RIVISITANDO LA STORIA DELL'ANALISI

Cominciando dall'antichità

Conferenze tenute dal Ch. Prof. Santi Valenti

(a cura della Prof.ssa Carmela Zappulla)

"*Ho molte idee che potranno forse essere utilizzate, se altri più penetranti di me le approfondiranno un giorno, aggiungendo la bellezza del loro ingegno al mio lavoro* "

G.W. Leibniz

§ 0. Presentazione

Tutti coloro che hanno avuto più o meno a che fare con la storia della matematica, conosceranno i momenti e i protagonisti più importanti della storia dell'analisi. Ma se ciò è vero, non lo è il fatto che tutti coloro che abbiano, e non, studiato storia, abbiano anche ascoltato, gustato e rivissuto le prodezze di illustri e famosi matematici come Pitagora, Archimede, Eulero, Newton, Cauchy, Lebesgue attraverso le vive parole di un loro "collega" nato, però, nel nostro secolo: il Professor Santi Valenti, che ha il dono (che non tutti gli accademici hanno) di far capire a tutti, matematici e non, i concetti matematici più astrusi e impenetrabili.

È quello che è successo durante le tre *chiacchierate* (così come gli piaceva definire le tre lezioni qui esposte) che Santi Valenti ha tenuto nel Maggio 2000 al Liceo Scientifico Statale di Palermo "S. Cannizzaro" sulle motivazioni che portarono alla scoperta dell'analisi non standard.

Nelle sue frasi e nei suoi gesti, che purtroppo su carta non possono essere ricreati, è palpabile tutto quel fervore che solo uno studioso che si nutre e crea analisi sa trasmettere a chi lo ascolta con un sapore nuovo, fresco e coinvolgente.

Proprio per questo motivo la fatica di sbobbinare i nastri registrati, rielaborare e trascrivere queste formidabili "chiacchierate" non è stata un problema. Anzi ho ritenuto opportuno lasciare invariate determinate espressioni verbali di Santi Valenti, che così hanno conservato tutto il sapore originario.

Pur poggiando su questioni note, il modo di rapportare gli eventi al periodo storico e ai personaggi, proprio di Santi Valenti, la chiarezza e l'immediatezza della sua esposizione, impreziosiscono e accrescono il sapere degli *addetti ai lavori* e spalancano ai profani i cancelli della storia dell'analisi.

Ho imparato molto da queste tre lezioni, peccato siano state solo tre!

Carmela Zappulla

§ 1. Il problema dell'Analisi e l'età classica

Innanzitutto è ambizioso dire che io vi parlerò di storia dell'analisi, poiché in sole tre ore è impossibile sintetizzarla; vi porgerò comunque una *rivisitazione* per sommi capi di quello che è stata la storia dell'analisi e cercherò di fare una chiacchierata su quelli che sono stati gli aspetti filosofici-strutturali dei concetti principali della storia dell'analisi trascurando naturalmente grandissimi nomi.

Il mio intento sarà quello di illustrarvi essenzialmente attraverso quali grandi idee si è sviluppata la premessa a quella che noi chiamiamo analisi moderna e che poi ha portato attraverso i vari stadi successivi dei suoi sviluppi alle motivazioni che giustificano l'introduzione della misura di Lebesgue (poiché la mia esperienza di docente di istituzioni di analisi superiore mi insegna che gli studenti tutto capiscono fuorché il significato e l'importanza che ha avuto la misura di Lebesgue nella storia dell'analisi). Per concludere accennerò al perché si è dato uno sbocco nella direzione parallela dell'analisi non standard.

Per ragioni cronologiche farò un breve cenno a quelli che sono stati i capisaldi dell'*annunciazione* dell'analisi nell'antichità, poiché, escludendo Archimede che fu un prodigio non tanto per la mole delle sue opere per la sola parte che ci è arrivata (Archimede ha scritto moltissime altre cose di cui non ci è pervenuta neanche una riga) ma per la modernità del suo pensiero, o meglio per la sua concezione così attuale di fare analisi; tant'è che mi piace pensare che Archimede sia arrivato a qualche risultato che avrebbe aperto il calcolo integrale moderno, ma che l'opera in cui ciò scrisse non ci sia arrivata (ricordiamoci che per noi Archimede è ciò che Orazio e Tacito, tramite l'opera degli scrivani medievali, ci hanno tramandato).

Per cui fatta eccezione per Archimede, per tutti gli altri si può parlare solo di annunciazione dell'analisi, e in effetti l'arcangelo Gabriele di questa annunciazione fu Pitagora. Anche Eric T. Bell nel suo volume "I Grandi

Matematici" (oggi forse un po' datato in quanto scritto prima della seconda guerra mondiale) dice esagerando che l'analisi moderna nasce con Pitagora[1].

Ma cos'è e cosa fa l'analisi matematica? Se proprio vogliamo dare una definizione che non pecchi di parzialità, possiamo dire che l'analisi matematica si occupa di tutto quello che sono i procedimenti infiniti e le questioni di continuità, concetti che molto spesso intervengono simultaneamente nei problemi di analisi. Vale anche il viceversa: una disciplina in cui si parla di geometria e di algebra non ha nulla a che fare con la continuità e coi procedimenti infiniti.

Ma perché è Pitagora il precursore dell'analisi? Egli è il primo a porre un problema che è comune a tutti i grandi problemi di analisi matematica: operare su un insieme, che ha una certa struttura, con un procedimento infinito. E se al risultato di un tale procedimento si può applicare la somma o il limite dei singoli procedimenti che si applicano alle parti che si percorrono per arrivare al risultato, ciò (è difficile a dirsi, ma concettualmente è semplice) che abbiamo fatto è applicare il concetto di continuità. Esempio: prendiamo il problema dell'integrale per serie; se calcolo l'integrale di una famiglia di funzioni, posso dire che la somma della serie degli integrali è uguale all'integrale della funzione somma della serie? Da tale problema nasce la madre di tutti gli altri problemi. Naturalmente parlando di successioni si pensa subito a Cauchy, ma prima di lui, se non temporalmente allora logicamente, già Dedekind prende in esame questioni di continuità quando si pone il seguente quesito: se io mi avvicino tramite procedimento infinito a un ente, è sicuro che questo ente lo posso prendere perché esiste? Oppure tale procedimento di avvicinamento non porta a niente pur essendo il procedimento convergente?

Ma cosa c'entra allora Pitagora? Egli è il primo ad accorgersi dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$. Bisogna ricordare innanzitutto che tutte le grandissime questioni di storia della scienza, irrazionalità di $\sqrt{2}$ compresa, sono venute fuori da considerazioni semplicissime che però prima non si erano fatte; ciò vuol dire che qualcuno ha riflettuto su una situazione che gli altri avevano considerato ovvia, invece il grande pensatore è quello che si ferma e ci riflette sopra. E così fece Pitagora, il sacerdote del numero, che,

[1] Vedi p. 21 rigo 20. Ed. 1991 [nota mia]

avendo grande costumanza con numeri primi, fattori primi, operazioni coi numeri interi, fa una semplice considerazione e scopre una grande cosa: l'irrazionalità di $\sqrt{2}$. Richiamiamolo brevemente. Se, per assurdo, $\sqrt{2}$ fosse uguale a un razionale p/q, con p e q coprimi, allora $2=p^2/q^2$ o, che è lo stesso, $2q^2=p^2$. Ma se p è dispari anche p^2 lo sarà e quindi $2q^2=p^2$ non può sussistere; se p è pari allora p=2p', con p' numero naturale, e allora si ha che $4p'^2=2q^2$ cioè $q^2= 2p'^2$, e quindi q è pari, fatto che è contro l'ipotesi che voleva p e q coprimi. Quindi, uno che non è Pitagora, davanti a $2q^2=p^2$ sarebbe anche andato avanti, ma Pitagora no! Egli si accorge di aver scritto qualcosa di assurdo, e, in base a quanto detto prima, Pitagora conclude che è impossibile trovare un certo numero razionale p/q che rappresenti $\sqrt{2}$. Ecco che stava nascendo il primo grande problema dell'analisi, che scaturito da una semplice osservazione geometrica se ne era distaccato immediatamente per la sua acutezza (sino ad allora la geometria era legata a un'intuizione fisica e alla visione dell'oggetto matematico). Importante fu allora capire che malgrado quel $\sqrt{2}$ non poteva esistere tutti lo avevano "visto": basti pensare alla diagonale di un quadrato di lato unitario. Ma allora quella diagonale esiste e non ha lunghezza? Quindi ci sono segmenti che non hanno una lunghezza?

Ecco che, in quel momento, nasce, sebbene non come risultato ma come problematica, l'analisi: se si prende una famiglia di segmenti tutti esistenti e di lunghezza nota, tutti contenuti nella diagonale del quadrato e si mettono in ordine, essi possono avvicinarsi alla diagonale del quadrato pur non avendo quest'ultima una lunghezza. Ecco un tipico esempio di continuità che salta: tutti i segmenti hanno una propria lunghezza, la loro successione (per dirla in termini moderni) si avvicina alla diagonale, ma la diagonale non ha lunghezza. Risultato: non si esagera dicendo che con tale problematica nasce l'analisi matematica. E vedremo che anche un concetto moderno come la misura di Lebesgue, nascerà da una esigenza simile.

Ecco perché volendo dare una definizione di analisi matematica, possiamo dire che è *quella disciplina che si interessa di questioni matematiche in cui sono correlati strettamente i procedimenti infiniti e i problemi di continuità*.

Fino al secolo VI a.C. non c'era alcun sospiro di analisi, fino ad allora si faceva aritmetica o geometria di Talete, Euclide non era ancora venuto e anche se fosse venuto non sarebbe cambiato nulla poiché Euclide ha tutto nel suo spirito tranne la mentalità di analista, la sua parola d’ordine era *antianalitica* e vedremo come, pur di non porre questioni di analisi e mantenersi lontano dall’analisi, arriva anche a imbrogliare.

Una cosa è certa: fino al III secolo a.C. alle questioni di analisi erano più attenti i filosofi che i matematici. Infatti è nel V secolo a.C. che Zenone, filosofo atipico, si reca ad Atene in compagnia del suo grande amico Parmenide, per “bisticciare” con la metà dei filosofi ateniesi sui suoi paradossi, che essi stessi non sapevano risolverli e, quindi, se la prendevano con Zenone che glieli aveva proposti. Ma Zenone che fa? Tutti conosciamo la storia di Achille e della tartaruga, e Zenone ad Atene racconta questa storia non per prendere in giro i filosofi, ma per mettere in discussione, senza dar risposta, la liceità dei procedimenti infiniti. Quindi se i professori di filosofia parlano di Zenone come un poveretto che voleva sostenere che Achille non raggiungeva la tartaruga, lo presentano male. Zenone era un contadino, figuriamoci quante volte nei suoi campi e con i suoi piedi aveva superato una tartaruga! Zenone non era un pazzo o un astratto che viveva di allucinazioni così come farà più tardi Nietschtze, che visse gli ultimi anni della sua vita in manicomio. Zenone viveva a contatto con la terra, e pensava! Zenone non poteva mettere in discussione l’indiscutibilità della realtà esterna, voleva dire che se i filosofi parlavano di moto in senso discreto e non continuo non gli spiegavano nulla, anzi Zenone gli faceva vedere che in quei termini il moto non esisteva; ma Zenone fa ancora di più: li mette davanti alle loro responsabilità e comincia col presentare due aspetti che dal punto di vista matematico sono la stessa cosa: uno, fa vedere che apoditticamente il moto non esiste e, due, con un esempio dimostra che se per assurdo il moto esistesse si arriverebbe a un contrario. Quindi dà una doppia dimostrazione dell’inesistenza del moto, ove per moto si intenda quello discreto.

Infatti chiunque si dovesse muovere da un punto A ad uno B a destra di A, deve prima raggiungere una certa posizione C a destra di A e poi un’altra posizione D e così via; ma poiché per muoverci da una data posizione a un’altra bisogna sempre (e questo procedimento non ha mai fine) raggiungerne una precedente, non potremo mai spostarci dalla posizione iniziale.

fig.1

Questo ragionamento era ineccepibile per l’epoca, poiché allora il movimento era inteso senza l’utilizzo della continuità, e la continuità stessa non era stata analizzata nella sua struttura più intima. In quel periodo si procedeva per successioni discrete, e anche i razionali (benché già si sapesse che comunque presi due razionali posso sempre trovare uno nel loro mezzo) sono una infinità numerabile e presentano una grossa difficoltà: la non continuità. Visto che la retta razionale è non continua, e ancora nel V secolo a.C. si aveva la visione del numero come del procedere lungo la linea della consequenzialità, non si giungeva ad altro che affermare che non si potrà mai abbandonare la posizione iniziale A. Come si può vedere il problema della freccia che non lascia mai l’arco è matematicamente un problema di successioni. Viceversa, per il paradosso di Achille e della tartaruga, Zenone non fa altro che spostare il discorso sull’altra parte del segmento: la tartaruga ora è in B e Achille è in A;

nel tempo che la tartaruga si muove da B a B’ anche Achille si sarà mosso da A a B, ma ora la tartaruga è in B’; e se, nel frattempo, la tartaruga arriva in B’’, Achille raggiunge B’, e così indefinitamente: Achille, quindi, non raggiungerà mai la tartaruga.

A B B’ B”

fig.2

Ma ricordiamo, ciò succedeva poiché il loro modo di procedere era discreto e non continuo, e in tali condizioni il moto non esiste! E i filosofi se la presero tanto non perché non seppero rispondere, né avrebbero saputo farlo per i futuri 20 secoli, ma quanto piuttosto perché si resero conto che Zenone scosse alle fondamenta il loro modo di vedere e concepire la natura.

Lo stesso Euclide, che forse è il più classico dei greci classici, non si pose mai il problema. Ciò conferma il fatto che fino a Zenone e Pitagora la cultura greca è ancora alla sua fase testataria; la vera cultura classica arriverà nel IV secolo a. C con Platone e Aristotele, e quindi Euclide, a conferma della sua pura classicità, non vuol sentir parlare di ciò che è procedimento infinito o continuità.

Ma attenzione: dobbiamo distinguere il rifiuto di infinito come quantità numerica o quantitativa dal rifiuto del procedimento infinito. Sono due approcci diversi del concetto di infinito, tanto più che i greci erano disposti ad accettare per infinito una *misura* di quanto è grande una certa cosa, e precisamente quella più grande di tutte le altre. Euclide dice chiaramente che le rette per un punto sono infinite, usando un termine che è equivalente al nostro “infinito”: essi erano disposti quindi ad accettare un campo numerico (magari quello dell’analisi non standard) anche se non sapevano manovrarlo. Quello che non riuscivano ad accettare era un procedimento infinito, che richiedeva un numero infinito di passi.

Ecco perché quando ci viene detto: il greco rifiuta il concetto di infinito, ci si deve chiedere a quale infinito ci si sta riferendo, poiché non è l’infinito per cui nasce la diatriba scolastica, aristotelica, quella dell’infinito in atto o in potenza; *l’infinito che i greci classici rifiutano è quello dei procedimenti mentali* che portano a paradossi del tipo di Zenone. È un po’ come la soluzione che dà Russell quando scopre il suo paradosso dell’insieme di tutti gli insiemi: è plausibile pensare all’insieme di tutti gli insiemi, ma parlarne porta a tali contraddizioni che è meglio non parlarne.

Quando qualcosa ci dà fastidio la prima reazione che si ha è quella di ignorarla; così fecero i greci, e così fece anche Euclide ignorando tutti i problemi di analisi matematica, tant’è che nei suoi assiomi non ce n’è uno che abbia la più lontana parvenza di un assioma di analisi, anzi i suoi assiomi assomigliano di più ad assiomi algebrici ma certamente non ad alcuni di analisi. Eppure Euclide adopera un assioma dell’analisi barando consapevolmente: egli sfrutta l’assioma di Dedekind, senza mai ammetterlo, nel momento in cui discute delle mutue relazioni tra i cerchi e le rette, soprattutto quando parla di loro intersezioni e si trova davanti a situazioni di questo tipo: sia dato un cerchio Γ di centro C e un punto P al di fuori di esso, si consideri il segmento CP e sia D l’intersezione di Γ con CP.
Ma chi ci assicura che il punto D *esista* davvero? D può anche non esistere, ed Euclide lo sa benissimo! Infatti, in matematica “esistere” vuole dire “possibilità di affermare l’occorrere di un ente senza che esso entri in contraddizione con gli assiomi”. Ma per quell’epoca, ricordiamolo, quel punto D spesso non esisteva! Ed Euclide lo sapeva e lo ha ignorato.

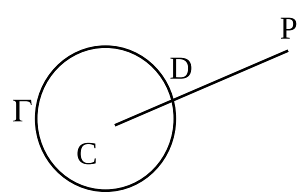
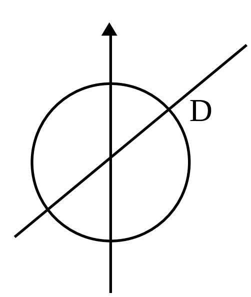


fig.3



Infatti, consideriamo il più banale dei cerchi, la circonferenza goniometrica $x^2+y^2=1$, e la più banale delle rette dopo gli assi coordinati, la bisettrice $y=x$. In tale situazione, se il nostro campo è quello razionale, il punto D non esiste poiché ha per coordinate $(\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2)$, che si sapevano non esistere sin dai tempi dei pitagorici.

fig.4

Euclide non dice una sola parola sulla questione, anche perché egli non fa geometria analitica né usa le coordinate cartesiane. Ciò comunque non gli impedisce di sapere che il punto D ha coordinate $(\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2)$, non ha bisogno di Cartesio per dire, parlando con suoi termini, che la proiezione di quel raggio di lunghezza 1 ha un lunghezza irrazionale; Euclide sa benissimo che essendo la diagonale 1, i lati del quadrato non esistono, o meglio non sono razionali.

Un altro motivo per cui Euclide non dice nulla è perché non ha mai definito quell'entità che chiama retta. Infatti Euclide ragiona assiomaticamente e non per postulati, cioè formula la definizione delle entità di cui parla tramite le proprietà che l'assioma enuncia, in altre parole, diremmo noi oggi, definisce implicitamente gli enti di cui parla tramite gli assiomi. Per Euclide l'unica cosa importante è che quell'ente che chiama retta obbedisca ai suoi assiomi, poi come la retta sia effettivamente fatta, non gli interessa granché, né lo vuole sapere. Tant'è vero che esistono modelli di geometria euclidea che non è lo spazio che ci circonda.

Quindi Euclide, ignorando che duemila anni dopo sarebbe venuto un tizio di nome Dedekind, sfacciatamente fa uso del postulato di continuità di quel tizio, e in più tace qualcosa che sarebbe rimasta ancora taciuta per almeno 1500 anni: l'analisi matematica. Certo Euclide avrà ben esaminato le proposizioni che dovevano reggere la sua geometria, ha ben scelto le 5 affermazioni che dovevano diventare gli assiomi relegando tutte le altre proposizioni allo *status* di teoremi dimostrabili a partire da quelle 5. Nella sua *forma mentis* non avrebbe mai trovato posto un elemento che aveva qualcosa a che fare con l'analisi matematica; e quando si trova costretto a usarla, lo fa sottobanco. Tenete presente che al IV secolo a.C. appartiene anche Platone e la sua influenza in atteggiamenti futuri è notevolissima.

§ 2. Archimede e la sua *incompiuta* opera

L'unico matematico svincolato e indipendente al *dictat* di Platone sarà (e lo vedremo più avanti) Archimede. Per Platone bisogna poter rappresentare tutto in termini di estrema sinteticità ed economicità, così come fa Euclide coi suoi 5 postulati. Per Platone parlare di procedimenti infiniti, di continuità o di strumenti che non fossero la riga e il compasso era a dir poco blasfemo; un tecnografo o un pantografo erano per Platone strumenti meccanici, roba volgare che non meritava l'interesse dello studioso o del filosofo. Quindi fino a Platone tutto era coerente con l'impostazione greca del periodo classico.

Ma nel IV secolo a. C stesso comincia un malumore: Eudosso da Cnido, amico di Platone ma sempre in diatriba e in dissidio su questioni matematiche. Infatti Eudosso affronta problemi che per Platone sono osceni dal punto di vista culturale: i suoi procedimenti di approssimazione per ricavare l'area di un cerchio, il cosiddetto metodo di esaustione di Eudosso, che Archimede porterà in auge nei suoi più splendidi risultati (per esempio un calcolo per misurare la lunghezza di un arco di parabola), potremmo oggi paragonarli alla dimostrazione del teorema di Fermat.

Quindi nel IV secolo a. C inizia a serpeggiare la ribellione. Eudosso accetta i procedimenti infiniti, anche se li maschera con discorsi che ricorrono solo garbatamente a questa dinamica senza termine del pensiero. Ma indubbiamente quando Eudosso dice che, inscrivendo un poligono regolare nel cerchio e via via aumentando il numero dei lati del poligono, mantenendone uguale la lunghezza complessiva, ci si può avvicinare all'area del cerchio quanto si vuole, Eudosso sta usando un procedimento infinito. Qual è allora la differenza tra Eudosso e Archimede? In Eudosso il procedimento di approssimazione consiste nella facoltà di avvicinarsi quanto si vuole all'entità voluta, in Archimede c'è il suo raggiungimento definitivo (è un po' la differenza che c'è tra l'analisi standard e quella non standard). Proprio in questo modo Archimede arriva alla dimostrazione che π è il rapporto tra la circonferenza e il suo diametro, oppure il rapporto tra l’area del cerchio e il suo raggio al quadrato.

Finalmente arriviamo al III secolo a. C., secolo che vede esplodere il genio di Archimede, matematico e fisico raffinatissimo.

Forse noi non abbiamo riflettuto abbastanza su cosa significò per l’epoca riuscire a intuire che, per il solo fatto di essere immerso in un liquido, un corpo riceve una spinta dal basso verso l’alto, e sottolineo: *per il solo fatto di essere immerso*.

Se oggi vi chiedete il perché non vi risulterà così immediato e intuitivo, si deve ragionare in termini di pressione statica, di legge di Pascal e così via, ma Archimede lo intuì, o meglio dopo aver riflettuto a lungo si rese conto che l’immersione di un corpo non permeabile spostava il liquido a livelli più alti di quelli precedenti e per effetto della forza di gravità, questo liquido spostato imprimeva al corpo immerso una spinta che tendeva a riportare l’oggetto a galla, spinta che dipendeva dalla quantità di liquido che veniva mosso dalla sua posizione di riposo.

Da non dimenticare è che Archimede fu anche un grandissimo aritmetico. Nel suo “Arenario” discute tranquillamente dell’infinità dei numeri naturali, il che vuol dire che Archimede accettava l’infinito come quantità. Ricordiamoci che siamo nell’epoca alessandrina, Archimede era pure uno stratega, chissà quanto aveva letto della fornitissima biblioteca alessandrina, non era il solo studioso della realtà di Alessandria, in cui chissà quante volte, nel senso buono, era stata corrotta la purezza della cultura classica. Eppure solo lui, a quanto sappiamo, giunse a risultati che cominciarono a varcare i confini di quella disciplina che poi verrà chiamata calcolo differenziale. Ciò è dovuto probabilmente al fatto che Archimede, più di tutti, applicava il metodo di Eudosso a problemi che toccavano più intimamente la questione differenziale, soprattutto quando si preoccupa di calcolare la lunghezza di un arco di parabola.

Noi oggi sappiamo bene che il calcolo della lunghezza di un arco di curva non è esclusivamente un problema di integrale; quando scriviamo la formula della lunghezza di una curva sappiamo che all’interno dell’integrale definito c’è una funzione che è strettamente legata alla derivata della curva: siamo davanti a un problema in cui calcolo differenziale e calcolo integrale si intrecciano. Ecco perché è stato più importante calcolare la lunghezza di un arco di curva che l'area di figure piane o il volume di certi solidi, poiché l'obbiettivo non è una semplice applicazione del metodo di esaustione, il problema delle tangenti alle curve era nascosto lì sotto. Infatti Archimede è il primo nella storia a fornire il calcolo di tangenti a curve che non sono algebriche.

Molti conoscevano il metodo, anche grafico, di determinare la tangente a una curva algebrica, ma Archimede pensa a curve che di algebrico non hanno nulla, per esempio la sua celeberrima spirale, curva trascendente. Egli stabilisce un metodo per determinare l'angolo di cui bisogna inclinare una retta perché essa in un punto qualsiasi della spirale sia tangente alla spirale stessa: in poche parole è come dire trovare il coefficiente angolare, o, che è lo stesso in termini analitici, introdurre il concetto di derivata. E Archimede ci arriva!

Come si vede, in quel tempo si parlava di retta con una certa confidenza, e dopo Archimede trattare di una curva in senso lato non era più un gran problema. Forse lo era stato per i Greci predecessori di Archimede, poiché noi identifichiamo una curva qualsiasi col suo grafico, ma per i Greci le curve erano solo le curve algebriche di secondo grado, cioè circonferenza, parabola, ellisse e iperbole, tutte curve descrivibili come luoghi geometrici e costruibili con riga e compasso.

Archimede dimostra di essere svincolato da questa idea di curva, la sua spirale non è certamente algebrica. Quindi risulta spontaneo chiedersi come mai Archimede non risolve problemi di analisi, se già è disposto, per conoscere l'area di un trapezoide, ad accettare sia i metodi di approssimazione sia il fatto che l'area sottesa da una curva differisce dall'area del trapezio solo di un infinitesimo (diremmo noi oggi), cioè una quantità d'area che sapeva essere trascurabile poiché lo aveva già fatto col metodo di esaustione per il cerchio.

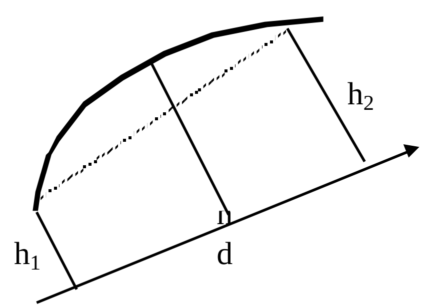


fig.5

Archimede sa che quest'area si avvicina ad $A=(h_1+h_2)d/2$, a parte l'infinitesimo d: Quindi se facciamo $A/d=(h_1+h_2)/2$ otteniamo la media h dei segmenti h_1 e h_2, cioè la distanza di quel punto dalla curva.

E quindi è strano che Archimede non abbia dimostrato il seguente teorema: "Data una curva e una retta che non le appartiene, l'incremento dell'area sottesa dalla curva differisce di un infinitesimo di ordine superiore dalla distanza $h=f(x)$ della curva dalla retta", che è il teorema di Torricelli-Barrow se si interpreta la retta come l'asse x e la curva come una $y=f(x)$.

Quindi risulta spontaneo collegare l'integrale con la derivata. In termini moderni

$$f(x) = \frac{d}{dx}\int_t^x f'(t)dt,$$

cioè, se l'integrale di una funzione viene derivato, il risultato non è altro che la funzione stessa.

Come mai Archimede non arriva a tale risultato? Oppure non è arrivata a noi l'opera in cui Archimede parla di ciò? Oppure, ancora, Archimede non si poneva il problema di trovare un collegamento tra il metodo di esaustione e il metodo delle tangenti, cioè non ha collegato il calcolo differenziale al calcolo integrale? Personalmente mi piace di più pensare che Archimede non si pose il problema, poiché, sono certo, se se lo fosse posto non gli sarebbero mancati né gli strumenti né le capacità.

§ 3. L'età medievale

Dopo l'età ellenistica e il sopraggiungere dei Romani (e le vicende di Archimede sono strettamente legate all'espansione di Roma), e soprattutto con l'uccisione di Archimede, si chiuse il periodo più bello della matematica nell'antichità e inizia un lungo inverno di letargo degli studi matematici nell'occidente che continuerà per tutto il periodo medievale. In quei secoli avremo solamente gli studi sulla prima algebra e sulla trigonometria da parte degli Arabi (ma siamo già 1000 anni dopo Archimede), studi che sono indispensabili allo sviluppo dell'analisi, basti pensare agli sviluppi in serie, ma che non hanno quello spirito che contraddistingue l'analisi: l'interazione tra procedimenti infiniti e continuità, che è lontana dalla mente dell'algebrista o da quella di chi si intende di trigonometria.

Ci furono anche gli esercizi stereotipi di scolastica sulle orme della filosofia ellenistica e il pensiero di San Tommaso d'Aquino, che con quella sua giaculatoria forma di modi di dire e quelle sue tecniche automatiche di ragionamento addormentò la filosofia (si pensi al suo "ipse dixit" per troncare ogni discorso e ogni possibilità di dialettica in ambito filosofico).

I primi segnali di risveglio li troviamo più di un millennio e mezzo dopo Archimede, periodo che intercorre tra il III secolo a. C e il 1200, quando Leonardo Pisano, figlio di Bonaccio, detto Fibonacci, iniziò a interessarsi, sulla scia degli studi arabi, e a esaminare timidamente alcune proprietà dei numeri, delle equazioni (già studiatissime dagli arabi ma tutte espresse in forma retorica, poiché non esisteva ancora quella preziosissima stenografia dovuta a Cartesio) e delle successioni di numeri che presentavano particolari assetti (i cosiddetti numeri di Fibonacci). Ma quanto ad analisi, intesa sempre come quella attività della matematica che studia e intreccia procedimenti infiniti e continuità, nulla.

Verso il secolo XV cominciano a spuntare proclami di analisi con Cardano, che risolve equazioni di grado superiore a 2. I calcoli iniziano a complicarsi e conseguentemente le soluzioni non possono essere più razionali.

Ma facciamo un passo in dietro. Ricordiamoci che quando Euclide dice che due rette si intersecano in un punto che esiste, Euclide non ha bisogno di barare: i coefficienti delle sue equazioni sono razionali e Cramer oggi ci assicura che le soluzioni sono sempre razionali in quanto date dal rapporto di determinanti che si ottengono da somme e prodotti dei coefficienti (razionali). Non può però esistere il punto d'intersezione tra retta e circonferenza, poiché la circonferenza (lo dico a parole nostre ma allora si sapeva bene) è rappresentata da un'equazione di grado 2, quindi il sistema tra retta e circonferenza è di secondo grado, e la sicurezza di avere soluzioni razionali non ci è più data.

Ecco perché quando nel XIII secolo vediamo autori che si cimentano nello studio di equazioni di grado superiore al primo, cominciamo a entrare in un settore in cui si hanno prodromi di analisi, poiché si comincia quanto meno ad auspicare l'esistenza di qualcosa che ancora mancava: **R** e **C**, quando la soluzione non esisteva neanche come numero irrazionale.

§ 4. Cartesio e la sua rivoluzione *simbolica*

Solo tra il XV e il XVI secolo inizieranno quel complesso di studi che porterà all'analisi. Infatti a cavallo tra questi due secoli vive Renato Cartesio che indubbiamente è molto più grande di quanto si dica, poiché, al di là della sua rilevantissima statura nel campo della conoscenza, basta citare il suo "*Cogito ergo sum*". Questa semplice frase era, per l'epoca, una vera e propria rivoluzione: immaginiamo cosa volesse dire che io sono in quanto pensante e non io sono e penso in quanto Dio. Dobbiamo quindi riflettere sul fatto che i contemporanei di Cartesio non capirono la portata del suo pensiero: Cartesio legittima la radice del suo essere per il fatto stesso che si percepisce un essere pensante! Galilei fu condannato subito per molto meno, e precisamente perché disse che esistono nell'universo situazioni che possono contraddire una affermazione empirica; quando Galilei dice che è la terra a ruotare intorno al sole non lede né mette in discussione le Sacre Scritture, poiché oggi come 2500 anni fa tutti diremmo: <<che bel sole è sorto oggi>>, e non << oggi siamo sotto un angolo ottimale di visuale del sole>>. Allo stesso modo Giosuè, anche se fosse stato illuminato dalla Grazia Divina, svegliandosi, avrebbe detto: <<fermati oh sole!>> e non: <<smetti oh terra di ruotare intorno al sole!>>! Quindi l'attacco della Chiesa a Galilei era essenzialmente filosofico, in quanto egli demandava tutta la giustificazione della conoscenza del mondo alla verifica sperimentale, mentre allora non ci si poteva permettere che la conoscenza avesse altri "sponsor" all'infuori di Dio.

Ecco che Cartesio scampò al rogo per miracolo, tant'è vero che egli scappo più volte fino ad arrivare in Svezia, dove morì di freddo (di polmonite) invece che di caldo (al rogo)! Ma di fatto Cartesio non fu consegnato alla storia come un eretico, bensì come il primo nuovo e sconvolgente ingegno sia dal punto di vista filosofico che matematico. L'innovazione che Cartesio apporta alla matematica è di due specie, entrambe particolarmente sovversiva: la prima è il rifiuto di considerare ogni conoscenza matematica come geometrica, o meglio, come fondante su un qualcosa che fosse assegnato: dubitare di tutto! Questo è l'unico suo vero principio. Ogni cosa deve essere riportata a qualcos'altro che essendo chiaro ed evidente non si può mettere in discussione oppure a qualcosa su cui ci si mette d'accordo nel non discuterla poiché verrà discussa in un altro momento (assioma).

Prima di Cartesio, il problema di una impostazione assiomatica della matematica sembrava essere stato risolto una volta per tutte da Euclide. Cartesio invece dice che ogni impostazione di studio matematico deve provenire da una convinzione dello studioso che sia rispondente in qualche misura a una conoscenza più vasta del mondo naturale. E in tutto questo discorso fondamentale è il principio di continuità.

Come fa un uomo come Cartesio ad assumere l'esistenza di quel punto D senza avere un postulato di continuità? Cartesio (ed è questo il secondo aspetto fondamentale della sua opera) stabilisce che tanto più una serie di proposizioni matematiche è giustificata dalla sua struttura consequenziale quanto meglio si riesce a tradurla in una stenografia per la quale esistano regole fisse di passaggio da una formula all'altra che mi permettono automaticamente di partire da un assunto e di giungere a un risultato. Non è solo un fatto di linguaggio o di scrittura, Cartesio è il primo a formulare (anche se non in questa forma) quel principio secondo il quale viene soddisfatta la richiesta di una garanzia del nostro ragionare.

Questa sua nuova maniera di scrivere la matematica è importante sia per la sua brevità e per la sua chiarezza, sia per il fatto che ci consente di aver garantito, meglio di qualsiasi altro linguaggio, quel principio secondo il quale una deduzione è corretta se applicando determinate regole alla proposizione P si riesce a giungere dopo un certo numero di passaggi alla proposizione Q con un metodo di deduzione assolutamente automatico. Ciò comporta che gli esperti possono lavorare meglio con un linguaggio sintetico ma chiaro.

Conseguenza immediata fu una fioritura spaventosa, dopo Cartesio, di studi sulle curve algebriche. Ed ecco che un bel numero di studiosi (considerati minori a mal proposito) cominciarono a studiare tecniche, metodi, formule, espedienti e artifizi per trovare per via algebrica le tangenti a una curva in un suo punto, e quindi risolvere il problema fondamentale dell'analisi.

Ma ancora in tutto questo studio c'era qualcosa di difettoso. Tale metodo era prettamente algebrico: malgrado si parli già di tangenti a una curva <u>qualsiasi</u> (che ci paventa già l'idea di funzione) lo si fa con tecniche algebriche. Ma già si conoscevano alcune curve trascendenti che da sole bastavano a far capire che non c'era possibilità alcuna di rappresentarle per via algebrica. Allora ci si rese conto che era impossibile trovare una tangente a una curva con un metodo algebrico: è questo il momento in cui si può riconoscere una prima scaturigine di calcolo differenziale.

§ 5. Newton e la nascita del calcolo differenziale

Con la ventata fortissima della richieste da parte della fisica e con l'inizio del XVII secolo compare Isaac Newton, il quale si rende conto che per fondare la fisica ha bisogno di definire correttamente le grandezze fondamentali della fisica, e cioè lunghezza, massa e tempo, e che quest'ultima, come variabile, scorre indipendentemente da tutte le altre (è di Newton l'espressione secondo la quale il tempo sarebbe una variabile assoluta).

Ma in fisica davanti al minimo problema di cinematica si presenta l'esigenza di introdurre una grandezza più lata e non primitiva: la velocità. Nel momento in cui, tracciata una qualsiasi curva, un oggetto si trova in un dato tempo in una certa posizione si ha l'esigenza di studiare curve i cui punti hanno ascisse che variano in dipendenza del tempo. Quindi è importante (e questo si fa vedere subito ai ragazzi quando si introduce la derivata) osservare che la determinazione della velocità di un oggetto che ha diagramma orario è del tutto equivalente alla determinazione della tangente alla curva nel punto che rappresenta l'istante che ci interessa.

Qui si ripresenta *fortissimamente* l'esigenza di fornire un algoritmo, un **calcolo** che ci consenta di determinare le tangenti a una curva, essendo tale curva "abbastanza qualsiasi". Questo calcolo non sarà altro che il calcolo delle flussioni di Isaac Newton. Notiamo che per quanto importantissimo in fisica, in matematica invece non ha importanza se una grandezza è derivata o no, o se è la derivata della derivata, poiché, per esempio nel caso dell'accelerazione, avrei la flussione della flussione dello spazio.

Ma il capire cosa si debba fare non ha implicato mai la sua semplicità di esecuzione. Infatti questo **calcolo** è difficilissimo e Newton, che non era uno sprovveduto, lo sa. Ricordo che a lui Barrow, suo illustre maestro, cedette la cattedra consapevole del fatto che ormai Newton sapeva rispondere a quesiti cui egli stesso non trovava risposte, e che è stato sempre lui che aveva portato alla dignità di teorema quella considerazione che lo stesso Archimede non seppe formulare, e cioè: presa una curva qualsiasi e una retta, si consideri la regione di piano compresa tra le due perpendicolari alla retta e alla curva stessa; in tale situazione è ben evidente che quanto più vicine sono queste due perpendicolari (allora si consideravano curve abbastanza regolari), la porzione di piano che sta al di sotto del tratto di curva può confondersi sempre più con l'area del trapezio in figura 2 (pag. 12), area che è $[(h_1+h_2)/2]\cdot d$. Tale equivalenza diventa uguaglianza se h_1 si avvicina ad h_2 e quindi se h medio si avvicina alla distanza che il punto sulla curva ha dalla retta data, donde l'incremento percentuale istantaneo (cioè piccolissimo) dell'area altro non è che la distanza della curva dalla retta. Ecco che, avendo alla spalle Cartesio, tutto questo discorso su un piano cartesiano diventa:

$$[(h_1+h_2)/2]\cdot d = \int_a^{x_1} f(t)\, dt - \int_a^{x_0} f(t)\, dt = \int_{x_0}^{x_1} f(t)\, dt$$

e appena divido tutto per d, ottengo l'incremento medio. L'equivalenza diventa uguaglianza quando passo al limite per $d \to 0$ o se faccio tendere $x_1 \to x_2$. In altre parole, la derivata di questa funzione altro non è che h, il valore della funzione in quel punto: ecco il teorema di Torricelli-Barrow, la derivata dell'integrale è uguale alla funzione integranda.

Newton, con tutto questo lavoro fatto già dal suo maestro, risale agli sviluppi in serie di Taylor, a molte di quelle formule poi dette di De L'Hospital, alle nozioni di curva concava e convessa, ai problemi di massimo e minimo, ecc..., in poche parole fonda il calcolo differenziale. Ecco che siamo davanti all'atto indiscutibile di nascita ufficiale dell'analisi.

Tutto ciò che si studia oggi al primo anno e va sotto il nome di analisi con la differenziabilità e l'integrabilità delle funzioni reali si deve a Newton, con l'eccezione di qualche precisazione riguardo all'integrale, che ha alle sue spalle una studio dovuto a un contemporaneo di Barrow, Mengoli (infatti i testi più pignoli chiamano l'integrale come integrale di Riemann, Mengoli e Cauchy).

Nel frattempo nel mondo stanno succedendo due cose importantissime.

La prima: gli studi di Newton hanno portato all'attenzione dei matematici il concetto di infinitesimo, che è nato illegittimo nella famiglia della matematica, ma che Leibniz sente di legittimare. E qui nasce la diatriba tra Newton e Leibniz sull'infinitesimo. Ma chi ha ragione? Fino a una quarantina di anni fa si era pensato che fosse Newton ad avere *irreversibilmente* ragione. In altre parole, le considerazioni di Leibniz sull'infinitesimo, trattato come un numero vero e proprio con cui poter fare operazioni, continuavano ad attirare le ire, per esempio, di George Berkeley che li definiva "fantasmi di quantità svanite". E i discorsi di Berkeley contro gli infinitesimi di Leibniz erano così convincenti, da convincere tutti gli studiosi d'Europa, compreso Leibniz (che muore convinto che è Newton ad avere ragione), per quasi 200 anni, e cioè fino all'avvento dell'analisi non standard, con cui Robinson dimostrò che "anche" Leibniz aveva ragione. Robinson dimostrò che esiste un campo composto da numeri reali e numeri infinitesimi sul quale si può definire un'analisi diversa che però dava risultati completamente isomorfi a quelli della "vecchia" analisi.

La seconda: nasce tra due fratelli di una ricca famiglia di matematici, i Bernoulli, una questione. Uno dei due fratelli, Johannes, propone all'altro, Jacob, il seguente quesito estremamente insidioso sperando che cada in un errore marchiano: se si hanno due punti A e B in uno stesso piano verticale, come deve muoversi sotto la sola azione della gravità un punto materiale da

A per raggiungere B nel minor tempo possibile? La risposta più ingenua è: sul piano inclinato! Ma non è così! Naturalmente Jacob si rende conto che non è il piano inclinato. C'è una linea notevolmente più lunga del tratto retto AB e, ciò nonostante, tale da essere percorsa in un tempo più breve: è un arco di cicloide, che venne perciò detta "brachistocrona" (dal greco: curva che si percorre nel minor tempo). Jacob risolve tale problema utilizzando proprio il principio della brachistocrona. Infatti in meccanica si sa che, quando un fenomeno si può sviluppare in più modi possibili, esso preferisce sempre svilupparsi secondo una serie di posizioni dello spazio tali che essi si possono percorrere nel minor tempo possibile, riportando il percorso del punto materiale a quello di raggi luminosi che si rifrangono, e poiché Bernoulli sa che la luce segue sempre la legge del minimo tempo, considerando poligonali ottenuti da successivi tratti di raggi che si rifrangono su strati d'acqua che si specchiano, e poi facendo il limite della poligonale (cioè facendo tendere a zero la lunghezza del massimo lato della poligonale), egli scopre che questa curva è precisamente un arco di cicloide.

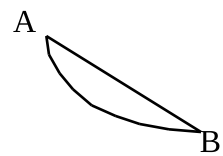


fig. 6

Noi oggi il problema proposto da Johannes a Jacob Bernoulli, lo formuleremmo così: dati due punti che vincolano una famiglia di curve a passare tutte per essi, qual è quella che realizza una condizione (di massimo o di minimo) assegnata? Quindi in tale problema c'è qualcosa di simile al problema di Newton e del calcolo differenziale: fra tutti i punti di una data curva qual è quello nel quale il valore della curva per intorni sufficientemente piccoli è il minimo di tutti o il massimo di tutti? Quindi c'è analogia con la ricerca di una funzione che realizzi il minimo sotto una data condizione, cosa che Bernoulli cerca di fare.

Questa "salita di grado" del problema, che sposta la ricerca dai punti alle funzioni in relazione a problemi di massimo e minimo vincolati, determina l'esigenza di un nuovo **calcolo**, che coincide col calcolo del minimo o del massimo relativo di una funzione risolto da Newton. Ecco perché è importantissimo questo momento: tale esigenza coincide con la nascita del calcolo delle variazioni, altra grandissima branca dell'analisi matematica. Anche l'atterraggio di un modulo lunare sulla superficie della luna è dato da un calcolo di variazioni, poiché posso considerare la posizione del modulo a una certa altezza e poi a terra, e immaginare di percorrere questo tratto nello stesso tempo ma con accelerazioni diverse, e quindi cercare tra le svariate possibilità quella che mi garantisce l'atterraggio più sicuro o che mi soddisfa, per esempio, condizioni di minimo urto.

Grandissimo maestro di questo calcolo sarà Leonardo Eulero, che darà il primo grande teorema per la risoluzione di un problema generale, riuscendo a ricondurre la ricetta del minimo integrale a questioni di lunghezze di curve: si tratta di applicare la derivazione agli integrali e trovarne il minimo, cioè minimizzare una famiglia di integrali. Eulero ci riesce in maniera superba, riportando il problema generale del calcolo delle variazioni alla risoluzione di una equazione differenziale alle derivate parziali. Ciò è una esemplificazione, poiché, ed Eulero lo sa bene, è molto più semplice risolvere un problema di massimo o di minimo annullando le derivate parziali invece di minimizzare un integrale facendo variare la funzione integranda (equazione associata di Eulero).

Solo dopo Eulero si assiste in tutta Europa un fiorire di risultati che finalmente rientrano nel *mare magnum* dell'analisi.

§ 6. Il XIX secolo

A questo punto, facciamo un salto spaventoso e arriviamo all'improvviso a Cauchy e agli aritmetizzatori dell'analisi. Ricordiamo però che Berkeley, oltre al suo fine apologistico, aveva un secondo fine reso chiaro nel suo libricino l'"Analista": egli dimostrava (in modo ineccepibile per l'epoca) che gli analisti avevano dei dogmi che erano molto più emozionanti e molto più incerti di quelli di un teologo. Ciò era dovuto al fatto che un analista basava interi capitoli della sua opera su cose in cui credeva *per fede* e non perché le aveva dimostrate. Berkeley ha inoltre mostrato che l'analisi era basata su una serie di proprietà, definizioni, teoremi e proposizioni giustificati solo dall'intuizione. **E ciò era vero!** Quindi i matematici, scossi dalle accuse e dalle critiche di Berkeley, vollero *fortissimamente* dimostrare che l'analisi stava in piedi da sola. Essi non cercarono 5 assiomi su cui basarla (alla Euclide), ma partendo dalla constatazione che l'analisi si basava su un campo numerico, dimostrarono che essa poteva essere dedotta dagli assiomi di un campo algebricamente chiuso: **C** oppure **R**.

Quest'opera viene iniziata mostrando che tutto, a cominciare dal numero reale, è rappresentabile in soli termini di numeri interi. E qui ha inizio la famosa costruzione detta di Cantor (che in realtà non era di Cantor ma di Cauchy) della nozione di numero reale come famiglia di successioni. Ecco che, partendo dal presupposto che, uno, le successioni sono fatte solo di numeri razionali, il concetto di successione di Cauchy si può formulare in termini di razionali, e, due, la classe di equivalenza delle successioni equivalenti a una successione data secondo la proprietà di differire per una zero-successione si può dare in termini di numeri razionali, allora si può affermare che un numero reale è la classe di equivalenza di tutte le successioni equivalenti a una successione data.

Tale magnifico risultato rimase valido fino a quando qualcuno si accorse che, se ciò poteva andare bene a Euclide, a loro uomini del XIX secolo non più! Mancava ancora un assioma, quello dal quale dedurre l'esistenza del famoso punti d'intersezione D.

La ricerca di una spiegazione dell'esistenza di D fu un tormentone durato mezzo secolo, e precisamente fino a quando un giorno il professore Julius Wihlelm Richard Dedekind entrando in aula e, senza aver mai pubblicato una riga, dice di aver la soluzione per la continuità. Egli parlò così ai suoi studenti: supponete di prendere un punto A sulla retta, esso divide i punti della retta in due classi di numeri ciascuno dei quali precede ciascuno degli altri e tali che la loro unione dà origine a tutta la retta; ora immaginiamo, al contrario, di avere le due classi di punti della retta tali che ogni punto della prima classe preceda ogni punto della seconda e tali che entrambe le classi esauriscono la retta; allora, sono sicuro che esista un punto siffatto? La risposta è: no! Solo se assumo (postulo) che lo posso trovare, sono davanti a una situazione di continuità. In altre parole, l'*inverso* di ciò che avevo prima mi risolve il problema della continuità della retta se quel punto esiste, altrimenti ho una situazione di non continuità.

Dedekind scopre, quindi, con questa semplice osservazione il segreto della continuità: comunque si separi la retta in due classi di punti, in modo tale che ciascun punto della prima preceda ciascun punto della seconda e tale che entrambe le classi esauriscano tutti i pinti della retta, se in tale situazione c'è un elemento della retta maggiore di tutti gli elementi della prima classe e minore di tutti gli elementi della seconda classe, si dirà che la retta è continua, se così non è la retta non sarà continua. E, badate bene, tutte le volte che voglio dire che la retta è continua si dovrà enunciare quest'assioma, e viceversa: ecco l'assioma di Dedekind sulla continuità della retta, che né Dedekind né nessun altro potrà mai dimostrare.

Risultato: solo nel momento in cui agli assiomi della retta aggiungiamo questo assioma di continuità, potremo affermare di avere aritmetizzato l'analisi.

Ma fermiamoci un attimo e facciamo il punto della situazione. Dopo il grande sviluppo dell'analisi dovuto a Newton, e a lui successivo, si ebbe un coacervo di risultati brillanti interessanti sì, ma caotici e spesso condotti con tecniche dimostrative molto intuitive e sbagliate, tanto che Berkeley, anche per prendere posizione davanti agli scienziati di natura positivista che avevano un atteggiamento di critica verso gli analisti, scrive l'"Analista" in cui, con una sequela di prove matematiche, dimostra che il modo di procedere degli analisti non era più dogmatico di quello degli stessi teologi. Va, comunque, ascritto a Berkeley un grandissimo merito: quello di aver spronato i matematici a non abbandonarsi a questa corsa selvaggia tralasciando il rigore. Così nel secolo XVIII si inizia a revisionare tutta la teoria del secolo precedente, vagliandola con un metro che potesse riconoscere quanto rigorosa era una dimostrazione o quanto lo era un metodo, e che riportava le teorie se non a un criterio di verità almeno a uno di validità del ragionamento. Ovviamente i tempi erano troppi precoci perché si avesse un criterio realmente rigoroso come lo è, oggi, il metodo ipotetico-deduttivo basato su un'impostazione assiomatica. Il metodo seguito fu quello di riferire i concetti matematici alle proprietà dei numeri naturali, sulle quali si riteneva non doverci essere nulla da discutere (ricordiamo che per Peano ci vuole ancora un secolo). Conseguenza: i concetti ricondotti con inferenze logiche ai numeri naturali erano certi ed evidenti. Tale procedimento, che dura circa un secolo, viene chiamato **aritmetizzazione dell'analisi**; la punta più luminosa di tale procedimento, che sfocia nella seconda metà del XIX secolo, è, senza dubbio, la costruzione di Cantor dei numeri reali a partire dai naturali.

Ma prima di Cantor c'erano stati una serie di matematici, tra i quali Cauchy, che avevano rigorizzato il metodo della ricerca del limite, o come Bolzano che aveva scritto "I paradossi dell'infinito", un libricino con cui il suo obiettivo non era, come quello di Zenone, di fare una raccolta di situazioni paradossali che provenivano dall'uso del concetto di infinito, bensì quello di sottoporre a critica questo concetto facendo vedere come quei paradossi potevano essere evitati poiché dipendevano da una cattiva definizione del concetto stesso di infinito. A Bolzano, infatti, dobbiamo la definizione di infinito come equipollente a una sua parte, definizione che ha un livello di astrazione estrema e di eleganza rara per l'epoca. Certo Bolzano non ha usato questi termini, ma è riuscito pur sempre a definire il concetto e a riorganizzarlo anche come sistema di enti, e non solo come procedimento infinito.

In tempi più recenti, Russell ha costruito il suo famoso paradosso sulla stessa impalcatura logica con cui Cantor ha dimostrato che l'insieme delle parti di un insieme ha potenza superiore a quella dell'insieme stesso: è lo stesso procedimento, visto da Cantor in positivo e da Russell in negativo, per arrivare a una contraddizione, o meglio a un'antinomia.

Non dobbiamo dimenticare neanche Weierstrass (di cui tutti conosciamo almeno un teorema, quello di Bolzano-Weierstrass) e, come abbiamo già accennato, Dedekind, che da tutti gli altri si distacca per la sua diversità di metodo: "Non si può costruire l'analisi con gli strumenti fornitici dalla teoria dei numeri naturali, poiché in analisi si deve postulare che la retta reale sia un sistema continuo".

In effetti, prima di Dedekind, tutte le risposte alla richiesta di continuità di **R** erano di tipo tautologico, cioè dicevano qualcosa che equivaleva alla continuità ma che bisognava sempre definire e che, quindi, spostava il problema altrove o lo assimilava alla densità di **R**. *Con Dedekind la continuità non viene definita ma postulata.* La genialità di Dedekind sta nell'aver riflettuto di più su qualcosa che gli altri davano per scontata: la continuità della retta reale risiede nel fatto che l'esistenza (e l'unicità, di cui però Dedekind non parlò mai) dell'elemento separatore delle due sezioni non si può, né si potrà mai, derivare in alcun modo, bisogna postularla. Solo con Dedekind l'analisi viene realmente sistemata dal punto di vista del rigore.

§7. Verso un nuovo modo di intendere l'Analisi

Ma dalla frontiera della fisica matematica, un matematico piuttosto attivo, Jean Baptiste Fourier, che si stava occupando di teoria del calore, scrive un trattato, che Sommerfield definisce "the Bible of the mathematical Physics" per il suo rigore, per la sua novizia, per i risultati, l'acume e l'intelligenza. In un capitolo di tale trattato, Fourier si interessa dell'equazione cosiddetta del calore, un'equazione differenziale alle derivate parziali che governa nel tempo e nello spazio la distribuzione del calore in un corpo materiale qualunque con conducibilità termica determinata; il caso più semplice è quello di un corpo unidimensionale reale e limitato: per esempio, una sbarra di metallo di estremi A e B con conducibilità termica costante. Per questo semplice caso, Fourier trova (casualmente) delle soluzioni *sinusoidali*, e ne rimane perplesso: come mai se poniamo una fonte di calore, o meglio un termostato a temperatura t_1 all'estremo A e un altro a temperatura t_2 all'altro estremo della sbarra, con $t_1 > t_2$, il calore si propaga nello spazio (ignoriamo per ora il tempo) in modo tale che la temperatura prima sale, poi scende, poi risale e poi riscende? L'interpretazione fisica di tale risultato non convince molto. Fourier, però, arriva a una conclusione: il fatto che io trovi ora una soluzione non vuol dire che *necessariamente* nel mondo reale le cose vadano allo stesso modo. Ma allora la matematica non spiega più la fisica? No, ciò vuol dire semplicemente due cose: uno, che io posso aver creato un modello che dà conto a un numero di fenomeni più ampio di quello per cui io sto applicando questa matematica; due, che se per esempio la distribuzione del calore è rappresentata da una curva qualsiasi, nulla mi può impedire di approssimarne un tratto con un arco di sinusoide, e se questa non va bene posso sempre sommare un'altra sinusoide con periodo maggiore, e poi ancora un'altra, fintanto che, con correzioni successive di sinusoidi che sono sempre soluzioni della mia equazione di partenza, arrivo alla mia soluzione finale. Cosa ci sta dicendo Fourier? Che con un metodo di approssimazione, che come tale è un procedimento infinito, e $\forall\varepsilon$ posso considerare un numero talmente grande di sinusoidi che la loro somma meno la funzione che voglio rappresentare è $<\varepsilon$: è il concetto di convergenza di una successione di funzioni a una funzione data, o, che è lo stesso, di una serie di funzioni.

Conseguenza ne è il fatto che Fourier capisce che le sinusoidi che ha trovato non sono estranee alla soluzione del problema del calore, anzi, altro non sono che i pezzi, i mattoni della soluzione, che sarà una combinazione lineare, eventualmente infinita (nel qual caso prende proprio il nome di sviluppo in serie di Fourier), di funzioni di tipo sinusoidali.

Nascono così gli sviluppi in serie di Fourier: la grandissima innovazione apportata da Fourier nell'ambito della matematica è proprio l'invito a considerare funzioni rappresentabili come somma di serie di sinusoidi. Adesso si può rivedere tutta la matematica sfruttando questo principio: nasce l'analisi funzionale moderna.

Ma Fourier non dà solo un importante apporto alla matematica, dà anche un contributo inconsapevole che si rivelerà soltanto 50-60 anni dopo. A prescindere da Fourier, già in quegli stessi anni, esisteva un calcolo di limite di una successione di funzioni che tendeva a una funzione data, ma in tale concetto c'era ancora qualcosa di non rigoroso: la continuità, intendendo con essa un procedimento infinito su determinati enti che godono di una certa proprietà, proprietà che deve valere ancora per l'ente-limite. E i matematici, una volta conosciuto l'integrazione secondo Riemann, scoprono che non sempre è così: esistono successioni di funzioni continue che possono convergere a una funzione che continua non è.

Facciamo un esempio. Consideriamo la successione $\{x^n, n=1,2,3,...\}$ nell'intervallo [0;1] reale. Allora si avrà che il limite della successione, per $n\to+\infty$, è uguale a 0 se $x\in[0;1)$, è uguale a 1 se $x=1$. Quindi la successione considerata, fatta $\forall n$ di funzioni continue, tende a una funzione che continua non è più. In tale situazione, si dimostra (salvando la continuità almeno da questo punto di vista) che la successione degli integrali delle funzioni tende a zero e l'integrale della funzione limite dà anche 0: quindi, la successione degli integrali delle singole funzioni tende all'integrale della funzione limite.

Qualche tempo dopo, Weirstrass fornisce una funzione ottenuta come limite di una successione di funzioni continue, ma che è totalmente discontinua in ogni punto, che, guarda caso, è una successione di Fourier non integrabile secondo Riemann, poiché l'integrale superiore e quello inferiore sono diversi. Una successione, quindi, di funzioni continue e integrabili tende a una funzione che non è né continua né integrabile: è la funzione di Dirichlet, fatta da seni e coseni che converge a 1 se x è razionale, converge a 0 se x non lo è.

Adesso il problema è il seguente: c'è disarmonia nell'analisi o è l'integrale di Riemann a essere inadeguato? A tale questione rispose Henri Léon Lebesgue, che crede, nel profondo della sua anima, che è proprio l'integrale di Riemann a essere inadeguato.

Lebesgue sostiene che l'integrale di Riemann è *miope*, e tralascia casi importanti: ci vuole quindi un altro integrale più generale che abbia maggiore potere risolutivo, un integrale per cui una successione di funzioni integrabili sarà sicuramente convergente a una funzione integrabile. Per arrivare a tale risultato, Lebesgue costruì un nuovo integrale che era invariante per traslazione e non solo additivo, ma anche σ-additivo, cioè additivo per una somma infinita di funzioni, o meglio per una serie (ciò vuol dire che l'integrale di una somma infinita di funzioni deve essere uguale alla somma dei singoli integrali).

Per fare ciò, Lebesgue si rese conto che bisognava dare anche una corretta definizione di misura di un insieme, della sua estensione, della sua area, della sua convessità, continuità e connessione. Ma se l'insieme è fatto da una "raffica" di punti, magari infiniti, sul piano che si addensano in una certa zona (si pensi a una distribuzione di probabilità), parlare di una loro misura è praticamente impossibile. È necessario definire un nuovo concetto che dà, per esempio, una misura nulla se il numero dei punti è finito o al più un'infinità numerabile e una misura non più nulla se i punti sono un'infinità superiore al numerabile. Naturalmente un insieme così fatto non può essere trattato con l'integrale secondo Riemann, o integrale di Peano-Jordan.

Così Lebesgue costruì un'intera teoria della misura, sulla base della quale costruì l'integrale di Lebesgue che gode di queste proprietà: a) una funzione integrabile secondo Riemann è anche integrabile secondo Lebesgue e i due integrali danno lo stesso risultato (in tal modo ciò che era precostituito non veniva distrutto ma ampliato); b) l'integrazione secondo Lebesgue è possibile anche per funzioni discontinue in ogni punto (es. la funzione di

Dirichlet); c) qualunque insieme è misurabile secondo Lebesgue, dunque, a tutt'oggi, nella teoria di Lebesgue non esistono insiemi non misurabili. In più, noi oggi non possiamo dare esempi di insiemi non misurabili secondo Lebesgue se non ricorriamo all'assioma di Zermelo; tramite tale assioma possiamo affermare che esiste un insieme non misurabile secondo Lebesgue, che potremo trattare teoricamente senza mai costruirlo o disegnarlo. Ebbene, negli anni 70 un matematico russo ha dimostrato che non solo se uso l'assioma della scelta posso fornire una funzione non misurabile secondo Lebesgue, ma che tale assioma è una condizione necessaria, cioè senza l'assioma della scelta non si potranno mai avere funzioni non misurabili secondo Lebesgue: allora l'assioma di Zermelo è equivalente a un insieme non misurabile secondo Lebesgue.

Non si deve, però, tralasciare il fatto che per avere tale risultato, bellissimo dal punto di vista della critica dei fondamenti poiché rende equivalenti due asserti così diversi, ci vollero quasi 80 anni, trascorsi da quando Vitali dimostrò che per fornire un insieme non misurabile secondo Lebesgue è necessario l'assioma della scelta (anni 80-90 del XIX secolo) sino a quando si ebbe l'altra implicazione (anni 70 del XX secolo).

Ma torniamo alla successione di funzioni continue: se la sua funzione limite è continua allora è integrabile secondo Riemann e il suo integrale coincide con la somma dei singoli integrali; se la sua funzione limite non è continua, essa sarà sempre integrabile ma, questa volta, lo sarà secondo Lebesgue e il suo integrale coinciderà con la somma dei singoli integrali. Con Lebesgue si apre, quindi, un nuovo capitolo dell'analisi: quello della teoria della misura, che attualmente è una delle branche più attivamente studiata e sviluppata del mondo.

§ 8. L'Analisi non standard

Nella seconda metà del XX secolo un matematico americano crede fermamente che Leibniz non farneticava quando insisteva sul fatto che si poteva parlare di infiniti e infinitesimi: così, quel matematico, il cui nome è A. Robinson, si prese il compito di dimostrare a tutto il mondo che c'era qualcosa di esatto nella testa di Leibniz: era il 1963 e si stavano schiudendo le porte dell'analisi non standard.

Robinson non solo costruisce un campo totalmente ordinato i cui elementi sono non solo tutti i numeri reali ma anche i numeri infiniti e i numeri infinitesimi, ma scrive un'intera opera e ne dimostra la coerenza logica.

L'idea di Robinson è la seguente. Prendiamo un numero infinitesimo, il che vuol dire che tale numero è sì piccolo, ma più piccolo di ogni inverso dei numeri naturali; si potrebbe pensare che tale numero sia zero, ma se è vero che 1/n tende a zero per $n \to +\infty$, è pur vero che noi affermiamo ciò poiché esiste l'elemento separatore (Dedekind docet). Ma chi ci assicura che tale elemento separatore è unico? La sua unicità si potrà solo postulare, ma mai dimostrare. Quindi l'unicità dello zero quale elemento separatore non potrà mai venire dimostrata. Se è vero ciò, è pur vero che ci potrebbero essere altri elementi? Proprio su questo concetto Robinson costruisce il suo punto di forza: nessuno potrà mai confutare che a separare le due classi non è un elemento bensì un "*trattino*" di retta, i cui punti sono più piccoli di tutti gli inversi dei numeri naturali. Questi *nuovi punti* sono numeri, poiché costituiscono, insieme a tutti i reali, il **campo dei numeri iperreali**, costruito egregiamente da Robinson. La *nuvoletta* di nuovi numeri, gli infinitesimi, non si trova soltanto attorno allo zero, ma anche attorno a qualunque numero reale, visto che essi possono essere sommati e traslati lungo tutta la **retta iperreale**. Tale *nuvoletta* viene chiamata da Robinson **monade**, riprendendo un termine già usato da Leibniz. A questo punto, la retta reale risulta estesa: di essa fanno parte tutti i reali e tutte le monadi. Ma non è finita qui, poiché a destra e a sinistra ti tutti i numeri reali ci stanno gli inversi (data la struttura di campo degli iperreali) di tutti gli infinitesimi: gli infiniti. La retta reale non è stata solo estesa, così come si richiede alle nuove scoperte matematiche, ma anche *allungata*.

Robinson ha dato quindi vita al sogno di Leibniz, ricostruisce tutta l'analisi su questo nuovo campo, sbarazzandosi anche del concetto di limite: infatti nel campo dei numeri iperreali non ha più senso dire "si supponga che x tenda a un numero molto piccolo", poiché ora si può tranquillamente dire "sia x un numero iperreale".

Per esempio, anche la derivabilità viene ridefinita nel seguente modo: si consideri una funzione $y=f(x)$, x_0 il punto in cui si vuole la derivabilità e un incremento j di x_0, quindi si può scrivere

$$\frac{f(x_0+j)-f(x_0)}{j}$$

con $j \neq 0$ poiché è un effettivo incremento di x_0, e quindi si può dividere per j (questione sulla quale Leibniz pasticciava un po'). Ma è lecito anche chiedersi se $\forall j$ di una monade la $f'(x_0)$ varia il suo valore; a tal proposito possono succedere due cose: o che $\forall j$ i corrispondenti valori di $f'(x_0)$ sono nella stessa monade, cioè differiscono tra loro di un infinitesimo, e allora la funzione è derivabile poiché a meno di un infinitesimo la $f'(x_0)$ ha lo stesso valore (quello del reale della monade in cui prendo l'infinitesimo), oppure no e allora la funzione non è derivabile.

È chiaro anche che il rapporto tra due infinitesimi può dare un numero finito, un infinito o uno zero e che posso confrontare due qualunque numeri iperreali poiché all'interno del campo si ha una struttura di ordine totale.

Così facendo si può fare non solo analisi non standard, che, bisogna riconoscere, ormai fa parte a pieno titolo della matematica, ma anche geometria non standard, topologia non standard, fisica non standard, ecc.: si è dimostrato che tutte le discipline della matematica si possono non standardizzare, cioè si possono rappresentare, scrivere e studiare all'interno di un modello non standard in cui non vale più sia il postulato di Dedekind che quello archimedeo (infatti se prendo un numero infinito, non è più vero che esiste un naturale più grande di esso).

§ 9. Conclusioni

La scoperta di Robinson, così come abbiamo detto, risale al 1963. Da allora sono passati neanche 40 anni. Sarà da addebitare a ciò il motivo per cui i numeri iperreali, l'analisi non standard e tutti i formidabili risultati ottenuti da Robinson non vengono ben *digeriti* da alcuni matematici cresciuti e maturati nella sicurezza che l’analisi, quella standard, era la sola e unica possibile.

Ma verrà sicuramente il tempo in cui nuove generazioni di matematici, svincolati da qualunque tipo di pregiudizio e condizionamento culturale, sapranno apprezzare, studiare e approfondire le teorie non standard (ricordiamo che ogni disciplina non standard non esclude ma ingloba la corrispondente standard).

INDICE DEI NOMI

INDICE