UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PALERMO

Facoltà di Scienze della Formazione

Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria

Indirizzo Scuola Elementare

IL PENSIERO PROPORZIONALE IN UN CONTESTO GEOMETRICO: ANALISI DI UN'ESPERIENZA NELLA SCUOLA PRIMARIA

Tesi di Laurea di
Bonsignore Benedetta
Matricola n° 0395353

Relatori
Prof.re Spagnolo Filippo

Prof.ssa La Marca Alessandra

ANNO ACCADEMICO 2003/2004

A mia NONNA……

……a mio Marito PAOLO

INDICE

PREMESSA

La matematica scolastica viene spesso percepita come una materia statica, precisa, rigorosa, caratterizzata da regole rigide; un’attività individuale spesso riservata a pochi allievi particolarmente dotati (Pontecorvo, 1986).

Ciò è stato osservato durante le attività di tirocinio e in particolare ho riscontrato che il sistema di convinzione che i bambini hanno sviluppato sulla matematica e sul proprio rapporto con essa, ha forti ripercussioni sul processo di apprendimento.

I bambini raggiungono la “devoluzione[1]” se prima di tutto possiedono la convinzione di voler apprendere. Non si apprende ciò che non si è disposti ad apprendere e, per questo, è fondamentale l’aspetto affettivo-emotivo.

“I sistemi di credenze, in particolare le credenze attribuzionali e il senso di auto-efficacia, assumono rilevanza come fattori motivazionali, e forniscono l’energia necessaria ad attivare i processi di autoregolazione che caratterizzano la risoluzione di problemi. … Tali convinzioni si possono definire come la conoscenza soggettiva di un individuo su di sè, sulla matematica e sull’ambiente. In questa prospettiva i bambini e non solo, sono interpreti del mondo circostante e percepiscono la propria esperienza alla luce di schemi interpretativi che hanno sviluppato in esperienze precedenti”[2].

I bambini che si pongono con atteggiamenti di sfiducia nei confronti della matematica e delle proprie possibilità e capacità demordono alle prime difficoltà. Inoltre, ho constatato quanto sia importante per l’apprendimento creare un clima sereno e collaborativo, cercando di influire anche sulle convinzioni che i bambini hanno nei confronti della matematica per fare in

---

[1] La parola “devoluzione” viene usata nella Teoria delle Situazioni Didattiche di Guy Brousseau. Per fase di devoluzione si intende quella fase nella quale l’allievo si fa carico del Sapere in gioco utilizzando le conoscenze necessarie per la risoluzione della situazione/problema.

[2] Zan R., *Il ruolo delle convinzioni nella risoluzione di problemi*, La Matematica e la sua Didattica n. 4 1996.

modo che gli allievi si rapportino positivamente nei confronti della disciplina.

Quindi, la modifica del sistema epistemologico, comporta anche la modifica degli atteggiamenti degli allievi nei confronti dell'attività matematica.

Il presente lavoro si pone il fine di indagare sulle concezioni degli alunni di scuola primaria rispetto al pensiero proporzionale in contesto geometrico, ma utilizzando un diverso approccio alla matematica.

Un approccio che non sia memorizzazione e applicazione di una serie di regole, ma che dia spazio ad operare praticamente e concretamente con i concetti matematici.

Inoltre, un approccio che dia spazio all'attività di discussione collettiva tra pari, che porti alla costruzione di idee nuove è fondamentale anche per l'insegnante perché gli dà modo di osservare il processo collettivo di costruzione della conoscenza.

Nelle pagine che seguono vengono presentati i seguenti argomenti:

I Capitolo	Il pensiero proporzionale con riferimento alla similitudine e l'analisi storico-epistemologica.
II Capitolo	La descrizione dell'esperienza di ricerca della prima fase sperimentale.
III Capitolo	La didattica della matematica, i vari modelli di apprendimento, con particolare riferimento alla didattica metacognitiva, la teoria delle situazioni di Guy Brousseau. Inoltre, il ruolo formativo della matematica a scuola.

IVCapitolo	La descrizione dell’esperienza di ricerca della seconda fase sperimentale.
V Capitolo	Conclusioni.

CAPITOLO I
IL PENSIERO PROPORZIONALE

Nel "registro" algebrico la similitudine corrisponde alla teoria delle proporzioni.

Essa costituisce un tema centrale nell'ambito delle strutture matematiche moltiplicative e svolge un ruolo fondamentale nella modellizzazione di numerose situazioni reali.

Alcuni autori affermano: "Il ragionamento proporzionale è una necessaria premessa all'algebra ed ai livelli più alti del sapere matematico", evidenziando la centralità dell'indagine sul suo apprendimento.

A tal fine, la ricerca didattica degli ultimi vent'anni, sia a livello nazionale che internazionale, si è molto interessata dello sviluppo del pensiero proporzionale durante il processo educativo, quindi, delle modalità del suo utilizzo da parte degli alunni in diversi contesti problematici, degli errori commessi frequentemente, delle modalità didattiche per promuovere tali ragionamenti.

Ma tale ricerca, condotta nella scuola secondaria, si è soffermata prevalentemente su situazioni problematiche riguardanti la proporzionalità diretta in ambito aritmetico, tralasciando quello geometrico, da me preso in esame.

L'importanza dell'apprendimento significativo del ragionamento proporzionale da parte degli alunni fin dalla scuola primaria, nasce dal fatto che le situazioni di proporzionalità sono molteplici e sono un tema centrale nella "matematica per il cittadino".

È grazie a questo modo di pensare che sappiamo trasferire a 5 o 6 persone gli ingredienti di una ricetta di cucina per 4, oppure sappiamo calcolare il consumo al litro di un motorino dai km percorsi tra due pieni.

In matematica, si chiama proporzionalità la relazione esistente tra elementi corrispondenti di due classi di grandezze omogenee.

Si considerano due classi di grandezze A, B in corrispondenza: $a \leftrightarrow b$, dove a indica il generico di A e b il suo corrispondente in B; se al multiplo secondo a (=numero reale) di a corrisponde il multiplo secondo a di b, le due classi A, B si dicono direttamente proporzionali (o semplicemente proporzionali): $aa \quad ab$; A, B si dicono inversamente proporzionali se al multiplo secondo a di a corrisponde il multiplo secondo $\frac{1}{a}$ di b: $aa \leftrightarrow \frac{1}{2}b$.

La legge di corrispondenza tra le due classi si chiama, nei due casi, proporzionalità diretta e proporzionalità inversa.

In aritmetica la proporzione tra numeri interi viene definita come uguaglianza tra due rapporti, secondo la formula *a:b = c:d*, con *a*, *b*, *c*, *d*, diversi da zero.

Quindi:

(1) $a : b = c : d$ (che si legge << *a* sta a *b* come *c* sta a *d* >>)

quando e solo quando valga l'uguaglianza

(2) $ad = bc$ (proprietà fondamentale delle proporzioni: "Il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi")

a, b, c, d sono detti termini della proporzione e precisamente i termini *a* e *c* si chiamano *antecedenti*, i termini *b* e *d conseguenti*; *a* e *d* si dicono *estremi, b* e *c medi.*

In virtù della (2) valgono le seguenti proporzioni:

(3) $a : c = b : d$ (permutando i medi)

(4) $d : b = c : a$ (permutando gli estremi)

(5) $b : a = d : c$ (invertendo i rapporti)

(6) $(a + b) : b = (c + d) : d$ (proprietà del comporre) oppure

$(a + b) : a = (c + d) : c$

(7) $(a - b) : b = (c - d) : d$ (proprietà dello scomporre) oppure

$(a-b):a=(c-d):c$

(8) $(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$ (proprietà del comporre e dello scomporre).

È di particolare interesse la proporzione:

(9) $a:b=b:c$ detta anche proporzione continua; *b* è detto *medio proporzionale*, o *media geometrica* tra *a* e *c*.

Tutto ciò vale anche quando *a, b, c, d* sono numeri razionali.

Il problema classico collegato alle proporzioni è quello della determinazione del quarto termine di una proporzione, noti che siano gli altri tre.

Per esempio, la proporzione $a:b=c:x$ ha per soluzione $x=cb/a$; se *a, b, c*, sono razionali, anche x è razionale; nel caso invece della continua (9), il medio proporzionale, *b*, non è in genere razionale, anche se sono razionali *a* e *c*.

1.1 Le grandezze omogenee

La definizione più comune di una classe di grandezze omogenee è quella di una serie di infiniti elementi per i quali è possibile:

- Definire una relazione di equivalenza che soddisfi le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva;
- Esiste una grandezza $A \neq 0$;
- Definire un'operazione di somma che soddisfi le proprietà commutativa ed associativa e rispetto alla quale esista un elemento neutro indicato con 0;
- Enunciare il postulato di Archimede secondo il quale presi due elementi di una stessa classe A e B, supposto A<B, esiste sempre un numero naturale *n* tale che nA>B;

- La relazione d’ordine > è totale cioè transitiva (se A>B e B>C allora A>C) e tricotomica (date A e B si verifica sempre uno e uno solo dei seguenti casi: A=B, A>B, B>A);
- Definire la proprietà di cancellazione della somma (A+C=B+C allora A=B);
- La relazione d’ordine è compatibile con l’addizione, cioè se A>B e C>D allora A+C>B+D;
- Per ogni grandezza $A \neq 0$ e per ogni naturale n>0 esiste una grandezza B tale che A=nB.

Le classi di grandezze che hanno tutte le caratteristiche sopra descritte vengono dette *classi omogenee archimedee*; un esempio è dato dalle lunghezze dei segmenti del piano, dalle aree dei poligoni, dai numeri razionali non negativi e dai numeri reali non negativi.

Ad esempio, nel caso dei segmenti, è possibile definire la lunghezza come relazione di equivalenza tramite cui individuare più gruppi di segmenti equivalenti tra loro; tali gruppi, detti classi di equivalenza, sono sottoinsiemi dell’insieme totale, all’interno dei quali tutti gli elementi hanno la stessa lunghezza.

All’interno di una classe di grandezze omogenee archimedee, ad esempio A e B, possono essere individuate grandezze tra di loro *commensurabili* o *incommensurabili* a seconda che sia possibile individuare o meno una grandezza sottomultipla (*D*) comune e due numeri naturali *m* e *n* tali che

$$A=mD;\ B=nD$$

Quindi, si definisce *rapporto* tra A e B, e si indica con $\frac{A}{B}$, il numero razionale positivo $\frac{m}{n}$.

Nel caso che A e B non ammettono una sottomultipla comune si definisce loro rapporto il numero reale positivo che si costruisce utilizzando l'insieme H di tutti i numeri razionali positivi $\frac{m}{n} / mB < nA$ e l'insieme K di tutti i numeri razionali positivi $\frac{p}{q} / pB > qA$.

In questo caso le grandezze A e B si definiscono incommensurabili.

Il termine *commensurabile* si riferisce dunque a due grandezze che hanno una misura comune, per le quali esiste una unità di misura che permette di esprimerle entrambe mediante un numero intero.

Per analogia, il significato matematico di incommensurabile si riferisce a ciò che non si può confrontare a un altro oggetto, per mancanza di una misura comune.

Il quadro teorico descritto costituisce il riferimento ad alcune situazioni di proporzionalità diretta che richiedono un rapporto tra grandezze della stessa *specie*: si pensi ad esempio al problema di determinare, assegnate base ed altezza di un rettangolo e base di un secondo rettangolo, l'altezza di questo secondo rettangolo in modo da conservare la *forma* del primo.

Lo stesso quadro teorico è altresì il riferimento a quanto si è soliti fare per misurare una grandezza, attività che si presenta agli alunni già nel corso dei primi anni della scuola primaria.

È utile comunque notare che il senso del rapporto, nei due casi menzionati è molto differente: nel caso della misura, infatti, fissata una grandezza U non nulla e omogenea alla grandezza A da misurare, la misura di A rispetto ad U è il rapporto $\frac{A}{U}$ sopra definito, che si collega all'analogo significato di *rapporto di contenenza* fra numeri.

1.2 Rapporto tra grandezze omogenee e non omogenee. Funzione di proporzionalità diretta

Nel caso dei problemi di proporzionalità il significato più frequente da attribuire al rapporto fra grandezze omogenee non è tanto quello *di contenenza*, quanto piuttosto quello di una costante numerica da preservare in *analoghi* rapporti; con la proporzionalità dunque non si tratta solo di reiterare un algoritmo noto, ma di arricchirlo di un ulteriore significato.

Quanto detto fa riferimento ai casi in cui la moltiplicazione o il rapporto relazionano *grandezze omogenee*, dando luogo ad un grandezza non omogenea alle prime due, ovvero quando da due grandezze *non omogenee* si perviene ad una grandezza non omogenea alle originali. Casi tipici di quanto detto sono il calcolo dell'area di un rettangolo partendo dai suoi lati o il calcolo della velocità partendo da spazio e tempo.

A tal fine, Gabriele Darbo, propone la teoria generale delle grandezze nella quale viene riportato il processo di costruzione di *classi di omogeneità* all'interno di un insieme in cui è definita una operazione binaria di moltiplicazione e quattro assiomi che caratterizzano l'insieme.

Tali classi di omogeneità possono essere messe in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri reali positivi, infatti a ciascuna grandezza x appartenente ad una classe di omogeneità si può associare la sua misura rispetto un'altra grandezza u omogenea ad essa e fissata (rapporto x/u), la misura sarà un numero reale positivo. È possibile dimostrare che la corrispondenza tra le classi di omogeneità e l'insieme dei reali positivi è biunivoca e conserva l'ordinamento della classe di omogeneità, vale a dire che a due grandezze omogenee a e b tali che $a>b$ corrispondono rispettivamente due numeri reali a/u e b/u per i quali vale $a/u > b/u$, si dice che la corrispondenza è un *isomorfismo* di ordine. È importante notare che essendo ciascuna classe di omogeneità in relazione con l’insieme dei numeri reali tramite una funzione biunivoca, esse saranno altrettanto relazionabili tra loro con una corrispondenza biunivoca ed ordinata.

Tale relazione tra classi di omogeneità non è altro che una relazione di proporzionalità diretta, in quanto se per una classe si sceglie come unità di misura una grandezza u, e per l’altra una grandezza h, si ha che le due classi sono relazionate all’insieme dei numeri reali positivi da corrispondenze del tipo f(x/u) e g(y/h) e tra di loro da una relazione avente la forma:

$$F(x) = (h/u)x=Kx$$

Quanto detto mostra il ruolo fondamentale che assume la funzione di proporzionalità diretta quale anello di connessione tra grandezze non omogenee in grado di esprimere ed interpretare relazioni intercorrenti tra esse.

1.3 Il pensiero proporzionale nella Teoria dei campi concettuali di Vergnaud

La Teoria cognitivista dei campi concettuali elaborata da Vergnaud, allievo di Piaget, (F.Spagnolo, *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*, La Nuova Italia, 1997, p. 123-170), assume un ruolo privilegiato all’interno della Teoria delle Situazioni, in quanto si è sviluppata parallelamente e costituisce insieme ad essa un modello teorico innovativo per l’interpretazione dei processi di insegnamento/apprendimento. Sviluppando la sua teoria, Vergnaud cerca di chiarire i processi di concettualizzazione progressiva di alcuni campi concettuali, i quali vengono definiti come insieme di situazioni per dominare le quali si richiede un’ampia varietà di concetti e di rappresentazioni simboliche collegate tra loro.

La teoria si fonda sul processo di concettualizzazione e sulla ricerca di invarianti operatori.

In particolare, Vergnaud considera un campo concettuale come l'insieme delle situazioni che danno senso al concetto (il *riferimento*), degli invarianti operatori sui quali si basa l'operatività degli schemi evocati nel singolo soggetto dalla situazione (il *significato*) e delle forme linguistiche e non linguistiche che permettono di rappresentare simbolicamente il concetto (il *significant*e). Secondo tale definizione, un concetto risulta essere una terna di tre insiemi: l'insieme delle situazioni di riferimento per il concetto, l'insieme degli invarianti operatori e l'insieme delle rappresentazioni linguistiche. Le situazioni di riferimento sono le situazioni problematiche esperite dal soggetto (dentro e fuori la scuola) che restano associate al concetto nella memoria a lungo termine e sono depositarie del "senso" con cui il concetto viene vissuto dal soggetto; gli invarianti operatori sono le proprietà del concetto su cui si basano gli schemi (= comportamenti invarianti per classi di situazioni simili) che il soggetto mette in opera per risolvere i problemi da affrontare.

Come tali, gli invarianti operatori, possono essere posseduti dal soggetto a diversi livelli di esplicitazione e di consapevolezza.

Le rappresentazioni linguistiche infine sono parole, segni geometrici o formule che consentono di riflettere sul concetto, di comunicare a proposito del suo uso e di utilizzarlo nella risoluzione dei problemi.

La teoria di Vergnaud è utile per l'insegnamento-apprendimento della matematica in quanto consente di progettare e di analizzare l'apprendimento di un concetto secondo le tre componenti, descritte sopra.

In questo modo la progettazione didattica e la verifica possono essere affrontati in termini "operativi", cioè con riferimento al "saper fare" dell'alunno, e inoltre si chiarisce che non ha senso porre il problema della padronanza di un concetto in termini sbrigativi e dicotomici (si-no): la padronanza di un concetto è un'acquisizione complessa che procede per gradi lungo le tre componenti, con possibili squilibri e carenze riguardanti una o più componenti.

Tra i campi concettuali inizialmente indicati da Vergnaud è possibile menzionare il campo concettuale delle strutture additive e quello delle strutture moltiplicative, oltre al campo concettuale delle misure spaziali e quello riferito a questioni di dinamica.

In particolare, il campo concettuale delle strutture moltiplicative, viene definito come l'insieme delle situazioni il cui trattamento implica una o più moltiplicazioni o divisioni, oltre che come l'insieme dei concetti e dei teoremi che permettono di affrontare tali situazioni.

A. Pesci (*Lo sviluppo del pensiero proporzionale nella discussione di classe*, Pitagora ed. Bologna, 2001, p. 34) sottolinea come la proporzionalità diretta occupa un posto centrale all'interno del campo concettuale moltiplicativo, anche se l'esistenza di questa stretta connessione non deve certo indurre a concludere che per affrontare la tematica della proporzionalità devono essere sviluppati come propedeutici ad essa tutta una serie di concetti matematici cui è collegata, quali la nozione di rapporto, di frazione, di operatore, di variabile, di funzione, di invertibilità, …. .. Inoltre, Pesci, suggerisce che tali tematiche vengano *sviluppate in parallelo*, grazie ad un'attenta programmazione didattica.

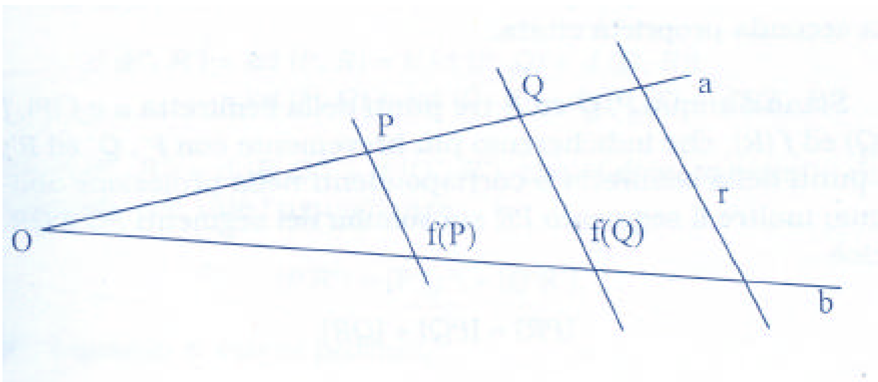
Risulta evidente che proprio la nozione di funzione come caso particolare di relazione è un concetto basilare nei processi di insegnamento/apprendimento, in quanto permette di sintetizzare molti altri concetti matematici e di condensare varie esperienze didatticamente significative.

La teoria di Vergnaud a proposito dei concetti appare particolarmente utile per l'insegnamento/apprendimento della matematica in quanto mostra come la padronanza di un concetto è una acquisizione complessa che procede per gradi lungo le tre componenti indicate, le quali fungono da modello per l'analisi e la progettazione dell'apprendimento di un concetto.

1.4 Proporzionalità diretta in ambito geometrico

Il teorema riguardante la proporzionalità diretta è quello di Talete.

Consideriamo due semirette *a* e *b* con l'origine O in comune e r una retta di direzione diversa sia dalla direzione di *a* che da quella di *b*. La proiezione obliqua[3] *f* di *a* su *b* parallelamente a r trasforma biunivocamente *a* in *b* in modo che esista una costante k, reale e positiva, che verifica la relazione: d (O, *f*(P))= kd (O, P) per ogni punto P di a.



Il teorema stabilisce, mediante la proiezione obliqua, una relazione di proporzionalità diretta tra le distanze sulla semiretta *a* e le corrispondenti distanze, sulla semiretta *b*; cioè le lunghezze dei segmenti sulla semiretta *a* sono proporzionali alle lunghezze dei segmenti corrispondenti sulla semiretta *b*.

[3] Si dice proiezione obliqua della retta *a* sulla retta *b* parallelamente alla retta r la funzione *f* che associa ad ogni punto P di *a* il punto di *b* che si ottiene intersecando *b* con la parallela a r per P.

1.5 Similitudine/i

L’idea di similitudine è intuitiva: l’esperienza di “trasformazione simile” risale ai primi giorni di vita: i visi che il neonato vede chinarsi su di sé gli sono riconoscibili indipendentemente dalla distanza, indipendentemente dalle dimensioni delle immagini.

Nella realtà ci sono diversi esempi di figure simili; sono simili le fotografie con la stessa immagine e di diverso ingrandimento, le immagini di una diapositiva o di una pellicola cinematografica e quelle ingrandite ottenute durante le proiezioni, le cartine geografiche che descrivono la realtà in <<scale>> diverse.

La similitudine è il nome comune che si da in matematica agli “ingrandimenti e rimpicciolimenti in scala” dei programmi.

La similitudine ci consente di capire una cartina geografica, la disposizione delle stanze nella piantina di un appartamento,… .

Quindi, si parla di similitudine, quando due figure hanno la stessa forma e i segmenti corrispondenti stanno in rapporto costante.

Ma il concetto di similitudine è molto più ampio; due sistemi fisici si dicono fisicamente simili quando in punti corrispondenti le grandezze fisiche stanno in rapporto costante.

Ciò implica gli studi su “modelli” e porta alla determinazione di numeri adimensionali.

La similitudine generalizzata o analogia, è quella di due fenomeni di diversa natura, però, governati dalle stesse leggi matematiche.

Il funzionamento dei calcolatori analogici si basa su ciò.

Invece, il plurale “similitudini” è situato nel contesto delle trasformazioni geometriche.

Le similitudini sono trasformazioni bigettive del piano in sé (o in un altro piano) tali che le distanze vengono tutte moltiplicate per una costante positiva k, che si chiama *rapporto di similitudine* o *scala*.

In altre parole: se **P** e **Q** sono due punti e **P'** e **Q'** i loro corrispondenti, allora **d (P', Q') = K d (P, Q).**

Se **K > 1** si ha un ingrandimento, se **K < 1** si ha un rimpicciolimento, se **K=1** si hanno le isometrie.

1.5.1 Proprietà delle similitudini

- Preservano i rapporti tra lunghezze corrispondenti, quindi il rapporto tra perimetri;
- Preservano i rapporti tra le aree di superfici corrispondenti, cioè data una figura G nel piano e la corrispondente figura *f*(G) ottenuta trasformando tutti i punti di G, si ha che Area (*f*(G))=k^2Area(G);
- Preservano gli angoli, cioè dato un angolo ABC, si ha che *f*(A)*f*(B)*f*(C) è congruente ad ABC;
- Preservano le forme, in particolare mandano circonferenze in circonferenze;
- Mandano rette in rette;
- Mandano rette parallele in rette parallele.

1.5.2 Particolari similitudini

A) ***Le isometrie*****.**

Le isometrie sono le trasformazioni del piano che preservano le distanze tra punti, cioè $f: p \to p$, biunivoche tali che:

$$d(f(P), f(Q)) = d(P,Q), \ \forall P, Q \in p$$

Proprietà delle isometrie:

- Preservano la lunghezza dei segmenti, quindi i perimetri;

- Preservano le aree, cioè data una figura G nel piano e la corrispondente figura *f*(G) ottenuta trasformando tutti i punti di G, si ha che Area(G) = Area(*f*(G));
- Preservano gli angoli, cioè dato un angolo ABC, si ha che *f*(A)*f*(B)*f*(C) è congruente ad ABC;
- Preservano le forme, in particolare mandano circonferenze in circonferenze;
- Mandano rette in rette;
- Mandano rette parallele in rette parallele.

Le isometrie sono similitudini di rapporto eguale a 1.

B) La corrispondenza parallela di Talete.

Essa è una particolare similitudine tra i punti di due date rette.

C) Le omotetie.

Si chiama omotetia di un centro O e di rapporto h la corrispondenza biunivoca tra i punti del piano che ad ogni punto P associa il punto P', tale che:

$$\overrightarrow{OP'} = h * \overrightarrow{OP}$$

Ciò significa che:

- I punti O, P, P' sono allineati;
- I punti P e P' stanno da una medesima parte o da parti opposte rispetto ad O, a seconda che il numero h sia positivo o negativo;
- Il punto P' è infine tale che:

  $$\frac{OP'}{OP} = |h|,$$

  cioè i segmenti corrispondenti hanno il rapporto costante ed eguale ad $|h|$, cioè al valore assoluto del rapporto di omotetia.

Dunque:

L'omotetia è una particolare similitudine nella quale tutti i punti corrispondenti sono allineati con un punto fisso O, detto centro dell'omotetia.

Due figure che si corrispondono in una omotetia si dicono <<omotetiche>> o anche <<similmente poste>>.

Un'omotetia si dice diretta o inversa a seconda che il rapporto h sia positivo, o negativo.

Conseguentemente chiameremo **SIMILITUDINE** quella trasformazione, fra i punti di due piani sovrapposti o fra i punti di uno stesso piano, ottenuta **dal prodotto di una omotetia e di una isometria.**

1.6 Analisi storico-epistemologica

Per affrontare l'argomento sul pensiero proporzionale/pre-proporzionale è di fondamentale importanza l'analisi dei percorsi storici ed epistemologici che fanno da supporto a tale pensiero.

Si attribuisce a Talete, matematico greco di Mileto del VII secolo a. C., fondatore dell'impostazione deduttiva della geometria, la soluzione di alcuni problemi di geodesia grazie alla teoria della similitudine e delle proporzioni.

La leggenda narra che il faraone chiese a Talete di misurare l'altezza della piramide di Cheope che si trova in Egitto.

Talete rispose: "Quando la mia altezza sarà lunga quanto la mia ombra, allora nello stesso istante l'altezza della piramide sarà lunga quanto la sua ombra".

L'osservazione delle ombre è stato un potente stimolo per sviluppare il pensiero proporzionale.

Infatti, si può pensare al “fare ombra” come ad un operatore che a un oggetto verticale X (ad es. la piramide) associa la sua ombra (X).

Questo operatore ha due importanti proprietà:

1. L’operatore conserva i multipli interi, cioè: se X raddoppia le sue dimensioni anche l’ombra di X raddoppia, se X triplica anche l’ombra triplica ecc., cioè: **ombra(nX)=n ombra(X)** per ogni intero positivo n;
2. L’operatore è crescente, cioè: se A è più grande di B anche l’ombra di A è più grande dell’ombra B.

Così il problema di trovare l’altezza incognita X della piramide, a partire dalla sua ombra *a*, è quello di invertire l’operatore, cioè di risolvere l’equazione: **ombra(X)=*a***, dove *a* ha un valore noto calcolabile.

Questa equazione può essere risolta usando il così detto metodo della falsa posizione (che si pensa sia di origine orientale, forse cinese) che si fonda sulla teoria delle proporzioni.

Essa consiste, ad esempio, nel prendere un bastone B (la falsa posizione) di cui si conosce la forma e posizionarlo in modo analogo alla piramide, cioè verticalmente, si calcola la lunghezza della sua ombra supponendo di ottenere il valore *b*, cioè **ombra(B)=*b*.**

Se l’ombra *a* di X fosse n volte, l’ombra *b* del bastone, allora per la proprietà 1 si ha:

ombra(X)=*a*=n*b*=n ombra(B)=ombra(nB)

e, per la proprietà 2, X=nB cioè la piramide è alta come n bastoni messi in fila.

In altre parole, l’ombra, cioè l’operatore crea un’analogia stabilendo che il rapporto che lega X al bastone è lo stesso del rapporto che lega l’ombra di X all’ombra del bastone:

X:B=ombra(X):ombra(B)

Ma potrebbe capitare il caso in cui l’ombra della piramide non sia multipla intera dell’ombra del bastone; in questo caso Talete considera il seguente teorema: sia $\mathbf{O{:}R^{+}} \quad \mathbf{R^{+}}$, un operatore crescente tale che O(nX)=nO(X) per ogni intero positivo n. Sia B un fissato numero reale positivo (la falsa posizione) allora: **X:B=ombra(X):ombra(B)** per ogni X.

Esprimendo la tesi del teorema invece che in termini di rapporti, in termini di rettangoli equivalenti, cioè, come prodotti si ha: O(X)=kX dove

$$k = \frac{ombra(B)}{B}$$

è una costante indipendente dalla scelta di B.

Questo metodo si può applicare anche per risolvere un secondo problema di geodesia che sembra sia stato risolto da Talete e consiste nel determinare la distanza di una nave dal porto.

Proclo sostiene che Talete risolse questo problema usando il secondo criterio di uguaglianza dei triangoli: due triangoli che hanno uguali due angoli e il lato compreso sono uguali (Euclide, Libro I, teorema XXVI).

Inoltre lo stesso Proclo attribuisce a Pitagora due specifiche scoperte matematiche:

1) La costruzione dei solidi regolari;
2) La teoria delle proporzioni.

La teoria delle proporzioni si accorda bene con il tipo di interessi che caratterizzò le prime fasi della matematica greca; la tradizione riferisce che Pitagora apprese in Mesopotamia le nozioni di Media aritmetica, media geometrica e media subcontraria (più tardi detta media armonica), [redacted]

Ad un certo punto, i pitagorici generalizzarono tali concetti aggiungendo, alle tre già citate, sette altre medie.

Se b è la media di a e c, ove $a<c$, allora le tre quantità sono correlate tra loro secondo una delle seguenti dieci equazioni:

1) $\frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{a}$	6) $\frac{b-a}{c-b}=\frac{c}{b}$
2) $\frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{b}$	7) $\frac{c-a}{b-a}=\frac{c}{a}$
3) $\frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{c}$	8) $\frac{c-a}{c-b}=\frac{c}{a}$
4) $\frac{b-a}{c-b}=\frac{c}{a}$	9) $\frac{c-a}{b-a}=\frac{b}{a}$
5) $\frac{b-a}{c-b}=\frac{b}{a}$	10) $\frac{c-a}{c-b}=\frac{b}{a}$

Dove 1), 2), 3), sono rispettivamente le equazioni delle medie aritmetica, geometrica e armonica.

Lo studio delle proporzioni o dell'uguaglianza di rapporti faceva parte in un primo tempo dell'aritmetica pitagorica.

Più tardi le quantità a, b, c, che compaiono in tali proporzioni, vennero considerate come grandezze geometriche.

Molto probabilmente il concetto di proporzione risale al V secolo a. C., ma esso si riduce a dire che quattro grandezze geometriche omogenee a coppie, sono in proporzione quando il rapporto tra A e B è uguale a quello tra C e D: questo concetto però richiede, per venire applicato, che A e B siano tra loro commensurabili e che lo siano anche C e D, in questa ipotesi la proporzione geometrica diventa una proporzione tra numeri interi.

A Eudosso, il più grande dei matematici greci classici, si devono gli studi di una nuova teoria delle proporzioni e la scoperta del metodo di essa.

Il merito di Eudosso fu quello di aver trovato il modo per eseguire proporzioni tra numeri incommensurabili.

Ecco la definizione che ne diede lo stesso Eudosso: si dice che delle grandezze sono in proporzione la prima con la seconda e la terza con la quarta, quando, se si prendono equimultipli qualsiasi della prima e della terza, ed equimultipli qualsiasi della seconda e della quarta, i primi equimultipli superano ugualmente, o sono uguali, o sono ugualmente inferiori ai secondi equimultipli presi in ordine corrispondente.

Ossia, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se, e soltanto se, dati gli interi m e n, ogniqualvolta $ma<nb$, allora $mc<nd$; oppure se $ma=nb$, allora $mc=nd$, oppure se $ma>nb$, allora $mc>nd$.

La definizione eudossea di uguaglianza di rapporti non è diversa dal processo di moltiplicazione dei medi e degli estremi che viene usata oggi per le frazioni, ossia $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se e solo se $ad=bc$; un processo che equivale alla riduzione a comune denominatore.

Con la teoria di Eudosso fu possibile fornire dimostrazioni soddisfacenti di teoremi che comportavano proporzioni.

In particolare si assume che il riconoscimento di segmenti incommensurabili abbia avuto luogo in connessione con l'applicazione del Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo isoscele.

Aristotele fa riferimento a una prova della incommensurabilità della diagonale di un quadrato rispetto al lato, specificando che essa era basata sulla distinzione tra numeri pari e numeri dispari.

Sembra che secondo il dialogo platonico che porta il nome di Teeteto, questi discute con Socrate e Teodoro la natura delle grandezze incommensurabili. È stata avanzata l'ipotesi che questa discussione vertesse su argomenti analoghi a quelli trovati all'inizio del decimo libro degli Elementi di Euclide. Vi si fa distinzione non solo tra grandezze commensurabili e incommensurabili, ma anche tra quelle che, pur essendo

incommensurabili se se ne considera la lunghezza, sono o non sono commensurabili quando se ne considerano i quadrati. Grandezze irrazionali come $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ sono incommensurabili per quanto riguarda la lunghezza, ma diventano commensurabili quando se ne considerano i quadrati, giacché stanno in rapporto di 3:5.
Il dialogo che Platone compose in memoria dell'amico Teeteto contiene informazioni riguardanti un altro matematico ammirato da Platone, Teodoro di Cirene, di cui fu allievo anche Teeteto, che contribuì ai primi sviluppi della teoria delle grandezze incommensurabili. Egli fu il primo a dimostrare la irrazionalità delle radici quadrate degli interi non quadrati da 3 a 17 incluso. Teeteto fece scoperte anche nel campo della geometria elementare.
La teoria delle proporzioni è ampiamente trattata nel libro V degli "Elementi" di Euclide, opera che abbracciava tutta la matematica elementare, cioè l'aritmetica, la geometria sintetica, l'algebra geometrica e ancora oggi viene considerata un testo fondamentale.
Gli elementi sono suddivisi in tredici libri o capitoli, dei quali i primi sei riguardano la geometria piana elementare, i tre successivi la teoria dei numeri, il Libro X gli incommensurabili, e gli ultimi tre la geometria solida. In particolare il quinto affronta una teoria generale delle proporzioni che viene poi applicata nel sesto libro allo studio della similitudine piana.
Nel VII, VIII e IX libro viene riesposta la teoria delle proporzioni, limitatamente ai rapporti razionali, e nel X si ha la classificazione degli incommensurabili.
Fra i tredici libri degli Elementi, il V e il X sono quelli che hanno sempre suscitato l'interesse e l'ammirazione dei matematici.

La scoperta di grandezze incommensurabili – scrive Boyer – aveva minacciato di aprire una crisi che metteva in dubbio dal punto di vista logico ogni dimostrazione che facesse ricorso all'idea di proporzionalità.
La crisi era però stata evitata con successo da Eudosso con l'enunciazione dei suoi principi. Ciononostante, i matematici greci tendevano a evitare il ricorso alle proporzioni. Lo stesso Euclide evita di usarle fino al libro V. Alcuni studiosi hanno avanzato l'ipotesi che tutto il libro, consistente in venticinque proposizioni, sia in realtà una trascrizione dell'opera di Eudosso. In realtà solo la Definizione 4 è essenzialmente l'assioma di Eudosso e Archimede: "Si dice che due grandezze stanno in rapporto l'una con l'altra, quando, se moltiplicate, sono in grado l'una di superare l'altra".
Il concetto eudossiano di rapporto esclude quindi lo zero, che non può essere medio od estremo di nessuna relazione proporzionale , ma restringe anche il campo degli enti rapportabili tra loro. Un segmento non può stare ad una superficie così come una superficie non può stare ad un volume.
La definizione 5 di Euclide è di fatto data da Eudosso:<<Si dice che delle grandezze sono nello stesso rapporto, la prima con la seconda e la terza con la quarta, quando, se si prendono equimultipli qualsiasi della prima e della terza, od equimultipli qualsiasi della seconda e della quarta, i primi equimultipli superano ugualmente, o sono uguali, o sono ugualmente inferiori ai secondi equimultipli presi in ordine corrispondente>>.
Ovvero $a:b=c:d$ se e solo se dati interi m e n, ogni qualvolta $ma<nb$, allora $mc<nd$; oppure se $ma=nb$, allora $mc=nd$, oppure se $ma>nb$, allora $mc>nd$.
Dopo aver sviluppato nel Libro V la teoria delle proporzioni, Euclide ne fa uso nel Libro VI per dimostrare teoremi concernenti rapporti e proporzioni relativi a triangoli, parallelogrammi o altri poligoni simili.
Particolarmente notevole è la Proposizione 31, che rappresenta una generalizzazione del teorema di Pitagora: "Nei triangoli rettangoli, la figura

costruita sul lato che sottende l'angolo retto è uguale alle figure simili e similmente costruite sui lati che contengono l'angolo retto". Proclo attribuisce questa generalizzazione allo stesso Euclide.

Nel libro VI, rispettivamente nelle Proposizioni 28 e 29 usa liberamente il concetto di similitudine.

Infine il Libro X degli Elementi contiene 115 proposizioni, la maggior parte delle quali costituisce l'equivalente geometrico di quelli che oggi sono noti in aritmetica come numeri irrazionali.

Anche la trattazione archimedea era simile alla geometria di Euclide.

Significativa è l'affermazione di Euclide, nella definizione IV del libro V, secondo cui due grandezze si dicono avere tra loro un rapporto se si può trovare un multiplo dell'una che superi l'altra grandezza. Questa affermazione corrisponde al cosiddetto "Assioma di Archimede", una proprietà che Archimede stesso attribuiva a Eudosso.

Partendo dall'assioma di Eudosso–Archimede è possibile dimostrare mediante una reductio ad absurdum, una proposizione che prende il nome di "*proprietà di esaustione*": se da una qualsiasi grandezza si sottrae una parte non inferiore alla sua metà, e se dal resto si sottrae ancora non meno della sua metà, e se questo processo di sottrazione viene continuato, alla fine rimarrà una grandezza inferiore a qualsiasi grandezza dello stesso genere precedentemente assegnata.

Questa proposizione è equivalente al teorema moderno secondo il quale, se M è una grandezza data, s è una grandezza dello stesso genere precedentemente assegnata, e r è un rapporto tale che $\frac{1}{2} \leq r < 1$, allora è possibile trovare un numero intero positivo N tale che $M(1-r)^n<s$ per tutti i numeri interi positivi n>N. Ossia, la proprietà di esaustione è equivalente al teorema moderno per cui $\lim_{n \to \infty} M(1-r)^n=0$.

Due fisici del tardo Medioevo, Tommaso Bradwardine e Nicola Oresme, diedero una più ampia visione del concetto di proporzionalità.

Nel Tractatus de proportionibus del 1328 Bradwardine sviluppò la teoria boeziana della proporzione duplicata o triplicata cioè “n-uplicata”.

La teoria delle proporzioni comprendeva la proporzione subduplicata o subtriplicata o sub-n-plicata, in cui le quantità variavano come la seconda o terza o n-esima radice. Con questa teoria delle proporzioni Bradwardine propose un’alternativa alla legge aristotelica del moto: per duplicare una velocità che nasce da un rapporto o “proporzione” $\frac{F}{R}$, era necessario fare il quadrato del rapporto $\frac{F}{R}$; per aumentare la velocità di n volte, bisognava prendere la potenza n-esima del rapporto $\frac{F}{R}$.

Invece Nicola Oresme nel De proportionibus proportionum, composto verso il 1360, generalizzò la teoria delle proporzioni di Bradwardine fino ad includere qualsiasi potenza frazionaria razionale e a formulare regole per la combinazione di proporzioni che sono equivalenti alle nostre leggi degli esponenti, espresse nella odierna notazione dalle formule:

$$\mathbf{x^m * x^n = x^{m+n} \text{ e } (x^m)^n = x^{mn}}.$$

In un’altra opera, l’Algorismus proportionum, applica tali regole a problemi geometrici e fisici.

Questi nella sua opera propose anche l’uso di notazioni speciali, come:

p	1
1	2

per denotare la “proporzione uno e un mezzo”- ossia, il cubo della radice quadrata- e forme come: $\frac{1 * p * 1}{4 * 2 * 2}$ per indicare $\sqrt[4]{2\frac{1}{2}}$.

Inoltre Oresme disse che erano possibili proporzioni irrazionali.

Con Pascal si giunse ad avere una formulazione della simmetrica del postulato di Eudosso-Archimede in una forma definitiva:

$$\forall x, y \exists m (m \in N : x / m < y) .$$

CAPITOLO 2
PRIMA FASE SPERIMENTALE

Premessa

Nel seguente capitolo vengono presentate l'ipotesi sperimentale, verificata sul campo; le soluzioni sottese ad un determinato ragionamento e le strategie messe in atto dagli alunni dei moduli IV A/D e IV B/C del Circolo Didattico "N. Garzilli" di Palermo relative al questionario proposto; la metodologia utilizzata per la prima fase sperimentale; l'analisi a-priori dei comportamenti attesi.

2.1 Ipotesi sperimentale

L'ipotesi generale da cui sono partita è rappresentata dalla possibilità di rilevare, attraverso la somministrazione di un questionario l'esistenza teorica ed operativa del pensiero proporzionale in un contesto geometrico (ingrandimenti, rimpicciolimenti).

L'ipotesi alternativa si fonda sull'esistenza di concezioni errate, riguardanti il pensiero proporzionale in contesto geometrico, che non consentirebbe agli alunni di rispondere e di attivare i loro processi di ragionamento.

L'ipotesi nulla è l'inesistenza del ragionamento proporzionale in contesto geometrico che non consentirebbe agli alunni l'esecuzione del questionario.

Quindi, la prima sperimentazione ha come obiettivo generale quello di scoprire le concezioni degli alunni rispetto al pensiero proporzionale attraverso la somministrazione di un questionario e, come obiettivo specifico quello di rilevare le strategie e i diversi schemi di ragionamento che gli alunni mettono in atto durante l'esecuzione delle consegne date.

2.2 Campione della prima fase sperimentale

L’indagine è stata rivolta a 80 alunni delle classi del secondo biennio della scuola primaria, rispettivamente IV A/D e IV B/C del Circolo Didattico “N. Garzilli” di Palermo, durante l’anno scolastico 2003/2004, nel periodo compreso tra Ottobre e Dicembre 2004.

Il campione esaminato appartiene ad un contesto socio-culturale medio-alto e ha dimostrato di possedere un buon bagaglio conoscitivo e propensione verso le materie scientifiche.

Volutamente, le classi interessate alla sperimentazione non sono state preparate alla somministrazione del questionario con delle attività di ripasso teorico sull’argomento similitudine e proporzionalità, né da parte dell’insegnante, né da parte mia.

Questo accorgimento è stato preso in considerazione per evitare che gli alunni, durante la formulazione delle risposte, si lasciassero influenzare da definizioni e concetti, appresi teoricamente, invece di far emergere le loro concezioni spontanee sull’argomento.

2.3 La Metodologia

La metodologia è un aspetto importantissimo da non trascurare durante la fase sperimentale.

Premesso che un apprendimento è sempre il risultato dell’interazione contemporanea con un ambiente fisico, con un contesto sociale e con l’ambito individuale, i bambini sono stati invitati, in un primo momento, a lavorare individualmente e successivamente a verbalizzare le risposte date al questionario.

Ciò ha consentito agli alunni di socializzare con il gruppo classe il proprio punto di vista.

Solitamente gli alunni della classe IV B/C, prima dello svolgimento di qualsiasi compito, discutono collettivamente e successivamente verbalizzano per iscritto il proprio pensiero.

Infatti, in un primo momento, l'invito di rispondere individualmente al questionario, non è stato accolto bene. Quindi, è stato proposto loro di sperimentare qualcosa di nuovo, lavorare individualmente per non lasciarsi influenzare dai compagni e poi confrontarsi.

Nel dibattito sono emersi i processi cognitivi e metacognitivi attivati dagli alunni.

2.4 Gli strumenti utilizzati

La scelta dello strumento è indispensabile in una ricerca perché deve consentire l'osservazione oggettiva dei fenomeni e la loro misurazione adeguata.

Quindi, nello scegliere uno strumento, è importante valutare non solo la sua intrinseca efficacia, ma anche la possibilità e l'opportunità del suo impiego rispetto a ciò che si vuole osservare.

Lo strumento deve essere valido, cioè servire per misurare proprio ciò che s'intende misurare e fedele, cioè che non modifichi la sua capacità di misurazione.

A tal fine, gli strumenti scelti per la sperimentazione sono stati il questionario aperto e l'analisi a-priori.

La scelta del questionario è stata guidata dall'idea che esso ci consente realmente di raccogliere informazioni, perché interroga gli alunni sui concetti portanti dell'argomento che ci interessa verificare e ci fornisce le loro risposte in forma scritta. Il questionario per essere funzionale alla ricerca sperimentale deve rispondere agli obiettivi che ci siamo prefissati, al fine di fornirci informazioni tali da confermare o smentire l'ipotesi di partenza.

Il questionario costruito è coerente con il target di riferimento: le condizioni socio-culturali di provenienza degli alunni e le loro capacità attentive generali. Ciò è stato possibile grazie all'osservazione partecipata delle attività didattiche sia scolastiche che extrascolastiche degli alunni e dei momenti di programmazione, durante il tirocinio del quarto anno accademico.

Il questionario si compone di cinque item a risposta aperta, con richiesta di motivazione.

Ogni item è costituito dalla domanda scritta e da figure di riferimento, sulle quali i bambini possono operare con la penna per verificare la similitudine tra le figure, per fare delle prove oppure per disegnare delle figure che vanno ad integrare la risposta scritta.

Tutte le figure sulle quali i bambini sono stati invitati a riflettere sono conosciute. Tale impostazione degli item ha permesso di registrare le risposte dei bambini e, grazie all'esplicitazione della motivazione della risposta, di individuare i processi cognitivi, le procedure ed i ragionamenti attivati.

Nella prima domanda, i bambini sono invitati a disegnare la figura rappresentata nella prima quadrettatura nelle altre due già predisposte e a dare la motivazione di cosa è cambiato.

In tal modo, i bambini sono portati inconsapevolmente a ricercare una definizione di similitudine.

Nella seconda e nella terza domanda, date due figure geometriche, note ai bambini, viene chiesto se sono simili e di spiegare il perché della risposta data.

Nella quarta domanda viene chiesto ai bambini di osservare il parallelogramma, di trovarne un altro simile, ma più piccolo di quello dato e di esplicitare la relazione esistente tra le lunghezze dei lati delle due figure geometriche.

Infine, nella quinta domanda, viene proposto ai bambini di trovare il rapporto di similitudine tra i due rettangoli raffigurati e di esplicitare il processo per trasformare la figura A nella figura B.

Un altro strumento, da non trascurare, utilizzato durante la sperimentazione è stato l'analisi a-priori.

L'analisi a-priori di una situazione didattica è un momento molto importante del controllo sperimentale. Essa è l'insieme delle rappresentazioni epistemologiche, delle rappresentazioni storico-epistemologiche e dei comportamenti ipotizzati[4].

L'analisi dei comportamenti ipotizzabili, tenendo conto degli errori, ostacoli della disciplina, misconcetti e conflitti, consente di individuare quelle attività che, nel rispetto dei diversi stili cognitivi degli alunni, favoriranno l'apprendimento.

Nella prima fase sperimentale l'analisi a priori ha permesso di determinare le possibili strategie risolutive, corrette e non, in riferimento al questionario.

Lo strumento dell'analisi a-priori, oltre a fornire la possibilità di tabulare i dati emersi dalla somministrazione dei problemi aperti, configurandosi altresì come risorsa funzionale ai fini valutativi, consente di poter focalizzare l'attenzione del ricercatore su una serie di aspetti interessanti, il primo dei quali può essere considerato lo *spazio degli eventi*, ovvero

[4] Per "rappresentazioni epistemologiche" si intendono le rappresentazioni dei percorsi conoscitivi riguardanti un particolare concetto. Per "rappresentazioni storico-epistemologiche" si intendono le rappresentazioni dei percorsi conoscitivi (sintattici, semantici, pragmatici) riguardo un particolare concetto. Per "comportamenti ipotizzabili" dell'allievo nei confronti della situazione/problema sono tutte le possibili strategie risolutive sia corrette che non.

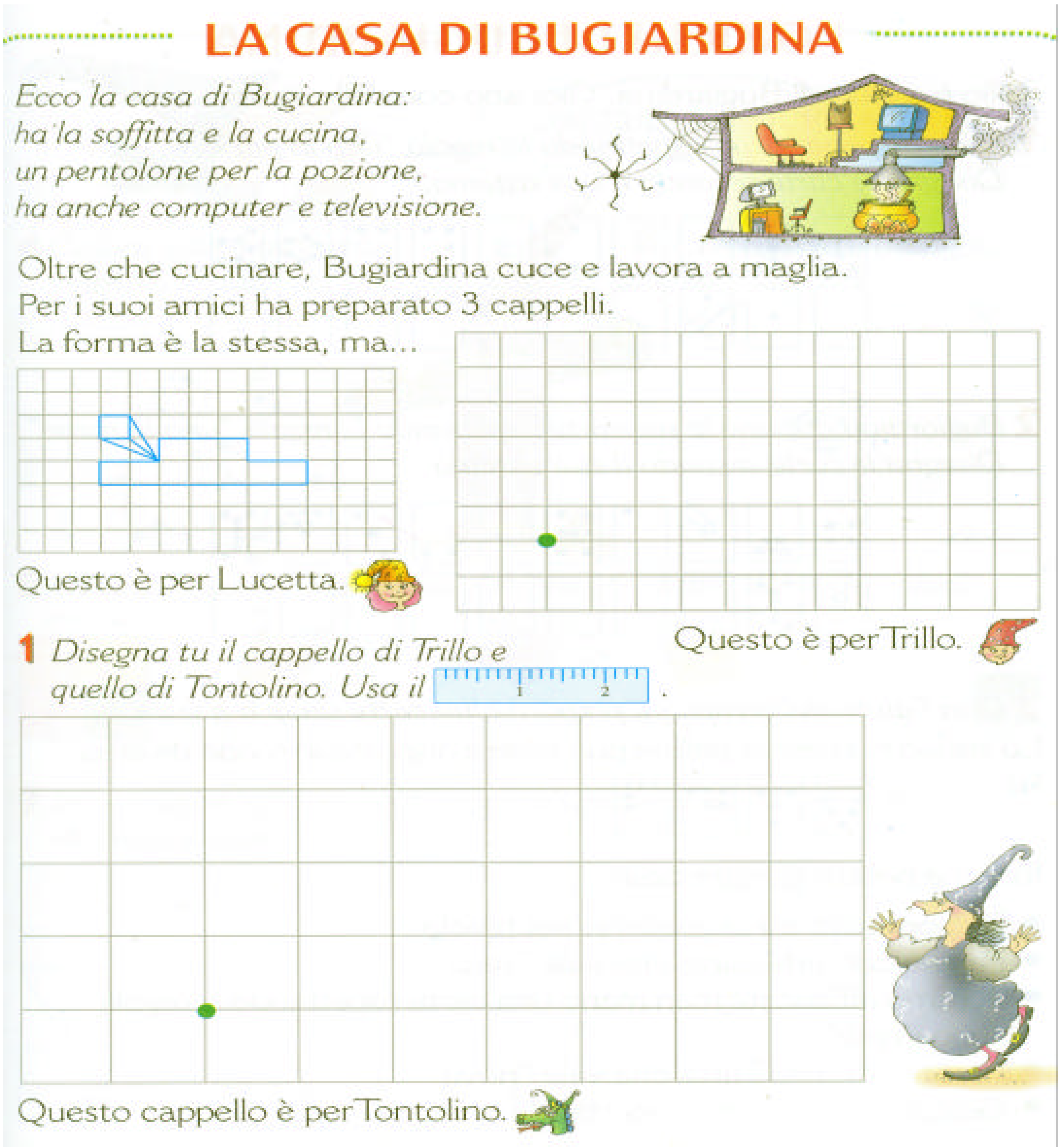
l'insieme delle possibili risposte, corrette e non, che si possono ipotizzare in uno specifico contesto.

Sulla base dello *spazio degli eventi* è possibile inoltre individuare sia il *buon problema* e quindi, una "situazione didattica fondamentale" che permette la migliore formulazione in termini ergonomici della conoscenza, sia le *variabili didattiche* che permettono di favorire un cambiamento nel comportamento degli allievi (Spagnolo, 1998, pp. 258-259).

La costruzione dell'analisi a-priori è avvenuta sia durante la costruzione del questionario, facendo riferimento alle attese personali del ricercatore e all'analisi epistemologica dei contenuti messi in gioco, sia dopo un pre-test effettuato su quattro bambini di quarta, sia dopo la somministrazione del questionario al campione.

2.4.1 Questionario

A) Disegna la figura rappresentata nella prima quadrettatura nelle altre due:


LA CASA DI BUGIARDINA

Ecco la casa di Bugiardina:
ha la soffitta e la cucina,
un pentolone per la pozione,
ha anche computer e televisione.

Oltre che cucinare, Bugiardina cuce e lavora a maglia.
Per i suoi amici ha preparato 3 cappelli.
La forma è la stessa, ma...

Questo è per Lucetta.

Questo è per Trillo.

1 *Disegna tu il cappello di Trillo e quello di Tontolino. Usa il* .

Questo cappello è per Tontolino.

Come sono le tre figure? Motiva la tua risposta.

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

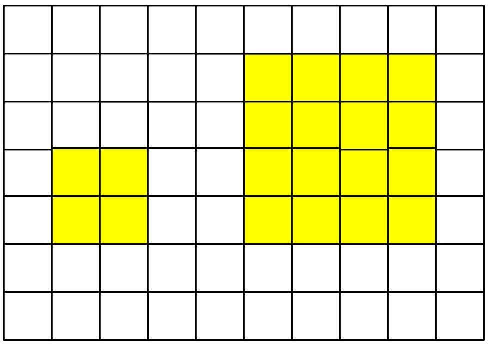
………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

B) Le due figure sono simili? Perché?

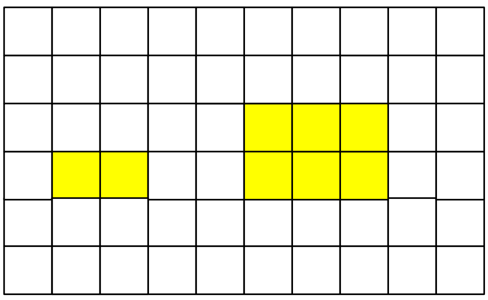


……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

C) Le due figure sono simili? Perché?

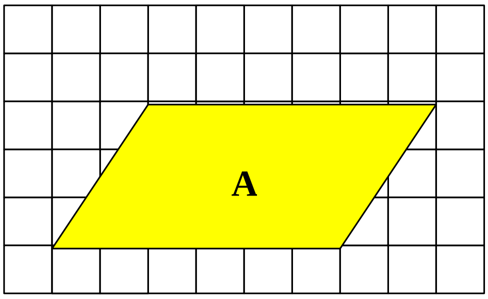


……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

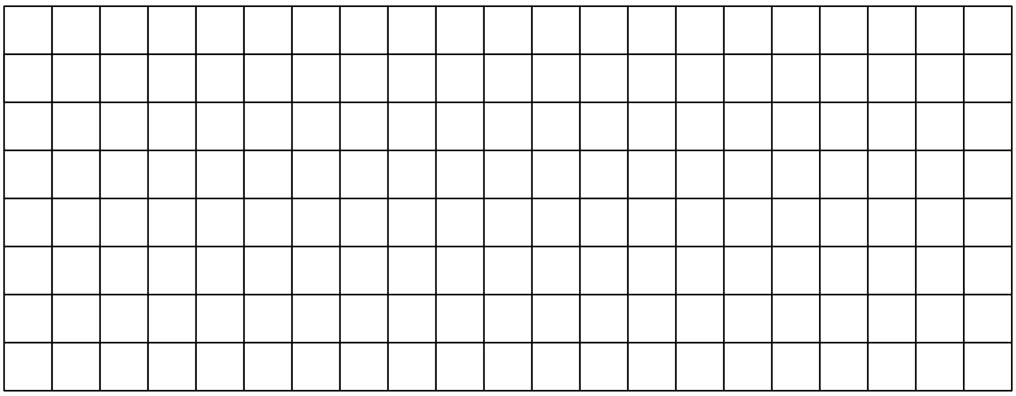
……………………………………………………………………………………

D) Osserva il parallelogramma:



A= 6cm x 3cm

Trova un altro parallelogramma simile ma più piccolo di quello raffigurato. Che relazione noti tra i lati lunghi e i lati corti del parallelogramma?



....

....

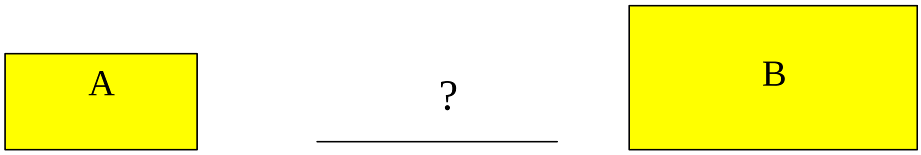
....

....

....

....

E) Osserva le due figure:



Esse sono simili e misurano rispettivamente:

A = 4 cm x 2 cm

B = 6 cm x 3 cm

Come fai a passare dalla figura A alla figura B? Sai trovare l'operatore che trasforma la figura A nella figura B? Motiva la tua risposta.

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

2.4.2 Analisi a-priori delle strategie risolutive

Le strategie risolutive che sono state prese in considerazione per la tabulazione dei dati rispetto alla prima domanda, sono elencate di seguito:

Domanda a: Disegna la figura rappresentata nella prima quadrettatura nelle altre due. Come sono le tre figure? Motiva la tua risposta.

a1: Le figure ottenute sono simili, ma diverse.

a2: Le figure ottenute sono simili perché hanno la stessa forma e si assomigliano.

a3: Le figure ottenute sono simili perché di grandezza diversa.

a4: Le figure ottenute sono simili, ma sono più grandi perché i quadretti sono più grandi.

a5: Le figure ottenute sono simili, ma sono più grandi perché si sono allungati i lati della figura.

a6: Le figure ottenute sono simili, ma sono più grandi perché abbiamo tirato le linee più lunghe.

a7: Le figure ottenute sono simili, ma sono più grandi perché l'unità di misura è diversa.

a8: Le due figure sono simili alla prima perché anche se tutti e tre i cappelli hanno le stesse misure, il lato dei quadretti medi è circa il doppio del lato dei quadretti più piccoli e il lato dei quadretti grandi è circa il triplo.

a9: Le figure ottenute sono uguali perché sono sempre cappelli.

a10: Le due figure sono simili perché considerando l'unità di misura del primo, si aggiungono due quadretti per ottenere la seconda e se ne aggiungono tre per ottenere la terza.

Quelle utilizzate in riferimento alla seconda domanda sono le seguenti:

Domanda b: Le due figure sono simili? Perché?

b1: Le due figure sono simili.

b2: Le due figure sono simili perché hanno la stessa forma e sono due quadrati.

b3: Le due figure sono simili perché hanno la stessa forma, ma grandezza diversa.

b4: Le due figure sono simili perché il quadrato più grande è il doppio del quadrato più piccolo.

b5: Le due figure non sono simili perché sono di grandezza diversa.

b6: Le due figure sono simili perché si vede.

b7: Le due figure sono uguali perché sono quadrati.

In riferimento alla terza domanda:

Domanda c: Le due figure sono simili? Perché?

c1: Le due figure non sono simili.

c2: Le due figure sono simili perché hanno la stessa forma e sono due rettangoli.

c3: Le due figure sono simili perché hanno grandezza diversa.

c4: Le due figure sono simili perché il rettangolo più grande è la metà di quello piccolo.

c5: Le due figure sono uguali perché sono rettangoli.

c6: Le due figure non sono simili perché hanno grandezza diversa.

In riferimento alla quarta domanda:

Domanda d: Trova un altro parallelogramma simile, ma più piccolo di quello raffigurato. Che relazione noti tra i lati lunghi e i lati corti del parallelogramma?

d1: Disegna un altro parallelogramma la metà di quello dato.

d2: Disegna un altro parallelogramma la metà di quello dato, quindi i lati del parallelogramma più piccolo sono la metà di quello grande.

d3: Disegna un altro parallelogramma più piccolo sottraendo un quadretto ai lati.

d4: Disegna un altro parallelogramma sottraendo due quadretti, quindi i lati del primo parallelogramma sono più grandi del secondo.

In riferimento alla quinta domanda:

Domanda e: Osserva le due figure. Esse sono simili e misurano rispettivamente A= 4cm * 2cm; B= 6cm * 3cm. Come fai a passare dalla figura A alla Figura B? Sai trovare l'operatore che trasforma la figura A nella figura B?. Motiva la tua risposta.

e1: L'operazione utilizzata è la moltiplicazione. L'operatore adoperato è 1,5 perché moltiplicando per 2 si ottiene un rettangolo, ma il doppio di quello dato, quindi, per tentativi si arriva all'operatore 1.5.

e2: L'operazione utilizzata è la moltiplicazione. L'operatore adoperato è * 1,5 perché trasforma i lati del rettangolo A nei lati del rettangolo B.

e3: L'operazione utilizzata è la moltiplicazione perché è necessario ingrandire.

e4: L'operazione utilizzata è la moltiplicazione. L'operatore è 1,5 perché facendo la divisione tra i lati corrispondenti 6:4 e 3:2 si ottiene questo operatore.

e5: L'operazione utilizzata è l'addizione perché per trasformare una figura più piccola in una più grande bisogna aggiungere.

e6: L'operazione utilizzata è l'addizione. Gli operatori adoperati sono +2 e +1 perché permettono di ottenere la misura dei lati della figura B.

e7: L'operazione utilizzata è l'addizione.

e8: L'operazione utilizzata è la moltiplicazione.

e9: Non lo so.

2.4.3 Analisi quantitativa dei dati sperimentali

Per l'analisi dei dati sperimentali – relativi alla somministrazione del questionario aperto al campione di 80 alunni di quattro classi del secondo biennio della scuola primaria del Circolo Didattico "N. Garzilli" di Palermo – si è fatto riferimento alla statistica descrittiva (frequenza relativa e percentuale) che grazie alla tabulazione dei dati con il programma Excel, ha consentito di stabilire come gli alunni hanno adottato le diverse strategie per rispondere al questionario.

Analisi descrittiva

I dati emersi dalla somministrazione del questionario, tabulati sulla base dell'analisi a-priori, sono stati inseriti in cinque tabelle a doppia entrata alunni-strategie, in riferimento alle cinque domande.

Legenda:

- Valore 1: Strategie utilizzate dall'alunno;
- Valore 0: Strategie non utilizzate dall'alunno;
- Lettere minuscole: Strategie;
- Lettere maiuscole: Alunni.

DOMANDA a										
	STRATEGIE									
Classi/Alunni	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10
IV A										
A	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
F	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
H	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
I	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
J	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
K	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
L	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
M	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
N	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
O	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
P	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Q	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
R	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
S	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
T	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
U	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Tot.	2	4	1	3	2	0	2	1	2	4
IV B										
A	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
E	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
G	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
H	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
J	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
K	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
L	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
M	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
N	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
O	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
P	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Q	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
R	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
S	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
T	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Tot.	1	1	3	3	2	3	1	3	0	3

IV C										
A	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
G	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
H	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
I	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
J	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
K	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
L	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
M	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
O	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
P	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Q	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
R	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
S	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Tot.	2	1	4	2	2	1	1	0	4	2
IV D										
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
B	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
E	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
H	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
J	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
K	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
L	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
M	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
N	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
O	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Q	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
R	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
S	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
T	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Tot.	3	2	2	2	2	0	0	0	4	5
Totale	8	8	10	10	8	4	4	4	10	14

DOMANDA b							
	STRATEGIE						
Classi/Alunni	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
IV A							
A	1	0	0	0	0	0	0
B	0	1	0	0	0	0	0
C	0	0	1	0	0	0	0
D	1	0	0	0	0	0	0
E	0	0	1	0	0	0	0
F	0	1	0	0	0	0	0
G	0	0	0	1	0	0	0
H	0	0	0	0	0	0	1
I	0	0	0	1	0	0	0
J	0	0	0	0	0	1	0
K	1	0	0	0	0	0	0
L	0	1	0	0	0	0	0
M	0	1	0	0	0	0	0
N	0	0	0	0	0	1	0
O	0	0	0	0	0	1	0
P	0	0	0	0	1	0	0
Q	0	0	0	0	0	0	1
R	0	0	0	0	0	1	0
S	0	0	0	0	0	1	0
T	0	0	0	0	1	0	0
U	0	0	0	0	1	0	0
Tot.	3	4	2	2	3	5	2
IV B							
A	1	0	0	0	0	0	0
B	0	0	0	1	0	0	0
C	0	1	0	0	0	0	0
D	1	0	0	0	0	0	0
E	0	1	0	0	0	0	0
F	0	0	1	0	0	0	0
G	0	0	0	1	0	0	0
H	0	0	0	0	1	0	0
I	0	0	0	1	0	0	0
J	0	0	0	0	0	1	0
K	0	0	0	0	0	1	0
L	0	0	1	0	0	0	0
M	0	0	0	0	0	0	1
N	0	0	0	0	1	0	0
O	0	0	1	0	0	0	0
P	0	0	0	0	0	1	0
Q	0	0	0	0	0	1	0
R	0	0	0	0	0	0	1
S	0	0	0	0	0	1	0
T	0	0	0	0	1	0	0
Tot.	2	2	3	3	3	5	2

IV C							
A	0	1	0	0	0	0	0
B	1	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	1	0	0	0
D	0	0	1	0	0	0	0
E	0	0	0	1	0	0	0
F	0	0	0	0	1	0	0
G	0	0	0	1	0	0	0
H	0	0	1	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	1	0
J	0	0	0	0	0	1	0
K	0	0	0	0	0	0	1
L	0	0	1	0	0	0	0
M	0	0	0	0	0	0	1
N	0	0	0	0	1	0	0
O	0	0	0	0	0	1	0
P	0	0	0	0	0	1	0
Q	0	0	0	0	0	1	0
R	0	1	0	0	0	0	0
S	0	0	0	0	0	1	0
Tot.	1	2	3	3	2	6	2
IV D							
A	1	0	0	0	0	0	0
B	0	1	0	0	0	0	0
C	0	0	1	0	0	0	0
D	1	0	0	0	0	0	0
E	0	1	0	0	0	0	0
F	1	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	1	0	0
H	1	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	1	0	0	0
J	0	0	0	0	0	1	0
K	0	0	0	0	0	0	1
L	0	0	0	0	0	1	0
M	0	0	0	0	0	1	0
N	0	0	0	0	0	0	1
O	0	0	0	0	1	0	0
P	0	0	0	0	0	1	0
Q	0	0	0	0	0	1	0
R	0	0	0	0	0	0	1
S	0	0	0	0	0	1	0
T	0	0	0	0	0	1	0
Tot.	4	2	1	1	2	7	3
Totale	10	10	9	9	10	23	9

DOMANDA c						
	STRATEGIE					
Classi/Alunni	c1	c2	c3	c4	c5	c6
IV A						
A	0	0	0	0	1	0
B	0	1	0	0	0	0
C	0	0	1	0	0	0
D	0	0	0	0	1	0
E	0	0	1	0	0	0
F	0	1	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	1
H	0	0	1	0	0	0
I	0	0	0	0	0	1
J	1	0	0	0	0	0
K	0	0	1	0	0	0
L	1	0	0	0	0	0
M	0	1	0	0	0	0
N	0	1	0	0	0	0
O	0	0	0	1	0	0
P	0	0	0	0	1	0
Q	0	0	0	1	0	0
R	0	1	0	0	0	0
S	0	0	0	1	0	0
T	0	0	0	1	0	0
U	0	0	0	1	0	0
Tot.	2	5	4	5	3	2
IV B						
A	0	1	0	0	0	0
B	0	0	1	0	0	0
C	0	1	0	0	0	0
D	0	0	1	0	0	0
E	0	1	0	0	0	0
F	0	1	0	0	0	0
G	0	0	1	0	0	0
H	0	1	0	0	0	0
I	0	0	0	1	0	0
J	0	0	0	0	1	0
K	0	1	0	0	0	0
L	0	0	0	0	1	0
M	0	0	0	1	0	0
N	1	0	0	0	0	0
O	0	0	0	1	0	0
P	0	0	0	0	1	0
Q	0	0	0	1	0	0
R	0	0	0	0	0	1
S	0	0	0	1	0	0
T	0	0	0	0	0	1
Tot.	1	6	3	5	3	2

IV C						
A	0	1	0	0	0	0
B	0	1	0	0	0	0
C	0	0	0	0	0	1
D	0	0	1	0	0	0
E	0	0	0	0	0	1
F	0	0	0	1	0	0
G	0	0	1	0	0	0
H	0	0	1	0	0	0
I	0	0	0	1	0	0
J	0	0	0	1	0	0
K	0	0	0	0	1	0
L	0	0	1	0	0	0
M	0	1	0	0	0	0
N	0	0	0	1	0	0
O	0	1	0	0	0	0
P	0	0	0	1	0	0
Q	0	0	0	0	1	0
R	0	1	0	0	0	0
S	0	0	0	1	0	0
Tot.	0	5	4	6	2	2
IV D						
A	0	0	0	1	0	0
B	0	1	0	0	0	0
C	0	0	1	0	0	0
D	0	0	0	1	0	0
E	0	1	0	0	0	0
F	0	0	1	0	0	0
G	0	0	0	0	0	1
H	0	0	0	0	0	1
I	0	1	0	0	0	0
J	0	0	1	0	0	0
K	0	0	0	0	1	0
L	0	1	0	0	0	0
M	0	0	0	1	0	0
N	0	0	0	0	1	0
O	0	0	0	0	0	1
P	0	0	0	1	0	0
Q	0	0	0	1	0	0
R	0	0	0	0	1	0
S	0	0	0	1	0	0
T	0	0	0	1	0	0
Tot.	0	4	3	7	3	3
Totale	3	20	14	23	11	9

DOMANDA d				
	STRATEGIE			
Classi/Alunni	d1	d2	d3	d4
IV A				
A	1	0	0	0
B	0	0	1	0
C	0	0	0	1
D	1	0	0	0
E	0	0	0	1
F	1	0	0	0
G	0	1	0	0
H	0	0	0	1
I	0	1	0	0
J	0	0	1	0
K	1	0	0	0
L	0	0	0	1
M	0	1	0	0
N	0	0	1	0
O	0	0	1	0
P	0	0	1	0
Q	0	0	1	0
R	0	0	1	0
S	0	0	1	0
T	0	0	1	0
U	0	0	1	0
Tot.	4	3	10	4
IV B				
A	1	0	0	0
B	0	1	0	0
C	0	0	1	0
D	1	0	0	0
E	1	0	0	0
F	0	0	0	1
G	0	1	0	0
H	1	0	0	0
I	0	1	0	0
J	0	0	1	0
K	0	0	1	0
L	0	0	0	1
M	1	0	0	0
N	0	0	1	0
O	0	0	0	1
P	0	0	1	0
Q	0	0	1	0
R	0	0	1	0
S	0	0	1	0
T	0	0	1	0
Tot.	5	3	9	3

IV C				
A	1	0	0	0
B	1	0	0	0
C	0	1	0	0
D	0	0	0	1
E	0	1	0	0
F	0	0	1	0
G	0	0	1	0
H	0	0	0	1
I	0	0	1	0
J	0	0	1	0
K	0	0	1	0
L	0	0	0	1
M	0	0	1	0
N	0	0	0	1
O	0	0	1	0
P	0	0	1	0
Q	0	0	1	0
R	1	0	0	0
S	0	0	1	0
Tot.	3	2	10	4
IV D				
A	0	0	1	0
B	0	0	1	0
C	0	0	0	1
D	1	0	0	0
E	0	1	0	0
F	1	0	0	0
G	0	0	0	1
H	1	0	0	0
I	0	1	0	0
J	0	0	1	0
K	0	0	0	1
L	0	0	1	0
M	0	0	0	1
N	0	0	1	0
O	0	0	1	0
P	0	0	1	0
Q	0	0	1	0
R	0	0	1	0
S	0	0	1	0
T	0	0	1	0
Tot.	3	2	11	4
Totale	15	10	40	15

DOMANDA e									
	STRATEGIE								
Classi/Alunni	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9
IV A									
A	0	0	1	0	0	0	0	0	0
B	1	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	1	0	0	0	0	0	0
D	0	0	1	0	0	0	0	0	0
E	0	0	1	0	0	0	0	0	0
F	1	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0	1	0	0	0	0	0	0	0
H	0	0	0	1	0	0	0	0	0
I	0	1	0	0	0	0	0	0	0
J	0	0	0	0	1	0	0	0	0
K	0	0	1	0	0	0	0	0	0
L	1	0	0	0	0	0	0	0	0
M	0	0	0	0	0	1	0	0	0
N	0	0	0	0	1	0	0	0	0
O	0	0	0	0	0	1	0	0	0
P	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Q	0	0	0	0	0	0	0	0	1
R	0	0	0	0	0	1	0	0	0
S	0	0	0	0	0	0	1	0	0
T	0	0	0	0	0	0	0	1	0
U	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Tot.	3	2	5	1	2	3	3	1	1
IV B									
A	1	0	0	0	0	0	0	0	0
B	0	1	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	1	0	0	0	0	0
D	1	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	1	0	0	0	0	0
F	0	0	1	0	0	0	0	0	0
G	0	1	0	0	0	0	0	0	0
H	0	0	0	0	0	1	0	0	0
I	0	1	0	0	0	0	0	0	0
J	1	0	0	0	0	0	0	0	0
K	0	0	0	0	0	1	0	0	0
L	0	0	1	0	0	0	0	0	0
M	1	0	0	0	0	0	0	0	0
N	0	0	0	0	0	1	0	0	0
O	0	0	1	0	0	0	0	0	0
P	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Q	0	0	0	0	1	0	0	0	0
R	0	0	0	0	0	0	1	0	0
S	0	0	0	0	0	0	1	0	0
T	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Tot.	4	3	3	2	2	3	2	1	0

IV C									
A	0	0	1	0	0	0	0	0	0
B	1	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	1	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	1	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	1	0	0	0
F	0	0	0	0	0	1	0	0	0
G	0	0	0	1	0	0	0	0	0
H	0	0	0	0	0	1	0	0	0
I	0	0	0	0	0	0	1	0	0
J	0	0	0	0	1	0	0	0	0
K	0	0	0	0	0	1	0	0	0
L	0	0	0	0	0	0	1	0	0
M	0	0	0	0	0	0	1	0	0
N	0	0	0	0	1	0	0	0	0
O	0	0	0	0	1	0	0	0	0
P	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Q	0	0	0	0	0	0	0	1	0
R	0	0	0	0	0	0	0	1	0
S	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Tot.	1	1	2	1	3	4	5	2	0
IV D									
A	0	1	0	0	0	0	0	0	0
B	0	0	1	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	1	0	0	0	0	0
D	0	0	0	1	0	0	0	0	0
E	1	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0	1	0	0
G	0	0	1	0	0	0	0	0	0
H	0	0	0	0	1	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	0	1	0	0
J	0	0	0	0	0	1	0	0	0
K	0	0	0	0	0	0	0	0	1
L	0	0	0	0	0	1	0	0	0
M	0	0	0	1	0	0	0	0	0
N	0	0	0	0	1	0	0	0	0
O	0	0	0	0	0	1	0	0	0
P	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Q	0	0	0	0	1	0	0	0	0
R	0	0	0	0	0	0	0	1	0
S	0	0	0	0	0	1	0	0	0
T	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Tot.	1	1	2	3	3	5	3	1	1
Totale	9	7	12	7	10	15	13	5	2

Percentuale delle strategie delle classi IV:

	STRATEGIE DOMANDA a									
Classi	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10
IV A	9,52%	19,05%	4,76%	14,29%	9,52%	0%	9,52%	4,76%	9,52%	19,05%
IV B	5,00%	5,00%	15,00%	15,00%	10,00%	15,00%	5,00%	15,00%	0,00%	15,00%
IV C	10,53%	5,26%	21,05%	10,53%	10,53%	5,26%	5,26%	0,00%	21,05%	10,53%
IV D	15,00%	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%	0,00%	0,00%	0,00%	20,00%	25,00%

	STRATEGIE DOMANDA b						
Classi	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
IV A	14,29%	19,05%	9,52%	9,52%	14,29%	23,81%	9,52%
IV B	10,00%	10,00%	15,00%	15,00%	15,00%	25,00%	10,00%
IV C	5,26%	10,53%	15,79%	15,79%	10,53%	31,58%	10,53%
IV D	20,00%	10,00%	5,00%	5,00%	10,00%	35,00%	15,00%

	STRATEGIE DOMANDA c					
Classi	c1	c2	c3	c4	c5	c6
IV A	9,52%	23,81%	19,05%	23,81%	14,29%	9,52%
IV B	5,00%	30,00%	15,00%	25,00%	15,00%	10,00%
IV C	0,00%	26,32%	21,05%	31,58%	10,53%	10,53%
IV D	0,00%	20,00%	15,00%	35,00%	15,00%	15,00%

	STRATEGIE DOMANDA d			
Classi	d1	d2	d3	d4
IV A	19,05%	14,29%	47,62%	19,05%
IV B	25,00%	15,00%	45,00%	15,00%
IV C	15,79%	10,53%	52,63%	21,05%
IV D	15,00%	10,00%	55,00%	20,00%

	STRATEGIE DOMANDA e								
Classi	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9
IV A	14,29%	9,52%	23,81%	4,76%	9,52%	14,29%	14,29%	4,76%	4,76%
IV B	20,00%	15,00%	15,00%	10,00%	10,00%	15,00%	10,00%	5,00%	0,00%
IV C	5,26%	5,26%	10,53%	5,26%	15,79%	21,05%	26,32%	10,53%	0,00%
IV D	5,00%	5,00%	10,00%	15,00%	15,00%	25,00%	15,00%	5,00%	5,00%

Percentuale delle strategie relative all'intero campione:

Domanda a

Strategie	Totale risposte	%
a1	8	10,00%
a2	8	10,00%
a3	10	12,50%
a4	10	12,50%
a5	8	10,00%
a6	4	5,00%
a7	4	5,00%
a8	4	5,00%
a9	10	12,50%
a10	14	17,50%

Domanda b

Strategie	Totale risposte	%
b1	10	12,50%
b2	10	12,50%
b3	9	11,25%
b4	9	11,25%
b5	10	12,50%
b6	23	28,75%
b7	9	11,25%

Domanda c

Strategie	Totale risposte	%
c1	3	3,75%
c2	20	25,00%
c3	14	17,50%
c4	23	28,75%
c5	11	13,75%
c6	9	11,25%

Domanda d

Strategie	Totale risposte	%
d1	15	18,75%
d2	10	12,50%
d3	40	50,00%
d4	15	18,75%

Domanda e

Strategie	Totale risposte	%
e1	9	11,25%
e2	7	8,75%
e3	12	15,00%
e4	7	8,75%
e5	10	12,50%
e6	15	18,75%
e7	13	16,25%
e8	5	6,25%
e9	2	2,50%

Di seguito vengono riportate le percentuali delle risposte più significative delle classi:

DOMANDA a

Classe IV A

a2: Le figure ottenute sono simili perché hanno la stessa forma e si assomigliano.	19,05%
a10: Le due figure sono simili perché considerando l'unità di misura del primo, si aggiungono due quadretti per ottenere la seconda, se ne aggiungono tre per ottenere la terza.	19,05%
a4: Le figure ottenute sono simili, ma sono più grandi perché i quadretti sono più grandi.	14,29%

Classe IV B

a3: Le figure ottenute sono simili perché di grandezza diversa.	15%
a4: Le figure ottenute sono simili, ma sono più grandi perché i quadretti sono più grandi.	15%
a6: Le figure ottenute sono simili, ma sono più grandi perché abbiamo tirato le linee più lunghe.	15%
a8: Le due figure sono simili alla prima perché anche se tutti e tre i cappelli hanno le stesse misure, il lato dei quadretti medi è circa il doppio del lato dei quadretti più piccoli e il lato dei quadretti grandi è circa il triplo.	15%
a10: Le due figure sono simili perché considerando l'unità di misura del primo, si aggiungono due quadretti per ottenere la seconda, se ne aggiungono tre per ottenere la terza.	15%

Classe IV C

a3: Le figure ottenute sono simili perché di grandezza diversa.	21,05%
a9: Le figure ottenute sono uguali perché sono sempre cappelli.	21,05%
a1: Le figure ottenute sono simili, ma diverse.	10,5%
a4: Le figure ottenute sono simili, ma sono più grandi perché i quadretti sono più grandi.	10,5%
a5: Le figure ottenute sono simili, ma sono più grandi perché si sono allungati i lati della figura.	10,5%
a10: Le due figure sono simili perché considerando l’unità di misura del primo, si aggiungono due quadretti per ottenere la seconda, se ne aggiungono tre per ottenere la terza.	10,5%

Classe IV D

a10: Le due figure sono simili perché considerando l’unità di misura del primo, si aggiungono due quadretti per ottenere la seconda, se ne aggiungono tre per ottenere la terza.	25%
a9: Le figure ottenute sono uguali perché sono sempre cappelli.	20%
a1: Le figure ottenute sono simili, ma diverse.	15%

DOMANDA b

Classe IV A

b6: Le due figure sono simili perché si vede.	23,81%
b2: Le due figure sono simili perché hanno la stessa forma e sono due quadrati.	19,05%
b1: Le due figure sono simili.	14,29%
b5: Le due figure non sono simili perché sono di grandezza diversa.	14,29%

Classe IV B

b6: Le due figure sono simili perché si vede.	25%
b3: Le due figure sono simili perché hanno la stessa forma, ma grandezza diversa.	15%
b4: Le due figure sono simili perché il quadrato più grande è il doppio del quadrato più piccolo.	15%
b5: Le due figure non sono simili perché sono di grandezza diversa.	15%

Classe IV C

b6: Le due figure sono simili perché si vede.	31,58%
b3: Le due figure sono simili perché hanno la stessa forma, ma grandezza diversa.	15,79%
b4: Le due figure sono simili perché il quadrato più grande è il doppio del quadrato più piccolo.	15,79%

Classe IV D

b6: Le due figure sono simili perché si vede.	35%
b1: Le due figure sono simili.	20%

DOMANDA c

Classe IV A

c2: Le due figure sono simili perché hanno la stessa forma e sono due rettangoli.	23,81%
c4: Le due figure sono simili perché il rettangolo più grande è la metà di quello piccolo.	23,81%
c3: Le due figure sono simili perché hanno grandezza diversa.	19,05%

Classe IV B

c2: Le due figure sono simili perché hanno la stessa forma e sono due rettangoli.	30%
c4: Le due figure sono simili perché il rettangolo più grande è la metà di quello piccolo.	25%

Classe IV C

c4: Le due figure sono simili perché il rettangolo più grande è la metà di quello piccolo.	31,58%
c2: Le due figure sono simili perché hanno la stessa forma e sono due rettangoli.	26,32%
c3: Le due figure sono simili perché hanno grandezza diversa.	21,05%

Classe IV D

c4: Le due figure sono simili perché il rettangolo più grande è la metà di quello piccolo.	35%
c2: Le due figure sono simili perché hanno la stessa forma e sono due rettangoli.	20%

DOMANDA d

Classe IV A

d3: Disegna un altro parallelogramma più piccolo sottraendo un quadretto ai lati.	47,62%

Classe IV B

d3: Disegna un altro parallelogramma più piccolo sottraendo uno ai lati.	45%
d1: Disegna un altro parallelogramma la metà di quello dato.	25%

Classe IV C

d3: Disegna un altro parallelogramma più piccolo sottraendo un quadretto ai lati.	52,63%
d4:Disegna un altro parallelogramma sottraendo due quadretti, quindi i lati del primo parallelogramma sono più grandi del secondo.	21,05%

Classe IV D

d3: Disegna un altro parallelogramma più piccolo sottraendo un quadretto ai lati.	55%
d4:Disegna un altro parallelogramma sottraendo due quadretti, quindi i lati del primo parallelogramma sono più grandi del secondo.	20%

DOMANDA e

Classe IV A

e3: L'operazione utilizzata è la moltiplicazione perché è necessario ingrandire.	23,81%
e1: L'operazione utilizzata è la moltiplicazione. L'operatore adoperato è 1,5 perché moltiplicando per 2 si ottiene un rettangolo, ma il doppio di quello dato, quindi, per tentativi si arriva all'operatore 1.5.	14,29%
e6: L'operazione utilizzata è l'addizione. Gli operatori adoperati sono +2 e +1 perché permettono di ottenere la misura dei lati della figura B.	14,29%
e7: L'operazione utilizzata è l'addizione.	14,29%

Classe IV B

e1: L'operazione utilizzata è la moltiplicazione. L'operatore adoperato è 1,5 perché moltiplicando per 2 si ottiene un rettangolo, ma il doppio di quello dato, quindi, per tentativi si arriva all'operatore 1.5.	20%
e2: L'operazione utilizzata è la moltiplicazione. L'operatore adoperato è * 1,5 perché trasforma i lati del rettangolo A nei lati del rettangolo B.	15%
e3: L'operazione utilizzata è la moltiplicazione perché è necessario ingrandire.	15%
e6: L'operazione utilizzata è l'addizione. Gli operatori adoperati sono +2 e +1 perché permettono di ottenere la misura dei lati della figura B.	15%

Classe IV C

e7: L’operazione utilizzata è l’addizione.	26,32%
e6: L’operazione utilizzata è l’addizione. Gli operatori adoperati sono +2 e +1 perché permettono di ottenere la misura dei lati della figura B.	21,05%
e5: L’operazione utilizzata è l’addizione perché per trasformare una figura più piccola in una più grande bisogna aggiungere.	15,79%

Classe IV D

e6: L’operazione utilizzata è l’addizione. Gli operatori adoperati sono +2 e +1 perché permettono di ottenere la misura dei lati della figura B.	25%
e4: L’operazione utilizzata è la moltiplicazione. L’operatore è 1,5 perché facendo la divisione tra i lati corrispondenti 6:4 e 3:2 si ottiene questo operatore.	15%
e5: L’operazione utilizzata è l’addizione perché per trasformare una figura più piccola in una più grande bisogna aggiungere.	15%
e7: L’operazione utilizzata è l’addizione.	15%

Dalle percentuali relative alle risposte più significative dell’intero campione si evincono i seguenti dati:

DOMANDA a:

- Il 25%, formato dai gruppi di risposte (a3, a4) del campione identifica la similitudine tra le figure nella diversità di grandezza e dell’unità di misura;
- Il 17,50% (a10) del campione riconosce la similitudine tra le figure, ma possiede la concezione errata che per ingrandire una figura bisogna addizionare una stessa quantità;
- Il 12,50% (a9) del campione non ha chiaro il concetto di similitudine tra figure.

DOMANDA b:

- Il 76,25% (b1, b2, b3, b4, b6) del campione riconosce la similitudine tra le due figure geometriche. In particolare:
  - Il 28,75% (b6) del campione riconosce la similitudine tra i due quadrati motivando la risposta in questo modo: "I due quadrati sono simili perché si vede”;
  - Il 22,5% (b3, b4) degli alunni identifica la similitudine tra le figure geometriche nell’avere la stessa forma, ma grandezza diversa;
  - Il 12,50% (b1) degli alunni non motiva la risposta;
  - Il 12,50% (b2) degli alunni identifica la similitudine tra le figure geometriche solamente nell’avere la stessa forma, quindi possiedono implicitamente il concetto di invarianza di rette e angoli;
  - L’11,25% (b7) del campione non riconosce la similitudine tra le due figure geometriche.

DOMANDA c:

- Il 46.25% (c3, c4) del campione identifica la similitudine nella diversità di grandezze tra due figure, non evidenziando il fatto che nella similitudine tra le figure le dimensioni della figura di partenza aumentano (ingrandimenti) o diminuiscono (rimpicciolimenti) nella stessa proporzione;
- Il 25% (c2) del campione identifica la similitudine tra due figure solamente nell’avere la stessa forma;
- Il 13,75% (c5) del campione ritiene che avere la stessa forma implica l’uguaglianza tra le figure geometriche;
- Solamente per il 15% (c1, c6) del campione, le due figure geometriche non sono simili, ma il 3,75% (c1) non motiva la risposta, invece l’11,25% dà una risposta non corretta.

DOMANDA d:

- Il 68,75% (d3, d4) del campione utilizza la sottrazione come strumento per rimpicciolire, di cui il 50% (d3) non motiva la risposta;
- Il 18,75% (d1) del campione disegna correttamente la figura simile a quella data, ma non motiva la risposta;
- Solamente il 12,50% (d2) del campione possiede implicitamente il concetto di figure simili.

DOMANDA e:

- Il 50% (e1, e2, e3, e4, e8) del campione identifica nella moltiplicazione l’operatore che consente di trasformare il rettangolo piccolo nel più grande e la moltiplicazione per 1,5 è quella maggiormente utilizzata. In particolare:

- Il 21,25% (e3, e8) del campione identifica nella moltiplicazione l'operatore per ingrandire, ma non motiva la risposta;
- L'11,25% (e1) del campione arriva all'operatore 1,5 per tentativi, perché moltiplicando per due si ottiene un rettangolo ma il doppio di quello dato;
- L'8,75% del campione
  - (e2) sceglie l'operatore 1,5 senza dare una particolare spiegazione.
  - (e4) motiva la scelta dell'operatore *1,5 poiché esso è il rapporto tra i lati corrispondenti dei due rettangoli.

Il 47,5% del campione (38 alunni) identifica nell'addizione lo strumento per trasformare una figura piccola in una più grande. In particolare:

- Il 18,75% (e6) del campione identifica il concetto di operatore in una serie di trasformazioni applicate a singole parti della figura geometrica considerata, in particolare, aggiungendo ad ogni lato del rettangolo A il valore per il quale differisce dal corrispondente del rettangolo B (+2 e +1);
- Il 16,25% (e7) del campione indica l'addizione come operazione da utilizzare, ma non ne spiega il motivo;
- Il 12,50% (e5) del campione indica l'addizione come operazione per aumentare una quantità, ma non descrive una strategia precisa.

Riflessioni conclusive

Dall'analisi dei dati della prima fase sperimentale, in riferimento alle prime tre domande del questionario, si evince che la maggior parte degli allievi identifica la similitudine tra due figure solamente nell'avere la stessa forma e grandezza diversa trascurando il fatto che la similitudine è una corrispondenza tra due figure che lascia invariati gli angoli e conserva il rapporto fra segmenti corrispondenti.

Dalle risposte date alle domande *d* ed *e* emerge che il 68,75% degli alunni utilizza la sottrazione per rimpicciolire una figura e il 47,5% l'addizione per ingrandirla.

Ciò non deve indurre a pensare che gli alunni non posseggano un pensiero di tipo proporzionale in contesto geometrico; infatti, dalle strategie attivate dagli alunni in riferimento alla domanda *e*, si evince la prevalenza di uno schema di ragionamento proporzionale di tipo intuitivo.

In particolare alcuni alunni hanno utilizzato la strategia e4 motivando la scelta dell'operatore per 1,5, in quanto 1,5 è il rapporto tra i lati corrispondenti dei due rettangoli; altri lo hanno scelto senza dare una motivazione; altri hanno utilizzato la strategia e1, giungendo al valore 1,5 per tentativi ed errori.

Dal colloquio con le insegnanti delle classi quarte è emerso che la maggior parte degli alunni rispondono impulsivamente senza riflettere, altri hanno difficoltà nel verbalizzare per iscritto ciò che pensano ed altri ancora, discutono collettivamente per poi lavorare individualmente sul compito.

Quindi, le abitudini di lavoro degli alunni sicuramente rappresenta un ostacolo alla rilevazione dell'esistenza del pensiero proporzionale.

Inoltre, a mio avviso, il fatto che alcuni alunni non hanno risposto correttamente alle domande e fornito una motivazione valida, dipende dall'insorgenza degli ostacoli che Brousseau[5] classifica in:

- Ostacoli genetici;
- Ostacoli ontogenetici;
- Ostacoli epigenetici:
    - Ostacoli epistemologici;
    - Ostacoli di origine didattica.

Gli ostacoli genetici sono quelli legati al corredo cromosomico di un individuo, quello che fornisce a ciascuno vari comportamenti innati; questi comportamenti possono essere causa di ostacoli, a volte anche insuperabili.

Gli ostacoli ontogenetici sono legati allo sviluppo dell'intelligenza, dei sensi e dei sistemi percettivi. Questi sono legati all'evoluzione individuale; se per esempio l'ostacolo è legato alla maturazione psichica individuale, allora tale ostacolo verrà rimosso dal superamento di quella fase.

Gli ostacoli epigenetici, che racchiudono quelli epistemologici e di origine didattica, derivano dalle possibili influenze culturali.

In particolare, gli ostacoli epistemologici, risiedono nella Storia e nei Fondamenti e rappresentano i mattoni costitutivi della conoscenza; gli ostacoli di origine didattica sono legati alla trasposizione didattica e alla comunicazione delle matematiche.

Secondo Gaston Bachelard (1938), un ostacolo epistemologico è rappresentato da una conoscenza ben organizzata, avente una sua validità, contro la quale bisogna combattere per costruire una nuova conoscenza: <<si conosce contro una conoscenza anteriore, distruggendo le conoscenze mal fatte…>>.

[5] F. Spagnolo, 1998, pp. 129-135.

Nell'insegnamento/apprendimento esso corrisponde a un ostacolo didattico ed è condizione necessaria per lo sviluppo del pensiero dell'alunno.
La messa a punto di situazioni a-didattiche consente il superamento degli ostacoli sia epistemologici che di origine didattica.
A tal fine, per la rilevazione del pensiero proporzionale in contesto geometrico, negli alunni di IV, mi sono avvalsa di una situazione a-didattica.

CAPITOLO 3
LA DIDATTICA DELLA MATEMATICA

3.1 Modelli di apprendimento

Il motore dello sviluppo di una persona è il desiderio di comprendere il mondo, di condividere i propri interrogativi con gli altri, di entrare in una cultura. All'interno dell'istituzione scolastica le discipline scientifiche, al pari di quelle umanistiche, rivestono un ruolo fondamentale ed insostituibile per la crescita culturale degli allievi.

Purtroppo una delle eredità lasciate dalla Riforma Gentile è quella di considerare Cultura con la C maiuscola esclusivamente quella umanistica e di considerare quella scientifica come una cultura di secondo piano, non rilevante nella formazione degli individui.

Le discipline scientifiche sono spesso viste come "aride", in cui dominano rigidi schemi e procedure.

Ciò deriva anche dal fatto che molto spesso c'è divario tra le conoscenze scientifiche che vengono insegnate e le concezioni spontanee degli alunni.

Quindi, è necessario che fin dalla scuola primaria sia riscoperta e diffusa l'importanza e la rilevanza che le discipline scientifiche rivestono sul piano cognitivo, culturale e educativo di ciascuno.

In particolare, lo studio della matematica è fondamentale per lo sviluppo cognitivo, promuove, infatti, le facoltà sia intuitive che logiche, educa ai procedimenti euristici, ma anche ai processi di astrazione e di formalizzazione di concetti, esercita a ragionare induttivamente e deduttivamente, sviluppa le attitudini sia analitiche che sintetiche.

La matematica stimola a ragionare e a riflettere, a sistemare logicamente e a riesaminare criticamente le conoscenze via via acquisite; aiuta a crescere nel prendere decisioni.

La matematica occupa quindi un ruolo fondamentale sul piano cognitivo, culturale e educativo di ciascuno; con il suo spirito ed i suoi metodi è una colonna portante nella cultura di ogni individuo. Proprio per questo è necessario riuscire a trasmettere un'immagine complessiva della disciplina, da non identificarsi come un processo di pura trasmissione dei saperi, ma come un percorso di costruzione individuale e collettiva di conoscenze.

Quindi, un insegnante deve farsi interprete di una trasposizione didattica, cioè adattare la conoscenza matematica e trasformarla in "conoscenza per essere insegnata", tenendo conto del sistema didattico e dell'ambiente sociale e culturale, cioè della noosfera in cui si trova ad agire.

Secondo D'Amore, si possono distinguere due diversi tipi di didattica in campo matematico. La didattica di tipo A, che pone principalmente l'attenzione sulla fase di insegnamento e quella di tipo B, che si concentra invece, principalmente, sulla fase di apprendimento, e precisamente sull'epistemologia dell'apprendimento della matematica (Bruno D'Amore, *Didattica della matematica,* Pitagora Editrice Bologna, 2001, p.7-25).

Nella didattica di tipo A l'insegnante si propone di rendere più interessanti e più comprensibili i contenuti e gli argomenti affrontati; la sua attenzione è spostata quindi sull'argomento, sull'oggetto dell'insegnamento, trascurando l'allievo.

Nella didattica di tipo B, invece, l'attenzione è focalizzata sull'apprendimento dell'allievo, sui processi che lo portano alla costruzione della propria conoscenza.

In un percorso di insegnamento-apprendimento, l'obiettivo che ci si pone è proprio quello di fare in modo che gli allievi apprendano e crescano.

Ritengo, quindi, che sia fondamentale concentrarsi sui processi di apprendimento degli alunni, e facendo costantemente riferimento all'esperienza concreta di questi, cercare di fare emergere nelle varie attività didattiche i concetti, le immagini mentali che gli allievi hanno via via sviluppato, in quanto avranno modo di ancorarli alle esperienze esperite.

Partendo dal presupposto che per “fare matematica” a scuola occorre fare riferimento alla didattica di tipologia B - che accentrando la sua attenzione sul fenomeno dell’apprendimento dal punto di vista dei fondamenti, non accetta un unico modello di teoria dell’apprendimento - ritengo fondamentale effettuare una panoramica dei vari modelli di apprendimento su cui si è focalizzata l’attenzione nel corso degli ultimi anni.

3.1.1 Il modello euristico o per scoperta

Il modello euristico si propone di far venire il discente a diretto contatto con una nuova informazione in modo attivo e totalmente autonomo.

Tale modello di apprendimento ha origini molto lontane, infatti, nel 1889 il professore H.E. Armstrong affermava (Van Praagh G., 1973): << I metodi euristici sono metodi che stimolano il più possibile negli studenti l’attitudine dello scopritore; invece di raccontare le cose agli allievi, essi vengono chiamati a scoprirle per proprio conto>>.

L’apprendimento per scoperta si basa sul principio che gli allievi agiscono sui fenomeni da osservare con lo spirito dei ricercatori, compiendo attività di esplorazione, manipolazione e misurazione in contesti operativi concreti.

L’insegnante, avvalendosi di tale strategia, si propone di far giungere autonomamente l’allievo alle scoperte di conoscenze nell’ambito della matematica e della geometria.

L’apprendimento per “scoperta”, sul piano didattico, presenta alcuni vantaggi:

- Esso è fondato solidamente sull’ordine, con un’organizzazione di base flessibile;

- La sequenza d'apprendimento deve essere opportunamente preparata: in primo luogo occorre stabilire gli scopi e gli obiettivi di un'attività, in secondo luogo, si attuano le attività d'apprendimento basate sulla scoperta guidata e strutturate in modo tale da ottenere gli obiettivi e gli scopi prefissi.

  Infine si valuta se sia raggiunto lo scopo e in base a ciò si determinano gli obiettivi successivi;
- L'attenzione è focalizzata sul processo di apprendimento e non sul prodotto finale. Lo scopo fondamentale di tale approccio, infatti, è che il controllo del processo di apprendimento passi gradualmente dal docente al discente.

Focalizzare l'attenzione sulla scoperta consente all'alunno di venire a conoscenza della varietà di soluzioni dei problemi, delle trasformazioni operabili sulle informazioni e lo aiuta ad apprendere come orizzontarsi nel compito di apprendere.

Tale modello di apprendimento è stato però anche oggetto di varie critiche, in particolare quella riguardante il fatto che gli alunni non sempre, senza il supporto dell'adulto, sono in grado di ottenere risposte corrette.

Per superare tali critiche, il metodo euristico è stato perfezionato fino a giungere al "metodo della scoperta guidata": il ruolo dell'insegnante è di guidare i suoi allievi gradualmente verso una nuova conoscenza.

3.1.2 Il modello indagativo o del "problem solving"

Problem-solving letteralmente significa "risolvere problemi".

Il problem solving è un approccio didattico teso a sviluppare, sul piano psicologico, comportamentale ed operativo, l'abilità di soluzione di problemi.

Il modello del *problem solving* è per molti aspetti analogo al modello dell'apprendimento per scoperta, ma a differenza di quest'ultimo, in cui l'allievo è all'oscuro di ciò che apprenderà, il *problem solving* mette l'allievo dentro il problema in modo consapevole e critico.

Tale metodologia, infatti, è un procedimento articolato per l'individuazione di un problema e la sua risoluzione, traducibile in un modello procedurale adattabile a diverse situazioni.

Il problem solving è una delle più importanti capacità mentali, il cui possesso è richiesto agli studenti di discipline scientifiche.

Secondo Ausubel, nel problem-solving, si distinguono due tipi principali di "stili" euristici[6]:

- L'approccio per prove ed errore, che consiste in una variazione, approssimazione e correzione di risposta casuale o sistematica fino a che emerge una variante di successo;
- L'approccio per insight, che implica un sistema orientato verso la scoperta di una relazione significante mezzi-fini, riguardante:
    - La semplice trasposizione di un principio appreso in precedenza in una nuova situazione analoga.
    - Una ristrutturazione cognitiva accompagnata dall'integrazione dell'esperienza precedente e corrente in modo da adeguarsi alle esigenze di una meta prefissata.

Anche tale modello ha subito delle modifiche, giungendo alla definizione di "indagine strutturale", che consiste nel fornire agli allievi suggerimenti

[6] Strategia generale che porta alla soluzione di problemi, ma non garantisce il successo. Tipi di euristiche:
1. Analisi mezzi-fini, si individuano lo stato iniziale, la meta da raggiungere e una serie di operazioni da applicare per avvicinarsi sempre di più alla meta;
2. Formazione di sottoscopi, l'obiettivo finale viene distinto in una serie di stadi intermedi che sono compresi tra lo stato iniziale e la meta da raggiungere;
3. Uso dell'analogia, si impiega la procedura di soluzione adottata per un problema simile per risolvere il problema attuale;
4. Uso di diagrammi, la rappresentazione grafica del problema aiuta a raggiungere la soluzione.

sui procedimenti da seguire e nel porre domande che dovrebbero guidarli alla soluzione del problema.

Fasi del problem-solving:

- ❖ Definire il problema;
- ❖ Pensare ad una gamma di ipotesi di soluzioni (brainstorming);
- ❖ Valutare razionalmente i pro e i contro;
- ❖ Scegliere l’ipotesi di soluzione più efficace;
- ❖ Applicare questo tentativo di soluzione;
- ❖ Verificare gli esiti, in caso negativo iniziare nuovamente il percorso.

3.1.3 Problem solving metacognitivo

Il problem solving è un approccio didattico teso a sviluppare, sul piano psicologico, comportamentale ed operativo, l'abilità di soluzione di problemi.

Generalmente il problem solving viene associato allo sviluppo delle abilità logico-matematiche di risoluzione di problemi, tuttavia questa non si rivela l'unica area didattica che può giovarsi di dette abilità: problem solving, in ottica interdisciplinare, vuol dire uso corretto dell'abilità di classificazione di situazioni problematiche e capacità, quindi, di risolvere problemi-tipo analoghi, siano essi pertinenti all'area logico-matematica o meno.

Quindi, il problem solving e il metodo della ricerca e della scoperta, dal quale il problem solving trae procedure e presupposti teorici, sono approcci che possono comunemente essere applicati nelle diverse aree didattiche. Inoltre il metodo dei problemi, del quale il problem solving fa parte, sviluppa le potenzialità euristiche dell'allievo, e le sue abilità di valutazione e di giudizio obiettivo.

Il problem solving metacognitivo è un'espansione applicativa di questi metodi, e la creazione di un ambiente di apprendimento modellato sulla didattica metacognitiva.

Attraverso il problem solving, negli alunni si sviluppa, in modo sempre più consapevole, l'autoregolazione cognitiva: i ragazzi saranno in grado di monitorare i processi e di valutare i gradi di utilità, necessità, appropriatezza dei diversi processi risolutivi, e di classificare le rappresentazioni personali di procedure, ed attivare positivi transfer degli apprendimenti.

3.1.4 Il modello interattivo

Questo modello di apprendimento, del quale si è molto discusso negli ultimi anni, consiste nel partire dalle idee iniziali degli allievi riguardo ad un determinato fenomeno, per poi proporre delle attività di esplorazione specifiche ad esso.

Le attività utilizzate nell'ambito di tale metodologia favoriscono la discussione fra l'insegnante e gli alunni, stimolando quest'ultimi alla riflessione critica sui risultati ottenuti, all'elaborazione e confronto delle proprie idee.

Tale metodo si caratterizza attraverso le seguenti fasi:

- Nella prima fase, delle *"idee iniziali"*, l'insegnante chiede agli allievi cosa pensano riguardo ad un particolare argomento e le loro idee costituiranno il punto di partenza per l'elaborazione della fase dell' *"attività di esplorazione"*, nel corso della quale si instaura una discussione informale tra insegnante e allievi con lo scopo di stimolarli a riflettere e a porre domande.

- La fase successiva è quella in cui si selezionano le domande da cui partire per definire le attività di indagine; le idee che ne scaturiranno saranno confrontate con le idee iniziali.
- Nella fase finale, detta di *"riflessione"*, gli allievi confrontano le loro idee con quelle dei compagni e riflettono in modo critico sulle attività svolte e sui risultati ottenuti.

3.1.5. Il modello costruttivista o generativo

Il costruttivismo è il modello di apprendimento che considera la conoscenza come il prodotto di una costruzione attiva da parte del soggetto, cioè il risultato di una esperienza.

Tale metodologia consente di passare da una definizione di scuola come luogo di trasmissione di conoscenze (didattica centrata sul processo d'insegnamento) a quella di ambiente di apprendimento.

L'acquisizione di una nuova conoscenza è strettamente legata alla situazione concreta in cui avviene l'apprendimento; il ruolo dell'insegnante, quindi, è quello di predisporre delle attività che permettano allo studente di attivare nell'apprendimento di nuove conoscenze un'esplorazione attiva consona con i propri interessi e/o motivazioni.

Bruner, nella sua *Teoria dell'istruzione* (1966) sostiene che *"Si deve sviluppare negli allievi la struttura stessa della conoscenza; in particolare, in matematica, non puntare su abilità meccaniche o algoritmiche, né limitarsi a dare semplici informazioni; si deve strutturare la mente esattamente com'è strutturata la matematica stessa, onde poter poi "comporre" i singoli pezzi, all'interno di questa struttura già predisposta*".

Il fine ultimo del costruttivismo non è l'acquisizione di specifici contenuti prestrutturati trasferiti dall'insegnante all'allievo, bensì l'interiorizzazione di un metodo d'apprendimento, che renda l'alunno attivamente e direttamente partecipe del processo della sua “istruzione” e formazione, in forme gradualmente adeguate alla sua struttura psicologica, alle sue attitudini e inclinazioni.

In particolare, il modello costruttivista è un approccio fondamentale per insegnare efficacemente la matematica agli alunni.

Infatti, secondo tale approccio, compito primario del docente è quello di indirizzare il suo lavoro sulla “zona di sviluppo prossimale” dell’alunno, fornendo esplicitamente le nuove informazioni, attraverso descrizioni, spiegazioni, dimostrazioni e pratica guidata con il feedback (*costruttivismo esogeno*), oppure presentando all’alunno degli stimoli meno diretti (situazione a-didattica) che lo incoraggino alla scoperta autonoma e creativa delle nuove informazioni (*costruttivismo endogeno*).

Questo modello, secondo Vergnaud, è quello più seguito attualmente da parte di chi si occupa di teorie dell’apprendimento.

Nell’ambito degli studi relativi al modello costruttivista si inserisce la didattica metacognitiva.

3.2 La didattica metacognitiva

L’approccio metacognitivo è divenuto ormai un punto di riferimento nello studio delle funzioni del pensiero e nelle più recenti teorie dell’intelligenza, proprio perché rende realmente capaci di organizzare, dirigere e controllare i processi mentali, adeguandosi alle esigenze o al compito da svolgere, e rende possibile costruire il sapere partendo sia da strategie ed esperienze elaborate personalmente, che dalle informazioni conosciute.

La metacognizione comprende due componenti fondamentali: la conoscenza che il soggetto ha delle proprie abilità mentali, che è la consapevolezza, più o meno esplicita, delle conoscenze possedute, e le operazioni di controllo dei meccanismi che regolano il funzionamento cognitivo.

Con il termine metacognizione si intende una dimensione mentale che va oltre o sta al di là della cognizione e quindi la coscienza e la conoscenza che un soggetto ha dei propri processi mentali e la capacità di controllarli, organizzandoli, dirigendoli e modificandoli in base alle mete di apprendimento che deve conseguire.

Lo sviluppo di un atteggiamento metacognitivo permette di potenziare le abilità già possedute, di acquisire una maggiore propensione nell'utilizzo delle strategie, ed una maggiore consapevolezza delle finalità del compito, delle abilità e dei processi che vengono messi in atto per la sua esecuzione, della capacità di portarlo a termine; permette di organizzare il lavoro nelle sue fasi, di svolgere una forma di controllo e di valutazione del proprio operato.

La metacognizione quindi può essere intesa come l'insieme delle attività mentali che presiedono al funzionamento cognitivo, lo controllano e lo regolano. È pertanto la chiave dell'imparare a pensare.

La conoscenza metacognitiva può essere distinta in *conoscenza strategica specifica* e in *conoscenza strategica generale.* Nel primo caso si tratta di specifiche strategie che permettono di scegliere quando e dove è opportuno applicarle. Nel secondo caso invece è in gioco l'atteggiamento strategico che consiste nella consapevolezza che per applicare una strategia è necessario uno sforzo che sarà premiato dalla qualità della prestazione raggiunta: nell'essere consapevoli del fatto che è importante individuare la strategia appropriata per raggiungere un buon risultato.

Per conoscenza metacognitiva si intende dunque l'insieme delle idee che un individuo possiede sul funzionamento mentale; essa si riferisce a quelle conoscenze che riguardano la mente umana e i suoi atti o le credenze accumulate attraverso l’esperienza e conservate nella memoria a lungo termine.

Flavell (1977) ha applicato la definizione considerando la metacognizione come l’insieme delle conoscenze o delle attività cognitive che regolano tutti gli aspetti relativi agli atti mentali. Egli ha dato largo spazio alla distinzione tra conoscenze ed esperienze metacognitive, e conoscenza ed utilizzo di strategie, che possono essere di tipo cognitivo e metacognitivo. Le conoscenze esistono, come si è già detto, come serie di informazioni che il soggetto possiede su se stesso, sul proprio apprendimento, sul tipo di compito che si trova a dover affrontare e sulle strategie. La conoscenza di queste strategie si riferisce dunque concretamente agli aiuti e ai mezzi che gli possono servire per comprendere, risolvere o ricordare determinati problemi. Le esperienze metacognitive sono idee, pensieri, sensazioni relativi all’attività cognitiva che intervengono a tutti i livelli del compito, prima, durante e dopo. Le esperienze sono strettamente connesse con le conoscenze metacognitive, nel senso che le conoscenze costituiscono la base su cui si fonda l’esperienza. Attraverso l’esperienza di corretta applicazione, generalizzazione e controllo dell’uso di strategie, gli studenti imparano ad attribuire successi ed insuccessi all’applicazione o meno di un adeguato impegno strategico. L’utilizzo corretto delle strategie adeguate, quindi, e non la sorte o una potenziale abilità o incapacità, verranno riconosciuti come causa del successo o dell’insuccesso nella prestazione. Il modello metacognitivo crea in questo modo una relazione tra prestazione, stili attributivi, stima di sé e motivazione al compito.

Negli anni settanta l’interesse per questa area dei processi mentali si è sempre più ampliato. Le prime ricerche sulla metacognizione si sono sviluppate all’interno di due filoni; il primo che fa riferimento alla psicologia evolutiva e alla teoria di Piaget, si è localizzato sulle conoscenze metacognitive. Il secondo, più affine alla psicologia cognitiva, ha sottolineato i meccanismi di controllo necessari allo svolgimento di qualsiasi compito cognitivo.

Alcune novità sono state successivamente introdotte dal modello di Jacobs e Paris (1987) che articola la metacognizione in due componenti: *l'autovalutazione della conoscenza*, che si riferisce alla capacità di un soggetto di giudicare le proprie conoscenze rispetto ad un compito dato, e l'*autogestione dell'attività cognitiva*, che riguarda, invece, gli aspetti più dinamici dell'attività di comprensione.

L'ultima tendenza di modelli metacognitivi è quella di Borkowsky del 1994 che costituisce un ulteriore passo avanti, con l'introduzione di variabili emotivo-motivazionali. La particolarità di questo modello consiste nella rilevanza che, all'origine dello sviluppo metacognitivo, viene data al confrontarsi con compiti cognitivi utilizzando delle strategie. Questo modello metacognitivo crea una relazione tra prestazione, stili attributivi, stima di sé e motivazione al compito.

Una persona adeguatamente motivata ad apprendere è ben disposta verso l'interiorizzazione dei valori e la motivazione, se vogliamo che sia realmente umana (intenzionale), non può essere separata da un atto della ragione.

La didattica metacognitiva mira a costruire delle conoscenze e delle competenze che permettono agli alunni di raggiungere una maggiore possibilità di riuscita, essa è quindi indispensabile per insegnare ad utilizzare in modo opportuno le strategie di risoluzione dei problemi che favoriscano la riuscita e l'autoregolazione. È una didattica che permette agli insegnanti di stimolare l'alunno a pensare per suo conto e a sviluppare il suo senso critico; sviluppa la motivazione ad apprendere e facilita la costruzione di un concetto positivo di sé.

È una didattica che migliora l'azione educativa dell'insegnante, infatti:

- Rende più efficace l'intervento didattico, scommettendo sulla possibilità di miglioramento degli esiti formativi degli alunni;
- Stimola l'alunno a conoscere ciò che sa e che sa fare e come lo sa e come lo sa fare;
- Sostiene l'alunno nell'acquisizione di efficaci abilità e consuetudini mentali e di studio;
- Rispetta e sviluppa i diversi stili cognitivi degli alunni;
- Considera l'alunno che apprende costruttore autonomo di conoscenze e abilità.

Di conseguenza ci sono diversi tipi di obiettivi metacognitivi, tra di loro collegati:

- Di metaconoscenza, che aiutano l'alunno nella conoscenza dei "contenuti" e del "funzionamento" della propria mente;
- Metacognitivi di controllo e di regolazione, rivolti al conseguimento di competenze specifiche di autocontrollo cognitivo;
- Di sviluppo delle strategie di apprendimento e di studio;
- Di potenziamento e di adeguamento degli stili cognitivi individuali.

La conoscenza metacognitiva viene acquisita anche attraverso noi stessi (in base alle esperienze che facciamo durante lo svolgimento dei nostri processi cognitivi) e attraverso gli altri (genitori, insegnanti,…).

In particolare, il ruolo dell'insegnante deve essere quello di "formatore" (costruire e potenziare le capacità che gli alunni useranno domani), di "facilitatore" di cambiamenti strutturali negli alunni (cioè un qualcosa che interessa direttamente la struttura dei processi mentali), di "mediatore" che aiuta l'alunno nella ricerca e costruzione del proprio sapere, della relativa consapevolezza metacognitiva e capacità di controllo.

La didattica metacognitiva è una modalità d'intervento polivalente (per il suo carattere di metodo generalizzabile nelle più disparate condizioni di apprendimento) e trasversale (perché comune ai vari ambiti d'insegnamento e capace di seguire l'alunno nel corso dell'intero suo cammino scolastico) all'intero processo di apprendimento.

L'efficacia dell'approccio metacognitivo nelle situazioni di studenti con difficoltà in matematica è ormai provata.

Altri studi sono stati condotti sulle strategie di autocontrollo mostrando come alcune procedure di monitoraggio possono far aumentare notevolmente la riuscita.

Molti studenti, rendendosi conto che le ore impiegate non sono efficaci, pensano che la soluzione possibile sia quella di aumentare il numero di ore, senza chiedersi se non si tratti prevalentemente di un problema più che di "quantità di ore di studio" di "qualità dello studio in queste ore", cioè di organizzazione del tempo, di concentrazione, di impiego di differenti forme di studio a seconda delle caratteristiche della materia. Il motivo per cui non pensano alla possibile necessità di un cambiamento nel loro "modo" di studiare è che non sono coscienti del fatto che è possibile migliorare se stessi, né sanno cosa fare perché ciò si verifichi.

In campo pedagogico-didattico vi è un'attenzione particolare non più solo per i risultati o i prodotti dell'insegnamento in termini di prestazione finale degli allievi, ma anche per le disposizioni interne, le competenze raggiunte, la conoscenza acquisita del significato delle conoscenze apprese, la capacità di decidere come, quando e perché adottare le varie strategie di apprendimento.

Proprio per questo motivo le abilità metacognitive devono essere insegnate come parte integrante del programma scolastico e per questo è necessario che gli insegnanti non si accontentino soltanto di scegliere i compiti in funzione dei contenuti, ma anche in funzione delle abilità metacognitive che possono promuovere.

Prendiamo in esame due aspetti della metacognizione legati tra di loro: da una parte, la regolazione della propria cognizione si appoggia sulle conoscenze metacognitive; dall'altra, è attraverso l'attivazione dei processi di controllo che l'individuo sviluppa le sue conoscenze metacognitive. La metacognizione, come si è più volte detto, appare come un concetto con due significati, esso designa allo stesso tempo l'insieme delle conoscenze che un individuo possiede dei propri processi conoscitivi e la sua capacità di regolarne il funzionamento.

I descrittori di base della metacognizione sono i processi metacognitivi che portano alle conoscenze metacognitive. Queste sono il risultato di un atto intellettuale di riflessioni e di analisi della propria cognizione e quindi di un processo cosciente.

L'attività metacognitiva può essere suddivisa in differenti processi mentali: percezione, comprensione, memorizzazione, risoluzione di problemi.

Lo sviluppo della conoscenza metacognitiva è quindi un requisito fondamentale per una buona utilizzazione delle risorse cognitive individuali: spingere gli studenti allo sviluppo metacognitivo, li aiuta a prendere coscienza delle variabili personali, del compito e delle strategie che influiscono sul rendimento. A tale scopo il primo passo da compiere è l'autosservazione/autovalutazione che risulta essenziale per poter regolare e controllare i processi conoscitivi.

Insegnare ad utilizzare in modo opportuno le strategie metacognitive risulta particolarmente importante nei momenti in cui la capacità di riflettere criticamente sta cominciando a formarsi (critical thinking).

Un alunno che ha capacità critica è in grado di affrontare tutte le situazioni, le analizza e le adotta dopo averle studiate e soppesate ed è in grado di conservare un’identità personale di fronte alle circostanze che cambiano. È un uomo che pensa con la propria testa, che non si limita a lasciare che gli altri pensino per lui.

Autoregolazione di un’attività riguarda i meccanismi che l’individuo mette in moto nell’apprendere. Prendere coscienza delle variabili personali che influiscono sull’apprendimento significa imparare a conoscere le proprie capacità, i propri limiti e le difficoltà.

Conoscere le variabili del compito significa rendersi conto delle difficoltà dei diversi compiti, identificare le conoscenze e le capacità necessarie per affrontarli, determinare che tipo di apprendimento è più adatto. L’autoregolazione, efficace processo di apprendimento durante la realizzazione di un compito, richiede ad esempio, attività come quella di focalizzare l’attenzione su ciò che si sta facendo, chiedersi se si sta comprendendo, di adattare il lavoro al tempo disponibile, valutare il grado di raggiungimento degli obiettivi proposti, prendere decisioni, modificare le strategie che man mano si vanno utilizzando in funzione delle difficoltà incontrate. Questo controllo si riferisce alle attività che permettono di giudicare e di regolare l’apprendimento del soggetto e consiste nella capacità di autoregolazione dei processi e delle strategie cognitive implicate nel compito da affrontare. Il soggetto oltre ad avere coscienza, deve essere abile e attento sia nel controllo che nella scelta del piano di azione (previsione e pianificazione) e nella sua corretta applicazione (monitoraggio e valutazione).

Fin da piccoli impariamo ad utilizzare, nei modi più diversi, strategie per apprendere, risolvere conflitti o affrontare i problemi della vita di ogni giorno, attraverso l’esperienza, grazie all’insegnamento oppure osservando la condotta degli altri. La capacità strategica di cui disponiamo è appresa usualmente per tentativi ed errori, imitando il modo di apprendere degli altri (genitori, insegnanti, compagni), oppure per scoperta, apprendendo dalla propria esperienza, ma quasi mai attraverso un insegnamento diretto o esplicito.

Le strategie sono processi (o sequenze di processi) cognitivi che facilitano o permettono di raggiungere lo scopo richiesto da un determinato compito.

Le strategie di apprendimento si possono definire come le capacità o azioni del soggetto che le seleziona e le utilizza coscientemente e deliberatamente per raggiungere alcune mete particolari.

Una strategia metacognitiva sarà più una sequenza di azioni che un avvenimento isolato. Le strategie metacognitive sono finalizzate principalmente alla verifica e al controllo del raggiungimento del fine proposto dal compito. Se la funzione principale di una strategia cognitiva è quella di aiutare a conseguire un obiettivo di una qualsiasi impresa cognitiva intrapresa, la principale funzione di una strategia metacognitiva è invece quella di fornire le informazioni opportune sull'impresa o sui progressi fatti in essa; si può dunque dire che le strategie cognitive sono fondamentalmente richieste per fare progressi cognitivi, mentre quelle metacognitive per controllarli.

Le strategie metacognitive sono orientate verso uno scopo, non sono accidentali: colui che apprende le utilizza per raggiungere uno scopo, un obiettivo definito in termini di processi, di risultati o di performance.

Le strategie fondamentali implicate nell'apprendimento metacognitivo sono:

- Strategie di selezione, comprensione e organizzazione delle conoscenze;
- Strategie di autoregolazione volitivo-motivazionale;
- Strategie di appoggio.

Attraverso queste strategie si insegna agli alunni ad acquisire abiti di studio che li aiutino nella selezione, nella comprensione, nell'organizzazione, nella fissazione e nell'elaborazione dell'informazione.

Le *strategie di selezione* e *classificazione* aiutano gli alunni a selezionare l'informazione appropriata e a costruire connessioni tra i diversi elementi dell'informazione che devono essere appresi. Includono il dominio di sistemi di raggruppamento, ordinamento, classificazione dei dati per rappresentare adeguatamente le struttura dell'informazione.

Tra le *strategie di organizzazione* possiamo distinguere: selezionare le idee principali di un testo, creare reti semantiche tra i concetti dati o mappe cognitive, schematizzare, fare quadri sinottici, identificare la struttura soggiacente i testi.

L'insegnamento di strategie metacognitive attraverso l'uso di mappe concettuali e di diagrammi a V costituisce una via obbligata verso il conseguimento di elevati livelli di apprendimento significativo per la maggior parte degli allievi.

Le *mappe concettuali* e *la rappresentazione a V* consentono all'individuo di "trattenere" gli elementi concettuali necessari per la produzione di significati.

Le *micro-strategie* possono essere di aiuto per la comprensione, la ritenzione e il recupero dell'informazione.

Le *strategie di ripetizione* sono procedimenti per mantenere e ricordare in modo letterale le informazioni provenienti dall'esterno. Aiutano a mantenere l'attenzione e facilitano il processo di codificazione dell'informazione perché quest'ultima possa essere ricordata, ma il loro impiego non permette una comprensione profonda di ciò che si deve apprendere, in quanto richiedono un grado di controllo cognitivo minimo.

Poiché la produzione di significati avviene nella memoria a breve termine che costituisce un "banco di lavoro" concettuale di dimensioni molto modeste, nella progettazione didattica e nell'organizzazione della conoscenza occorre tenere conto di questi importanti vincoli e sviluppare le strategie di memoria: attività che l'alunno mette in atto nell'immagazzinare informazioni e nel recuperarle al momento in cui deve utilizzarle.

La vita della memoria è strettamente legata alla comprensione, per cui se si riesce a comprendere adeguatamente, anche la capacità di ricordare verrà potenziata. Le strategie maggiormente impiegate per ricordare sono: ripetere a voce alta o in silenzio, copiare, sottolineare alcuni aspetti dell'informazione e prendere appunti selezionati. Insegnare ad utilizzare esclusivamente strategie di ripetizione è insufficiente se non si insegna anche all'alunno come pianificare, controllare e dirigere i propri processi mentali e come integrare le micro-strategie in funzione degli obiettivi che ci si propone di raggiungere.

Le *strategie di metacomprensione e di elaborazione* sono le più efficaci per raggiungere una comprensione profonda del materiale a disposizione; aiutano l'alunno a collegare la nuova informazione con quelle che già possiede.

La *metacomprensione* è una strategia in cui, ad esempio la lettura di un problema, è riconosciuta come un'attività del soggetto che esige una riflessione su di essa attraverso l'autointerrogazione che permette di effettuare un controllo di ciò che si fa perché si possa assicurare la riuscita.

Ciò che distingue gli alunni che apprendono in modo efficace rispetto a coloro che apprendono in modo inadeguato non è soltanto il possesso di un certo quoziente di intelligenza, o una serie di metodi di studio corretti, ma soprattutto la capacità di captare le richieste del compito e di controllare la situazione di apprendimento.

Indirizzare gli studenti allo sviluppo metacognitivo richiede innanzitutto che si aiutino a prendere coscienza delle variabili personali, del compito e delle strategie che influiscono sul rendimento.

Il primo passo da compiere è l'autosservazione/autovalutazione che è essenziale per poter regolare e controllare i processi conoscitivi. Prendere coscienza delle variabili personali che influiscono sull'apprendimento suppone che l'alunno impari a conoscere le sue capacità, i suoi limiti, e le sue difficoltà. Il conoscere le proprie caratteristiche nell'apprendimento aiuta a comprendere ciò che bisogna fare in una determinata situazione, come si possono prevenire determinati errori, a quale tipo di aiuti si deve ricorrere e in che misura, etc.

Conoscere le variabili del compito, rendersi conto delle difficoltà dei diversi compiti, identificare le conoscenze e le capacità necessarie e determinare quali attività di apprendimento sono più adatte per poterli portare avanti. È evidente che uno studente che non ha chiaro ciò che il lavoro richiede e non conosce le proprie capacità e i suoi limiti difficilmente potrà portarlo avanti adeguatamente. La conoscenza di queste strategie si riferisce dunque concretamente alle conoscenze che lo studente ha riguardo agli aiuti e ai mezzi che gli possono servire per comprendere, risolvere o ricordare determinati problemi. Un buon rendimento richiede innanzitutto un'adeguata pianificazione del lavoro, di stabilire mete e obiettivi da conseguire, di individuare quali siano le abilità che si devono possedere, di formulare domande e questioni.

Infine la verifica e la valutazione dei risultati, all'inizio, in itinere e alla fine del processo di apprendimento, sono indispensabili per poter apportare gradatamente le correzioni opportune.

Per facilitare il controllo metacognitivo dell'apprendimento, è necessario fare riferimento anche ad alcune strategie che si possono denominare "di appoggio", il cui obiettivo è creare un clima adeguato per l'apprendimento. Sono strategie atte a mantenere la concentrazione, a evitare l'ansia e a promuovere le percezioni di autoefficacia e di controllo personale.

L'ambiente inteso come luogo che facilita lo studio, e la ricerca di aiuto sono importanti fattori da tenere presenti, così come l'organizzazione e il buon uso del tempo, per poter ottenere il "massimo rendimento" dalle ore impiegate nello studio.

In un ambiente ordinato e silenzioso, regolato da norme che privilegiano il rispetto degli altri, si impara ad organizzare meglio il proprio lavoro. Può essere opportuno verificare se i propri alunni studiano abitualmente in un ambiente silenzioso, destinato solo allo studio; se hanno la possibilità di servirsi di un tavolo ampio, di una sedia comoda. È importante curare il proprio materiale di studio.

La formazione metacognitiva fa percepire la potenzialità di un apprendimento autonomo, ma non solitario, insegnando a chiunque la capacità e l'esigenza di imparare dagli altri. L'aiuto agli altri compagni e lo studio con loro è una pratica ancora poco estesa. Le possibili cause della scarsa richiesta di aiuto da parte dello studente possono ricercarsi nel desiderio di nascondere, o perlomeno di non mettere in evidenza, la propria ignoranza.

Vengono attribuite principalmente ad altre due cause la mancanza di richiesta di aiuto da parte dello studente.

Una potrebbe essere il metodo di insegnamento: gli insegnanti si rivolgono a tutto il gruppo degli alunni senza tener conto del loro differente rendimento.

L'altra causa è riconducibile alle peculiari caratteristiche motivazionali e comportamentali che caratterizzano gran parte degli studenti di basso rendimento e che fanno sì che questi si rivolgano all'insegnante con minore frequenza degli altri.

L'atteggiamento che gli insegnanti assumono verso il lavoro scolastico costituisce un fattore decisivo del loro modo si essere presenti nella scuola: pertanto è indispensabile favorire negli insegnanti l'identificazione con il proprio ruolo e incrementare in loro le competenze richieste per promuovere la partecipazione e il rendimento scolastico degli allievi.

L'insegnamento si configura sempre più come mediazione fra la situazione precedente all'azione didattica e le finalità da perseguire. Si può quindi dire che la qualità della motivazione della classe dipende dal grado di coinvolgimento attivo nel processo di apprendimento; dal livello di coesione o di attrito tra gli studenti; dal sostegno e dall'incoraggiamento dati dall'insegnante; dalla chiarezza delle norme che regolano la vita della scuola e delle classi; dal controllo esercitato dall'insegnante e dalla sua disponibilità al cambiamento e all'innovazione.

L'insegnante riveste una funzione di fondamentale importanza nella promozione di una coscienza generale dei processi conoscitivi, metacognitivi e motivazionali negli allievi. Inoltre, l'insegnante attraverso l'osservazione del modo di studiare degli alunni, promuove e facilita un apprendimento attivo e rimedia alla passività facilitando l'apprendimento attraverso la spiegazione e il modellamento dei procedimenti strategici accompagnati dalla pratica guidata.

Distinguiamo: il **modello di trasmissione** e la **scoperta guidata**.

Modello di trasmissione. Secondo questo modello l'insegnante è colui che ha le idee, comunica queste informazioni all'alunno che deve riprodurle nel modo più fedele possibile. Ciò può essere utile quando si devono apprendere abilità meccaniche.

Brown e Campione parlano di scoperta guidata. Nella scoperta guidata l'insegnante agisce come facilitatore nell'avventura dell'apprendimento e tale ruolo non è semplice e scontato in quanto egli deve essere sempre in grado di valutare quando intervenire, diagnosticando a che punto si trovano gli alunni per sapere se e in quale direzione hanno bisogno di guida: l'insegnante è quindi chiamato ad orchestrare il processo di scoperta. Un ambiente di apprendimento basato sulla scoperta guidata mette gran parte della responsabilità nelle mani dell'insegnante che modella, promuove, guida, sostiene i processi di scoperta, orientandoli entro forme di scoperta disciplinate che non sarebbero altrimenti realizzate.

Ogni insegnante deve comprendere l'importanza, per lo sviluppo della fiducia degli allievi, di curare con attenzione le situazioni apprenditive e di compito; di acquisire una maggiore consapevolezza delle proprie modalità di organizzare tali situazioni; di ampliare le conoscenze circa gli aspetti da avere presenti nella cura di esse.

È opportuno ancora una volta ricordare come sia i processi conoscitivi che quelli metacognitivi e le relative strategie di controllo siano strettamente interrelati con processi di natura volitiva, motivazionale ed emozionale. La ragione non opera mai in modo neutro o impersonale, ma interpreta il reale e le sue dinamiche in base a delle scelte intenzionali, che divengono indispensabili per proseguire il processo conoscitivo.

3.2.1 L'insegnante metacognitivo

Educare alla metacognizione, insegnare a studiare e ad imparare non è un compito accessorio dell'insegnante, ma è quello centrale.

D'altra parte quest'educazione è possibile solo grazie alla collaborazione tra adulto e bambino: il primo deve essere consapevole dei propri processi, deve offrire e predisporre situazioni di riflessione, cioè deve svolgere il proprio ruolo educativo; il secondo deve volere imparare.

I processi di trasmissione e di costruzione della conoscenza presuppongono, infatti, il ruolo attivo del soggetto nei processi di comprensione e di attribuzione dei significati (Pontecorvo, 1985).

Non è quindi possibile insegnare a studiare là dove non ci sono motivazione ed interesse per lo studio; non si può insegnare ad imparare là dove non c'è la curiosità di sapere.

Tali aspetti motivazionali possono anch'essi essere stimolati e educati (Petter,1992): è questo un altro compito educativo di cui l'insegnante deve farsi carico.

Essere (o diventare) un insegnante metacognitivo è una caratteristica di ogni professionista che operi nel campo impegnativo, e al contempo gratificante, della formazione della personalità delle nuove generazioni.

Adottare strategie di Didattica Metacognitiva non significa soltanto sperimentare nuove tecniche didattiche, ma mettere in questione, ogni giorno, la propria professionalità, allo scopo di migliorarla e renderla sempre più adeguata alle sempre più difficili domande che gli alunni pongono.

Quali sono le caratteristiche di un insegnante che voglia dichiararsi "metacognitivo"?

Conoscenze

- Conoscere la propria materia, per poterla mediare agli allievi;
- Conoscere le altre materie, per ricercare i collegamenti necessari all'unitarietà del sapere;
- Conoscere le teorie dell'apprendimento per poterle mettere in pratica;

- Conoscere metodi di sperimentazione per attualizzare, nella pratica, le teorie;
- Conoscere elementi di docimologia: saper valutare vuol dire saper progettare;
- Conoscere la didattica dell'errore, per saper valorizzare le differenze e saper risolvere i problemi;
- Conoscere modalità di esplorazione e comprensione del contesto, per agire significativamente su di esso;
- Conoscere se stesso, per potenziare le proprie abilità: relazionali, cognitive, didattiche, … .

Abilità

L'insegnante metacognitivo è un insegnante:

- Riflessivo;
- Osservatore;
- Empatico;
- Autorevole;
- Organizzato;
- Che sa mettersi in relazione;
- Che sa mettersi in discussione;
- Che sa porsi come modello positivo;
- Che sa ispirare l'attività degli allievi.

Competenze

- Saper motivare all'apprendimento;
- Saper valorizzare le abilità, rinforzare l'autostima;
- Saper progettare percorsi significativi di apprendimento;
- Saper mediare contenuti e strategie;

- Saper facilitare l’apprendimento;
- Saper essere un modello di autonomia;
- Sapersi accorgere dei problemi;
- Sapersi sorprendere della scoperta.

Ma soprattutto avere, come gli allievi, la curiosità di scoprire sempre nuovi saperi, diventare padroni della propria cultura e voler comprendere l’altrui, conoscersi e amare la conoscenza.

Essere tutto ciò, non equivale ad una definitiva “elezione” ad insegnante metacognitivo, perché ognuno di questi indicatori implica un divenire, un continuo “tendere verso…”.

3.3 La Teoria delle Situazioni

I modelli citati sopra sono teorie generali dell’apprendimento.

Considerando specificatamente la didattica della matematica è importantissimo delineare il punto di vista sistemico.

Guy Brousseau (1989) definisce la didattica della matematica, <<una scienza che si interessa alla produzione e comunicazione delle conoscenze matematiche, ed in che cosa questa produzione e questa comunicazione hanno di specifico>>, una scienza che ha come oggetti specifici di studio:

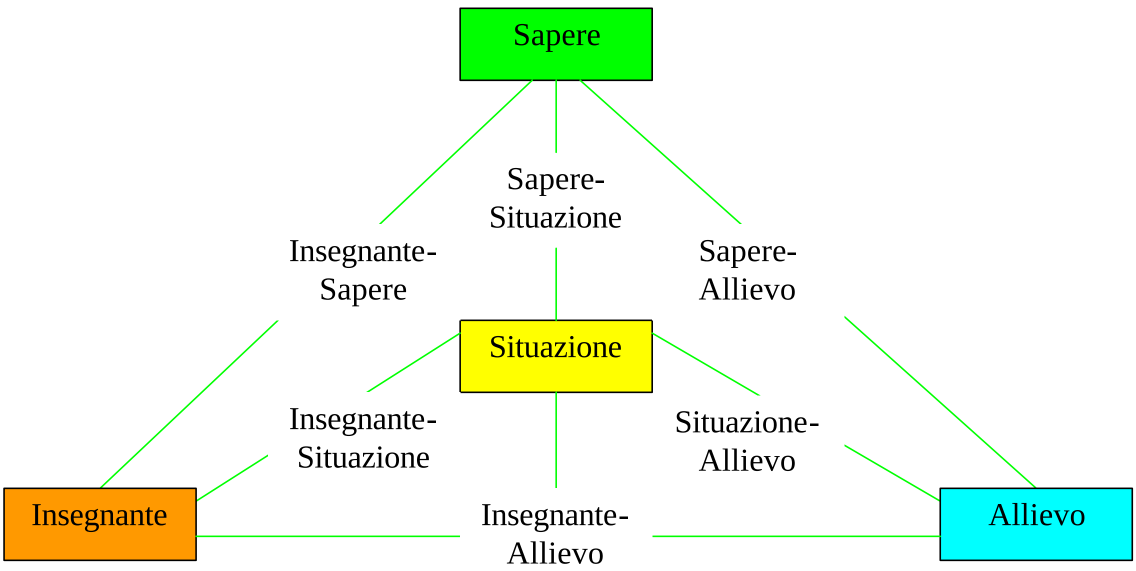
- Le operazioni essenziali della diffusione delle conoscenze, le condizioni di questa diffusione e le trasformazioni che essa produce;
- Le istituzioni e le attività che hanno come scopo quello di facilitare queste operazioni.

Di fondamentale importanza è la Teoria delle Situazioni elaborata dalla scuola di didattica francese, in particolare dal Prof. Guy Brousseau: teoria dell'apprendimento di chiaro stampo costruttivista nella quale l'apprendimento si produce mediante la risoluzione dei problemi.

La teoria delle situazioni si propone di recuperare la valenza formativa dell'educazione matematica, che a tal fine diviene strumento per lo sviluppo psichico ed in particolare della capacità del problem-solving.

Essa evidenzia tutti i possibili soggetti e le relative relazioni all'interno di una situazione didattica: il sapere, l'insegnante, l'allievo, che rappresentano i capisaldi di riferimento attorno ai quali si sviluppano le dinamiche del rapporto di apprendimento-insegnamento[7].

Lo schema seguente evidenzia tali elementi costitutivi attraverso una chiave di lettura sistemica:



Viene messa in discussione la pratica educativa tradizionale di trasmissione del sapere precostituito, attraverso un percorso unidirezionale che va dall'insegnante all'allievo.

La teoria delle situazioni propone di attivare un processo di ricostruzione condivisa dal sapere matematico.

---

[7] F. Spagnolo, 1998, pp. 92-98.

Il “sapere” non è altro che il prodotto culturale di un’istituzione avente per obiettivo di individuare, di analizzare e di organizzare le conoscenze al fine di facilitarne la comunicazione, il loro uso sotto forma di conoscenze o di saperi e la produzione di altri saperi[8].

Le relazioni, rispettivamente:

- Insegnante-Sapere, riguarda l’epistemologia dell’insegnante;
- Insegnante-Allievo, riguarda l’insieme dei comportamenti di natura psicologica sia se si analizza la relazione Insegnante-Allievo che Allievo-Insegnante;
- Allievo-Sapere, rappresenta lo scopo finale che si propone l’insegnante che al termine del suo lavoro di mediatore scompare per far sì che l’alunno abbia un rapporto personale con il sapere.

Con l’introduzione della “Situazione Didattica” abbiamo:

- Sapere-Situazione: l’analisi epistemologica e/o storico-epistemologica del “Sapere” in gioco nella situazione didattica;
- Situazione-Allievo: l’insieme delle strategie risolutive messe in atto dall’Allievo rispetto ad una determinata situazione/problema;
- Insegnante-Situazione: l’analisi a-priori delle strategie risolutive di un determinato problema rispetto alle conoscenze dell’insegnante sia rispetto al Sapere, sia rispetto ai comportamenti degli allievi ipotizzati rispetto alla risoluzione di un determinato problema (analisi a-priori).

Per Spagnolo, si definisce situazione l’insieme delle circostanze nelle quali si trova una persona, le relazioni che l’uniscono all’ambiente (milieu), l’insieme dei dati che caratterizzano un’azione in un determinato momento.

Una situazione è didattica quando un individuo (in generale l’insegnante) ha l’intenzione di insegnare ad un altro individuo (in generale l’allievo) un determinato sapere.

[8] F. Spagnolo, La ricerca in didattica: alcuni riferimenti teorici.

Una situazione è di apprendimento quando permette ad un soggetto di passare da uno stato di conoscenza ad un altro stato di conoscenza.
Una situazione didattica su un certo tema relativo al sapere possiede due componenti:

- ♦ Un contratto didattico;
- ♦ Una situazione a-didattica.[9]

Il contratto didattico viene definito da Spagnolo (1998) come «Risultato della negoziazione dei rapporti stabiliti esplicitamente e/o implicitamente tra un allievo e un gruppo di allievi, un certo *ambiente* ed un sistema educativo, al fine di far appropriare gli allievi di un sapere costituito o in via di costituzione». Si tratta dunque di un insieme di regole stabilite all'interno della classe, derivanti dalla presa in carico della situazione, le quali organizzano le relazioni tra il contenuto oggetto di insegnamento, gli alunni, l'insegnante e le attese, al fine di favorire una buona devoluzione della situazione problematica.
Una situazione è a-didattica quando l'insegnante non esplicita le sue intenzioni agli allievi.
L'allievo sa che il problema propostogli è stato scelto per fargli acquisire una nuova conoscenza e, nello stesso tempo, sa che questa conoscenza è giustificata dalla logica interna della situazione.
Nella situazione a-didattica riveste particolare importanza la "devoluzione", il processo attraverso il quale l'insegnante fa accettare all'allievo la responsabilità di una situazione di apprendimento (a-didattica).
Quindi, la devoluzione è una situazione in base alla quale l'allievo "funziona" in modo scientifico, e non solo in risposta a spinte esterne alla situazione, per esempio di tipo didattico.

[9] Bruno D'Amore, p. 28.

Tale fase si può realizzare solo se il problema ha una dimensione comparabile con le effettive risorse degli allievi sì da presentarsi come esperienza realmente "vivibile". Infatti un compito con le difficoltà che superano lo stato delle conoscenze e delle competenze di cui dispone il gruppo di lavoro in quel particolare momento, risulterebbe poco spendibile e comunque poco significativo perché gli allievi se ne possano fare carico e mettere così in discussione se stessi come protagonisti all'interno delle dinamiche di risoluzione, mentre un compito non ben congegnato perché o troppo facile o ripetitivo o con un numero eccessivo di variabili indurrebbe un atteggiamento di omologazione delle procedure richiamate e dunque non innescherebbe quei processi che sono presupposto per un reale apprendimento.

Le condizioni per la messa a punto di una situazione a-didattica sono:

- L’alunno deve trovarsi in una situazione di incertezza sulle decisioni da prendere,
- Il contesto a-didattico deve favorire delle retroazioni, cioè deve consentire all’allievo di correggere la sua azione, di accettare o di respingere un’ipotesi, di scegliere tra soluzioni diverse;
- La situazione-gioco deve essere ripetibile, nel senso che attraverso l’individuazione delle variabili didattiche implicate nel contesto formativo faciliti l’apprendimento e la verifica.

L’insegnante all’interno della situazione a-didattica diventa tutor nei confronti degli allievi e mediatore nei confronti del sapere.

Quindi, il docente in quanto tutor:

- ♦ Deve individuare una buona situazione da proporre agli allievi, situazione dalla quale possono emergere le concezioni che entreranno in gioco nella situazione didattica;

- Deve controllare le dinamiche relazionali, promuovendo fra gli alunni un positivo confronto ed una efficace interazione verbale;
- Non deve comunicare una conoscenza, ma deve far sì che vi sia una buona devoluzione del problema.

3.3.1 Schema di una situazione a-didattica

La nozione di situazione a-didattica è centrale nella Teoria delle Situazioni.

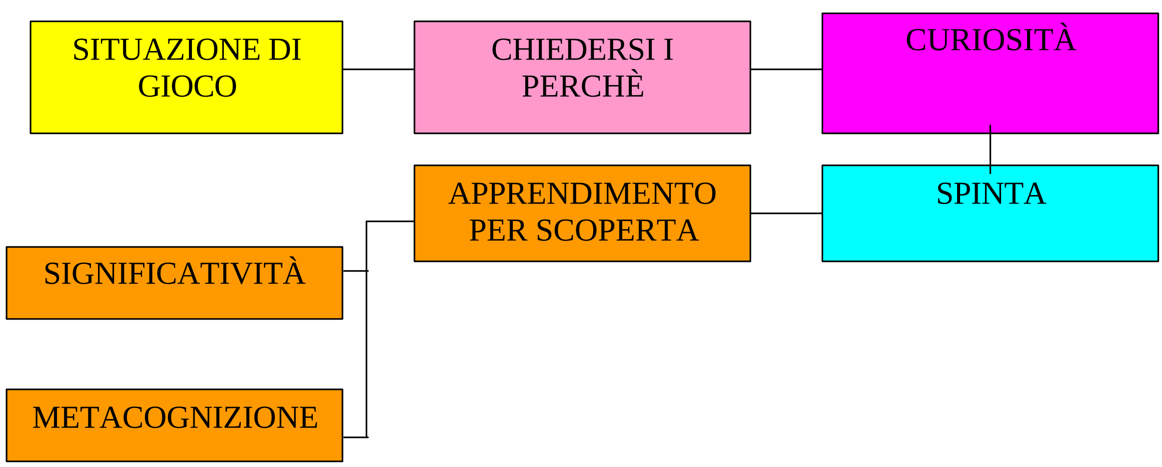
Brousseau propone come modello quello del gioco nel quale l'insegnante spinge a "…….. far devolvere all'allievo una situazione a-didattica che provoca in lui l'interazione la più indipendente e la più feconda possibile". Per tale motivo si astiene o comunica, secondo il caso, delle domande, delle informazioni, delle euristiche,…".

Così come nel gioco c'è una posta da vincere, nella situazione si vince la conoscenza.

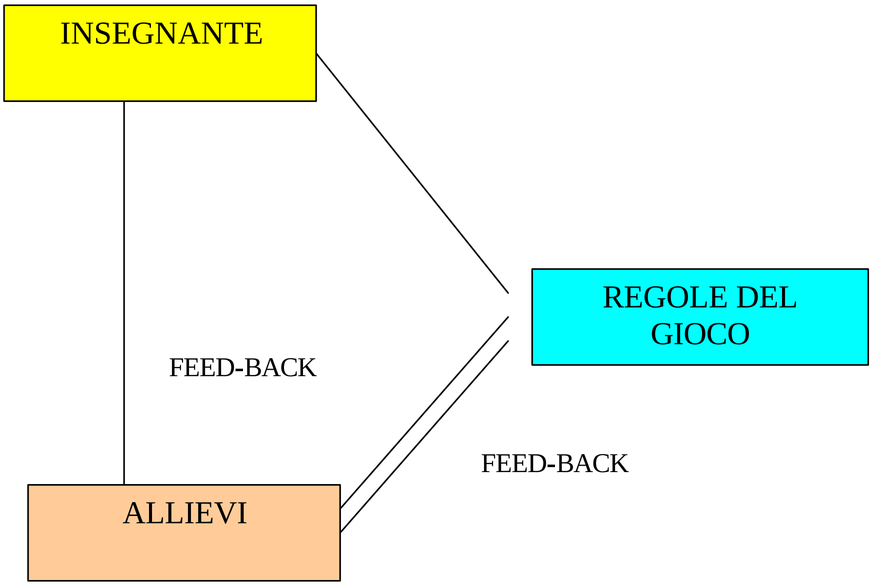
Nella situazione a-didattica l'allievo costruisce la sua conoscenza non per ragioni didattiche, ma perché motivato dalla logica interna della situazione.

L'obiettivo didattico perseguito dall'insegnante non è dichiarato.

La situazione a-didattica è particolarmente idonea perché favorisce:



I fase: la consegna



L'insegnante espone all'allievo le regole del gioco, il problema, l'argomento della situazione a-didattica, servendosi anche di una dimostrazione pratica con un allievo. L'azione, infatti, riduce l'ambiguità del linguaggio verbale. Attraverso l'azione, inoltre, l'insegnante può cogliere il processo di retroazione attivato dall'allievo il quale può ripercorrere la situazione per effettuare un controllo e modificare l'azione.

II fase: situazione di azione (gioco di uno contro uno)

Essa agisce sull'ambiente e favorisce il sorgere di teorie implicite che funzioneranno nella classe come modelli protomatematici.

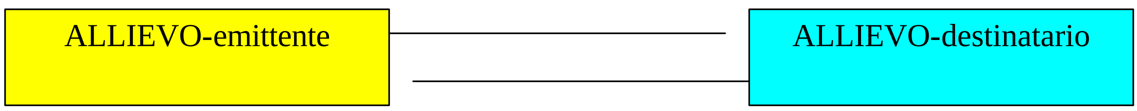
L'interazione fra l'allievo e il suo ambiente (gli altri allievi, la situazione problematica, l'insegnante), grazie alla quale sono ipotizzate le prime strategie, è definita dialettica dell'azione.

Siamo in una fase in cui l'allievo costruisce un modello implicito: un insieme di relazioni o regole in base alle quali l'allievo prende le sue decisioni senza essere capace di averne coscienza e quindi di formularle.

III fase: situazione di formulazione (gruppo contro gruppo)

Questa situazione favorisce l'acquisizione di modelli e linguaggi espliciti.

Verbalizzazione e formulazione delle strategie



Feed-back

In questa fase l'allievo è portato dalla situazione a formulare il proprio modello implicito, a verbalizzare le proprie strategie, ad argomentarle e, difenderle, per far in modo che siano fatte proprie dagli altri allievi.

Per far ciò, ognuno dovrà elaborare progressivamente un linguaggio tale da essere compreso da tutti.

Lo scambio comunicativo tra gli allievi porta a una continua formulazione della strategia: siamo nella fase di dialettica della formulazione.

IV fase: situazione di validazione (il gioco della scoperta, prova e dimostrazione)

I modelli formulati precedentemente possono essere accettati o rifiutati dalla classe. All'interno del gruppo gli allievi sono in una situazione paritaria che permette loro di discutere per accettare o rifiutare le possibili strategie. Le ipotesi accettate da tutti diventano teoremi. Quindi, il dialogo e la negoziazione tra pari riveste un ruolo fondamentale, in accordo ai principi del costruttivismo sociale espressi da P. Ernest e studiati nella pratica educativa da P. Cobb.

In questa fase, agli allievi sono richieste prove e spiegazioni sulle teorie utilizzate ed esplicitazione dei mezzi che sottendono ai processi dimostrativi.

Spesso gli allievi accettano teorie sbagliate, la situazione a-didattica deve condurli a rivedere i loro ragionamenti e a riformulare le strategie in modo corretto. In questo modo l'errore diviene una tappa indispensabile nel processo di costruzione della conoscenza.

Infatti, la discussione sulla strategia scorretta più spontanea, costituisce un momento molto forte di confronto critico che si rivela produttiva per tutto il gruppo classe.

Chi incontra e supera un errore (ostacolo epistemologico secondo Brousseau) ha una conoscenza diversa rispetto a colui che non si è scontrato con esso. L'errore-ostacolo è uno strumento conoscitivo dell'evoluzione del pensiero matematico.

Con la fase di validazione si arriva a formalizzare il concetto matematico che nel metodo tradizionale di insegnamento spesso non rappresenta un punto d'arrivo, ma un punto di partenza.

3.4 Il ruolo formativo della matematica a scuola

Già con i Nuovi Programmi del 1985 la matematica non era più considerata come scienza dei numeri, ma era diventata componente essenziale della formazione della personalità.

Mentre i Programmi del 1955 parlavano di *istruzione aritmetica*, i Nuovi Programmi parlano di *educazione del pensiero matematico*.

Questi, sottolineavano l'importanza di questa disciplina, che concorre in modo prioritario alla:

- Formazione del pensiero;
- Costruzione di abilità;
- Maturazione di capacità generali sul piano cognitivo;
- Attivazione di processi ed operazioni mentali.

La matematica, infatti, contribuisce a formare il pensiero del bambino nei suoi molteplici aspetti (intuizione, immaginazione, progettazione, ipotesi, deduzione, controllo), in quanto è in grado di sfidarlo sul piano intellettivo ponendogli problemi interessanti da risolvere.

Per i Nuovi programmi i temi della matematica sono cinque:

- Problemi;
- Aritmetica;
- Geometria e misura;
- Logica;
- Probabilità, statistica, informatica.

I Programmi del 1985 guardavano alla parola "problema" non secondo la rigida terminologia identificata con i tradizionali problemi di tipo aritmetico o geometrico, ma secondo una veste più ampia che investe la concezione psicologica del problema stesso.

Per Dunker il problema sorge quando un essere umano ha una meta e non sa come raggiungerla.

Per il Colozza (1899) il problema è un'indagine proposta alla nostra mente, una sfida all'intelligenza individuale.

Per Mosconi e D'Urso (1973) << Il problema non è un dato, un fatto naturale, ma è esso stesso – non solo una soluzione- un prodotto psicologico […]. Vi è problema solo, quando la mente crea o determina il problema: vi è problema solo nella dimensione psicologica, non in quella naturale oggettiva>> (AA.VV., *Maestri Domani, Guida alla professionalità docente primaria e orientamento per il concorso magistrale* Casa Editrice Le Monnier 1999, pag. 474).

Quindi il problema esiste solo se viene riconosciuto dalla persona e vissuto.

Nel soggetto nasce una sensazione di irrequietezza e di insoddisfazione che lo porta alla ricerca di dati, per trovare la soluzione che appagherà la sua situazione di non equilibrio.

Il fatto che la matematica si presenti come "arte del problema", in un'accezione molto ampia di questa parola (Cantor, sommo matematico, fondatore della teoria degli insiemi, discusse per il dottorato una sottotesi dal titolo significativo: *In matematica è più importante sapere porre buoni problemi che saperli risolvere*), come sottolineavano i Nuovi Programmi, ha due aspetti particolarmente importanti.

Il primo è che vengono poste in secondo piano attività cui nella scuola, si dava importanza fondamentale, ad esempio quelle di tipo definitorio. Solo con l'avvento dei sistemi assiomatici a partire da Hilbert e Peano (1900), si è compresa l'impossibilità di definire tutto in matematica in modo esplicito. Quindi è necessario accettare alcuni enti come primitivi, cioè non definiti in modo esplicito, ma definiti implicitamente da assiomi.

Il secondo aspetto rilevante dei problemi matematici è l'interesse che le situazioni problematiche presentano come situazioni di apprendimento da parte degli alunni.

Le nozioni matematiche di base vanno fondate e costruite partendo da situazioni problematiche concrete, che scaturiscano da esperienze reali del bambino e che offrano anche l'opportunità di accertare quali apprendimenti matematici egli ha in precedenza realizzato, quali strumenti e quali strategie risolutive utilizza.

L’introduzione al pensiero e all’attività matematica deve rivolgersi in primo luogo a costruire, soprattutto là dove essa si manifesta carente, una larga base esperenziale di fatti, fenomeni, situazioni e processi, sulla quale poi sviluppare le conoscenze intuitive, i procedimenti e gli algoritmi di calcolo e le più elementari formalizzazioni del pensiero matematico.

I processi di comprensione matematica impegnano le capacità di intuizione e di scoperta, necessitano di forte motivazione e curiosità verso il nuovo, l’immagine, il simbolo, per ottenere una reale interazione socio-comunicativa (verbale e non) con gli altri e con le cose. Ma per passare dalle prime intuizioni e scoperte a un vero e proprio apprendimento, è adeguato ed efficace porre il bambino in situazioni problematiche.

Secondo Antiseri, la modalità giusta per la soluzione dei problemi è “catturare i problemi dei bambini”, fare inciampare gli alunni in problemi nuovi e alla loro portata, affrontabili con gli attrezzi concettuali della loro memoria culturale. Una volta identificato il problema occorre lasciare i bambini cimentarsi nelle loro ipotesi risolutive, anche sbagliando, perché l’errore porta alla conoscenza.

È necessario lasciare che ogni individuo strutturi un percorso logico che gli permetta di dialogare con il problema e quindi risolverlo.

Le differenze individuali ci permettono di acquisire le conoscenze in modi diversi scegliendo lo stile di apprendimento più consono alla nostra persona.

Con la Riforma di Letizia Moratti, approvata il 17 Aprile 2003, che si pone come un insieme coordinato di leggi, decreti e direttive ministeriali, migliora l’attuale sistema d’istruzione e formazione professionale.

In particolare, per quanto attiene alla nuova organizzazione della scuola elementare, sempre più riconosciuta come scuola primaria, i cinque anni vengono divisi in un primo anno costituito dalla prima classe e da due bienni, il primo costituito dalle classi seconda e terza e il secondo dalle classi quarta e quinta.

All'interno di tale percorso scolastico, così come affermano le *Raccomandazioni per l'attuazione delle Indicazioni Nazionali per i "Piani di Studio Personalizzati" nella scuola primaria* l'educazione matematica assume un ruolo fondamentale per la formazione di una forma di conoscenza della realtà che, partendo dai dati offerti dalla percezione e dall'esperienza sensibile, porta alla loro organizzazione razionale.

L'insegnamento della matematica fornisce uno strumento intellettuale di grande importanza perché contribuisce alla formazione di una struttura di pensiero razionale e critico, che la rende strumento irrinunciabile di crescita culturale e umana.

Inoltre l'insegnamento della matematica, sempre secondo la Riforma, favorisce ed incrementa il rapporto della persona con ciò che la circonda attraverso lo sviluppo di alcune capacità:

- Osservazione della realtà, con particolare attenzione al riconoscimento di relazioni tra oggetti o grandezze, di regolarità, di differenze, di invarianze;
- Descrizione della realtà secondo l'utilizzo delle forme verbali e del linguaggio e degli strumenti matematici;
- Organizzazione complessiva del proprio modo di ragionare, argomentare, affrontare problemi;
- Uso del linguaggio specifico e delle forme simboliche della matematica;
- Progettazione e immaginazione attraverso attività di risoluzione di problemi in contesti vari.

Il percorso formativo della matematica si svolge attorno a cinque temi:

- Il numero;
- La geometria;

- ♦ La misura;
- ♦ L'introduzione al pensiero razionale;
- ♦ I dati e le previsioni.

Inoltre bisogna fare riferimento a due specifiche procedure mentali caratterizzanti la formazione del pensiero matematico:

- Argomentare e congetturare;
- Porsi e risolvere problemi.

Infine è importante la conoscenza dello sviluppo storico di alcune idee matematiche che può suggerire validi spunti didattici e stimolare l'insegnante a non presentare i contenuti matematici come concetti astratti, immutabili e a-temporali.

Presupposto fondamentale delle *"Raccomandazioni"* è quello di sviluppare un percorso d'insegnamento/apprendimento della matematica che faccia riferimento all'esperienza e al vissuto degli alunni e che, utilizzando modalità didattiche significative possa favorire la loro motivazione all'apprendimento e la loro partecipazione attiva.

Quindi, occorre partire dall'esperienza osservata e riflessa, per poi avviarsi verso un processo di astrazione, cioè di interiorizzazione del proprio vissuto.

CAPITOLO IV
SECONDA FASE SPERIMENTALE

Premessa

La seconda fase sperimentale nasce dalle considerazioni effettuate sui dati rilevati dalla prima fase e dall'importanza, attribuita da molti autori, alla metodologia ludica come mezzo efficace per l'apprendimento di qualsiasi disciplina e soprattutto per i concetti fondamentali riguardanti la matematica e la geometria.

In particolare, l'apprendimento del ragionamento proporzionale in ambito geometrico da parte degli alunni, non può avvenire con una semplice descrizione da parte dell'insegnante; infatti, "Il soggetto conoscente non riceve la conoscenza in modo passivo, ma la costruisce attivamente".

Quindi, tutti i concetti matematici, in particolare, quelli riguardanti la proporzionalità devono essere costruiti attivamente dagli alunni.

Occorre quindi predisporre una situazione a-didattica in modo tale da favorire l'acquisizione del ragionamento proporzionale, e nella quale gli alunni stessi, attraverso discussioni e confronti tra le varie strategie possibili, acquisiscano tale pensiero.

La metodologia ludica, la discussione collettiva, quindi, il colloquio cognitivo con i compagni, coordinati adeguatamente dall'insegnante sono una modalità didattica efficacissima per favorire l'acquisizione di concetti matematici.

Un approccio alla matematica, che dà spazio all'attività di discussione, induce negli allievi un sistema epistemologico coerente con una visione dinamica e non individuale della matematica e, di conseguenza, un atteggiamento positivo nei confronti della matematica scolastica.

Secondo Schonfeld (1985), anche l'attività metacognitiva può essere migliorata attraverso la discussione collettiva, in accordo con l'affermazione di Vygotskij (1974) che ogni funzione nel bambino appare due volte, all'inizio del livello sociale, cioè tra le persone (livello interpsicologico) e successivamente a livello individuale, cioè nel bambino (livello intrapsicologico).
L'attività argomentativa, richiesta in ogni forma di discussione, è una fase cruciale della strutturazione del ragionamento individuale.

Ipotesi: La situazione del gioco facilita l'apprendimento significativo del ragionamento proporzionale in contesto geometrico.

Da cui:

- L'impiego del pensiero proporzionale è favorito dalla concretezza della situazione di gioco;
- L'atteggiamento degli allievi nei confronti della matematica cambia in positivo.

Finalità

- Offrire opportunità educative e didattiche agli allievi;
- Sviluppare le capacità di osservazione, di formulazione di ipotesi e problemi e soluzione degli stessi;
- Affinare le capacità logiche;
- Promuovere negli allievi il ragionamento proporzionale in contesto geometrico.

Destinatari

- Alunni della classe IV B.

Obiettivi specifici di apprendimento

- Cogliere la similitudine in oggetti, figure, disegni presenti nell'ambiente circostante;
- Riconoscere la similitudine nelle figure geometriche;
- Promuovere le potenzialità di ciascun bambino;
- Motivare ciascun alunno a sostenere con fermezza la propria posizione;
- Stimolare l'attenzione e la creatività;
- Favorire la collaborazione;
- Favorire la memorizzazione di proprietà e di risultati;
- Favorire un autonomo processo di astrazione.

Obiettivo formativo

- Favorire il ragionamento proporzionale attraverso la similitudine.

Metodologia

- L'insegnante stimolerà il bambino ad una partecipazione attiva e motivante e utilizzerà il gioco e una situazione ~~a~~didattica al fine di attivare i processi cognitivi e metacognitivi dell'alunno, attraverso:
  - Fase dell'osservazione e della narrazione individuale;
  - Fase del confronto e della discussione collettiva;
  - Fase della rielaborazione concettuale e dell'istituzionalizzazione delle conoscenze.

Mezzi e strumenti

- Fotografie, proiettore luminoso, fogli a quadrettatura unica, cartoncini di forma quadrata, uno schermo rivestito da carta a quadretti, colori, un righello, …

Tempi e spazi

- L’attività si svolge in orario scolastico; per il suo svolgimento è stata individuata l’aula scolastica, il cortile e l’aula informatica;
- Per la situazione a-didattica:
  - Fase 1: da 10 a 15 minuti;
  - Fase 2: da 20 a 30 minuti;
  - Fase 3: da 20 a 30 minuti;
  - Fase 4: discussione collettiva per almeno 30 minuti.

Verifica e valutazione

- Per valutare gli apprendimenti degli alunni e verificare la validità della situazione a-didattica sarà riproposto il questionario iniziale.
- Inoltre, sarà proposto un questionario di riflessione metacognitiva da discutere in classe, alla fine del gioco.

4.1 La situazione a-didattica

Il gioco delle ombre

Prima del gioco sono previsti due momenti:

Il primo è dedicato all’osservazione di alcuni blocchi logici di forma quadrata, rettangolare, circolare, ….. con la lente di ingrandimento, di alcune immagini fotografiche con il cannocchiale e rovesciando lo stesso (si vedrà la stessa immagine rimpicciolita).

Il secondo momento consiste nel:

Prendere il proiettore luminoso e lo schermo rivestito da carta a quadretti, alcuni cartoncini di forma quadrata rivestiti da carta a quadretti, sostenuti da un fermaglio e inseriti in un blocchetto di plastilina, rispettivamente di dimensioni 2x2, 4x4, 5x5; e oscurare l’aula.

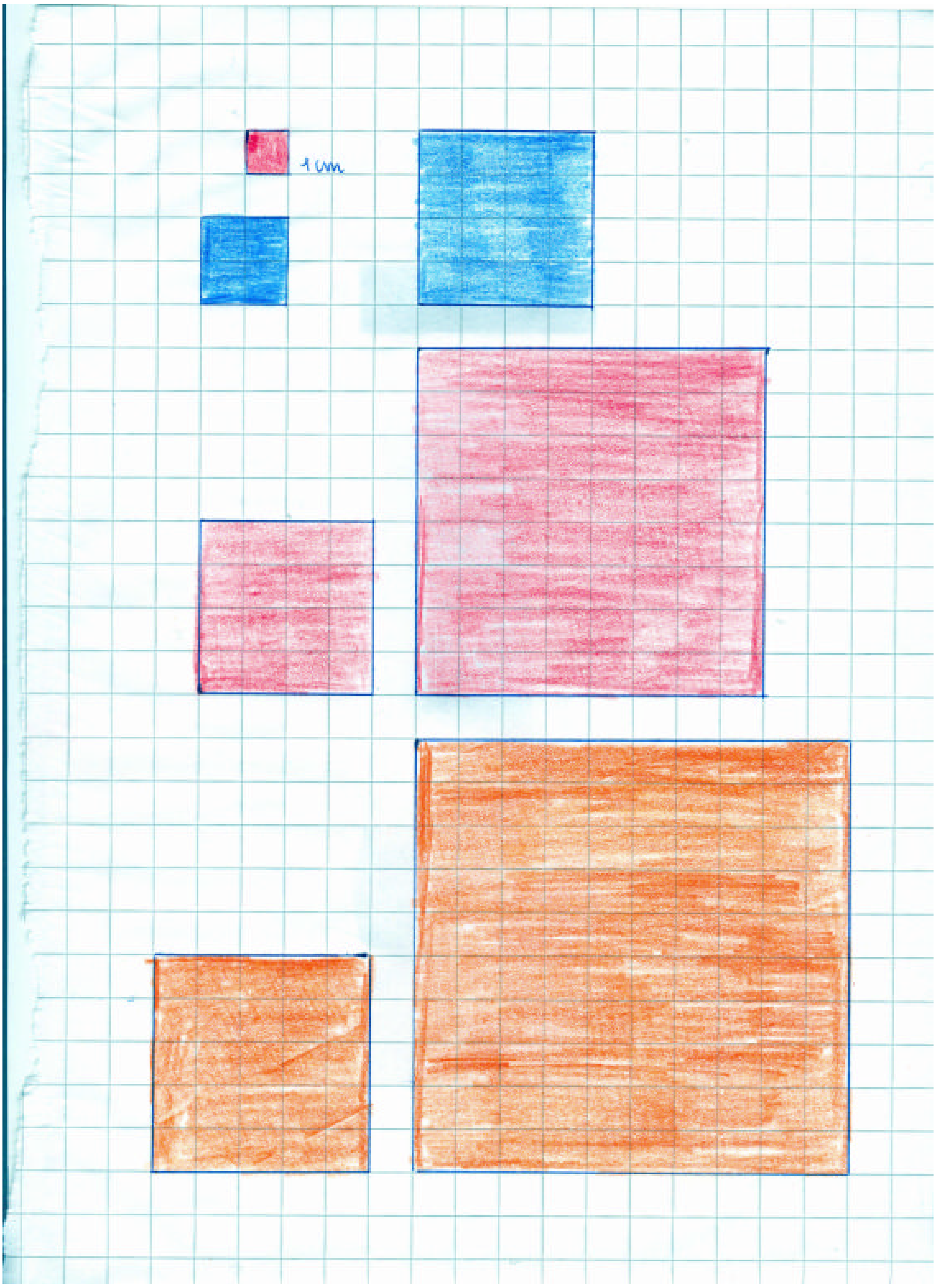
Tutti gli alunni si mettono in fondo all’aula, mentre l’insegnante proietta l’ombra del primo cartoncino di forma quadrata mettendolo in modo tale che esso risulti parallelo allo schermo.

A questo punto l’insegnante espone le regole del gioco: gli alunni devono osservare attentamente le ombre dei cartoncini quadrati proiettati dall’insegnante e rispondere alle seguenti domande:

- Che forma ha l’ombra?
- La figura ottenuta è uguale a quella di partenza?
- L’ampiezza degli angoli è rimasta la stessa?
- I lati hanno mantenuto la stessa lunghezza?

Per non creare scompiglio l'insegnante rappresenta graficamente con il supporto della carta a quadretti, il cartoncino di partenza e le rispettive ombre create.

Gli alunni devono disegnare sulla loro carta a quadretti i quadrati e le loro rispettive ombre, discutere collettivamente sulle relazioni osservate e formulare per iscritto un unico testo che sia valido per tutti.


1 cm

1) Che forma ha l'ombra?

2) La figura ottenuta è uguale a quella di partenza?

3) L'ampiezza degli angoli è la stessa?

4) I lati hanno mantenuto la stessa lunghezza?

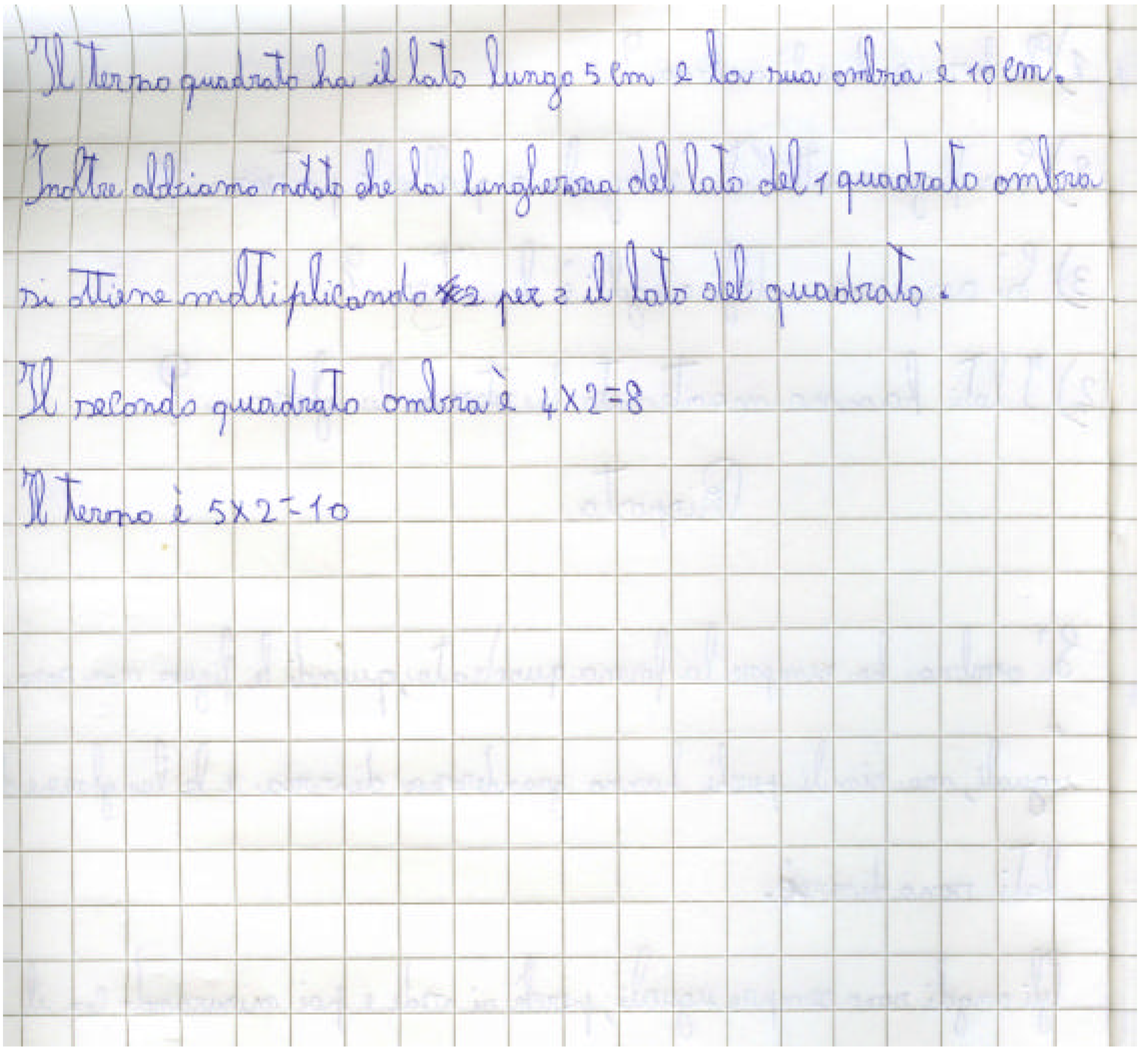
Risposta

L'ombra ha sempre la forma quadrata, quindi le figure non sono uguali, ma simili perchè hanno grandezza diversa e le lunghezze dei lati sono diverse.

Gli angoli sono sempre uguali, perchè si vede e poi misurando con il goniometro otteniamo sempre 45° ogn.

I lati non hanno la stessa lunghezza perchè contando i quadratini del primo quadrato sono due e della sua ombra quattro.

Il secondo quadrato ha il lato lungo 4 cm e la sua ombra è 8 cm.


Il terzo quadrato ha il lato lungo 5 cm e la sua ombra è 10 cm.
Inoltre abbiamo notato che la lunghezza del lato del 1 quadrato ombra
si ottiene moltiplicando ~~x2~~ per 2 il lato del quadrato.
Il secondo quadrato ombra è 4x2=8
Il terzo è 5x2=10

La seguente situazione a-didattica viene proposta sotto forma di gioco, al fine di motivare tutti gli alunni e stimolare la loro curiosità e creatività.

Essa comprende quattro fasi:

I FASE: Consegna.

Invitiamo i bambini ad andare in cortile, a mettersi al sole e di giocare con la loro ombra.

Poi chiediamo loro di risolvere una situazione-problematica: “Come possiamo misurare l’altezza del canestro sfruttando l’ombra che esso proietta a terra?”.

L’insegnante invita i bambini, in un primo momento, a dividersi in gruppi di due, preferibilmente un compagno di banco contro l’altro, e discutere per risolvere il problema.

II FASE: Situazione di azione (gioco di uno contro uno – 20-30 minuti).
Ogni gruppo di due alunni si attiva per risolvere la situazione problematica, e ognuno di loro, spinto da una sana competizione nei confronti del compagno, cerca di trovare una soluzione attraverso momenti di ipotesi, strategie, tentativi ed errori.
In questa fase, l’insegnante raccoglie le soluzioni proposte per iscritto.

III FASE: Situazione di formulazione (gruppo contro gruppo – 20-30 minuti).
La classe viene suddivisa in due gruppi, rispettivamente dieci bambini per gruppo e l’insegnante sceglie due alunni, uno per gruppo che fungeranno da portavoce.
In questa fase ogni alunno propone ed argomenta possibili soluzioni all’interno del proprio gruppo e le comunicherà al portavoce.
Le strategie vincenti accettate dal gruppo vengono scritte sul quaderno.

IV FASE: Situazione di validazione (il gioco della scoperta, prova e dimostrazione – almeno 30 minuti).
La situazione di validazione ha lo scopo di condurre gli alunni a rivedere le proprie opinioni per individuare una serie di strategie che siano il risultato di un processo di interiorizzazione e di riorganizzazione delle stesse al fine di ottenere una teoria riconosciuta socialmente.

In questa fase le strategie che erano state accettate dal gruppo e scritte sul quaderno vengono argomentate al gruppo avversario, evidenziando qualora queste venissero accettate, dei teoremi che vengono scritti alla lavagna.
L'argomentazione, attraverso la discussione e/o la dimostrazione pratica, consente di provare la falsità o la veridicità delle ipotesi.
Per rendere più interessante il gioco si introdurrà la seguente regola: ogni soluzione esposta, argomentata e accettata dalla classe vale 1 punto, a ogni soluzione provata falsa si attribuiscono 3 punti al gruppo che ne ha argomentato la falsità.
Vincerà il gruppo con il massimo numero di punti.

4.2 Verifica e valutazione.

Analisi a-priori delle strategie risolutive del questionario riproposto.

Domanda a:

Disegna la figura rappresentata nella prima quadrettatura nelle altre due. Come sono le tre figure? Motiva la tua risposta.

a1: Le figure ottenute sono simili perché le figure sono più grandi e le dimensioni della figura di prima aumentano nella stessa proporzione.

a2: Le figure ottenute sono simili alla prima perché il lato dei quadretti medi è circa il doppio del lato dei quadretti più piccoli e il lato dei quadretti grandi è circa il triplo.

a3: Le figure ottenute sono simili.

Domanda b:

Le due figure sono simili? Perché?

b1: Le due figure sono simili perché hanno la stessa forma, ma cambiano la grandezza e la lunghezza dei lati.

b2: Le due figure sono simili perché hanno la stessa forma e il lato del secondo quadrato è il doppio del primo.

b3: Le due figure sono simili perché i lati sono proporzionali.

Domanda c:

Le due figure sono simili? Perché?

c1: Le due figure non sono simili perché i lati non sono proporzionali.

c2: Le due figure non sono simili perché se no il secondo rettangolo dovrebbe avere il lato grande di 4 quadretti e il lato piccolo è giusto.

c3: Le due figure non sono simili.

c4: Le due figure sono simili.

Domanda d:

Osserva il parallelogramma: A=6cm x 3cm. Trova un altro parallelogramma simile, ma più piccolo di quello raffigurato. Che relazione noti tra i lati lunghi e i lati corti del parallelogramma?

d1: Disegna un altro parallelogramma più piccolo dividendo per due i lati del parallelogramma dato, quindi $\frac{6}{3}$ è uguale a $\frac{3}{1{,}5}$.

d2: Disegna un altro parallelogramma, la metà di quello dato.

Domanda e:

Osserva le due figure. Esse sono simili e misurano rispettivamente A=4cm $*$ 2cm; B= 6cm $*$ 3cm. Come fai a passare dalla figura A alla figura B? Sai trovare l'operatore che trasforma la figura A nella figura B? Motiva la tua risposta.

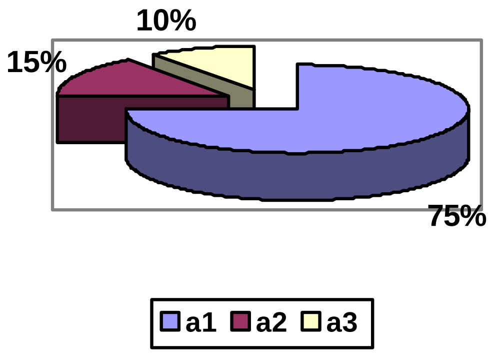
e1: L'operazione utilizzata è la moltiplicazione, perché per potere ingrandire una figura occorre moltiplicare per uno stesso numero le misure di tutte le linee. L'operatore è 1,5 perché facendo 6:4 e 3:2 si ottiene 1,5.

e2: L'operazione utilizzata è la moltiplicazione. L'operatore adoperato è $*$1,5 perché trasforma i lati del rettangolo A nei lati del rettangolo B.

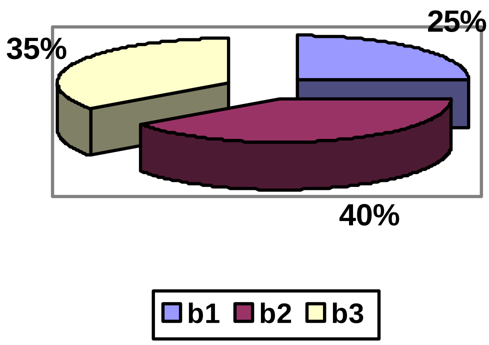
e3: L'operazione utilizzata è la moltiplicazione.

Di seguito sono riportate le percentuali delle risposte della classe IV B:

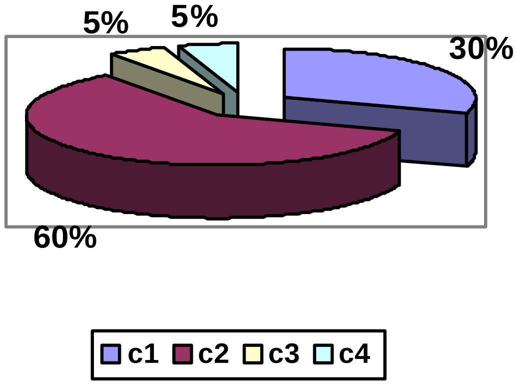
DOMANDA a

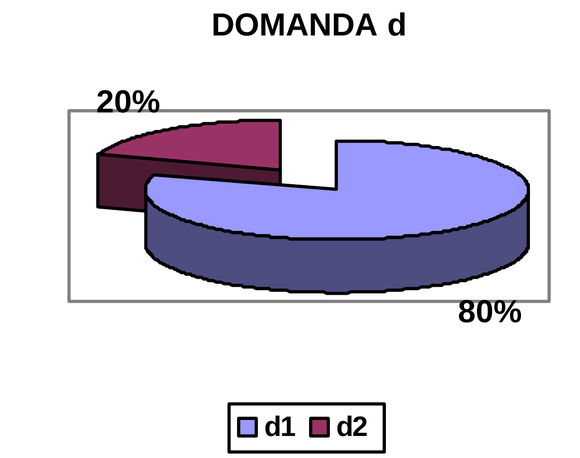


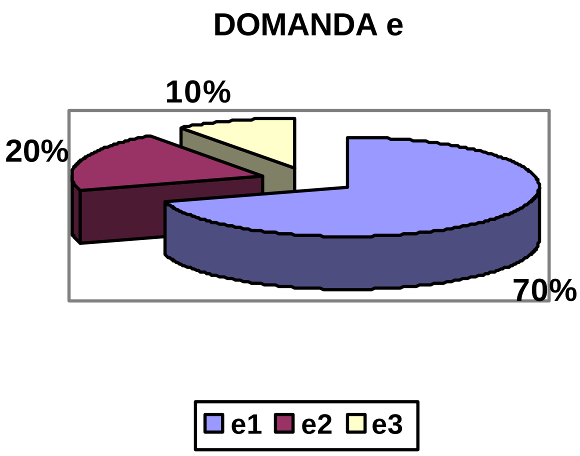
DOMANDA b



DOMANDA c







Dai rispettivi grafici si evince che la situazione a-didattica ha favorito l'apprendimento del ragionamento proporzionale in ambito geometrico. Infatti, gli alunni della IV B hanno risposto correttamente a tutte le domande del questionario; in particolare, in riferimento alla domanda a:

- Solo il 10% degli alunni non ha motivato la risposta.

In riferimento alla domanda c:

- Il 5% degli alunni, cioè un solo alunno, non da una spiegazione, ma risponde correttamente;
- Un solo alunno non risponde correttamente contro il 95% (19 alunni su 20) della tabulazione della prima fase sperimentale.

In riferimento alla domanda d:

- L’80% degli alunni risponde correttamente motivando la risposta, contro il 15% della prima fase sperimentale;
- Il 20% degli alunni risponde correttamente, ma non motiva la risposta, contro il 25% della prima fase sperimentale.

In riferimento alla domanda e:

- Il 70% degli alunni risponde correttamente utilizzando una strategia contro il 10% della prima fase;
- Solo 2 alunni non danno una spiegazione, contro il 20% della prima fase.

4.3 Questionario di riflessione metacognitiva.

- Descrivi cosa hai fatto per risolvere la situazione-problematica.
- Hai incontrato delle difficoltà? Quali?
- Quali domande faresti ai compagni o all’insegnante per risolvere le tue difficoltà?
- Le attività precedenti ti hanno aiutato per la risoluzione del problema?
- Il tempo che abbiamo stabilito era sufficiente?
- Pensi che lavorare in gruppo sia utile? Spiega il perché.
- Cosa ti ha aiutato nel modo di lavorare degli altri compagni del gruppo? Cosa invece ti ha ostacolato?
- Secondo te, questo modo di lavorare può risultare produttivo in altre occasioni?

4.4 Analisi qualitativa della seconda fase sperimentale.

Durante la fase di sperimentazione, i bambini hanno dimostrato attenzione, partecipazione e interesse per le attività proposte loro.

In particolare, dopo aver compreso la consegna, gli alunni divisi in gruppi, rispettivamente gruppo ombra e gruppo luce, si sono subito attivati, spinti dalla curiosità, e dal fatto di voler trovare la strategia vincente per risolvere la situazione problema proposta loro, nel minor tempo possibile.

Riporto di seguito le soluzioni scelte e argomentate dai bambini dei due gruppi, dopo aver analizzato accuratamente i loro protocolli.

La portavoce del gruppo luce, dopo aver discusso ampiamente con i compagni propone: "Dividiamo per due la misura dell'ombra del canestro e, siccome è più lunga, e si vede, si ottiene circa la misura vera del canestro".

Un bambino dice: Molto circa, perché l'ombra non mi sembra il doppio del canestro, è solo un po' più lunga.

Un altro compagno del gruppo: " Non facciamo prima a chiedere una scala al bidello e misuriamo l'altezza del canestro con il metro che abbiamo costruito l'anno scorso"?

La portavoce: "Non possiamo, la consegna non è questa".

Un'altra bambina: "Mi è venuta un'idea, mentre giochiamo con le nostre ombre è come se questa fosse una fotocopia, quindi se prendiamo uno di noi e lo misuriamo realmente, poi mettiamo il compagno vicino al canestro e misuriamo la sua ombra, vediamo il rapporto che c'è tra il nostro compagno e la sua ombra".

Un altro compagno: " Ma che vuoi dire?".

Voglio dire: "Quante volte Giuseppe sta nella sua ombra, allo stesso modo ci dobbiamo chiedere: quante volte il canestro sta nella sua ombra? Praticamente i centimetri dell'ombra divisi i centimetri dell'altezza di Giuseppe, poi i centimetri dell'ombra del canestro divisi per il numero ottenuto prima danno come risultato l'altezza del canestro".

La portavoce e quasi tutti i bambini del gruppo luce: “Ci convince, ma verifichiamolo”.

Un altro bambino: “Ma come facciamo?”.

La bambina che ha avuto l’idea: “Semplicissimo, prendiamo il metro, tu ti metti accanto al canestro e io misuro la tua ombra, poi misuriamo quella del canestro e infine la tua altezza, e abbiamo finito”.

Un bambino del gruppo ombra propone: “Misuriamo l’ombra del canestro e la dividiamo per la misura della mia ombra. Il risultato lo moltiplicherei per la mia altezza.

Un altro bambino: “Booo!!!, io non lo so”.

Il portavoce del gruppo ombra: “Io farei in un altro modo. Misurerei l’ombra di un bastone poi il bastone. Poi sottraggo le due misure e vedrei di quanto in più è lunga l’ombra. Lo stesso pezzo si toglie dall’ombra dell’altro oggetto e si vede quanto è alto.”

Un altro bambino: “Io non sono d’accordo perché non c’è rapporto”.

Laura: “Io si. Fare la differenza si capisce bene e poi si vede di quanto è più lungo”.

Un’altra bambina: “Per me è sbagliato. Sembra che vada bene, ma non ci sono le proporzioni. Laura se prendi l’ombra di un papavero, fai la differenza e vedrai che sarà di pochissimi centimetri. Se togli quei centimetri all’ombra del canestro ottieni una misura quasi uguale a quella dell’ombra, ma non è certo l’altezza del canestro”.

Interviene l’insegnante: “Cosa vuol dire che non ci sono le proporzioni?”.

La bambina: “Se io sono alta un metro e qualcosa mi proporziono alla mia ombra”.

Laura: “Io non ho capito”.

L’insegnante: “Cerca di spiegarti meglio”.

La bambina: “È come l’ombra dei quadrati. Ogni quadrato aveva la sua ombra”.

Laura: “Adesso ho capito, se io sono più alta di te, la mia ombra è più alta di quella tua”.

Un altro bambino: “Come l’ombra del canestro”.

Durante la situazione di validazione, i portavoce dei rispettivi gruppi leggono le soluzioni ipotizzate:

Gruppo luce: “Prendiamo uno di noi e lo misuriamo realmente, poi mettiamo il bambino vicino al canestro e misuriamo la sua ombra e vediamo il rapporto che c’è tra il bambino e la sua ombra. Quante volte Giuseppe sta nella sua ombra, allo stesso modo ci dobbiamo chiedere: quante volte il canestro sta nella sua ombra. Praticamente i centimetri dell’ombra diviso i centimetri dell’altezza di Giuseppe, poi i centimetri dell’ombra del canestro diviso il numero ottenuto prima, danno come risultato l’altezza del canestro”.

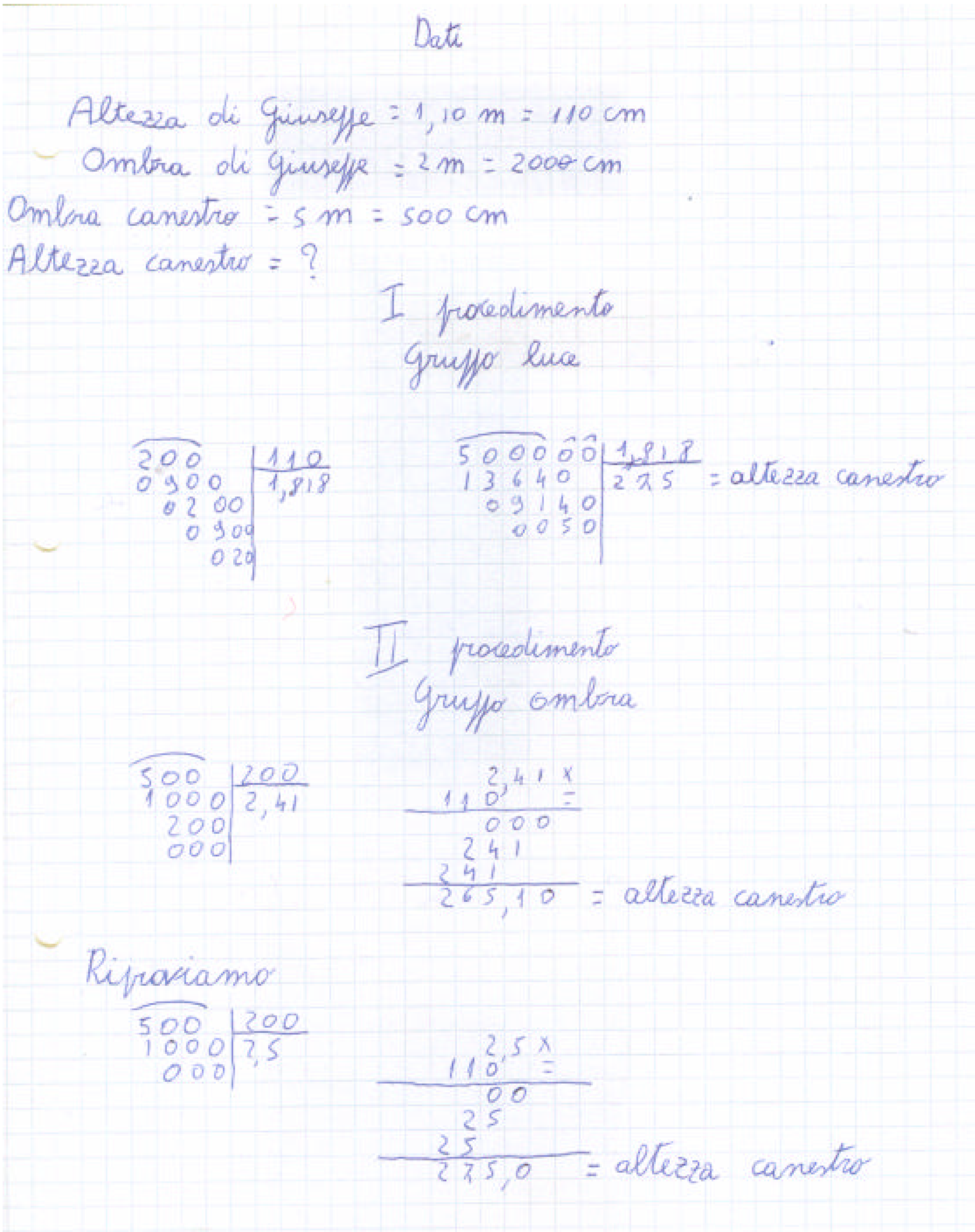
Gruppo ombra: “Il nostro ragionamento è simile a quello del gruppo luce, solo che è meglio misurare l’ombra del canestro e dividerla per l’ombra di un compagno, il risultato lo moltiplichiamo per l’altezza del compagno”.

Subito il portavoce del gruppo luce risponde: “Tu in questo modo prendi dei dati diversi. Io credo che bisogna stare attenti. Non so se è la stessa cosa. L’ombra di un compagno e la sua altezza appartengono ad un unico oggetto, come pure l’ombra del canestro e l’altezza del canestro. Non so se si possono mischiare ombra e ombra e oggetto e oggetto. Io credo di poter dire quasi sicuramente che l’altezza di Giuseppe sta nella sua ombra come l’altezza del canestro sta nella sua ombra, perché il sole si comporta nello stesso modo: è uno solo!”.

Il portavoce del gruppo ombra: “Non è così, ho ragione io”.

Il portavoce del gruppo luce: “Verifichiamolo”.

Dopo la verifica si scopre che il gioco è finito in parità.



Dati

Altezza di Giuseppe = 1,10 m = 110 cm

Ombra di Giuseppe = 2 m = 200 cm

Ombra canestro = 5 m = 500 cm

Altezza canestro = ?

I procedimento

Gruppo luce

200 : 110 = 1,818

500000 : 1,818 = 275 = altezza canestro

II procedimento

Gruppo ombra

500 : 200 = 2,41

2,41 x 110 = 265,10 = altezza canestro

Riproviamo

500 : 200 = 2,5

2,5 x 110 = 275,0 = altezza canestro

4.5 Conclusioni

Dall’osservazione degli elementi emersi specialmente durante la situazione di validazione, si evince che tutto il gruppo classe, cooperando, è riuscito a trovare delle strategie risolutive alla situazione-problema e ad argomentarle.

Inoltre, grazie alle osservazioni del gruppo classe durante tutte le fasi del gioco, posso affermare che l’ipotesi della seconda fase sperimentale è verificata: la situazione di gioco facilita l’apprendimento significativo del ragionamento proporzionale in contesto geometrico, favorisce l’impiego del pensiero proporzionale e cambia in positivo l’atteggiamento degli allievi nei confronti della matematica.

È essenziale insegnare agli alunni in modo diverso e più attivo.

CAPITOLO V
CONCLUSIONI

A conclusione del lavoro sperimentale posso affermare che è stata un'esperienza significativa e gratificante sia per me che per i bambini.

Il quadro teorico di riferimento per l'elaborazione di questa tesi, mi ha permesso di confrontarmi con un nuovo modo di fare scuola.

La dimensione di ricerca, infatti, consente e favorisce l'avvicinamento alla conoscenza in modo critico e la problematizzazione della realtà al fine di una migliore comprensione della stessa.

Inoltre la ricerca incrementa la motivazione, l'interesse, l'attenzione e la curiosità degli allievi.

La ricerca e la sperimentazione educativa migliorano la qualità del sistema scolastico, in quanto permettono di trovare soluzioni pedagogiche e didattiche nuove alle problematiche emergenti.

Non si deve perdere di vista l'idea di una scuola come luogo di sperimentazione nella quale i bambini si mettono in gioco in prima persona e conquistano gli strumenti culturali necessari per la propria crescita.

La ricerca sperimentale, da me condotta, mi ha portato alla rilevazione della presenza del pensiero proporzionale in un contesto geometrico da parte di allievi di 9-10 anni.

La <u>prima fase</u>, coinvolgendo 80 alunni delle classi del secondo biennio della scuola primaria, rispettivamente IV A/D e IV B/C, mi ha consentito di rilevare che la maggior parte degli allievi identifica la similitudine tra due figure solamente nell'avere la stessa forma e grandezza diversa. In particolare, il 28,75% (b6) del campione riconosce la similitudine tra i due quadrati motivando la risposta in questo modo: "I due quadrati sono simili perché si vede". Inoltre il 68,75% (d) del campione utilizza erroneamente la sottrazione per rimpicciolire una figura e il 47,5% (e) l'addizione per ingrandirla; quindi, gli alunni fanno ricorso a differenze costanti piuttosto che a rapporti costanti, operando in campo additivo invece che in quello moltiplicativo.

La seconda fase, coinvolgendo 20 alunni della classe IV B in una situazione di gioco sulle ombre, ha favorito la rilevazione dell'esistenza del pensiero proporzionale in contesto geometrico nei bambini di quarta e, dall'osservazione del gruppo classe durante tutte le fasi del gioco, in particolare durante la fase di validazione, si evince che la situazione-gioco ha favorito l'impiego del pensiero proporzionale da parte di tutti gli allievi, cambiando in positivo il loro atteggiamento nei confronti della matematica.

Inoltre, dall'analisi della risomministrazione del questionario, emerge che gli alunni della IV B hanno risposto correttamente a tutte le domande del questionario.

In particolare, in riferimento alla domanda c:

- Un solo alunno non risponde correttamente contro il 95% della prima fase.

In riferimento alla domanda d:

- L'80% risponde correttamente motivando la risposta contro il 15% della prima fase.

In riferimento alla domanda e:

- Il 70% degli alunni risponde correttamente utilizzando una strategia contro il 10% della prima fase.

Quindi, la situazione di gioco ha favorito l'apprendimento del ragionamento proporzionale in contesto geometrico, la riflessione e la partecipazione di tutto il gruppo classe.

Dall'analisi dei dati della seconda fase sperimentale si evince che l'utilizzo in classe di metodologie riguardanti, la discussione collettiva ed il gioco favoriscono gli apprendimenti.

La discussione è una modalità utilissima a far diventare il soggetto consapevole, attraverso il confronto con gli altri, la negoziazione e la condivisione dei propri presupposti teorici e delle proprie operazioni mentali. Essa, è una risorsa che consente l'acquisizione di competenze più profonde e più facilmente generalizzabili.

La discussione di classe, inoltre, costituisce un'occasione privilegiata per la crescita cognitiva degli alunni e, se ben realizzata, incrementa l'attività di ricerca.

Come afferma G. Morgan, ciascuno di noi stabilisce una conversazione con il mondo allorché avvia una ricerca; in questa, come in ogni forma di comunicazione, abbiamo appuntamento in primo luogo con il nostro universo personale. Al pari di ogni altra attività, la ricerca in matematica, è un modo di conoscere non solo il mondo, ma anche e soprattutto sè stessi[10].

Dalla sperimentazione effettuata ho scoperto che il concetto di rapporto tra un oggetto e la sua ombra, tra un alunno e la sua ombra è stato facilmente compreso dai due gruppi.

Questo perché la cognizione dell'ombra sfrutta le competenze geometriche del cervello[11].

Però mi chiedo se essi siano anche in grado di apprendere il concetto di proporzionalità inversa.

[10] Viganò Renata, *Pedagogia e sperimentazione*, Vita e Pensiero, 1999.
[11] Roberto Casati, *La scoperta dell'ombra*, Mondadori Editore, 2000.

BIBLIOGRAFIA

- AA.VV. (1999), *Maestri domani. Guida alla professionalità docente primaria e orientamento per il concorso magistrale* (volume I, II), Le Monnier, Firenze.
- Ajello Marilina, Grillo Brigida (1999), *Il pensiero proporzionale: analisi di un lavoro sperimentale,* in Quaderni di Ricerca in Didattica, GRIM, n. 8, Palermo, pp. 61-89;
- Bando Irvin Barbara (2002), *Geometria con i blocchi colorati*, Erickson, Trento;
- Boero Paolo (1979), *L'insegnamento scientifico e il ruolo della matematica*, Atti del IV Convegno UMI-Ciim sull'insegnamento della matematica, suppl. n. 8-9, NUMI;
- Boero Paolo (1989), *Il sole, la terra e la misurazione delle ombre*, in Misurare e valutare l'apprendimento nella scuola media, a cura di M. Gattullo e M. L. Giovannini, B. Mondadori;
- Boero P., Garuti R. (1995), *Some aspects of the construction of the geometrical conception of the phenomenon of the sun shadows*, Proc. of PME-XIX, Recife, vol. 3;
- Boyer Carl B. (2003), *Storia della matematica*, Oscar Mondadori; Milano;
- Casati Roberto (2000), *La scoperta dell'ombra*, Mondadori Editore;
- Castelnuovo Emma (1963), *Didattica della matematica*, La Nuova Italia, Firenze;
- Castelnuovo Emma (2001), *<<Pentole, Ombre, Formiche>>, In viaggio con la matematica*, La Nuova Italia, Firenze;

- Cornoldi C., Caponi B., Falco G., Focchiatti R., Lucangeli D., Todeschini M. (2002), *Matematica e metacognizione*, Erickson, Trento;
- D'amore Bruno (2001), *Didattica della matematica*, Pitagora Editrice, Bologna;
- D'amore Bruno, Speranza Francesco (1995), *La matematica e la sua storia*, Franco Angeli, Milano;
- Ferrari M. (1987), *Geometria e misura nei nuovi programmi di matematica per la scuola elementare*, "L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate", vol. 10 pp. 5-30;
- Ianes Dario (1996), *Metacognizione e insegnamento. Spunti teorici e applicativi*, Erickson, Trento;
- Laeng Mauro (1994), *I Nuovi Programmi della scuola elementare*, Giunti & Lisciani, Firenze;
- La Marca Alessandra (1999), *Didattica e sviluppo della competenza metacognitiva. Voler apprendere per imparare a pensare*, Palumbo, Palermo;
- Ministero della Pubblica Istruzione (1997), *L'insegnamento della geometria. Seminario di formazione docenti*, in Quaderni 19/1, Liceo scientifico "A. Vallisneri", Lucca, pp. 77-85;
- Ministero della Pubblica Istruzione (1997), *L'insegnamento della geometria. Seminario di formazione docenti*, in Quaderni 19/2, Liceo scientifico "A. Vallisneri", Lucca, pp. 111-143;
- Pesci Angela (2002), *Lo sviluppo del pensiero proporzionale nella discussione di classe*, Il Battente, Bologna;
- Savoja Gabriella (1999), *Dall'analisi a priori di una situazione problema alla falsificabilità delle ipotesi: sul pensiero proporzionale*, in Quaderni di Ricerca in Didattica, Grim, n. 8, Palermo, pp. 111-132;

- Spagnolo Filippo (1998), *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*, La Nuova Italia, Firenze;
- Speranza F., Medici Caffara D., Quattrocchi P. (1986), *Insegnare la matematica*, Zanichelli, Bologna;
- Viganò Renata (1999), *Pedagogia e sperimentazione. Metodi e strumenti per la ricerca educativa*, Vita e Pensiero, Milano;
- Zan R. (1996), *IL ruolo delle convinzioni nella risoluzione dei problemi*, La Matematica e la sua Didattica n. 4;
- Zanniello Giuseppe (1997), *La prepedagogicità della sperimentazione*, Palumbo, Palermo;
- Zwirner G., Scaglianti L., Brusamolin Mantovani A. (1993), *Le basi della matematica. Volume secondo*, Cedam, Padova.
- Indicazioni Nazionali per i Piani di Studio Personalizzati Legge 28 Marzo 2003, n. 53;
- Programmi Ministeriali D.P.R. n. 104 del 12 Febbraio 1985.

SITOGRAFIA

- WWW.Artesole.it/luce-ombre;
- http://Didmat.dima.unige.it;
- http://Macosa.dima.unige.it/pub/pme/pmeit.htm;
- http://Math.unipa.it/~Grim.