moderni "termine noto" e

“coefficiente del termine in x “. La notazione per rappresentare queste equazioni non è inizialmente posizionale.

I gruppi sociali che parteciparono alla produzione delle conoscenze registrate nei *Nove Capitoli* potrebbero essere stati motivati dalla risoluzione di problemi concreti che la burocrazia della dinastia Han doveva affrontare quali quelli per i quali era responsabile il Ciambellano della tesoreria dello stato: paga dei dipendenti pubblici, gestione dei granai e delle opere civili e della definizione degli standard di misura per il grano, ma vi erano anche problemi relativi a questioni astronomiche. Esperti quali il matematico Wang Xiatong (VII sec) coglievano nel testo il riflesso di una interazione tra astronomia e matematica, a lungo considerata cruciale per il modo in cui questa ultima si era sviluppata in Cina. Questo potrebbe indicare che la matematica esposta nei Nove Capitoli unificava in un unico Corpus di conoscenze elementi che si erano sviluppati nei due principali campi di attività dell’amministrazione statale, ossia l’astronomia e la finanza.

ALGORITMI DI RISOLUZIONE

Anche se molti problemi esposti sono di natura chiaramente concreta, gli algoritmi di risoluzione sono di carattere generale, (p.es. la somma di frazioni). Si fa in modo che l’algoritmo sia il più generale possibile e che un problema rappresenti una classe di problemi.
Qui di seguito vengono riportati tre esempi di algoritmi di risoluzione, uno sulle operazioni di moltiplicazione e di divisione, un altro sui sistemi di equazioni lineari e il terzo sulla Falsa posizione.

2.2 Le operazioni di moltiplicazione e di divisione con le bacchette secondo il Canone matematico del maestro Sun. 400 d.C.

Le operazioni con le bacchette erano effettuate su una superficie piana suddivisa mediante righe orizzontali e verticali in un certo numero di <u>celle</u> o <u>posizioni</u>. La posizione delle bacchette per le unità era verticale, per le decine era orizzontale e per le centinaia era verticale, in quanto le bacchette erano alternativamente poste verticalmente od orizzontalmente a seconda della potenza di dieci. Illustriamo di seguito un esempio di moltiplicazione eseguita con le bacchette:

<table>
<tr>
<th>Algoritmo della moltiplicazione oggi in Occidente.</th>
<th>Algoritmo della moltiplicazione in Cina</th>
</tr>
<tr>
<td>
Calcoliamo 205×72
L’algoritmo che usiamo oggi è il seguente:

205×
72
———
410
14350
———
14760

I passaggi dell’algoritmo della moltiplicazione rispecchiano la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma : 205(70+2)= 205×70+205×2=14350+410.
</td>
<td>
Calcoliamo 205×72
Disponiamo i numeri nel seguente modo:
<table>
<tr><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>7</td><td>2</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td>5</td></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>5</td></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td><td>4+3</td><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>7</td><td>2</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>5</td></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td><td>7</td><td>5+1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>7</td><td>2</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>5</td></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td><td>7</td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>7</td><td>2</td></tr>
</table>
Il risultato si legge nella riga di mezzo.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Consapevolezza del valore posizionale delle cifre.
L’algoritmo prende in considerazione ciascuna cifra con il suo valore posizionale .
Procede dal basso verso l’alto.</td>
<td>Consapevolezza del valore posizionale delle cifre.
L’algoritmo prende in considerazione ciascuna cifra con il suo valore posizionale.
Procede dall’alto verso il basso.</td>
</tr>
</table>

Algoritmo della divisione Oggi in Occidente.

Calcoliamo 1312: 23
L’algoritmo che usiamo oggi è il seguente:

```
1312   23
 115   57
  162
  161
    1
```

Questo algoritmo che risale al medioevo è chiamato ***Danda lunga***, è l’algoritmo che ci consente di comprendere meglio i passaggi della divisione e mette in evidenza la divisione come sottrazioni successive in N.
Per comprendere meglio la natura della divisione dobbiamo riferirci alla divisione per ripartizione (ripartire n oggetti a m persone), e alla divisione per contenenza (quante volte il numero n è contenuto in m).

Danda breve ed i suoi passaggi:

```
1312   23
 162   57
  -1
```

23x5=115   23x7=161
5 è il massimo multiplo di 23 contenuto in 131
23x5=115. Sottraggo 115 da 131, la differenza è 16, quindi abbasso ilo 2 ed ottengo 162.

7 è il massimo multiplo di 23 contenuto in 162
23x7=161

1312 : 23 =7   con il resto di 1.

Algoritmo della divisione in Cina

Calcoliamo 1312: 23
Disponiamo i numeri nel seguente modo:

	1	3	1	2
			2	3

	1	3	1	2
	2	3		

23 non divide 13

	1	3	1	2
		2	3	

			5	
	1	3	1	2
		2	3	

5x2=10, 13-10=3

			5	
		3	1	2
		2	3	

5x3=15, 31-15=16

			5	
		1	6	2
			2	3

			5	7
		1	6	2
			2	3

7×2=14, 16-14=2

			5	7
			2	2
			2	3

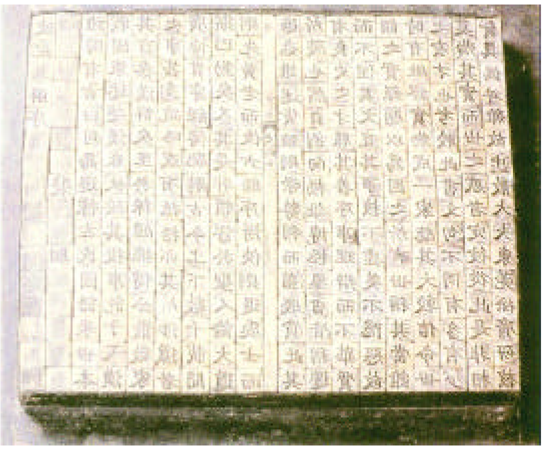
7×3=21, 22-21=1

			5	7 1
			2	3

Il risultato si legge nella prima riga e il resto nella seconda.

Consapevolezza del valore posizionale delle cifre. L’algoritmo prende in considerazione ciascuna cifra con il suo valore posizionale . Procede dall’alto verso il basso. Uso consapevole della divisione per contenenza.? Difficoltà del recupero della definizione di divisione.	Consapevolezza del valore posizionale delle cifre. L’algoritmo prende in considerazione ciascuna cifra con il suo valore posizionale. Procede dal basso verso l’alto. Uso della contenenza.? Recupero della definizione di divisione nella notazione moderna: 1312=57x23+1 Si può anche visualizzare nel seguente modo: 1312/23=57 + 1/23

3.0 Sistemi di equazioni lineari :bacchette e matrici



Il sistema delle bacchette rappresenta uno strumento molto utile per la risoluzione dei sistemi di equazioni.
Il linguaggio che utilizzeremo è il linguaggio simbolico moderno, ma i procedimenti sono quelli del periodo storico in cui ci riferiamo.
Nella tabella che segue vengono illustrati i due schemi di ragionamento, con analogie e differenze:

<table>
<tr><th>L’interpretazione dell’algoritmo cinese con gli strumenti dei sistemi lineari in occidente oggi.</th><th>L’algoritmo dei sistemi lineari in Cina.</th></tr>
<tr><td>Gli strumenti di risoluzione di un sistema di tre equazioni in tre incognite in occidente hanno avuto una vita diversa.
Innanzi tutto sono stati privilegiati i metodi di sostituzione e di addizione e di sottrazione.
I metodi geometrici, dopo i Greci; hanno anticipato i metodi algebrici. Per riscontrare un metodo analogo a quello orientale bisogna rifarsi o ai metodi precedenti il periodo greco oppure arrivare al 1700 d.c. ca.
Noi oggi sappiamo che moltiplicare in una matrice una riga o una colonna per un numero k, non è altro che moltiplicare tutta la matrice per il numero k.
Ed inoltre sappiamo che sommare e/o sottrarre colonne da colonne o righe da righe non altera il valore del determinante della matrice.
I procedimenti utilizzati nell’antica Cina corrispondono a queste due operazioni.</td><td>Il problema di partenza è quello della risoluzione di un sistema di 3 equazioni in 3 incognite, che viene illustrato nel capitolo 8 dei Nove Capitoli . Il sistema preso in esame è il seguente:
3x+2y+z=39
2x+3y+z=34
x+2y+3z=26
esso viene così rappresentato nella “matrice” delle bacchette:
<table><tr><td>1
2</td><td>2
3</td><td>3
2</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>26</td><td>34</td><td>39</td></tr></table>
Ciascuna equazione corrisponde ad una colonna, che bisogna leggere dal basso verso l’alto e da destra verso sinistra.</td></tr>
</table>

Lo strumento strategico utilizzato è quello di ricondurre a zero due su tre dei valori di una colonna rappresentante dei coefficienti dell'equazione.
Questo ci consente di poter lavorare con equazioni di primo grado ad una incognita.
Ma la cosa più straordinaria nel metodo delle bacchette è che la matrice di riferimento la posso allungare quanto voglio, ipotizzando sistemi di n equazioni in n incognite.
Naturalmente l'algoritmo di risoluzione non è identico pur mantenendo forti analogie.
Difatti risolvendo il sistema con i metodi che noi oggi conosciamo otteniamo sempre la soluzione base del sistema (cioè delle frazioni sottomultiple di un fattore tre della soluzione cinese). Questo presumibilmente è dovuto al fatto che le condizioni iniziali del problema cinese portavano alla loro soluzione.

1° metodo:
Oggi con linguaggio moderno scriviamo il sistema nel seguente modo:

$$3x+2y+z=39 \qquad (1)$$
$$2x+3y+z=34 \qquad (2)$$
$$x+2y+3z=26 \qquad (3)$$

moltiplicando per 2 l'equazione (1), e moltiplicando per 3 l'equazione (2) otteniamo:

$$6x+4y+2z=78$$
$$6x+9y+32=102$$
$$5y+z=24 \qquad (4)$$

moltiplichiamo la (3) per 3 otteniamo:

$$3x+6y+9z=78 \qquad (3)$$

ora sottraendo la (1) dalla (3)

$$3x+6y+9z=78$$
$$3x+2y+z=39$$

otteniamo:

$$\boldsymbol{4y+8z=39}$$

ricavando la y dalla (4) si ottiene: $y = (24-z)/5$
che sostituita nella precedente abbiamo:

$$4(24-z)/5 + 8z=39$$
$$96-4z+40z=195$$
$$36z=195-96$$
$$36z=99$$

L'algoritmo prevede come strategia quello di ricondurre a zero alcuni elementi di questa tabella.
Inizialmente si moltiplica ogni elemento della seconda colonna per il coefficiente più grande della terza colonna (3) e si ottiene quindi questa tabella:

1	6	3
2	9	2
3	3	1
26	102	39

Adesso si sottrae la terza colonna dalla seconda, tante volte quante sono necessarie fino a che uno degli elementi della colonna giunge a zero, in questo caso due volte.
E si ottiene questa tabella:

1		3
2	5	2
3	1	1
26	24	39

L'algoritmo viene ripetuto.
Si consideri la prima e la terza colonna. Si moltiplichi il numero più alto della terza colonna per la prima colonna.
E si ottiene questa tabella:

3		3
6	5	2
9	1	1
78	24	39

Adesso sottraiamo dalla prima colonna la terza:

		3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

Consideriamo adesso le prime due colonne e si moltiplichi la prima colonna per il coefficiente più grande della seconda (5).

z=99/36

equivalente al risultato con il metodo delle bacchette.

2° metodo:
Riduzione di Gauss Jordan, dove lo scopo principale è quello di ridurre la matrice a gradini, vedremo che il risultato sarà 1/3 di 99/36.

$$\begin{bmatrix} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{(-2) e (-3)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 3 & 2 & 1 & 39 \end{pmatrix} \ \textbf{?} \quad \textbf{(-4)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & -1 & -5 & -18 \\ 0 & -4 & -8 & -39 \end{pmatrix}\textbf{?}$$

$$\textbf{div 12}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & -1 & -5 & -18 \\ 0 & 0 & 12 & 33 \end{pmatrix}\textbf{?} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & -1 & -5 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 33/12 \end{pmatrix}\textbf{?}$$

Z= 33/12

Y=18+5z= 18+ 5· 33/12

X=26+ 3z +2y= 26+ 3· 33/12+2· 381/12

3° metodo :
Un altro metodo è quello di Cramer

$$\begin{bmatrix} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{bmatrix} =$$

$$D\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 27+2+4-3-6-12=$$

$$= 33-21= 12$$

E così si ottiene:

		3
20	5	2
40	1	1
195	24	39

Si sottrae la seconda colonna dalla prima tante volte sino a ridurre a zero uno degli elementi.

E così si ottiene:

		3
	5	2
36	1	1
99	24	39

A questo punto una delle equazioni del sistema è ad una incognita :
3x+2y+z=39
5y+z=24
36z=99
z=99/36
sostituendo nella seconda equazione otteniamo 5y+ 99/36=24 e ricaviamo quindi y, x sarà ricavato dalla sostituzione dei valori di y e di z nella prima equazione.

$$Dx\begin{pmatrix} 39 & 2 & 1 \\ 34 & 3 & 1 \\ 26 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 351+52+68-78-78-204=$$

$$=471-360=111$$

$$Dy\begin{pmatrix} 3 & 1 & 39 \\ 2 & 1 & 34 \\ 1 & 3 & 26 \end{pmatrix} = 78+34+234-39-306-52=$$

$$=346-397=-51$$

$$Dz\begin{pmatrix} 3 & 2 & 39 \\ 2 & 3 & 34 \\ 1 & 2 & 26 \end{pmatrix} = 234+68+156-117-204-104=$$

$$=458-425=33$$

- $x=111/12$
- $y=-51/12$
- $z=33/12$

3.0 La falsa posizione e la doppia falsa posizione

Il metodo della Falsa posizione o regola della doppia falsa posizione sono nomi che ebbero origine in Occidente. Infatti gli antichi matematici cercavano invano di risolvere un'equazione del tipo ax+b=0 con metodi piuttosto macchinosi. Solo più tardi giunsero al metodo della Falsa posizione.
Partendo dall'equazione, si può spiegare in questi termini: supponiamo che g_1 e g_2 siano due ipotesi sul valore di x,e che f_1 ed f_2 sono i valori di ag_1+b e ag_2+b. Se f_1 o f_2 sono uguali a zero, allora una delle nostre ipotesi è vera.

$ax + b=0 \qquad g_1, g_2 \qquad ag1+b=0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ag2+b=0$

Supponiamo che non sia questo il caso.
Allora, posto

$ag_1+b=f_1$ (1)
$ag_2+b=f_2$ (2)

otteniamo $a(g_1-g_2)=f_1-f_2$ (3)

dalla (1) otterremo $ag_1g_2+bg_2 = f_1g_2$

dalla (2) otterremo $ag_1g_2+bg_1=f_2g_1$.

Sottraendo la seconda dalla prima ,otterremo: $b(g_2-g_1)=f_1g_2-f_2g_1$ (4)

Dividendo (4) per (3) otteniamo
$b(g_2-g_1)/a(g_1-g_2)=f_1g_2-f_2g_1/f_1-f_2$
ovvero

$-b/a =f_1g_2-f_2g_1/f_1-f_2$.

Ma poiché
$-b/a=x$
abbiamo determinato il valore di x.

Questa regola della falsa posizione la ritroviamo nelle opere di diversi autori (sia arabi, sia occidentali), ma Lui Hui la interpretò definendola regola *thiao nu*, termini che derivano dai moti lunari: il primo indicava l'ultima apparizione della luna calante e il secondo la prima apparizione della luna crescente.
Vengono usati delle espressioni come
- *chia ling*, "poniamo ora", in riferimento alla prima ipotesi g_1 (non importa se in eccesso o in difetto)
- *ling chih*, in riferimento alla seconda ipotesi g_2 .

5.0 Il teorema cinese del resto, breve storia del teorema.

Fibonacci nel cap. XII del *Liber Abaci* pone e risolve il classico problema oggi detto "*problema cinese del resto*".
Leggendo il passo, si desume che probabilmente Fibonacci non abbia conosciuto lo scritto di al-Haytham ma solo un suo compendio, infatti il testo conserva la parte induttiva e algoritmica, ma ha perso la chiarezza del matematico arabo.

Il problema viene posto in questi termini:
trovare quel numero che quando lo si divide per 2, per 3, per 4, per 5 e per 6 rimane sempre come resto 1; mentre è esattamente divisibile per 7.

Sottraendo 1 dal numero, il resto si dividerà esattamente per ognuno dei numeri suddetti.
Il numero 60 è divisibile per 2, 3, 4, 5, 6, ma se si divide per 7 da resto 4, che dovrebbe essere 6.
Allora, il primo passo é quello di capire che 60 é il minimo comune multiplo tra 2, 3, 4, 5, 6. Inoltre 60 é divisibile per questi numeri con resto 0. Se adesso provo a dividere 60 per 7 mi accorgo che il resto é 4. Per poter aumentare il resto di una unità bisognerà aumentare il numero di una unità. Per esempio 62 diviso 7 mi da come resto 6 (due in più). Allora lui dice questo numero che cerchiamo potrebbe essere del tipo 60 per 5 cioè 300. Se divido 300 per 7 ho come resto 6, quindi per determinare il numero basterà aumentarlo di 1, cioé 301 che diviso per 7 mi darà come resto 0. D'altro canto 300 é divisibile per 2, 3, 4, 5, 6 (in quanto contiene il fattore 60 che é il mcm di questi numeri) con l'aggiunta di 1 avrò resto 1 nella divisione di 301 per 2, 3, 4,5,6.

Con questa stessa regola si possono trovare altri numeri che soddisfano il problema cinese del resto.
La soluzione che da Fibonacci si può esprimere facilmente mediante il linguaggio delle congruenze lineari.

$$\begin{cases} n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2) \\ n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3) \\ n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4) \\ n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 5) \\ n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 6) \\ n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 7) \end{cases} \qquad (1)$$

Dal momento che la relazione di congruenza è compatibile con l'addizione e dal momento che -1 = 6 (mod 7), il sistema (1) è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} n-1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2) \\ n-1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3) \\ n-1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4) \\ n-1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 5) \\ n-1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 6) \\ n-1 \equiv 6 (\mathrm{mod}\, 7) \end{cases} \qquad (2)$$

Nel sistema (2) le prime cinque congruenze sono verificate per il numero n-1=m.c.m (2, 3, 4, 5, 6) =60. Pertanto, nella sesta congruenza 60 non viene verificata perché 60 = 4(mod 7).
Fibonacci dunque determina il più piccolo multiplo di 60 che verifica anche la sesta congruenza.
Come abbiamo già fatto precedentemente il calcolo di Fibonacci segue gli stessi passaggi per risolvere il 2° sistema che è quindi verificato per n-1=300, il numero cercato è quindi n=301.
Per determinare quindi la soluzione generale del sistema 1 basta quindi sommare alla soluzione particolare un multiplo del m.c.m. (2, 3, 4, 5, 6, 7)=420. Infatti, h 420= 0 (mod 2, 3, 4, 5, 6, 7) $\forall h \in Z$, si ha che 301 + h 420 è soluzione del sistema 1 $\forall h \in Z$.

6.0 Una falsa attribuzione alla Storia della Matematica Cinese.

Per molti anni si è attribuito alla storia della cultura cinese il seguente teorema:

p è primo se e solo se 2^p = 2 (mod p).

Questo teorema è dichiaratamente falso nella condizione sufficiente. Questo si verifica facilmente con dei controesempi: il numero *341 = 11×31* è chiaramente composto, e tuttavia
2^{341} = 2 (mod 341).
Infatti *2^{11} = 2048= 2 (mod 341) ? 2048-2= 341h ? h=2046/341 (2046= 6×341)*
Quindi *2^{11}= 2 (mod 341).*
Ora verifichiamo *2^{341}= $2^{11\times 31}$= (2^{11})^{31}= 2^{31}= 2 (mod 341).*
Nel ragionamento precedente, dobbiamo verificare solo che *2^{31}= 2 (mod 341).*
Questo si dimostra banalmente, perché:
2^5 = 32 = 1 (mod 31) ? 32-1= 31h ? h = 31/31 ? h = 1 ed è verificato.
Allora anche *2^{10} = 1 (mod 31).*
Siccome *341 = 11×31*, abbiamo verificato per 31, rimane da verificare per 11.
2^{10} = 1024 = 1 (mod 11) ? 1024-1 = 11h ? h = 1023/11 (1023 = 11× 93).
Quindi *2^{10}= 1 (mod 11 e mod 31),* e perciò *2^{10}= 1 (mod 341 = 11×31).*
Ne segue che: *2^{30}= 1 (mod 341) ? 2^{31}=2^{30}×2= 2 (mod 341).*

Questo teorema avrebbe avuto la pretesa di voler generalizzare il ben noto ***piccolo teorema di Fermat***.
Il piccolo Teorema di Fermat si definisce generalmente in tale modo:
"Se p è primo, per ogni intero *a* che non sia multiplo di *p*: $a^{p-1} = 1 \ (mod\ p)$".

Questa discende da un'altra definizione:

"Per ogni primo *p* e per ogni *a*, $a^p = a \ (mod\ p)$".

La motivazione che la forma tradizionale discenda da questa ultima si può verificare subito, in quanto *a* è un multiplo di *p*, anche a^p lo è, e dunque: $a^p = a = 0 \ (mod\ p)$.
Se *a* non è multiplo di *p (primo)*, allora $(a,p)=1$, quindi semplificando la congruenza precedente, dividendo per *a*, otterremo: $a^{p-1} = 1 \ (mod\ p)$.

Dall'enunciato di questa ultima formulazione del piccolo teorema di Fermat si può dedurre il seguente caso particolare: $2^p = 2 \ (mod\ p,\ p\ primo)$.

Possiamo concludere che il presunto teorema Cinese è una condizione necessaria ma non sufficiente. Se questa pretesa affermazione "cinese" fosse realmente fatta, avrebbe dato origine a un passo sulla possibile origine del piccolo teorema di Fermat.
Il fatto grave, come ha dimostrato Paulo Ribenboim, è che non solo questo "enunciato" è falso matematicamente, ma esso costituisce anche un ***falso storico***.
Ribenboim con l'aiuto di Siu Man-Keung (uno storico cinese) sostiene che non vi sono documenti che provino l'affermazione del criterio di caratterizzazione dei numeri primi.
L'errore si può ricondurre al fatto che il matematico Li Shan.Lan (1811-1882) pubblicò questo falso criterio nel 1868. Si ispirò ai manuali matematici dell'antica Cina ma non lo trovò enunciato. Più in là trovò dei contro-esempi, ma non pubblicò mai il testo rettificato.

Riferimenti Bibliografici.

- Alexei Volkov, *La Matematica: Le bacchette*, Storia della Scienza Enciclopedia Italiana Treccani, Roma, 2001.
- Karine Chemla, La Matematica: I Nove Capitoli, Storia della Scienza Enciclopedia Italiana Treccanni, Roma, 2001.
- Joseph Needham, *Matematica*, Scienza e Civiltà in Cina, Einaudi, Torino, 1985.