La geometria differenziale da Gauss a Ricci Curbastro

di Rossana Tazzioli
Dipartimento di Matematica, Università di Catania

Questa esposizione sullo sviluppo della geometria differenziale non è e non vuole essere esaustiva; essa è concentrata su alcuni personaggi (Gauss, Riemann, Beltrami e Ricci Curbastro) e intende soprattutto porre in rilievo le connessioni tra geometria differenziale, geometrie non euclidee e fisica matematica nel corso dell'Ottocento.

1. Le *Disquisitones* (1827) di Gauss

La storia della geometria differenziale va di pari passo, almeno nel Sei e Settecento, con i progressi nei campi della geometria analitica e del calcolo differenziale. La geometria differenziale è in effetti lo studio delle curve e delle superfici le cui proprietà, variabili da punto a punto, vengono investigate con i metodi del calcolo differenziale. Dunque è nel calcolo che la geometria differenziale ha spesso trovato l'origine dei suoi problemi e l'algoritmo per la loro risoluzione.

Prima di Gauss, i risultati noti di geometria differenziale erano piuttosto limitati e riguardavano soprattutto la teoria delle curve piane e spaziali. Di questi argomenti si occuparono matematici come Huygens, Clairaut, Eulero, Monge e altri ancora. Per quanto concerne la teoria delle superfici, i contributi più importanti sono contenuti nelle *Recherches sur la courbure des surfaces* (1760) di Eulero, dove si dimostra tra l'altro il teorema di Eulero che permette di determinare la curvatura di una curva sulla superficie data. Il teorema di Eulero fu generalizzato da Meusnier, il quale determinò le curvature delle linee ottenute intersecando la superficie curva data con un qualsiasi piano passante per un suo punto.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fu uno dei più geniali matematici di tutti i tempi; egli studiò e fu professore all'Università di Gottinga, oltre che direttore dell'Osservatorio astronomico. Le sue ricerche sono fondamentali e riguardano i diversi campi della matematica, dalla geometria differenziale all'analisi, dalla fisica matematica alla teoria dei numeri e all'algebra.

Nella presentazione delle sue *Disquisitiones circa superficies curvas* (1827), Gauss così esordiva:

> "Sebbene i geometri si siano molto occupati di ricerche generali sulle superfici curve e i loro risultati coprano una parte significativa nel campo della geometria superiore, questo argomento è ancora così lontano dall'essere esaurito che si può dire che fino ad ora è stata coltivata soltanto una piccola parte di un campo estremamente fecondo".

In effetti, sebbene i teoremi di Eulero e di Meusnier e le loro conseguenze fossero risultati rilevanti, mancava ancora in quel periodo una teoria organica delle superfici curve. Oltre a definire alcuni concetti fondamentali della geometria differenziale, nelle *Disquisitiones* Gauss delineò anche un programma di ricerca per lo studio delle superfici.

Innanzitutto, per definire un orientamento nell'intorno di ogni punto della superficie supposta regolare, egli era indotto a introdurre una applicazione μ (detta oggi mappa di Gauss) da S alla superficie sferica S^2 che associava ad ogni punto p di S il versore normale esterno alla superficie S nel punto p, ν(p). Gauss introduceva la *sfera ausiliaria*, idea molto vicina a quella di *carta locale*, ispirandosi all'astronomia, scienza a lui familiare in quanto fu il direttore dell'Osservatorio di Gottinga dal 1797 fino alla morte.

> "Questa procedura è fondamentalmente in accordo con quella costantemente usata in astronomia - scriveva Gauss - dove tutte le direzioni sono riferite a una sfera celeste fittizia di raggio infinito".

Grazie alla sfera ausiliaria e all'applicazione μ, Gauss era in grado di introdurre il concetto di curvatura di una superficie. Dapprima egli definiva la "curvatura totale" o "integra" K_i di un sottoinsieme Δ (tacitamente supposto compatto) di S come

(1.1) $K_i(\Delta) = A(\mu(\Delta))$,

dove A indica l'usuale funzione area, e questo punto introduceva la *misura gaussiana di curvatura* K_p in un punto p della superfici:

(1.2) **{** EQ **B**\\bc\\|(K_p) **}** = ***{*** *EQ* \\O(lim; \\ S \\ d o 9 ($A(\Delta_p) \to 0$)) ***F***($A(\mu(\Delta_p))$;$A(\Delta_p)$) ***}***

(Δ_p era un intorno compatto del punto p su S). Questa espressione permette dunque di misurare di quanto la superficie S si differenzia nell'intorno del punto p dall'essere un piano. Gauss deduceva le formule esplicite per la misura di curvatura in un punto se la superficie era espressa in forma cartesiana o parametrica. Da queste formule, Egli provava inoltre che la generica curva ottenuta intersecando la superficie con un piano passante per la normale a S in p e formante un angolo Θ con l'asse x aveva in p la curvatura:

$$(1.3) \qquad k_p = k_1 \cos^2\Theta + k_2 \,\mathrm{sen}^2\Theta,$$

dove k_1 e k_2 indicano i due valori estremali delle curvature di questo sistema di curve piane. Ciò era del tutto conforme con il teorema di Eulero.

La curvatura gaussiana poteva inoltre essere espressa mediante quantità che dipendevano soltanto dalla forma della superficie, in analogia con il programma che Gauss poneva alla base della propria ricerca. In effetti, a partire dalla forma parametrica di una superficie già introdotta da Eulero, Gauss considerava sulla superficie S data un sistema di coordinate curvilinee tra loro ortogonali con cui rappresentava ogni punto di S nel modo seguente:

$$(1.4) \qquad x = x(p,q); \quad y = y(p,q); \quad z = z(p,q).$$

Gauss andava poi a definire la cosiddetta *prima forma fondamentale* della superficie mediante una generalizzazione del concetto di distanza tra due punti infinitamente vicini; valeva infatti la formula:

$$(1.5) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,dp^2 + 2F dp\,dq + G\,dq^2$$

con

(1.6) $$E = \left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2;$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q};$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2.$$

Pertanto, l'espressione generale per l'elemento di linea era:

(1.7) $$ds = \sqrt{E\,dp^2 + 2F dp\,dq + G\,dq^2}.$$

Ancora mediante le quantità *E*, *F*, *G* Gauss descriveva la misura di curvatura di un qualunque punto della superficie *S*, oltre a numerose altre proprietà della superficie.

Gauss osservava tra l'altro che se è possibile sviluppare la superficie *S* su un'altra superficie curva (o su un piano) *S'*, in modo che a ogni punto di *S* corrisponda uno ed un solo punto di *S'* e che la deformazione sia 'senza strappi né tagli', allora deve valere il celebre "theorema egregium" che mostra l'invarianza della curvatura per isometrie:

"*Se una superficie curva è sviluppabile sopra una qualunque altra superficie, la misura di curvatura in ogni suo punto resta invariata.*

E' dunque evidente che *una qualunque parte finita della superficie curva manterrà la stessa curvatura integrale dopo lo sviluppo sopra un'altra superficie*",

indipendentemente dalla 'figura' che essa assume nello spazio.

Come conseguenze, Gauss provava che una superficie può essere sviluppata su di un piano se la misura di curvatura è nulla in ogni suo punto.

"Ciò che abbiamo esposto nel precedente articolo [si riferisce qui al "theorema egregium" e alle sue conseguenze] -scriveva Gauss- è connesso con un metodo particolare di considerare le superfici, un metodo molto degno che può essere diligentemente sviluppato dai geometri. Quando si considera una superficie non come la frontiera di un solido, ma come un solido avente una dimensione nulla flessibile e inestensibile, allora alcune proprietà della superficie dipendono dalla forma in cui essa può pensarsi ridotta, le altre sono proprietà assolute che restano invariate per qualunque forma assunta dalla superficie per flessione. A queste ultime proprietà, lo studio delle quali apre alla geometria un nuovo e fertile campo, appartengono la misura di curvatura e la curvatura integrale, col senso che abbiamo dato a queste espressioni. A queste appartengono anche la teoria delle linee geodetiche, e gran parte di ciò che ci riserviamo di trattare in seguito. Da questo punto di vista, una superfice piana e una superficie sviluppabile sopra un piano, come le superfici cilindriche, coniche, ecc., devono considerarsi essenzialmente identiche; e il modo naturale di definire in maniera generale la natura delle superfici così considerate è sempre basato sulla formula

{ *EQ* **R**($E\, dp^2 + 2F dp\, dq + G\, dq^2$) },

che lega l'elemento di linea alle indeterminate p, q".

Alcuni risultati di geometria differenziale riguardanti i triangoli geodetici si connettono alla geometria non euclidea, argomento a cui Gauss si era dedicato fin dal 1794. Solo nel 1813 Gauss abbracciò completamente l'idea che potesse esistere una geometria diversa da quella euclidea, ma non pubblicò mai nulla a riguardo limitandosi a comunicare per lettera i risultati ottenuti agli amici F. Bolyai, Olbers, Gerling, Taurinus, Schumacher e Bessel. Probabilmente egli pensava che i tempi non fossero abbastanza maturi per comprendere la nuova geometria oppure era incerto sulle interpretazioni da dare ai suoi risultati.

Nelle *Disquisitiones* Gauss andava a confrontare un triangolo geodetico Δ sulla superficie S, avente misura degli angoli α, β, γ e lati opposti agli angoli di lunghezza a, b, c, con il corrispondente triangolo Δ' sul piano avente i lati rettilinei della stessa lunghezza e angoli α', β', γ' :

Egli trovava per la curvatura totale di Δ l'espressione:

(1.8) $$K_i\ (\Delta) = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi.$$

Dunque, se Δ è un triangolo geodetico su una superficie S di curvatura nulla, la somma dei suoi angoli interni è 180°; se invece S ha curvatura K costante positiva o negativa la somma degli angoli interni di Δ è rispettivamente maggiore o minore di 180°. Era già noto ai tempi di Gauss che nel primo caso è valido il postulato delle parallele (data una retta e un punto fuori di essa esiste una ed una sola parallela alla retta data) da cui discende tutta la geometria euclidea, mentre negli altri due casi si ottiene la geometria *sferica* ($K>0$) e la geometria *iperbolica* ($K<0$). Ricordo che la geometria sferica discende dall'assumere, in luogo del postulato euclideo, che non esistono rette parallele a una retta data, mentre in geometria iperbolica, al contrario, si suppone che dati una retta e un punto esistono infinite rette parallele alla retta data passanti per quel punto.

Le ricerche di Gauss sulla teoria delle superfici sono dunque connesse con i suoi studi nel campo dell'astronomia e della geodesia da una parte e, dall'altra parte, con le sue contemporanee ricerche di geometria non euclidea. Nel 1831 Gauss cominciò a raccogliere i suoi risultati di quarant'anni di meditazioni sulla geometria non euclidea, ma è del 1832 la prima pubblicazione del *Tentamen*, l'opera di Farkas

Bolyai (1832) la cui appendice, redatta dal figlio Janos, contiene una trattazione della geometria "assoluta", ossia di quella geometria che non dipende dal postulato euclideo delle parallele. Gauss si risolse così a non pubblicare mai nulla sulla geometria non euclidea.

2. La *Habilitationsvortrag* (1854) di Riemann e il modello di Beltrami

Bernhard Riemann (1826-1866) studiò all'Università di Berlino con Dirichlet e all'Università di Gottinga, dove discusse il dottorato nel 1851 e fu nominato professore qualche anno più tardi. Egli fornì contributi fondamentali ai diversi campi della matematica, in particolare all'analisi, alla geometria e alla topologia. La sua lezione di abilitazione fu tenuta nel 1854 di fronte a Gauss, sebbene venne pubblicata postuma solo nel 1868.

In questo fondamentale lavoro per la storia della geometria differenziale, Riemann definiva il concetto di varietà a più dimensioni e di curvatura di una varietà. A partire da una geniale estensione del concetto di distanza, egli estendeva tutti quei principi che, a suo dire, erano già contenuti nella celebre memoria di Gauss sulle superfici curve. Per estendere questi principi al caso delle "grandezze pluriestese", Riemann richiedeva che la lunghezza dell'elemento lineare (ds) fosse invariante per spostamenti infinitesimi, a meno di termini del 2° ordine. L'elemento lineare più semplice che soddisfa queste ipotesi è espresso dalla quantità:

(2.1) $$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx^i\, dx^j,$$

dove il g_{ij} è una matrice simmetrica definita positiva e $x^1, ..., x^n$ sono le n coordinate.

La grandezza n-estesa V dotata della distanza ds (2.1) rappresentava per Riemann ciò che oggi viene denominato con *varietà riemanniana*. Nel caso dello spazio tridimensionale euclideo, riferito a un sistema di coordinate ortogonali, si ha:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2 \tag{2.2}$$

e dunque esso è compreso nella definizione generale (2.1).

L'aspetto metrico gioca nella lezione di Riemann il ruolo principale: si possono infatti desumere le proprietà fondamentali di una varietà a partire dalla metrica della varietà stessa. Già Gauss aveva provato che la sola conoscenza dell'elemento lineare di una superficie determina la curvatura e altre notevoli caratteristiche della superficie. In analogia con il "theorema egregium", Riemann discuteva la possibilità di trasformare la forma fondamentale (2.1) in un'altra e, per risolvere questo problema, era indotto a introdurre una quantità che corrisponde, a parte un inessenziale fattore 2, a ciò che oggi viene denominato *tensore di curvatura*. Questo risultato fu ottenuto da Riemann nell'ambito di una ricerca del 1861 sulla propagazione del calore in un corpo solido omogeneo che costituisce la risposta a un problema proposto dall'Accademia delle Scienze di Parigi. Questa memoria mostra il carattere unitario dell'opera di Riemann; essa costituisce infatti una sintesi delle varie teorie e un contributo al calcolo tensoriale e alla geometria differenziale, oltre che alla teoria del calore.

L'obiettivo unitario caratterizza anche la lezione di abilitazione del 1854, dove Riemann applica i risultati sulle varietà differenziali allo studio dello spazio fisico tridimensionale. L'ultima parte della sua lezione è dedicata allo studio delle varietà euclidee, quelle che discendono dall'ipotesi che "la misura di curvatura in ogni punto è uguale a zero nelle tre direzioni [principali] della superficie". Ma in che modo questa assunzione, equivalente ad affermare che la somma degli angoli di un triangolo è ovunque uguale a 180°, viene "garantita dall'esperienza"? In effetti le misurazioni astronomiche portano a pensare che la curvatura sia nulla; tuttavia, se il suo valore fosse molto piccolo il raggio di curvatura della superficie sarebbe così grande che solo una parte trascurabile di essa sarebbe "accessibile ai nostri telescopi". Riemann si spingeva addirittura a congetturare che il fondamento stesso della metrica andrebbe probabilmente cercato altrove, "nelle forze che agiscono su[gli enti reali] tenendoli assieme". Per risolvere questi problemi occorre partire da uno studio approfondito dei fenomeni fisici, il che, conclude Riemann, "conduce nel campo di un'altra scienza, quello della fisica, nel quale la natura del presente lavoro non ci consente di addentrarci". Il punto di vista di Riemann rivelerà la sua fecondità nella teoria della relatività generale e nella meccanica quantistica.

Riemann avanza delle considerazioni generali sulle varietà *n*-dmensionali con curvatura costante negativa e positiva. Sebbene nella sua lezione non se ne faccia mai menzione, dai suoi risultati sulle varietà si affaccia l'idea che sia possibile costruire dei *modelli* delle geometrie non euclidee. Un modello *locale* per la geometria non euclidea sferica è rappresentato dalla geometria che ha luogo sulla superficie sferica, che è una varietà riemanniana con curvatura positiva e ovunque costante, dove in effetti due geodetiche (rappresentate dai cerchi massimi) hanno sempre in comune i due poli, dunque non sono mai parallele. Questi tipi di ricerche saranno ampiamente svolti da Klein in diversi lavori pubblicati a partire dal 1871. Per quanto riguarda invece la geometria iperbolica, detta anche di *Lobacevskij-Bolyai*, sarà Beltrami a costruirne il primo modello.

Eugenio Beltrami (1835-1900) proseguì le ricerche di Riemann nell'ambito della geometria differenziale e le applicò anche allo studio della fisica matematica negli spazi curvi. Nel suo *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea* (1868), egli mostrò che la geometria di Lobacevskij-Bolyai coincideva con la geometria su una particolare superficie di curvatura costante negativa nello spazio euclideo, la *pseudosfera*, di cui già Minding aveva fornito una descrizione dettagliata. Con un opportuno dizionario, Beltrami tradusse tutti i teoremi validi nella geometria di Lobacevskij-Bolyai sulla superficie pseufosferica. Qui sopra, data una qualsiasi retta (ossia geodetica) e un punto fuori di essa, esistono infinite parallele, cioè geodetiche sulla superficie che incontrano quella data solo nel punto all'infinito.

Il modello di Beltrami è però valido solo *localmente*, come hanno fatto osservare prima Helmholtz (1870), poi Klein (1871) e infine Genocchi (1877). Per rispondere alle loro obiezioni, Beltrami cercò anche di costruire materialmente questa superficie, utilizzando più pezzi in cartone. Di quel periodo è anche il modello che ancora oggi è esposto presso il Dipartimento di Matematica di Pavia.

3. Geometria differenziale e 'filosofia naturale'

Legami profondi sussistono dunque tra la geometria differenziale e la geometria non euclidea. Inoltre, nelle mani di numerosi matematici dell'Ottocento, tra cui lo stesso Beltrami, la geometria differenziale si rivela uno strumento indispensabile per formulare risultati e idee fondamentali di fisica matematica negli spazi curvi e per tentare un'interpretazione unitaria delle teorie fisiche. Nel corso dell'Ottocento infatti - e anche prima d'allora - allo scopo di formulare una teoria che fosse in grado di spiegare la totalità dei fenomeni fisici, gli scienziati immaginavano un fluido elastico, omogeneo e isotropo, l'etere, che riempie l'intero universo e le cui deformazioni propagano meccanicamente le forze fisiche nello spazio. Dopo la pubblicazione dei lavori fondamentali di geometria non euclidea da parte di Janos Bolyai (1802-1860) e Nikolai Lobacevskij (1793-1856), intorno al 1830, ci si iniziò a domandare se lo spazio, pervaso di etere, dovesse necessariamente essere euclideo oppure se fosse concepibile un universo non euclideo, sferico o con curvatura costante negativa.

Gli stessi fondatori della geometria non euclidea ritennero di non poter escludere a priori la possibilità di un universo curvo. In un manoscritto risalente con ogni probabilità al 1835 e in alcuni appunti del 1850-52, Bolyai espose con maggiori dettagli le sue convinzioni sull'impossibilità di decidere, "con le misurazioni terrestri", la validità del V postulato euclideo sulla base degli strumenti a sua disposizione. Se le previsioni teoriche sono in disaccordo con i dati sperimentali allora, concluse Bolyai, si potrebbe affermare che valga, al posto della geometria euclidea, la geometria non euclidea.

Alcune misure effettive sui moti dei corpi celesti furono compiute dallo stesso Lobacevskij che, nei *Nuovi principi della geometria* (1835-37), affermava che vista l'enorme estensione dell'universo,

> "la natura stessa ci indica distanze tali, in paragone alle quali svaniscono per la loro piccolezza perfino le distanze delle stelle fisse dalla nostra Terra."

Pertanto, la geometria euclidea risulta 'esatta' su scala terrestre e astronomica ordinaria, mentre "non vi può essere nessuna contraddizione" se alcune forze della natura seguono leggi tali da coinvolgere diverse geometrie.

Queste idee si protrassero per tutto l'Ottocento quando furono generalizzate, con i metodi di geometria differenziale sviluppati da Gauss e Riemann, diverse teorie fisico matematiche agli spazi non euclidei ad opera di vari matematici, primi tra tutti Beltrami.

Secondo Beltrami, l'universo fisico non ha necessariamente una struttura euclidea: egli tenta in più occasioni di interpretare meccanicamente la trasmissione dei fenomeni elettrici, magnetici ed elettromagnetici assumendo che l'etere riempia uno spazio sferico, pseudosferico o euclideo a seconda del fenomeno che vi ha luogo. Il sistema di tensioni e pressioni del mezzo etereo, pensato come un fluido elastico, omogeneo e isotropo, viene studiato mediante la teoria matematica dell'elasticità. E sono questi sforzi a determinare, meccanicamente e attraverso il principio di azione e reazione, la propagazione dei fenomeni nello spazio. Tutto ciò è analizzato con metodi e procedure di geometria differenziale.

Beltrami non creò una vera scuola; tuttavia vi furono studiosi che seguirono le sue ricerche da vicino e tra questi, Cesàro, Padova e Somigliana. Padova, prima maestro e poi collega di Ricci Curbastro, estende in qualche punto le ricerche di Beltrami; interessante è un suo articolo volto al tentativo di fornire un'interpretazione meccanica delle equazioni di Maxwell. Beltrami aveva infatti precedentemente preso in considerazione, in un lavoro del 1886, il sistema di sforzi, ottenuto da Maxwell nel suo *Treatise on Electricity and Magnetism* (1873), che doveva attribuirsi all'etere per permettere la trasmissione delle forze elettromagnetiche attraverso lo spazio. Ne aveva però concluso che non esistevano per l'etere deformazioni tali da produrre gli sforzi dedotti da Maxwell. Tuttavia, Beltrami aveva implicitamente supposto che lo spazio fosse euclideo. Che cosa sarebbe invece accaduto in uno spazio dotato di curvatura? Padova prese in considerazione uno spazio con curvatura costante negativa e dimostrò che, neppure in questo caso, erano possibili deformazioni dell'etere tali da dar luogo al sistema di tensioni e pressioni di Maxwell.

Al di là dei risultati, spesso irrilevanti dal punto di fisico, la grande novità di queste idee sta nell'attribuire agli spazi curvi un notevole significato fisico, considerandoli come il possibile teatro dei fenomeni. Ciò trova ampia conferma nella teoria della relatività di Einstein dove l'etere viene posta al di fuori della scienza e si attribuisce alla geometria dello spazio la capacità di propagare le forze fisiche.

4. Ricci Curbastro e il calcolo tensoriale

Gregorio Ricci Curbastro (1853-1925) studiò presso la Scuola Normale Superiore di Pisa ed ebbe tra i suoi maestri oltre a Padova, anche Betti, Dini e Bianchi. Quest'ultimo fu uno dei maggiori geometri differenziali italiani e si occupò principalmente di problemi di applicabilità, classi speciali di superfici e spazi riemanniani.

Ricci fu condotto a elaborare il suo calcolo tensoriale influenzato soprattutto dalla teoria degli invarianti sulle varietà a *n* dimensioni, che era stata studiata nel corso dell'Ottocento da parte principalmente di Sylvester, Gordan, Salmon e Cayley. Un *tensore* è un insieme di funzioni che si trasformano, al variare delle coordinate, secondo delle particolari leggi; mediante i tensori è possibile esprimere risultati ed equazioni della fisica matematica in modo invariante rispetto al sistema di coordinate. Così due tensori che risultano uguali tra loro in un sistema di coordinate rimangono tali in qualsiasi altro sistema di riferimento. Non è dunque un caso che il ruolo dei tensori sia di fondamentale importanza nella teoria della relatività dove ogni osservatore ha il suo proprio sistema di riferimento e diventa necessario confrontare le diverse osservazioni.

Oltre alla teoria degli invarianti, un altro indirizzo di ricerca ha influenzato profondamente gli studi di Ricci sul calcolo tensoriale; mi riferisco alla scuola italiana di fisica matematica, in particolare alle idee contenute nei lavori di Beltrami e Padova. Ma come si pone Ricci di fronte a queste ricerche?

Nei suoi primi lavori, pubblicati intorno al 1877, Ricci si occupò, proprio come Beltrami e Padova, di fornire un'interpretazione meccanica delle equazioni di Maxwell e dedusse dei risultati interessanti a partire dall'ipotesi che il mezzo etereo propagasse *per contatto* i fenomeni elettrici ed elettromagnetici.

Tuttavia, in un secondo tempo, Ricci cambiò atteggiamento nei riguardi dell'etere; nella commemorazione in memoria di Padova, che egli scrisse nel 1897, si legge a questo riguardo:

> "Altro argomento prediletto dal Padova fu quello delle equazioni della Dinamica, le quali cercò di stabilire su tali fondamenti, sui quali potessero poggiare non soltanto la teoria del moto dei sistemi materiali, ma altresì quelle teorie meccanico-fisiche, le quali mirano a spiegare i fenomeni ottici ed elettromagnetici come movimenti vibratori dell'etere. L'abuso, che talora se n'è fatto, ha suscitato in questi ultimi anni contro tali teorie forti e numerosi oppositori. Per questi esse non sono soltanto inutili, ma dannose."

Anche Ricci è un "oppositore" di queste teorie; in particolare, egli osserva, i rapporti tra realtà fisica e descrizione matematica sono assai difficili da individuare. La "fisica teorica" deve limitarsi a fornire una rappresentazione matematica della realtà fisica, senza partire da ipotesi sulla natura dello spazio o sull'esistenza del mezzo etereo.

Fondamentale è il ruolo del calcolo tensoriale nella descrizione matematica della realtà fisica. Basti leggere l'articolo, scritto da Ricci su richiesta di Klein in collaborazione con il suo allievo Levi-Civita, che fu pubblicato sulla prestigiosa rivista *Mathematische Annalen* nel 1900. Il nuovo "algoritmo", come Ricci stesso definisce il calcolo tensoriale, è lo strumento ad hoc per rappresentare le equazioni fondamentali della fisica le quali vengono espresse mediante i tensori che sono, per loro natura, indipendenti dalla scelta delle coordinate. In questo articolo, Ricci stabilisce il carattere tensoriale di numerose definizioni ed equazioni in elettrodinamica, teoria del calore ed elasticità, e ne trova le formulazioni in termini tensoriali.

Il percorso teorico inaugurato da Gauss e Riemann, fondatori della geometria differenziale, e proseguito da Beltrami e dalla sua scuola in Italia, ha dunque condotto al calcolo tensoriale che costituisce lo strumento più adatto per descrivere le teorie fondamentali della fisica matematica sulle varietà riemanniane. Lo studio della geometria dello spazio, indipendentemente dall'etere che lo pervade, risulta così essenziale e diviene il vero strumento di conoscenza. Idee queste che troveranno conferma nella teoria einsteniana della relatività generale la cui formulazione si fonda proprio sul calcolo tensoriale di Ricci.