UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PALERMO

FACOLTA' DI SCIENZE DELLA FORMAZIONE

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE DELLA FORMAZIONE PRIMARIA

ANNO ACCADEMICO 2003/2004

TESI DI LAUREA DI:

GIUSEPPA FILIPPI

RELATORI:

Ch.ma Prof.ssa Anna Maria Parroco

Ch.mo Prof. Filippo Spagnolo

INDICE GENERALE

Introduzione

Il mio lavoro di tesi costituisce l'atto finale di un percorso di studi teorici e di acquisizione di abilità pratiche finalizzato alla costruzione di una figura professionale di insegnante per la scuola primaria, dotata di capacità di riflessione critica e di elaborazione autonoma dei saperi che si mostrino via via necessari per lo svolgimento della professione; è anche, espressione delle competenze acquisite fino ad ora.

La scelta dell'argomento è nata da un mio desiderio di comprendere lo sviluppo della conoscenza numerica dei bambini, la loro rappresentazione mentale, tenendo in considerazione una delle più importanti teorie cognitive riguardo il concetto di numero nei bambini piccoli, quella di Jean Piaget, e alcune delle teorie moderne, in particolare quella di Stanislas Dehaene e di Brian Butterworth.

Gli studiosi moderni sostengono che il bambino possiede la nozione del numero sin da piccolissimo, molto prima di saper contare poiché egli possiede il concetto della corrispondenza uno ad uno.

Secondo la concezione di Jean Piaget, i bambini sin da piccolissimi sono in grado di servirsi dei numeri, ma senza comprenderne appieno il significato: in realtà, nella fase di sviluppo detta pre-operatoria i numeri non sono dei veri numeri ma delle figure percettive e lo dimostra il fatto che in questa fase vi è assenza di conservazione.

La mia intenzione è stata quella di conoscere le modalità mentali che sviluppano le intuizioni numeriche presenti fin dalla nascita, in ogni bambino, come giungono a riconoscere le quantità, a rappresentarle e a manipolarle attraverso un sistema simbolico complesso come quello dei numeri.

Tutto questo al fine di riflettere su quella che deve essere l'azione di un'insegnante nella scuola di oggi, su come ancorare quest'azione ai processi di apprendimento, alle esigenze cognitive, alle motivazioni, agli interessi degli allievi, al fine di favorire un corretto e piacevole studio della matematica ed evitare diffidenza e riluttanza nei confronti di questa disciplina, evitando di presentare il numero come concetto astratto, sterile utilizzando strategie didattiche utili a potenziare i processi cognitivi specifici che sono alla base della costruzione della conoscenza numerica.

Nei primi due capitoli della tesi ho trattato gli aspetti teorici delle suddette teorie, nei capitoli successivi ho mostrato la mia indagine sperimentale svolta sia con bambini della Scuola dell'Infanzia, che con bambini di sei anni della Scuola Primaria, nel quarto e nel quinto analizzo i risultati ottenuti e traggo le mie considerazioni personali.

Capitolo primo

La teoria sulla rappresentazione mentale del numero nei bambini.

1.1 La teoria di Jean Piaget sullo sviluppo mentale del bambino

La più importante teoria sullo sviluppo mentale del bambino, è quella elaborata da Jean Piaget (1896-1980). Così come il corpo è in evoluzione fino ad un livello relativamente stabile, caratterizzato dal compimento della crescita e dalla maturità degli organi, analogamente possiamo concepire la vita mentale come evolventesi in direzione di una forma di equilibrio finale rappresentata dalla mente adulta.

Lo sviluppo è quindi un progressivo equilibrarsi, un passaggio continuo da uno stato di minore equilibrio ad uno di equilibrio superiore. Però, mentre per quanto riguarda la crescita organica, non appena si compie l'evoluzione ascendente, ha automaticamente inizio un'evoluzione regressiva che porta alla vecchiaia, le funzioni superiori dell'intelligenza e dell'affettività tendono al contrario verso un equilibrio mobile, stabile, di modo che la fine della crescita non segna affatto l'inizio della decadenza[1].

Piaget ha dimostrato sia che la differenza tra il pensiero del bambino e quello dell'adulto è di tipo qualitativo (il bambino non è un adulto in miniatura ma un individuo dotato di struttura propria) sia che il concetto di intelligenza (capacità cognitiva) è strettamente legato al concetto di

[1] Piaget J. (2000), *Lo sviluppo mentale del bambino*, Torino, Einaudi, pag.11.

"adattamento all'ambiente", infatti l'intelligenza non è che un prolungamento del nostro adattamento biologico all'ambiente[2].

Piaget ha scoperto che la conoscenza del bambino si basa sull'interazione pratica del soggetto con l'oggetto, nel senso che il soggetto influisce sull'oggetto e lo trasforma.

Piaget distingue due processi che caratterizzano ogni adattamento: **l'assimilazione** e **l'accomodamento**, che si avvicendano durante l'età evolutiva.

Si ha assimilazione quando un organismo adopera qualcosa del suo ambiente per un'attività che fa già parte del suo repertorio e che non viene modificata (p.es. un bambino di pochi mesi che afferra un oggetto nuovo per batterlo sul pavimento: siccome le sue azioni di afferrare e battere sono già acquisite, ora per lui è importante sperimentarle col nuovo oggetto). Questo processo predomina nella Ia fase di sviluppo.

Nella IIa fase invece prevale l'accomodamento, allorché il bambino può svolgere un'osservazione attiva sull'ambiente tentando altresì di dominarlo. Le vecchie risposte si modificano al contatto con eventi ambientali mutevoli (p.es. se il bambino precedente si accorge che l'oggetto da battere per terra è difficile da maneggiare, cercherà di coordinare meglio la presa dell'oggetto). Anche l'imitazione è una forma di accomodamento, poiché il bambino modifica se stesso in relazione agli stimoli dell'ambiente. Un buon adattamento all'ambiente si realizza quando assimilazione e accomodamento sono ben integrati tra loro.

Piaget ha suddiviso lo sviluppo cognitivo del bambino in 6 livelli (periodi-fasi), caratterizzando ogni periodo sulla base dell'apprendimento di modalità specifiche, ben definite, (strutture). Ovviamente tali modalità,

[2] Sito web: http://www.homolacus.com/teorici/piaget/piaget.htm

riferendosi a una "età evolutiva", non sempre sono esclusive di una determinata fase.

A) **Fase senso-motoria**. Dalla nascita ai due anni circa.

E' suddivisa in sei stadi.

Riflessi innati: dalla nascita al primo mese. Modalità reattive innate: pianto, suzione, vocalizzo ecc., che il bambino utilizza per comunicare col mondo esterno. L'esercizio frequente di questi riflessi, in risposta a stimoli provenienti dal suo organismo o dall'ambiente, porta all'instaurarsi di "abitudini". Ad es. dopo i primi giorni di vita il neonato trova il capezzolo molto più rapidamente; pur succhiando sempre il dito, lo discrimina dal capezzolo o dal ciuccio, e smette di succhiare il dito se gli viene dato il cibo. Non c'è ancora né imitazione né gioco, però il bambino è stimolato a piangere dal pianto di altri bambini.

Reazioni circolari primarie: dal secondo al quarto mese. Per "reazione circolare" s'intende la ripetizione di un'azione prodotta inizialmente per caso, che il bambino esegue per ritrovarne gli interessanti effetti. Grazie alla ripetizione, l'azione originaria si consolida e diventa uno schema che il bambino è capace di eseguire con facilità anche in altre circostanze. In questo stadio il bambino, che pur ancora non riesce a distinguere tra un "sé" e un "qualcosa al di fuori", cerca di acquisire schemi nuovi: ad es. toccandogli il palmo della mano, reagisce volontariamente chiudendo il pugno, come per afferrare l'oggetto; oppure gira il capo per guardare nella direzione da cui proviene il suono. Particolare importanza ha la coordinazione tra visione e prensione: ad es. prende un giocattolo dopo averlo visto.

Reazioni circolari secondarie: dal quarto all’ottavo mese. Qui il bambino dirige la sua attenzione al mondo esterno oltre che al proprio corpo. Ora cerca di afferrare, tirare, scuotere, muovere gli oggetti che stimolano la sua mano per vedere che rapporto c'è tra queste azioni e i risultati che derivano sull'ambiente. Ad es. scopre il cordone della campanella attaccata alla culla e la tira per sentire il suono. Ancora non sa perché le sue azioni provocano determinati effetti, ma capisce che i suoi sforzi sono efficaci quando cerca di ricreare taluni eventi piacevoli, visivi o sonori.

Coordinazione mezzi-fini: dall' ottavo al dodicesimo mese. Il bambino comincia a coordinare in una sequenza due schemi d'azione (p.es. tirare via un cuscino per prendere un giocattolo sottostante). In tal modo riesce a utilizzare mezzi idonei per il conseguimento di uno scopo specifico. L'intenzionalità si manifesta anche nella comunicazione con gli adulti (ad es. punta il dito verso il biberon per farselo dare). Inizia inoltre a capire che gli oggetti possono essere sottoposti a vari schemi d'azione, come scuotere, spostare, dondolare ecc. Gradualmente si rende conto che gli oggetti sono indipendenti dalla sua attività percettiva o motoria.

Reazioni circolari terziarie (e scoperta di mezzi nuovi mediante sperimentazione attiva): dai dodici ai diciotto mesi. Il bambino, nel suo comportamento abituale, ricorre sempre più spesso a modalità diverse per ottenere effetti desiderati. Inizia il "ragionamento". Mentre prima, per eseguire una sequenza di azioni, doveva partire dall'inizio, ora può interrompersi e riprendere l'azione a qualsiasi stadio intermedio. Inoltre egli è in grado di scoprire la soluzione dei suoi problemi, procedendo per "prove ed errori". Quindi esiste per lui la possibilità di modificare gli schemi che già possiede. Ad es. dopo aver tentato, invano, di aprire una scatola di fiammiferi, esita per un attimo e poi riesce ad aprirla. Infine può richiamare alla memoria gli oggetti assenti, grazie alle relazioni che intercorrono tra un oggetto e la sua possibilità di utilizzo.

Comparsa della funzione simbolica: dai diciotto mesi in poi. Il bambino è in grado di agire sulla realtà col pensiero. Può cioè immaginare gli effetti di azioni che si appresta a compiere, senza doverle mettere in pratica concretamente per osservarne gli effetti. Egli inoltre usa le parole non solo per accompagnare le azioni che sta compiendo (nominare o chiedere un oggetto presente), ma anche per descrivere cose non presenti e raccontare quello che ha visto-fatto qualche tempo prima. Il bambino riconosce oggetti anche se ne vede solo una parte. È in grado di imitare i comportamenti e le azioni di un modello, anche dopo che questo è uscito dal suo campo percettivo. Sa distinguere i vari modelli e sa imitare anche quelli che per lui hanno un'importanza di tipo affettivo. Vedi ad es. i giochi simbolici che implicano "fare finta" di fare qualcosa o "giocare un ruolo".

B) **Fase pre-operatoria .** Dai due ai sette anni circa.

L'atteggiamento fondamentale del bambino è ancora di tipo egocentrico, in quanto non conosce alternative alla realtà che personalmente sperimenta. Questa visione unilaterale delle cose lo induce a credere che tutti la pensino come lui e che capiscano i suoi desideri-pensieri, senza che sia necessario fare sforzi per farsi capire.

In questa fase il linguaggio diventa molto importante, perché il bambino impara ad associare alcune parole ad oggetti o azioni. Con il gioco occupa la maggior parte della giornata, perché per lui tutto è gioco: addirittura ripete in forma di gioco le azioni reali che sperimenta (ad es. per lui è un gioco vestirsi e svestirsi).

Imita, anche se in maniera generica, tutte le persone che gli sono vicine: le idealizza perché sa che si prendono cura di lui. Impara a comportarsi come

gli adulti vogliono, prima ancora di aver compreso il concetto di "obbedienza".
Non è in grado di distinguere tra una classe di oggetti e un unico oggetto. Ad es. se durante una passeggiata vede alcune lumache, è portato a credere che si tratti sempre dello stesso animale, non di diversi animali della stessa specie. Gli aspetti qualitativi e quantitativi di un oggetto può percepirli solo in maniera separata, non contemporaneamente.
Non è neppure capace di relazionare i concetti di tempo, spazio, causa. Il suo ragionamento non è né deduttivo (dal generale al particolare), né induttivo (dal particolare al generale), ma transduttivo o analogico (dal particolare al particolare). Ad es. se un insetto gli fa paura perché l'ha molestato è facile che molti altri insetti che non l'hanno molestato gli facciano ugualmente paura.

Fase del pensiero intuitivo. Dai 4 a 7 anni circa.
Aumenta la partecipazione e la socializzazione nella vita di ogni giorno, in maniera creativa, autonoma, adeguata alle diverse circostanze. Entrando nella scuola materna, il bambino sperimenta l'esistenza di altre autorità diverse dai genitori. Questo lo obbliga a rivedere le conoscenze acquisite nelle fasi precedenti, mediante dei processi cognitivi di generalizzazione: ovvero, le conoscenze possedute, relative ad un'esperienza specifica, vengono trasferite a quelle esperienze che, in qualche modo, possono essere classificate nella stessa categoria.
Tuttavia, la sua capacità di riprodurre mentalmente un avvenimento avviene nell'unica direzione in cui l'avvenimento si è verificato. Non è capace di reversibilità. Ad es. mettiamo davanti al bambino due vasi A e B, uguali e trasparenti, e un numero pari di biglie. Chiediamogli di mettere,

usando una mano per ogni vaso, una biglia per volta nei due vasi, in modo che siano perfettamente distribuite. Poi si prenderà il vaso B e si verseranno tutte le biglie in un vaso C, di forma e dimensioni diverse da A e B. I bambini di quattro o cinque anni affermeranno che, nel caso in cui C sia più sottile di A e B, le biglie sono aumentate; diminuite invece, nel caso in cui C è più largo di A e B. Se allo stesso bambino mettiamo di fronte una fila di otto vasetti di fiori e collochiamo un fiore in ogni vasetto, il bambino dirà che il numero dei fiori e dei vasetti è lo stesso. Se però gli facciamo togliere i fiori per farne un mazzetto, il bambino dirà che i vasetti sono più dei fiori.

Nel primo caso l'errore è dovuto al fatto che egli ha tenuto conto solo del livello raggiunto dalle biglie e non anche della forma del vaso, mentre nel secondo caso il maggior spazio occupato dalla fila dei vasetti ha dominato la sua valutazione. In sostanza ciò che non ha compreso è stata l'invarianza (o conservazione) della quantità al mutare delle condizioni percettive.

Molto importante in questa fase è lo studio psicologico dei disegni infantili.

C) **Fase delle operazioni intellettuali concrete.** Dai sette agli undici-dodici anni.

Il bambino è in grado di coordinare due azioni successive; di prendere coscienza che un'azione resta invariata, anche se ripetuta; di passare da una modalità di pensiero analogico a una di tipo induttivo; di giungere ad uno stesso punto di arrivo partendo da due vie diverse. Non commetterà più gli errori della fase precedente[3].

Un ingegnoso esperimento di Piaget illustra bene queste nuove capacità. Si mettano davanti al bambino venti perle di legno, di cui quindici rosse e

---

[3] Piaget J., (2000), pp.13-78.

cinque bianche. Gli si chieda se, volendo fare una collana la più lunga possibile, prenderebbe tutte le perle rosse o tutte quelle di legno. Il bambino, fino a sette anni, risponderà, quasi sempre, che prenderebbe quelle rosse, anche se gli si fa notare che sia le bianche sia le rosse sono di legno. Solo dopo questa età, essendo giunto al concetto di "tutto" e di "parti", indicherà con sicurezza quelle di legno[4].

Naturalmente il bambino fino a undici anni è in grado di svolgere solo operazioni concrete, non essendo ancora capace di ragionare su dati presentati in forma puramente verbale. Ad es. non è in grado di risolvere il seguente quesito, non molto diverso da quello delle perle. Un ragazzo dice alle sue tre sorelle: In questo mazzo di fiori ce ne sono alcuni gialli. La prima sorella dice: Allora tutti i tuoi fiori sono gialli. La seconda dice: Una parte dei tuoi fiori è gialla. La terza dice: Nessun fiore è giallo. Chi delle tre ha ragione?[5]

D) **Fase delle operazioni intellettuali formali o astratte.** Dagli undici ai quattordici anni circa.

Il pre-adolescente acquisisce la capacità del ragionamento astratto, di tipo ipotetico-deduttivo. Può ora considerare delle ipotesi che possono essere o non essere vere e pensare cosa potrebbe accadere se fossero vere. Il mondo delle idee e delle astrazioni gli permette di realizzare un certo equilibrio fra assimilazione e accomodamento. Egli è in grado di comprendere il valore di certi oggetti e fenomeni, la relatività dei giudizi e dei punti di vista, la parità dei diritti, la distinzione e l'indipendenza relativa tra le idee e la persona, ecc. è altresì capace di eseguire attività di misurazione, operazioni mentali sui simboli (geometria, matematica...) ecc.

[4] Piaget J., Szeminska A., (1968), *La genesi del numero nel bambino*,Firenze, La Nuova Italia, pp.14-15.
[5] Sito Web. www.homolocus.com/teorici/piaget/piaget.htm

Famoso è l'esperimento del pendolo ideato da Piaget. Al soggetto viene presentato un pendolo costituito da una cordicella con un piccolo solido appeso. Il suo compito è quello di scoprire quali fattori (lunghezza della corda, peso del solido, ampiezza di oscillazione, slancio impresso al peso), che ha la possibilità di variare a suo piacere, determina la frequenza delle oscillazioni. Lavorando su tutte le combinazioni possibili in maniera logica e ordinata, il soggetto arriverà ben presto a capire che la frequenza del pendolo dipende dalla lunghezza della sua cordicella.
Ovviamente il pensiero logico-formale non è ancora quello teorico-scientifico, che non si forma certo nel periodo adolescenziale.

1.2 Il passaggio dalle quantità continue alle quantità discontinue.

Secondo Jean Piaget, i numeri anteriori al periodo in cui il bambino ha compreso l’iterazione dell’unità, cioè la possibilità di generare ogni volta un numero nuovo per mezzo dell’addizione di unità, non sono ancora dei veri numeri, ma delle figure percettive. Il bambino sarà in grado di distinguere un insieme di due oggetti da un oggetto unico, un insieme di tre da un insieme di due, ma li distinguerà percettivamente, e ciò può dar luogo ad operazioni pratiche ma non operatorie, e lo dimostra il fatto che in questa fase, preoperatoria, non vi è conservazione degli insiemi. Ciò è l’obiezione che si può fare alla tesi di un’intuizione pura, innata del numero, di un’intuizione anteriore alla logica[6].

[6] Piaget J., (1968), p.6.

Il primo stadio: assenza di conservazione.

Se si presentano al bambino due recipienti della stessa forma e della stessa dimensione, contenenti uno acqua colorata in azzurro, l'altro acqua colorata in rosa, si domanda al bambino di travasare il contenuto di uno di questi recipienti in un recipiente di altra forma, per esempio più largo e più basso e gli si domanda se la quantità d'acqua è rimasta la stessa egli crederà che vi sia più acqua in un vaso più grande che in uno piccolo.

Analogamente se si versa l'acqua del primo vaso in due vasi più piccoli o in tre più piccoli, il bambino non avrà l'impressione che l'insieme delle due quantità equivale alla quantità iniziale.

Egli dirà che è di più perché vi sono due vasi invece di uno, ma se si continua ad aumentare il numero dei recipienti, finirà col dire che è di meno perché i recipienti sono più piccoli, questo dimostra che non vi è conservazione della quantità.

La stessa esperienza si può fare su **quantità discontinue**[7], su insiemi propriamente detti di oggetti, per esempio con delle palline.

Se si domanda ad un bambino di mettere in due vasi uguali lo stesso numero di palline, affinché sia sicuro che il numero delle palline è identico. Basta travasare la quantità di perle in recipienti di forme e dimensioni diversi perché il bambino ritenga che la quantità di palline aumenta o diminuisca, e ciò sia in ragione del livello raggiunto dalle palline, della larghezza del recipiente, o del numero dei recipienti.

Anche questa volta, le quantità sono valutate in funzione dei rapporti percettivi non coordinati tra loro (quantità brute), inoltre, in questo caso si ritiene che secondo la forma che prende un quantitativo nel passare da un

[7] Piaget usa il termine "quantità discontinue", come sinonimo di "quantità discrete".

recipiente ad un altro, possa aumentare o diminuire nei suoi elementi stessi benché questi siano distinti tra loro.

Per far riconoscere meglio l'uguaglianza, non globale, ma elemento per elemento, delle due collezioni da confrontare, si fa mettere una pallina in un dato recipiente ogni volta che se ne mette un'altra nel recipiente corrispondente, però questa corrispondenza biunivoca e reciproca, che equivale ad una enumerazione pratica, non basta neppure essa ad assicurare la conservazione.

Il secondo stadio : inizio di complessi permanenti.

Nello sviluppo della nozione di conservazione si può distinguere un secondo stadio caratterizzato dalle soluzioni intermedie, situate a metà strada tra la quantità bruta senza invariabilità e la quantificazione propriamente detta.

Da una parte il bambino è portato a credere nella conservazione, sia perché i contenitori sono identici, sia per il fatto che queste due collezioni si sono costituite per mezzo di una corrispondenza biunivoca e reciproca.

Si tratta però di una conservazione empirica, non ancora logica, che viene a mancare nel momento in cui la differenza percettiva tra i due vasi aumenta.

Contrariamente a quanto si verifica nel primo stadio, nel corso del quale i fattori percettivi annullavano senz'altro la credenza nell'equivalenza delle collezioni corrispondenti, si stabilisce ora una lotta senza risultato, in quanto nessuna delle due tendenze prevale decisamente sull'altra, infatti quando il fanciullo osserva le collezioni di palline crede nella non equivalenza e quando ricorda la corrispondenza che le ha costituite, crede di nuovo a questa equivalenza.

Il terzo stadio: conservazione e coordinazione quantificate.

È in questo stadio, che inizia tra i sei e i sette anni e mezzo, che il bambino acquisisce la vera conservazione. Adesso il bambino è sicuro, non ha bisogno di riflettere per assicurarsi della conservazioni delle quantità totali, per lui è evidente che la quantità è rimasta uguale.

Entrambe le coordinazioni di relazioni effettuate nel corso dello stadio precedente rimangono essenziali, ma sono concentrate in un unico atto in vece che costituirsi via via e una delle relazioni compensa l'altra.

Nei due casi vi è costruzione operatoria fondata sulla reversibilità, la compensazione delle reazioni. È a questo momento che il bambino considera come evidente, e non più empiricamente constatabile, ma logicamente evidente, che la quantità non ha potuto modificarsi durante il travaso.[8]

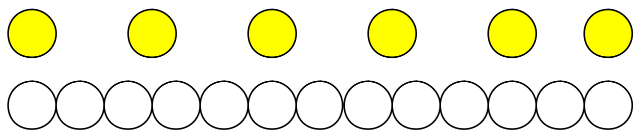
1.3 La corrispondenza cardinale e ordinale termine per termine

Nelle pagine precedenti si è cercato di stabilire la causa per cui la corrispondenza termine per termine, anche quando ha luogo tra oggetti complementari, non porta necessariamente con sé l'equivalenza necessaria e durevole dei gruppi corrispondenti, adesso si tratta di porre la corrispondenza nel complesso dei procedimenti di valutazione cardinale, ossia di studiarla per mezzo di oggetti omogenei, con i quali si chiede al bambino di costituire due complessi di ugual valore, due semplici file lineari.

[8] Piaget J.-Boscher B.-Chatelet A., *Avviamento al calcolo*, Firenze La Nuova Italia, pp.37-56.

I sostenitori dell'idea primitiva del numero sostengono che il bambino possiede la nozione del numero molto prima di saper contare e di conoscere i nomi, poiché egli ha il concetto della corrispondenza uno ad uno.
Consideriamo la corrispondenza tra due file semplici, si presentano al bambino una fila di gettoni rossi e gli si chiederà di trovarne altrettanto di un altro colore. Si osservano anche i questo caso tre stadi.

Il primo stadio: confronto globale e valutazioni fondate sullo spazio occupato o sulla densità degli elementi.
In questo stadio, i bambini di quattro anni e mezzo, a volte fino a cinque, giudicheranno la quantità dallo spazio occupato, essi disporranno una serie di gettoni vicini gli uni agli altri, senza corrispondenza termine per termine, senza numero, si basa nelle sue valutazioni sull'una o sull'altra delle due qualità globali di questa fila, cioè sulla lunghezza occupata o sulla densità degli elementi, in modo che si formi la stessa lunghezza, ma senza coordinare questi due rapporti l'uno con l'altro.



Le quantità elementari non sono altro che i rapporti che si esprimono in

<< più >>, in << uguale >> o in << meno >>[9], percepiti immediatamente tra le qualità date, ma non ancora coordinati fra loro, in questa maniera essi traducono direttamente la lunghezza delle file in termine di valore quantitativo. In questo stadio è impossibile confrontare due file qualsiasi senza che le qualità dell'una siano paragonate a quelle dell'altra, e per questo che una delle due file appaia più lunga, più corta, della stessa lunghezza dell'altra, più riunita o più distanziata.

Questi due rapporti di lunghezza totale o di densità costituiscono gli inizi di ciò che costituirà più tardi la valutazione cardinale.

Bisogna dire che, questi rapporti quantitativi elementari rappresentano dei semplici schemi pratici e prelogici poiché anteriori ad ogni operazione propriamente detta, poiché queste quantità nascenti non sono ancora dotate di conservazione.

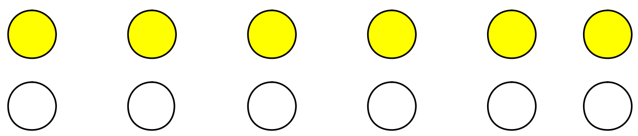
Se si trattasse di coscienza razionale, una fila di n elementi distanziati tra loro conserva questo stesso valore cardinale n se la lunghezza della fila diminuisce, e questo perché gli elementi della fila sono stati accostati. È la relazione tra la lunghezza della fila e gli intervalli dei suoi elementi che determina la conservazione del complesso, mentre i due rapporti di lunghezza totale e di densità sono variabili. È proprio questa coordinazione logica dei due rapporti in gioco che il bambino di questo stadio non riesce ad effettuare, ed è per questo che non c'è ancora conservazione dei gruppi né corrispondenza termine per termine.

Ciò che segna questo primo stadio, o il punto di partenza di questa evoluzione, è una irreversibilità quasi completa del pensiero.

[9] Piaget J.- Boscher B.-Chatelet A., p.111.

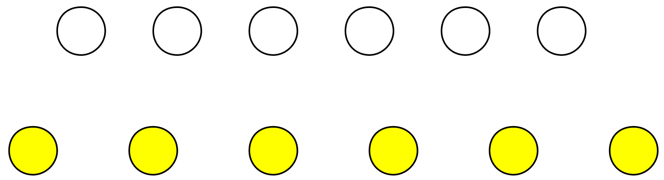
Il secondo stadio: valutazione per corrispondenza intuitiva senza equivalenza durevole.

Quando si chiede ai bambini di questo stadio di dare altrettanto elementi (gettoni) quanti ce n'è nella fila modello, essi effettuano subito (o quasi) una corrispondenza ottica e spaziale tra la fila-copia e la precedente. I soggetti pervengono a costruire una fila copia che abbia contemporaneamente la stessa lunghezza totale della fila-modello e la stessa densità, e questa duplice uguaglianza è assicurata dal fatto che ogni elemento della copia è posto di fronte ad un determinato elemento del modello.



Ma, cessano di ammettere l'equivalenza non appena la corrispondenza non viene più percepita immediatamente.

Infatti, se distanziamo un po' una delle due file di palline e si domanda adesso se le due file sono ancora uguali, il bambino non ammette più l'equivalenza, questo perché sceglie, a caso, uno dei due criteri (lunghezza o densità) e in base a questo solo giudica la quantità totale.



I rapporti di lunghezza totale e di densità sono ben individuati simultaneamente dal bambino quando la fila-copia presenta sia la stessa lunghezza che la stessa densità della fila-modello ed ogni elemento dell'una è posto di fronte ad ogni elemento dell'altra; però, questa iniziale coordinazione non oltrepassa il piano della percezione, e quindi, non appena si alteri la figura percettiva che ha permesso di stabilire la corrispondenza, non soltanto questa scompare, ma scompare anche ogni coordinazione tra lunghezza e densità.

Si può dire che questo secondo stadio è semi-operante, poiché, sul piano pratico o dell'esperienza percettiva, perviene a realizzare la corrispondenza qualitativa, il che presuppone una coordinazione intuitiva delle relazioni in gioco. Questo carattere semi-operante procede di pari passo con un progresso nella reversibilità del pensiero.

Il terzo stadio: corrispondenza operante (qualitativa e numerica) con equivalenza necessaria e durevole.

Se viene distanziata o riunita una delle due file per considerare l'equivalenza, il bambino ammetterà che l'equivalenza dura qualunque sia la figura geometrica formata dai gettoni.

In questo stadio, la corrispondenza si libera dalle sue limitazioni spaziali e percettive e sussiste indipendentemente dagli spostamenti che si imprimono agli elementi.

Adesso, l'equivalenza, una volta constata, è concepita come necessariamente sussistente malgrado le possibili trasformazioni di configurazione dei gruppi corrispondenti.

La corrispondenza termine per termine diviene così realmente quantificante ed esprime, d'ora in poi, l'uguaglianza numerica e non più e soltanto l'uguaglianza qualitativa come negli stadi precedenti. Il bambino arriva a tener conto contemporaneamente delle relazioni di lunghezza e di densità, non più soltanto nel caso in cui le file da confrontare sono simili, ma anche (e questa è la novità rispetto allo stadio precedente) nel caso in cui le due file differiscono simultaneamente per lunghezza e densità.

Per la prima volta, il fanciullo del terzo stadio generalizza l'operazione di moltiplicazione delle due relazioni di densità e lunghezza e comprende che una fila più corta e più densa di un'altra può essere uguale ad essa.

È soltanto in questo momento che vi è il numero, prima vi sono delle forme prenumeriche, percettive che precedono il numero, ma il numero non comincia che con la conservazione dell'insieme numerico, con la conservazione delle equivalenze.

La novità fondamentale di quest'ultimo stadio sta nella mobilità e reversibilità del pensiero del bambino.

1.4 Come arriva il bambino a costruire i numeri?

In base agli studi effetuati da Jean Piaget, il numero nel bambino nasce in seguito alla conservazione dell'insieme numerico e alla conservazione delle equivalenze, ma come arriva a costruire queste equivalenze durature, cioè questi numeri dal punto di vista operatorio?

Secondo Piaget, affinché accada questo, sono necessarie nel bambino due condizioni psicologiche[10].

Una è la conservazione dell'insieme, e si basa su operazioni logiche, essa non presuppone il concetto di numero, ma conduce al numero, per mezzo di operazioni logiche che si poggiano sulla reversibilità delle azioni.

Si ha conservazione dell'insieme quando il bambino avrà la nozione che l'insieme è un insieme di parti che si possono distribuire a piacere. La relazione fra le parti e il tutto è la relazione logica per eccellenza costitutiva di questa conservazione. Per verificare questo Piaget prese una scatola con un certo numero di palline, tutte di legno, la maggior parte scure e solo due o tre bianche. La domanda che pose ai bambini per studiare la relazione fra parti e il tutto era di dire se nella scatola vi erano più palline di legno, che formano un tutto B, che palline scure, che sono una parte A (l'altra parte era costituita dalle palline bianche, designata con A1).

Tutti i bambini piccoli, rispondevano che vi erano più palline scure, in quanto le bianche erano soltanto due. Anche quando la domanda veniva posta in maniera diversa i bambini rispondevano sempre allo stesso modo.

Tutto questo è giustificato, per il fatto che il pensiero dei piccoli è diverso da quello degli adulti. Il bambino non ha ancora un pensiero reversibile,

[10] Piaget J., (1968), p12.

possiede un pensiero che procede sempre avanti e non può andare a ritroso, né può agire con l’immaginazione.

Secondo Piaget, verso i sei anni e mezzo o sette, quando si forma la nozione del numero, il bambino sarà in grado di risolvere questo problema.

Perché il bambino più piccolo non riesce a risolvere un tale problema?, cosa glielo impedisce?

Egli può pensare al tutto e allora risponde correttamente, può pensare alle parti e le paragona le une alle altre, ma non può pensare simultaneamente al tutto e alla parte, in questa maniera, quando egli ha tolto con il pensiero una parte, il tutto non esiste più, e non resta che l’altra parte. Le palline scure saranno tutte le palline di legno meno le bianche, le palline bianche saranno tutte le palline meno le scure.

Si tratta di un‘operazione inversa che necessariamente interviene per la conservazione del tutto, finché non vi è questa reversibilità non vi è conservazione del tutto, non appena c’è reversibilità, c’è conservazione del tutto.

La seconda condizione psicologica affinché vi sia corrispondenza numerica è una condizione di ordine, si devono poter ordinare gli elementi, e psicologicamente bisogna sempre procedere in ordine in modo da non far corrispondere un elemento ad uno di quelli già contati, o da non dimenticarne qualcuno.[11]

1.5 L’ordinamento in serie

Cerchiamo di vedere, sempre secondo Jean Piaget, la maniera in cui il bambino ordina in serie, e in che modo quest’ ordine si costruisce.

[11] Piaget J.-Szeminska A., (1968), pp 12-13.

Si domanda ad un bambino di disporre in scala delle asticelle di differenti grandezze, se esse differiscono molto le une dalle altre, non vi sarà alcuna difficoltà a costruire la scala. Se le asticelle sono poco differenti tra di loro, in modo tale che per costruire la scala, il bambino deve confrontarle a due a due, si possono osservare, anche in questo caso, tre stadi.

Durante **il primo** il bambino forma semplicemente delle coppie e non sa coordinarle fra di loro; questo stadio corrisponde alla non conservazione.

Durante il **secondo,** egli comincerà con coppie e con piccoli raggruppamenti, procederà empiricamente, correggendosi di volta in volta, e costruirà la sua serie.

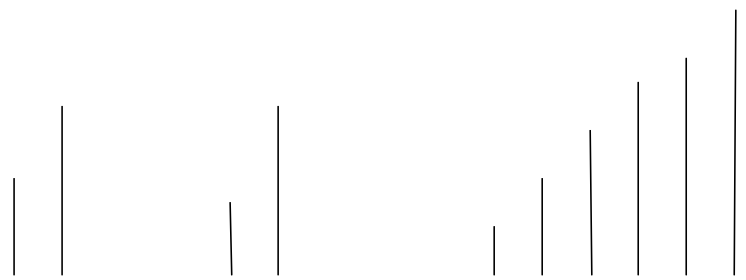
È durante il **terzo stadio** che egli troverà il metodo per risolvere l'esercizio. Adesso il bambino si trova nel periodo operatorio propriamente detto; all'inizio confronterà la più piccola delle asticelle con tutte le altre e la collocherà, prenderà poi la più piccola di quelle che restano e collocherà anche questa, e così di seguito fino alla fine.

Questo terzo metodo implica di nuovo un'operazione inversa, infatti, è necessario che l'elemento così collocato sia più piccolo di quelli che restano, ma nello stesso tempo il bambino sa che il più piccolo di tutti quelli che rimangono è più grande di tutti quelli che lo hanno preceduto.

È necessario, secondo Piaget, che queste condizioni preliminari, cioè l'inserimento delle parti in un tutto che si conserva e l'ordinamento in serie degli elementi, siano soddisfatte affinché si costruisca il numero, e nel momento in cui esse vengono soddisfatte, il numero intero si fa immediatamente accessibile al bambino, poiché egli deve comprendere l'iterazione dell'unità, una volta che egli giunge a queste condizioni logiche preliminari[12].

---

[12] Piaget J.-Szeminska (1968), pp 17-18.



A B C D E F

B < C B < D

C > B C > A

Capitolo II

Le doti matematiche innate

<<La natura fornisce un nucleo di capacità per classificare piccoli insiemi di oggetti nei termini della loro numerosità […..], per capacità più avanzate abbiamo bisogno dell'istruzione, ossia di acquisire gli strumenti concettuali forniti dalla cultura in cui viviamo>>.

Butterworth, (1999).

2.1 Il Modulo Numerico

I numeri hanno, oramai, influenzato non soltanto lo sviluppo della scienza, ma anche molti degli aspetti umani della nostra vita.

Oggi usiamo i numeri abitualmente, per contare, per fare statistiche, per comprare e vendere oggetti, per identificare le automobili, i telefoni, i conti correnti, per formulare le teorie scientifiche, e così via.

Ma in che modo siamo giunti a descrivere e a rappresentare il mondo in termini numerici?

Si può supporre che nell'antichità sia esistito qualcuno che li abbia inventato, l'importanza di quest'idea fu così grande che venne adottata dai popoli vicini e dai vicini dei vicini, questo implica, però, che i popoli più distanti da quello dell'inventore abbiano avuto accesso ai numeri più tardi rispetto ai vicini, e qualcuno forse mai.

Ma, la varietà, all'interno dei sistemi di numerazione che fanno ricorso alle parti del corpo, costituisce una prova contraria all'ipotesi della diffusione dell'invenzione dei numeri da un unico centro.

Un’altra possibilità è che l’idea di numero è un‘ invenzione semplice che molte società potrebbero aver sviluppato per conto proprio.
La terza possibilità, quella che sostiene la ricerca degli ultimi venticinque anni circa, è che l’idea dei numeri non è stata un’invenzione, ma è una componente intrinseca della natura umana oltre che di certi animali[13].
Brian Butterworth, neuropsicologo cognitivista, sostiene infatti che , il genoma umano, cioè l’insieme dei geni che fa di noi ciò che siamo, contenga le istruzioni per costruire circuiti cerebrali specializzati per l’identificazione di piccole numerosità, il cosiddetto Modulo Numerico, il nucleo centrale di tutte le nostre capacità matematiche.
La funzione del Modulo Numerico è quella di classificare il mondo in termini di quantità numerica o numerosità, cioè mette, chi lo possiede, nelle condizioni di percepire il numero di elementi di un insieme, ed è un processo automatico, anche se ci sono persone che nascono con una certa cecità per i numeri.
Ciò che rende uniche le capacità numeriche umane, è lo sviluppo e la trasmissione di strumenti culturali che ampliano le facoltà del Modulo Numerico. Questi strumenti comprendono dei mezzi per facilitare l’operazione del conteggio, come l’uso di parole per esprimere i numeri, quello delle dita e delle tacche per contare oggetti, le procedure di calcolo, l’uso dei simboli numerici o i teoremi e le loro dimostrazioni.
Ciò significa che le nostre capacità numeriche dipendono da tre fattori: il nucleo centrale innato, le conoscenze matematiche della cultura in cui viviamo e la misura in cui abbiamo acquisito tali conoscenze.

---

[13] Butterworth B., (1999), *Intelligenza matematica*, Milano, Rizzoli, p.17

Se fossimo nati in una cultura con conoscenze matematiche molto limitate, le nostre capacità sarebbero inferiori rispetto a quelle che abbiamo la possibilità di acquisire da una cultura matematicamente più progredita.
Così come, se avessimo poche opportunità o un desiderio limitato di acquisire conoscenze matematiche, le nostre capacità sarebbero inferiori a quelle che avremmo se avessimo dedicato più tempo allo studio sotto la guida di un insegnante, capaci e impegnati. Ciò significa che, persino la persona più pigra e meno interessata, nata in una cultura poco incline alla matematica, classificherà il mondo in termini di numerosità, dove per numerosità si intende il numero che si ottiene quando si contano gli elementi di un insieme. La capacità di concepire le numerosità è presente nel cervello di tutti, pronta ad essere usata sia che la società possieda buoni strumenti matematici sia che non li possieda, però le risorse culturali fornite dal linguaggio e da altri segni possono migliorare in misura notevole la sua applicazione.
Allo stesso tempo, questa tesi implica l'esistenza di persone nate senza un Modulo Numerico, e cioè senza la capacità innata di riconoscere piccole numerosità[14].

2.2 Le competenze numeriche preverbali

È stato dimostrato da recenti studi che un bimbo di pochi mesi di vita è gia capace di discriminare le quantità e di categorizzare il mondo che vede e sente in termini di numerosità. Il bambino, quindi, nasce con la capacità di formarsi una rappresentazione della numerosità di un insieme di oggetti ed è anche in grado di memorizzarla, in breve tempo e di richiamarla.

[14] Butterworth B.,pp 18- 22.

Antell e Keating[15], due psicologi americani, hanno verificato che neonati da uno a dodici giorni di vita riescono a discriminare insiemi di due o tre elementi. Essi si sono serviti della <<tecnica dell'abituazione-disabituazione[16]>> che dimostra come i bambini, già all'età di pochi mesi siano in grado di rilevare la differente numerosità tra due gruppi di stimoli. Nella sequenza sperimentale ad ogni neonato venivano presentati alternativamente due cartoncini con due punti neri uguali, più o meno distanziati, in modo da indurre abituazione; successivamente veniva mostrato un terzo cartoncino <<disabituante>> con tre punti neri allineati. Si è visto che i neonati, anche di un solo giorno di vita, osservavano più a lungo questo nuovo oggetto. Per controllare che non si trattasse di una semplice preferenza per immagini con un maggior numero di punti, Antell e Keating hanno proposto la sequenza sperimentale inversa e verificato che gli stessi risultati (tempi più lunghi di osservazione) si ottenevano se, dopo aver abituato il bambino ai tre elementi, si passava ai due.

I bambini sembravano sensibili al numero di immagini contenute nel cartoncino. Questo significa che categorizzavano quel che vedevano in modo del tutto astratto, senza tener conto delle caratteristiche particolari di ogni figura: il colore, la dimensione, la forma, che cambiavano in ogni cartoncino. Una domanda abbastanza lecita che viene in mente è la seguente: e se si trattasse di una forma di percezione di modelli visivi e non di numerosità, così come sosteneva Piaget?

Immagini immobili di oggetti costituiscono particolari modelli geometrici: un oggetto è un punto, due una retta, tre non allineati un triangolo, ecc., il bambino potrebbe limitarsi a descrivere tali modelli.

---

[15] Lucangeli D.-Poli S.-Molin A., (2003), L'intelligenza numerica, Trento, Erickson, p. 13.

[16] Questa tecnica si basa sul fatto che i bambini guardano più a lungo gli stimoli nuovi: osservare a lungo la stessa cosa li porta ad abituarsi, a perdere interesse, mentre una cosa nuova li <<disabitua>> poiché induce interesse.

Questa ipotesi è stata indagata da Van Loosbrock e da Smitsman (1990). Nel loro esperimento hanno mostrato a bambini di 5 e 13 mesi immagini in movimento: due rettangoli in varie tonalità di grigio percorrevano traettorie casuali sullo schermo di un computer rendendo così impossibile l'identificazione di modelli visivi. Nonostante questo, come in tutti gli altri esperimenti, quando il numero dei rettangoli cambiava, i tempi di osservazione cambiavano significativamente, dimostrando come i bambini reagissero alla numerosità ricavata dagli oggetti in movimento.

Le ricerche di Keren Wynn (1995) hanno evidenziato al riguardo come la sensibilità del bambino alla numerosità vada oltre la percezione di oggetti, immobili o in movimento, e riguardi anche insiemi di azioni.

Negli esperimenti da lei descritti, quando bambini di sei mesi, <<abituati>> a vedere una marionetta fare due salti, ne vedevano compiere tre, i tempi di osservazione raddoppiavano. Anche in questo caso, la sequenza inversa (tre salti seguiti da due), è stata usata come controllo.

Il bambino, perciò, nasce con la capacità di formarsi una rappresentazione della numerosità di un insieme di oggetti e, visto che il suo comportamento cambia quando cambia il numero di oggetti, può anche capire se un nuovo insieme abbia la stessa numerosità del precedente insieme.

C'è un limite superiore al concetto di numerosità del bambino?

Il numero massimo di oggetti percepibili sembra essere tre o quattro, tuttavia non si è sicuri che questo limite risieda nella nozione di numerosità del bambino e non nella sua capacità di percepire e di ricordare quello che ha percepito. La comprensione degli adulti, del fatto che le numerosità non hanno limiti, sembra dipendere dall'intuizione che sia sempre possibile aggiungere un'unità. Perciò qualsiasi limitazione da parte del bambino, potrebbe avere a che fare più con la sua capacità di eseguire addizioni

successive e con la serie di ragionamenti necessari a spostarsi per passare da tale capacità al concetto che i numeri non abbiano un limite superiore.
La limitazione più probabile è la capacità di percepire la numerosità di un insieme visivo di oggetti immediatamente senza contare.
Si tratta di un processo specializzato nella percezione visiva che viene chiamato <<subtizing>> o, in italiano, <<immediatizzazione>>[17].

2.3 L'aritmetica del bambino e lo sviluppo delle abilità di conteggio

Il possesso del concetto di numerosità implica molto di più dell'essere capaci di decidere se due insiemi abbiano o no lo stesso numero di elementi.
Esso comporta l'abilità di individuare un cambiamento di numerosità quando nuovi elementi vengono aggiunti all'insieme o elementi precedentemente inclusi vi vengono sottratti.
I bambini piccoli hanno la capacità di farlo?
Karen Wynn (1992) ha riscontrato come bambini di 5, o 6 mesi sappiano compiere semplici operazioni di tipo additivo (1+1) e sottrattivi (2-1)[18].
Nell'esperimento dell'addizione in un teatrino veniva presentato un pupazzo che veniva poi nascosto da uno schermo. Un secondo pupazzo veniva mostrato e aggiunto al primo dietro lo schermo. Alla fine lo schermo si alzava rivelando la presenza di due pupazzi, il che era in linea con un'aspettativa di addizione, (1+1=2), o di un solo pupazzo, il che non lo era, (1+1=diverso da 1). I bambini guardavano più a lungo questa seconda situazione, il che suggeriva a Wynn che questa deludesse la loro

---

[17] Lucangeli D.-Poli S.-Molin A., (2003), *L'intelligenza numerica*, Trento, Erickson, pp.13-14
[18] Dehaene S., (2000), *Il pallino della matematica*, Milano, Mondatori, pp.58-62.

aspettativa. L'esperimento di sottrazione era analogo, solo che inizialmente venivano presentati e nascosti due pupazzi, e successivamente si vedeva che uno di questi veniva sottratto.

I bambini guardavano più a lungo nel caso in cui alla fine apparissero due pupazzi (2-1=diverso da 2) piuttosto che uno (2-1=1).

Questo dimostra che i bambini nascono con la capacità di eseguire processi di addizione e sottrazione che li portano a nutrire aspettative aritmetiche.

Non sappiamo però, se queste loro aspettative abbiano un carattere generale, cioè, noi adulti sappiamo che, ogni volta che viene tolto un oggetto da un insieme, esso rimane con un oggetto in meno, non sappiamo se i bambini di quella età capiscano questo concetto solo perché notano una differenza rispetto alle loro aspettative quando si toglie un pupazzo da un insieme di due, lo stesso vale per quando lo si aggiunge[19].

2.4 Dalle competenze numeriche preverbali all'acquisizione delle parole-numero

Come afferma Butterworth (1999), <<la natura fornisce un nucleo di capacità per classificare piccoli insiemi di oggetti nei termini della loro numerosità […..], per capacità più avanzate abbiamo bisogno dell'istruzione, ossia di acquisire gli strumenti concettuali forniti dalla cultura in cui viviamo>>.

Se dunque esiste una competenza numerica preverbali, innata e indipendente dalla manipolazione linguistico-simbolica, imparare a contare rappresenta il primo collegamento tra natura e cultura, tra la capacità innata

---

[19] Lucangeli D.-Poli S.-Molin A., (2003),pp 12-14.

del bambino di percepire le numerosità e le acquisizioni matematiche più avanzate della cultura nella quale è nato.

Capire come evolvono le abilità di conteggio, a partire dalle competenze preverbali di quantificazione, implica in che modo compaia la capacità di codificare le quantità attraverso il sistema verbale dei numeri, e in che modo esso si sviluppi fino a permettere la piena padronanza dei meccanismi della conta. In particolare, come avviene il passaggio dalle competenze numeriche preverbali all'acquisizione delle parole-numero?

Contare sembra essere una delle cose più semplici. Allora perché, se i bambini nascono con la capacità innata di contare, ci mettono tanto ad imparare? Cominciano attorno ai due anni e ne passano più di sei prima di capire come farlo e come servirsene.

Secondo i psicologi, Rochel Gelman e Gallistel, l'acquisizione dell'abilità di conteggio verbale è guidata dalla conoscenza innata di alcuni principi basati sulla competenza numerica non verbale.

I principi impliciti del <<come contare>> individuati sono[20]:

1. il principio della corrispondenza biunivoca, (a ogni elemento contato deve corrispondere una sola parola numero e viceversa);
2. il principio dell'ordine stabile, (la parole- numero devono essere ordinate in una sequenza fissa e inalterabile);
3. il principio della cardinalità, (l'ultima parola-numero usata nel conteggio rappresenta la numerosità dell'insieme);
4. il principio dell'irrilevanza dell'ordine, (non ha importanza in quale ordine si contino gli oggetti di un insieme);
5. il principio di astrazione, (qualunque cosa può essere contata).

[20] Lucangeli D.-Poli S.-Molin A., (2003), 14-17.

Emerge che contare non è così semplice per come sembrerebbe.

In primo luogo bisogna conoscere i vocaboli per esprimere i numeri, come i suoni del linguaggio, anche le quantità sono esprimibili attraverso parole-numero che hanno, come ogni segno linguistico, un rapporto convenzionale con il significato che sottintendono (ossia, nel caso dei numeri, la quantità).

Imparare la sequenza delle parole usate per contare è il primo modo con il quale i bambini connettono il loro concetto innato di numerosità con le prassi culturali della società nella quale sono nati. Non tutte le società usano vocaboli speciali per contare, alcune si servono dei nomi di parti del corpo, la cosa importante è però che tutte usano i vocaboli in una sequenza fissa e inalterabile, in modo che ogni parola abbia sempre lo stesso significato.

Imparare la sequenza verbale delle parole che esprimono i numeri non è affatto facile, spasso, i bambini di due o tre anni, pensano alle prime parole che indicano i numeri come ad un'unica parola molto lunga <<unoduetrequattrocinque>>, ed occorre un po' di tempo affinché si rendano conto che questa grossa parola è in realtà formata da cinque vocaboli più brevi.

Se ci fosse solo un'unica lunga parola, essi non potrebbero porre gli elementi della sequenza verbale in corrispondenza biunivoca con gli elementi da contare. Però, sapere che esiste una sequenza fissa di parole separate, non basta a capire che queste parole si usano per contare.

I vocaboli che esprimono i numeri hanno molto significati, non solo quello legato alla numerosità, perciò il bambino deve separare l'uso di tali vocaboli legato al conteggio da altri, che può riscontrare a casa o a scuola, come per esempio dire l'ora, effettuare una misura, mettere oggetti in un dato ordine, indicare il numero civico della propria casa, dei canali televisivi, dei telefoni, ecc..

Tutto questo indica che l'acquisizione della sequenza verbale e il suo uso nel conteggio dipenderà molto da come gli è insegnata e ai contesti in cui viene appresa.

Il concetto di corrispondenza biunivoca appare intorno ai due anni indipendentemente dall'apprendimento della sequenza dei vocaboli usati per contare: il bambino distribuisce un giocattolo ad ogni persona, mette ogni tazza nel suo piattino, nomina ed indica ogni persona in una fotografia, una ed una sola volta.

Anche quando conosce la sequenza corretta dei vocaboli-numero, tende ad indicare ad uno ad uno gli oggetti che conta.

Fino ai quattro anni non è però chiara la relazione tra questa strategia e il conteggio, ad esempio, il bambino sa utilizzare la strategia <<uno per te e uno per me>> per distribuire equamente dolci, ma se poi un adulto li conta ed afferma di averne quattro, il bambino non è in grado di inferire di averne lo stesso numero (Presenti et al., 1995)[21].

Per quanto riguarda il principio di cardinalità, i bambini di tre anni e mezzo sono abili nel dire l'ultima parola del conteggio come numero degli oggetti contati, ma questo non significa che comprendano realmente che il processo del contare fornisca la numerosità dell'insieme. Spesso si tratta di una semplice imitazione del comportamento degli adulti, se si chiede ad un bambino di questa età, quanti siano gli oggetti che ha appena contato, può capitare che cominci a ricontarli nuovamente.

---

[21] Ibidem.

Infine, i bambini devono capire che non ha importanza in quale ordine contino gli oggetti di un insieme, né di quale tipo siano gli oggetti da contare.
Tuttavia, è vero che, perfino quando di norma obbediscono a tali principi, i bambini continuano a contare meglio oggetti concreti che non astratti, come i suoni o le azioni, inoltre trovano meno difficoltà a contare se gli oggetti sono allineati e si può cominciare a contarli ad un estremo invece che a metà.

2.5 L'Accumulatore

In base agli studi effettuati su animali e neonati, Stanislas Dehaene, sostiene che noi uomini possediamo una sensibilità innata per la quantità ma non per le numerosità.
Lo studioso postula l'esistenza di un meccanismo cerebrale chiamato <<Accumulatore[22]>> presente anche in alcuni animali come i ratti, i piccioni e gli scimpanzé. Questo accumulatore rappresenta i numeri come quantità approssimate, un po' come se fosse il livello di liquido in un contenitore, dove numeri diversi sono rappresentati da livelli diversi e ci permette di percepire, di memorizzare e di confrontare grandezze numeriche.
Le capacità conoscitive della nostra specie si differenziano da quelli degli animali in molti punti.
L'uomo infatti, a differenza degli animali possiede la capacità di concepire vasti sistemi di simboli, che ci permette di inventare il linguaggio

[22] Dehaene S., (2000), pp.30-34.

matematico. Inoltre è dotato di un organo cerebrale del linguaggio che ci permette di esprimere i nostri pensieri e di comunicarli agli altri.
Infine siamo in grado di ideare progetti anche complessi e di portarli a termine, basandoci contemporaneamente su una memoria retrospettiva e su delle previsioni future.
Tutto questo, secondo Dehaene, non vuol dire che la nostra rappresentazione dei numeri è radicalmente diversa da quella degli animali, anzi, la nostra rappresentazione mentale delle quantità è molto simile a quella di un ratto o di una scimmia o di un piccione.
Proprio come loro, possiamo senza ricorrere al linguaggio, numerare rapidamente collezioni di oggetti, addizionarli e confrontarli, però l'intuizione delle grandezze numeriche, che ereditiamo dall'evoluzione, favorirebbe il nascere di una matematica più avanzata.

2.6 La teoria costruttivista sul concetto di numero

Come già ho avuto modo di approfondire nel capitolo precedente, secondo gli studi effettuati da Piaget, capostipite del costruttivismo, le conoscenze logiche e matematiche si costruiscono nel bambino mediante l'osservazione e l'interiorizzazione delle regolarità nel mondo.
Alla nascita, secondo Piaget, il cervello dell'uomo può essere paragonato ad una pagina bianca, priva di qualsiasi conoscenza astratta, dal punto di vista genetico il bambino non possiede nessuna idea preconcetta sul mondo nel quale vivrà. Sarà dotato di un sistema di percezione e di comando motorio accanto ad un meccanismo generale di apprendimento che, progressivamente trarrebbe profitto dalle interazioni tra il soggetto e il suo

ambiente per auto-organizzarsi. Perciò, secondo questa teoria, il bambino piccolo non avrebbe nessuna cognizione dell'aritmetica.
Infatti, nei primi anni di vita, e precisamente fino ai due anni circa, il bambino si troverebbe in una fase detta <<senso-motoria>>, in questa fase esplora il mondo che lo circonda mediante i sensi e impara a controllarlo con i gesti, così facendo non può evitare di accorgersi di certe regolarità.
Per esempio, un oggetto che scompare dietro uno schermo, riappare quando lo schermo si abbassa; due oggetti quando si scontrano, non si compenetrano mai, e così via.
Guidato da queste scoperte progressive, il bambino si costruisce una serie di rappresentazioni mentali sempre più raffinate e astratte del mondo nel quale vive e si muove.
Per quanto riguarda la nozione di numero, così come per le altre rappresentazioni del mondo, deve costruirsi sul filo di interazioni senso-motorie con l'ambiente. L'uomo nasce senza alcuna idea aritmetica innata, e solo dopo parecchi anni di osservazioni attente arriva comprendere che cos'è il numero, attraverso la manipolazione di oggetti si rende conto che il numero è la sola proprietà che non varia al variare della posizione o della natura dell'oggetto.
Secondo Jean Piaget e i suoi collaboratori, una delle prove che i bambini piccoli sono incapaci a capire l'aritmetica è la <<non permanenza dell'oggetto>>. Se si nasconde un giocattolo sotto un panno, un bambino che ha meno di dieci mesi sembra ignorare che il giocattolo continua ad esistere. Questo fa pensare che il bambino piccolo non conosca molto del mondo che lo circonda, <<se non sa che gli oggetti non cambiano anche quando non si vedono più, come potrebbe sapere qualcosa sul loro numero>>, dice Piaget?.

Piaget sostiene che il concetto del numero non viene compreso prima dei sei anni e mezzo sette, fin quando il bambino non supera la prova della <<conservazione del numero>>. Nel momento in cui si presenta al bambino una fila per esempio di sei bicchieri e una di sei bottiglie ugualmente distanziate, il bambino non ha dubbi che entrambe le file contengono lo stesso numero di elementi. Ma se si distanziano gli elementi di una delle file, lasciando invariato il numero di elementi in entrambe, i bambini a questo punto pensano che ci siano più elementi nella fila più lunga. Non si rendono conto che il numero di elementi non cambia al variare della disposizione degli oggetti. Si dice allora, che il bambino non <<conserva il numero>>.

Anche quando, verso i quattro o i cinque anni, i bambini riescono a superare la prova della conservazione dei numeri, fino a sei o sette anni è molto facile confonderli con dei semplici test numerici. Se si mostra loro un gruppo di otto alberi composto da sei abeti e da due querce e si chiede loro se vi sono più alberi o più abeti, i bambini risponderanno che ci sono più abeti.

La conclusione di Piaget è che prima dell’età della ragione, i bambini mostrano una completa ignoranza delle regole elementari dell’inclusione degli insiemi, che costituiscono uno dei fondamenti dell’aritmetica. Tutto questo significa che prima dei sei o sette anni, il bambino non sarebbe pronto ad apprendere l’aritmetica. L’insegnamento precoce della matematica, secondo Jean Piaget, sarebbe inutile e dannoso, perché verrebbe imparata a memoria, senza comprenderne il significato, inculcare il bambino con forza provocherebbe ansia e paura nei riguardi della matematica. Invece che insegnare precocemente i numeri, sarebbe meglio cominciare dalla logica e dai rudimenti della teoria degli insiemi, la cui padronanza è necessaria per capire il concettosi numero.

2.7 I limiti della teoria di Piaget secondo Stanislas Dehaene

È ormai ben noto che, ratti e piccioni siano in grado di riconoscere un numero dato di oggetti, anche quando viene modificata la loro posizione nello spazio, uno scimpanzé, per esempio, sceglie spontaneamente la più grande fra due quantità.

È ragionevole pensare che i cuccioli della specie umana fino a quattro o cinque anni abbiano una padronanza della matematica inferiore a quella degli altri mammiferi?

Alla luce di studi compiuti negli ultimi venti anni circa, sulle conoscenze numeriche dei piccolissimi,ci si è resi conto che la teoria di Piaget, sul numero nel bambino, presenta dei difetti.

È ovvio che i bambini piccoli hanno molto da imparare in aritmetica e che sono necessari anni affinché le loro capacità concettuali si approfondiscano, ma questo non significa che appena nati sono prive di capacità numeriche. Secondo Dehaene gli esperimenti di Piaget sono viziati e non permettono ai bambini piccoli di dimostrare ciò di cui sono capaci.

Uno degli errori più gravi sta nel fatto che le prove svolte da Piaget si basavano su dei dialoghi, e non sempre il bambino di quella età comprende bene il senso delle domande che gli vengono poste.

Se si interrogano i bambini senza far ricorso al linguaggio, le loro capacità numeriche si rivelano stupefacenti.

Per esempio, J, Mehler e T. Bever[23], già nel 1967, dimostrarono che i risultati della prova classica di conservazione dei numeri di Piaget, possono cambiare completamente a seconda del contesto e della motivazione dei bambini.

Nella situazione classica lo sperimentatore formava due file di biglie, una corta ma formata da sei biglie, l'altra più lunga ma formata da quattro biglie, se si chiedeva ai bambini dove ci fossero più biglie, la maggior parte dei bambini di tre o quattro anni sceglieva la più lunga, ma la meno numerosa. Invece Mehler e Bever, sostituirono le biglie con delle caramelle e invitavano i bambini di tre quattro anni a scegliere una delle due file di caramelle e a poterle mangiare; in questo esperimento i bambini sceglievano la fila più numerosa anche se più corta, e questo è in conflitto con la teoria di Piaget. Inoltre anche bambini di due anni superavano brillantemente la prova sia con le biglie che con le caramelle.

L'errore piagetiano, pertanto non è dovuto a una mancanza di conoscenza aritmetica, ma solo alle condizioni fuorvianti in cui si svolge il test, al fatto che bambini di quella età possono dare alle domande dello sperimentatore un senso diverso, rispetto a quello che potrebbero dare gli adulti e basarsi per esempio sulla lunghezza delle file piuttosto che sul numero di oggetti presenti.

Capire una frase significa andare oltre il significato letterale per comprenderne il significato profondo e l'intenzione di chi comunica, e vi sono circostanze in cui il significato reale può rivelarsi inverso a quello letterale.

[23] Dehaene S., (2000), pp 48-52.

Due psicologi, J. McGarrigle e M. Donaldson[24], hanno verificato che l'incapacità di conservare il numero nei bambini piccoli è legata a una cattiva comprensione delle intenzioni dello sperimentatore.

Nel loro esperimento metà delle prove era di tipo classico, cioè era lo sperimentatore che modificava la lunghezza delle file, e a chiedere al bambino di indicare la fila con più elementi.

Nell'altra metà la trasformazione veniva compiuta da un orsetto di peluche , e poi si chiedeva al bambino quale fosse la fila più numerosa. In questo caso la domanda dello sperimentatore poteva essere vista dal bambino sincera e poteva essere interpretata in senso letterale.

In questa situazione, la maggior parte dei bambini rispondeva in maniera corretta, sulla base del numero, senza lasciarsi influenzare dalla lunghezza delle file; al contrario , gli stessi bambini si sbagliavano e rispondevano sulla base della lunghezza quando la trasformazione era stata effettuata dallo sperimentatore.

Ciò dimostra fondamentalmente due cose: una è che la stessa domanda può essere interpretata in modo diverso dal bambino a secondo del contesto; la seconda è che, al contrario di ciò che aveva sostenuto Piaget, quando la domanda è ben posta, il bimbo piccolo mantiene fisso il numero.

2.8 La capacità di astrazione di un bambino molto piccolo

Tutto questo non significa che la teoria di Piaget è infondata o che è completamente erronea. Piaget si rendeva perfettamente conto che la sua prova di conservazione induceva i bambini a sbagliare, di fatto

[24] Ibidem, p.51.

espressamente ideata in modo che la lunghezza delle file fosse in conflitto con il numero degli elementi.

Secondo Piaget, un bambino comprendeva veramente i fondamenti dell'aritmetica, soltanto se era in grado, su una base puramente logica, di predire quale fila contenesse il maggior numero di elementi, e non sulla base di eventuali cambiamenti della lunghezza, né dal modo in cui lo sperimentatore poneva le domande. Sempre secondo Piaget, scegliere il numero più grande di caramelle, non richiede vere conoscenze concettuali sui numeri, ma soltanto una coordinazione senso-motoria per riconoscere il numero più grande e orientarsi verso di esso.

Il fatto di saper scegliere precocemente il più grande tra due numeri, non significa che se ne comprendano i suoi fondamenti logici, i bambini piccoli, così come gli animali possono acquisire << numeri senso-motori>>, ma non una conoscenza concettuale dell'aritmetica, questo è ciò che pensava Piaget.

Per dimostrare che un bambino di soli pochi mesi sia in grado di individuare una differenza di numero, e sappia distinguere per esempio il due dal tre, si sono fatti vari esperimenti tra cui quelli della Wynn descritti da me prima. È bene capire, però, se, questa sensibilità precoce al numero è una conseguenza delle funzioni visuali del bambino o se si tratta della rappresentazione astratta dei numeri.

I bambini piccoli, sanno individuare il numero di suoni in una sequenza uditiva?

Sanno che lo stesso concetto astratto <<3>> si può applicare sia a tre suoni che a tre oggetti visibili?

Sono in grado di combinare mentalmente le loro rappresentazioni numeriche per eseguire calcoli semplici come <<1+1=2>>?

Una serie di sperimenti dimostrarono che i bambini molto piccoli prestano attenzione sia al numero di suoni che a quello degli oggetti del loro ambiente, insomma, possiedono una rappresentazione astratta dei numeri, indipendentemente dal modo visivo e uditivo con cui vengono comunicati.
Infatti, se mettiamo un bambino tra i sei e gli otto mesi davanti a due diapositive, una con due oggetti, l'altra con tre, facciamo accompagnare la proiezione da colpi di tamburo, a volte i colpi di tamburo sono tre, a volte due, dopo alcuni tentativi in cui non succede niente, il bambino comincia a fissare più a lungo la diapositiva in cui il numero di oggetti corrisponde alla sequenza di suoni ascoltati.
Tutto questo significa che il bambino coglie il numero più che una forma sonora o una disposizione geometrica di oggetti, e che, nel suo cervello, alla vista di tre oggetti o all'ascolto di tre suoni, venga attivata una rappresentazione identica al numero tre.
Questa rappresentazione interna astratta gli permetterebbe di individuare la coincidenza tra il numero di oggetti che presenta la diapositiva e il numero di suoni che contemporaneamente ascolta.

2.9 I limiti dell'aritmetica infantile

Secondo Stanislas Dehaene il bambino piccolo ha una conoscenza precisa soltanto dei primi tre o quattro numeri. Ciò vuol dire che il bambino possiede una rappresentazione mentale approssimativa e continua di numeri, come per gli scimpanzé e i ratti, e proprio come questi subisce **l'effetto distanza** e **l'effetto grandezza**[25].

[25] Dehaene S., (2000), p. 29.

Quando il bambino si trova a dover confrontare due quantità abbastanza distanti, come il 2 o il 6, il bambino raramente sbaglia e sceglie la quantità più grande. Tuttavia, man mano che le quantità si fanno più vicine, per il bambino diventa sempre più difficile dire qual è il numero più grande.
Questa variazione del tasso di errore in funzione della differenza numerica si chiama appunto <<effetto distanza>>. A questo si aggiunge <<l’effetto grandezza>>, cioè un peggioramento delle capacità di calcolo quando aumenta la grandezza dei numeri da confrontare. Il bambino non ha difficoltà a determinare che il numero 2 è più grande del numero 1, mentre sbaglia sempre di più quando passa a confrontare coppie di numeri più grandi come il 2 rispetto al 3, il 3 rispetto al 4.
Questi due effetti dimostrano che i bambini di pochi anni hanno una rappresentazione mentale approssimata e continua del numeri e non discreta. Ci si aspetta perciò che, al di là di un certo limite, il bambino diventi incapace di distinguere un numero *n* dal suo successore *n+1*, questo è ciò che si nota oltre il numero 4.
Ci si aspetta però, che riconosca numeri superiori a questo limite purchè li si metta a confronto con altri più lontani, quando la distanza numerica è sufficientemente notevole, essi riconoscono o confrontano con successo coppie di numeri come 45 o 50, meno con numeri come 49 e 50.
Il secondo limite dell’aritmetica di un bambino piccolo riguarda la maniera in cui intuisce la presenza di più oggetti. I calcoli aritmetici di un bambino piccolo si basano sulla continuità della traettoria[26] degli oggetti e non sulla loro identità come avviene per gli adulti. Per esempio quando due oggetti escono alternativamente da destra e da sinistra da uno schermo, il bambino non li vede mai insieme,e non mostra alcun interesse quando lo schermo si

[26] Dehaene S., (2000), pp.63-66

abbassa e compare un solo oggetto. Se si ritaglia una finestra in mezzo allo schermo, è impossibile che un oggetto che passi da destra a sinistra non appai per un istante alla finestra. In questa nuova situazione il bambino si aspetta di vedere due insieme, ed è sorpreso di vederne uno quando lo schermo si abbassa.

In questo caso, le intuizioni numeriche dei bambini sembrano essere determinate dalla traettoria spazio-temporale degli oggetti. Se questa non può essere seguita da un solo ed unico oggetto, il bambino ne deduce che esistono almeno due oggetti, in caso contrario pensa che l'oggetto è uno solo, anche se sembra che cambi di forma, di grandezza e di colore.

Capitolo terzo

L’esperienza didattica

Premessa

Nel seguente capitolo vengono presentati l’ipotesi sperimentale, nella quale metto in evidenza lo scopo della mia indagine, la descrizione del campione di ricerca, la metodologia che ho adottato, il test che ho preparato per i bambini della scuola primaria e il lavoro che ho svolto con i bambini della scuola dell’infanzia. Infine gli obiettivi dei test e del lavoro svolto alla scuola dell’infanzia e l’analisi a-priori.

3.1 Ipotesi sperimentale

Nel primo capitolo della mia tesi ho affrontato la prima e la più importante teoria cognitiva riguardo l’elaborazione del concetto di numero nel bambino, quella di Jean Piaget, (Piaget e Zseminska, 1941), la quale puntualizza un rapporto inscindibile tra le strutture d’intelligenza generale e l’evoluzione di competenze numeriche nelle abilità di pensiero.
In particolare, Piaget ha collegato l’evoluzione delle strutture che presiedono la conoscenza numerica al passaggio dell’intelligenza dal livello del pensiero irreversibile e preoperatorio al livello del pensiero concreto reversibile e delle operazione logiche.

Secondo ciò che sostiene Piaget, il concetto di numero (valore cardinale e ordinale), non viene conquistato dal bambino prima dei 6-7 anni, fino a quando non supera la prova di <<conservazione del numero>> perché alla sua base starebbero le capacità tipiche del pensiero operatorio (ragionamento transitivo, conservazione della quantità, astrazione dalle proprietà percettive).

Prima di quella età, i bambini mostrano una completa ignoranza delle regole elementari dell'inclusione degli insiemi e della condizione di ordine, che costituiscono uno dei fondamenti dell'aritmetica. Nel secondo capitolo, ho messo in evidenza che oggi la ricerca, contrariamente a quanto sosteneva Piaget, ammette che un bimbo di pochi mesi di vita è già capace di discriminare le quantità e di categorizzare il mondo che vede e sente in termini di numerosità, poiché, esiste una competenza numerica preverbale, innata e indipendente dalla manipolazione linguistico-simbolica.

Inoltre, alla luce di questi nuovi studi, ci si è resi conto che la teoria di Piaget, sul numero nel bambino, presenta delle debolezze.

Per esempio, secondo Mehler e Bever, l'errore piagetiano, pertanto non è dovuto a una mancanza di conoscenza aritmetica, ma solo alle condizioni fuorvianti in cui si svolge il test, al fatto che bambini di quella età possono dare alle domande dello sperimentatore un senso diverso, rispetto a quello che potrebbero dare gli adulti e basarsi per esempio sulla lunghezza delle file piuttosto che sul numero di oggetti presenti.

Ciò dimostra fondamentalmente due cose: una è che la stessa domanda può essere interpretata in modo diverso dal bambino a secondo del contesto; la seconda è che, al contrario di ciò che aveva sostenuto Piaget, quando la domanda è ben posta, il bimbo piccolo mantiene fisso il numero.

Inoltre, secondo quanto sostiene Stanislas Dehaene, il bambino piccolo ha una conoscenza precisa soltanto dei primi tre o quattro numeri. Ciò vuol dire che il bambino possiede una rappresentazione mentale approssimativa e continua di numeri, come per gli scimpanzé e i ratti, e proprio come questi subisce **l'effetto distanza** e **l'effetto grandezza**.

Questi due effetti dimostrano che i bambini di pochi anni hanno una rappresentazione mentale approssimata e continua del numeri e non discreta. Ci si aspetta perciò che, al di là di un certo limite, il bambino diventi incapace di distinguere un numero *n* dal suo successore *n+1*, questo è ciò che si nota oltre il numero 4.

Ci si aspetta però, che riconosca numeri superiori a questo limite purchè li si metta a confronto con altri più lontani, quando la distanza numerica è sufficientemente notevole, essi riconoscono o confrontano con successo coppie di numeri come 45 o 50, meno con numeri come 49 e 50.

Lo scopo della mia indagine è stato quello di verificare, attraverso una serie di esercizi, se i bambini, di età compresa tra i tre e i sei anni <<conservano il numero>>, se vi è conservazione dell'insieme, cioè se il bambino avrà la nozione che l'insieme è un insieme di parti che si possono distribuire a piacere, la relazione fra le parti e il tutto,è la relazione logica per eccellenza costitutiva di questa conservazione.

L'altra condizione fondamentale affinché il bambino arrivi al concetto di numero, che ho voluto verificare, è la <<condizione di ordine>>, vedere se il bambino è in grado di ordinare gli elementi di un insieme e psicologicamente procedere in ordine in modo da non far corrispondere un elemento ad uno di quelli già contati, o da non dimenticarne qualcuno.

Inoltre ho volto verificare se la loro è una rappresentazione mentale discreta o globale del numero, e perciò se si verifica l’effetto distanza e l’effetto grandezza sia in bambini dell’infanzia che della primaria.

3.2 Il gruppo di riferimento per la ricerca

La mia indagine è stata rivolta sia a bambini della scuola dell’infanzia che a bambini di classe prima della primaria.
Le classi di bambini dell’infanzia coinvolte sono state cinque, due del I° Circolo didattico “Lombardo Radice” e tre dell’ Istituto Autonomo Comprensivo “Giovanni Gentile” per un totale di 94 bambini di età compresa tra i 3 e i 6 anni.
Per quanto riguarda la scuola primaria, ho svolto il mio lavoro presso due classi dell’istituto “G. Gentile”, due del il primo Circolo Didattico “Lombardo Radice” e una del plesso “Ciullo”, tutte di Alcamo per un totale di 95 bambini di sei anni di età.
La ricerca si è svolta nel mese di Maggio del 2004 ad Alcamo, successivamente, nel mese di Dicembre dello stesso anno, sono ritornata di nuovo a lavorare con altri 65 bambini della scuola dell’infanzia dell’istituto “Giovanni Gentile” per approfondire alcuni aspetti della mia ricerca. Questa volta i bambini avevano un’età compresa tra i 3 e i 5 anni.

3.3 Paradigma teorico di riferimento

Il paradigma teorico di riferimento, da me preso in considerazione, nello svolgimento di questa indagine, è quello della “ Teoria delle Situazioni” di Guy Brosseau, la quale pone in evidenza i soggetti e le relative relazioni all’interno di una situazione didattica, dove l’apprendimento non viene visto come mera trasmissione di conoscenze dall’insegnante all’alunno, ma come momento significativo nel quale l’allievo ha la possibilità di reagire con l’ambiente circostante in maniera personale e soggettiva.

3.4 Metodologia

Per quanto riguarda i bambini della scuola dell’ infanzia, sia a Maggio che a Dicembre, considerando l’età, il fatto che non sono ancora in condizione di leggere e scrivere, non ho ritenuto opportuno presentare loro schede con numeri scritti, o disegni, ma ho pensato che sarebbe stato più indicato porre delle domande a voce e presentare loro oggetti percettivamente presenti, concreti che attirano di più il loro interesse, e perciò ho mostrato loro delle caramelle .

Ho cercato di metterli a loro agio, mi sono presentata, ho detto che anch’io tra non molto sarei diventata una maestra ed ho chiesto loro di voler fare un giochino con me.

Mi sono seduta in un angolo della classe ed ho intervistato i bambini singolarmente, i più curiosi guardavano, mentre gli altri continuavano a svolgere le loro attività. Ho formato una serie di mucchietti con le caramelle e chiedevo a ciascuno di loro di sceglierne uno.

Le caramelle erano avvolte con la carta di diverso colore a seconda del gusto, in un primo momento ho avuto l’impressione che i bambini rispondessero in base alle loro preferenze di gusto, così ho subito presentato ai bambini caramelle tutte dello stesso gusto, avvolte con la carta dello stesso colore.

Ho seguito la procedura usata da Bever e da Mehler, invece di fare domande che per i bambini di quell'età potevano essere complicate e compromettere il senso della mia domanda mi sono limitata a far scegliere i vari mucchietti di caramelle, uno dopo l'altro, anziché chiedere di dirmi dove cene era di più.

Poi, per verificare se vi era conservazione del numero ho mostrato due file di caramelle perfettamente allineati e chiedevo al bambino se le due file fossero uguali. Successivamente modificavo la lunghezza di una delle due file senza aggiungere o togliere niente, senza fargliene accorgere e chiedevo a ciascuno di loro se le due file erano ancora uguali e di sceglierne una, dopo chiedevo il motivo della scelta.

Per quanto riguarda il gruppo di bambini della scuola primaria, ho adottato un'altra modalità e un'altra strategia. Essendo già a fine anno sapevano tutti leggere e scrivere e conoscevano i numeri, così per loro ho preparato dei test, tenendo conto dell'età.

Per coinvolgerli il più possibile, ho detto loro che anch'io andavo a scuola, per diventare una maestra, che avevo bisogno del loro aiuto, il loro compito sarebbe servito a me, loro non sarebbero stati valutati e che pertanto potevano lavorare tranquillamente, non avrebbero avuto nessun voto.

Per assicurarmi che fosse a tutti chiara la consegna, e per evitare che lasciassero qualche item incompleto, ho preferito distribuire a tutti le schede, dopodiché leggevo, spiegavo a tutta la classe un item e lo facevo eseguire subito, quando tutti avevano finito, passavo a leggere e a spiegare l'altro, e così via.

Mi sono subito resa conto che per loro non era affatto semplice, essendo bambini di prima, scrivere la motivazione delle loro scelte, così la chiedevo a voce e la appuntavo sulle schede.

Le insegnanti, sia quelle della scuola dell'infanzia che quelle della primaria non sono intervenute durante il mio lavoro con i bambini.

3.4 Il test

Lavoro svolto con i bambini della scuola dell'infanzia, (3-6 anni).

Prima domanda: presento un mucchio con **una** caramella e uno con **due**, chiedo al bambino: quale mucchio vuoi?

Seconda domanda: presento un mucchio con **due** caramelle e uno con **quattro**, chiedo: quale mucchio vuoi?

Terza domanda : presento un mucchio con **tre** e uno con **quattro**, chiedo: quale mucchio vuoi?

Quarta domanda: presento un mucchio con **quattro** e uno con **cinque** caramelle, chiedo: quale mucchio vuoi?

In un quaderno mi appuntavo il nome, l'età e la risposta del bambino.
Poiché, secondo l'effetto grandezza, il bambino dovrebbe sbagliare di più passando a confrontare coppie di numeri più grandi, ho voluto, ancora di più, approfondire questo aspetto e a Dicembre mi sono recata di nuovo a scuola. Adottando sempre, la stessa metodologia di prima, ho riformulato la domanda a sessantacinque bambini, stavolta ho chiesto loro di scegliere tra un mucchietto di dieci e undici caramelle e per verificare l'effetto distanza ho chiesto loro di scegliere tra un mucchietto di quattro o nove caramelle.

Lavoro svolto con le classi prime, della scuola primaria (6 anni).

Scheda N ° 1

a) Quali di questi numeri è più grande? Indicalo con una crocetta.

(8 oppure 2)

- ❑ 8
- ❑ 2

b) Quali di questi numeri è più grande? Indicalo con una crocetta.

(81 oppure 82)

- ❑ 81
- ❑ 82

c) Quali di questi numeri è più grande? Indicalo con una crocetta.

(21 oppure 12)

- ❑ 21
- ❑ 12

Scheda N° 2

(Nel conteggio di una durata, lo scorrere continuo del tempo diventa una successione discreta di intervalli temporali).

a) Siamo nel mese di maggio, in che mese saremo tra tre mesi?

…………………….

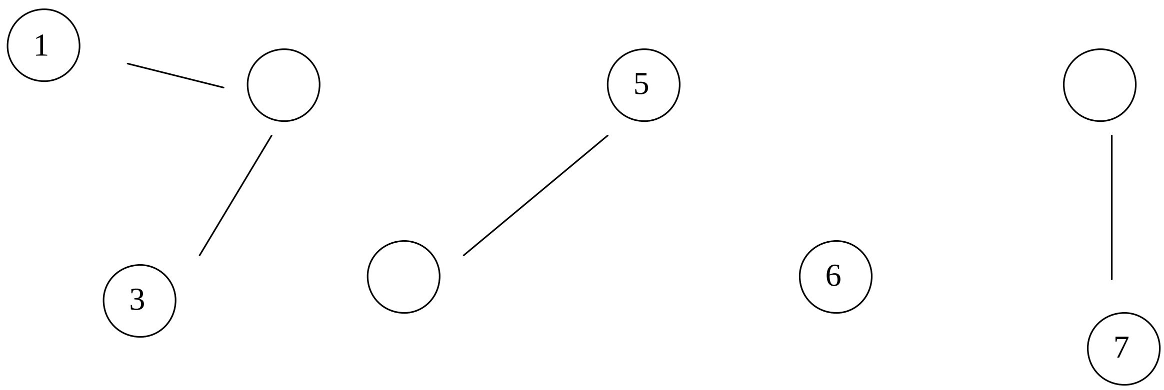
b) Oggi è il (supponiamo) 10 di maggio, quanti giorni mancano al 14?

…………………….

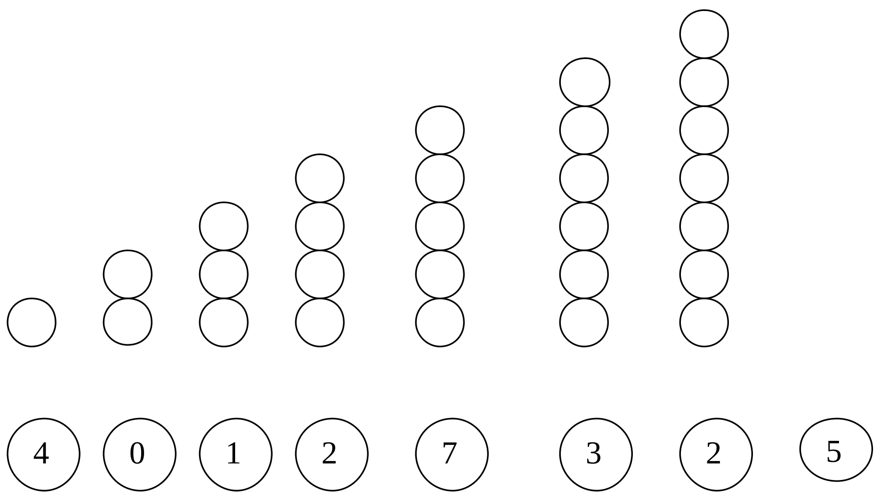
c) Il numero 8 viene dopo il numero ……………..

Scheda N° 3

a) Completa il tragitto con le frecce e i numeri.

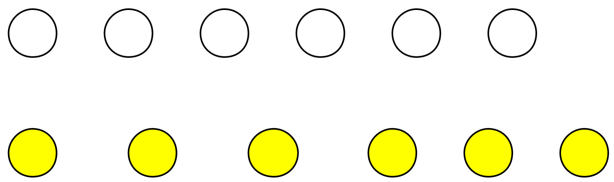


b) Collega ogni asticella con il proprio cartellino.



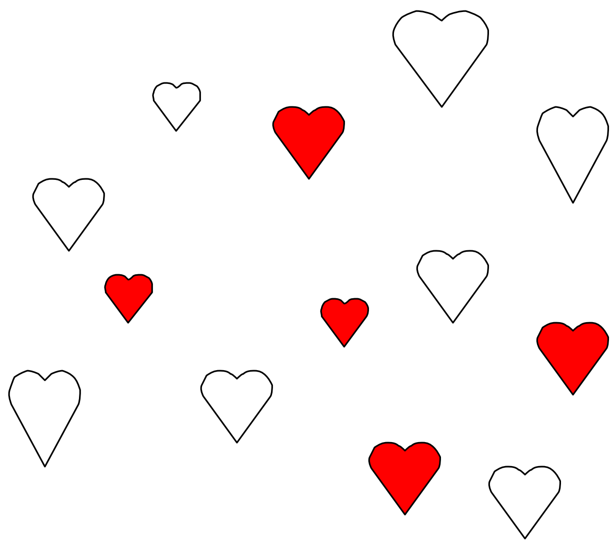
Scheda N° 4

a) Ci sono più palline bianche o gialle? …………..



Scheda N° 5

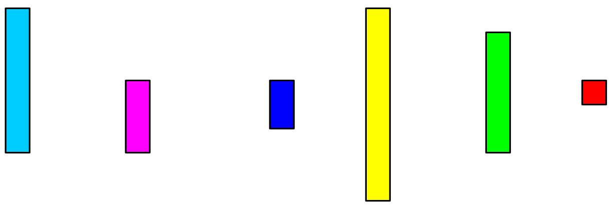
b) I cuoricini bianchi sono più di tutti i cuoricini che vedi disegnati? segnalo con una crocetta.



SI NO

Scheda N° 6

a) Disponi in ordine dalla più corta alla più lunga,indicandolo con i numeri, le asticelle colorate.



3.5 Obiettivi dei quesiti proposti al gruppo della scuola dell’infanzia.

L’obiettivo delle interviste fatte ai bambini è stato quello di verificare se in bambini di questa età si verifica <<l’effetto distanza>> e <<l’effetto grandezza>>, secondo cui, a pari distanza, più grandi sono i numeri e più difficile per loro sarebbe confrontarli. Questi effetti sarebbero la dimostrazione, che come sostiene Stanislas Dehaene, i bambini non hanno una rappresentazione discreta dei numeri ma, continua e approssimativa, globale, ed è anche la prova che non conservano il numero.

L’obiettivo dell’intervista sulle file di caramelle, è stato quello di verificare se è valida la teoria di Piaget, seconda la quale, i bambini conservano il numero non prima dei sei, sette anni di età, prima di quel periodo vi sono delle forme pre-numeriche, percettive che precedono il numero, e, dovrebbero tradurre, in base alla teoria di Piaget, la lunghezza delle file in termini di valore quantitativo.

3.6 Obiettivi dei test somministrati al gruppo della scuola primaria.

Obiettivo scheda 1

Con gli item di questa scheda ho voluto verificare se nei bambini di 6 anni è presente l'effetto distanza e l'effetto grandezza, e quindi capire se hanno una rappresentazione mentale del numero globale o discreta.

Obiettivo scheda 2

Tramite gli item di questa scheda, ho voluto vedere quanto nel conteggio di una durata lo scorrere continuo del tempo diventa una successione discreta di intervalli temporali.

Obiettivo scheda 3

Gli item di questa scheda hanno l'obiettivo di verificare l'acquisizione del passaggio dall'ordine seriale a quello numerico, soprattutto l'item b poiché si avvale dell'istogramma che ha carattere percettivo.

Obiettivo scheda 4

Questa scheda ha l'obiettivo di verificare l'acquisizione del concetto di equipotenza e in particolare l'item ha lo scopo di verificare la completa padronanza del concetto di corrispondenza biunivoca, anche quando particolarità spaziali costituiscono informazioni di disturbo.

Obiettivo scheda 5

Nell'item si chiede di confrontare la parte con il tutto. Quest'item si basa sull'acquisizione del concetto di inclusione, in quanto mette in evidenza due fattori importanti:

1. l'insieme includente deve essere compreso nella sua totalità;
2. gli elementi devono essere associati e poi dissociati per essere considerati disponibili ad ulteriori operazioni.

La comprensione del rapporto di inclusione richiede infatti mobilità di pensiero e cioè la capacità di passare rapidamente e in modo reversibile dalla valutazione di una proprietà che dissoci certi elementi da altri che non posseggono tali proprietà ad una che unisce questi a quelli perché in entrambi comuni (Fetter).

Obiettivo scheda 6

Saper ordinare insieme di oggetti.

L'item di questa scheda ha lo scopo di verificare la capacità di collegare un qualsiasi elemento con un altro mediante la relazione d'ordine "più di…." ma nel contempo pensare ancora lo stesso elemento ancora disponibile per confrontarlo con un terzo elemento mediante un'altra relazione d'ordine inversa alla precedente.

3.7 Analisi a-priori.

Data una situazione/problema, si intende per analisi a-priori di questa situazione/problema l'insieme delle[27]:

[27]Sito web: Filippo Spagnolo, www.math.unipa.it/~grim/storiadida.pdf

- le rappresentazioni epistemologiche, (rappresentazione dei percorsi conoscitivi riguardo ad un concetto);
- le rappresentazioni storico-epistemologiche, (rappresentazioni dei percorsi conoscitivi, sintattici, semantici, pragmatici, riguardo ad un particolare concetto;
- i comportamenti ipotizzati dagli allievi, (sia corrette che non)

L'anali a-priori è uno strumento importante nella scuola di oggi dove il "mestiere" dell' insegnante è un "mestiere" in evoluzione. Per tanto tempo, ed ancora adesso, l'insegnante ha presentato agli allievi delle soluzioni da applicare, poi, a dei problemi.

Adesso viene richiesto all'insegnante di insegnare, presentando agli alunni dapprima dei problemi la cui soluzione richiede di inventare soluzioni originali che in seguito l'insegnante farà diventare sapere consapevole ed elaborato.

In questo ambito, l'analisi a-priori permette di anticipare certi comportamenti degli allievi, le strategie che possono mettere in atto, gli errori, le difficoltà che possono incontrare e, modificare la situazione didattica per favorire un più efficace processo di insegnamento/apprendimento[28].

Nel mio caso specifico, la situazione problema proposta non aveva intenzione di insegnamento, ma di indagine e verifica del grado di acquisizione e rappresentazione del numero naturale nei bambini di età compresa tra i tre e i sei anni.

Le strategie che il gruppo ha presentato nella risoluzione dei quesiti sono qui di seguito elencate.

---

[28] Sito web: www2.unipr.it/urdidmath/Problem/Parte%201/126.problsitdid.pdf

Analisi a-priori del gruppo di ricerca della scuola dell'infanzia

"le due file sono diverse perché una è sopra e l'altra è sotto";
"nella fila più lunga ci sono più caramelle";
"nella fila più corta ci sono meno caramelle";
"una fila è più lunga dell'altra";
"una fila è più corta";
dopo aver contato: "le due file sono uguali perché contengono lo stesso numero di caramelle";
"non lo sa".

Analisi a-priori del gruppo di ricerca delle prime classi della scuola primaria.

Scheda 1

1am (8 oppure 2):
"il numero 2 è più piccolo del numero 8";
"Il numero 2 viene prima del numero 8";
"Il numero 8 è più grande del numero 2";
"Il numero 8 viene dopo il numero due".
"Il numero due viene prima del numero 8".

1bm (21 oppure 12):
"prima viene il numero 81 e poi il numero 82";
"Nell'82 c'è un numero in più rispetto all'81";
"Il numero 82 viene dopo il numero 82";

“82 è più grande del numero 81”;
“Il numero 2 dell’82 è di più del numero 1 dell’81”.

1cm (21 oppure 12):
“il numero 21 è più grande del numero 12”;
“Il numero 12 è più piccolo del numero 21”;
“Il numero 21 viene dopo il numero 12”;
“Il numero 21 è di più del numero 12”.

Scheda 2

2am:
“alcuni contano a partire da Maggio (incluso) e arrivano a luglio”;
“altri bambini contano in modo esatto a partire da giugno, fino ad arrivare ad agosto”;
“altri rispondono in maniera esatta aiutandosi con il calendario appeso in classe”;
“qualcuno non risponde”.

2bm:
“alcuni rispondono 3, contando da 11 fino a 13”;
“altri rispondono 4, fanno la somma 10+4=14”;
“alcuni contano da 11 fino a 14”;
“altri rispondono 5, contano da 10 fino a 14 includendo sia 10 che 14”;
“qualcuno conta da 10 (incluso) fino a 13, escludendo 14”;
“qualcuno non risponde”.

2cm:

“molti rispondono 7, perché viene prima dell’8”;

“altri rispondono 9, perché viene dopo il numero 8”;

“qualcuno non risponde”.

2dm:

mettono il numero successivo al numero che lo precede, e il numero precedente al numero che lo segue.

Scheda 3

3am:

“mettono il numero successivo al numero che lo precede, e il numero precedente al numero che lo segue”;

“risolvono l’esercizio in maniera parziale, completando solo con i numeri e non con le frecce”;

“risolvono l’esercizio in maniera parziale, completando il tragitto solo con le frecce e non con i numeri”;

“qualcuno non lo svolge”.

3bm:

“contano il numero di palline di ogni asticella e lo collegano al numero corrispondente”.

Scheda 4

4am:

“alcuni bambini contano le due file di palline e si rendono conto che sono uguali in quanto contengono lo stesso numero di elementi anche se una è più lunga e l’altra è più corta”;

“molti non contano, sono convinti che le due file sono diverse perché una e più lunga e l’altra è più corta, in una ci sono più caramelle e nell’altra ce n’è di meno”;

“un bambino conta le palline di entrambe le file e perviene al numero 12, poiché è un numero pari divide per due e questo lo porta a dire che in entrambe le file ci sono 6 palline”.

Scheda 5

5am:

“i bambini erroneamente confrontano i cuoricini bianchi con i cuoricini rossi e non con tutti quelli disegnati”;

“alcuni bambini, (pochi), contano tutti i cuoricini disegnati, sia bianchi che colorati”.

Scheda 6

6am:

“i bambini si basano sulla lunghezza, iniziano dal più corto e proseguono verso il più lungo “;

“iniziando dal più piccolo, confrontano questa asticelle con quella un po’ più lunga, successivamente questa seconda con una terza ancora più lunga; “alcuni bambini cercano la più piccola delle asticelle e la confrontano con tutte le altre, poi prendono la più piccola di quelle che restano e fa la stessa cosa, e così via”.

Le tabulazioni complete delle risposte del gruppo della scuola dell’infanzia sono riportate in appendice.

Capitolo quarto

Analisi e valutazioni dei dati

4.1 Analisi dei risultati dell'indagine svolta con il gruppo della scuola dell'infanzia.

L'applicazione della statistica descrittiva mi ha consentito di analizzare meglio i dati ottenuti.
Qui di seguito vengono riportate le distribuzioni di frequenze, (assolute e percentuali), delle risposte date dai bambini ai test somministrati.

Tabella 1. Distribuzione di frequenza delle risposte date dai bambini alle domande A, B, C, D, G ed H.

A	**Risposte totali**	**%**
1	25	29%
2	69	71%
0	0	0%
B		
2	32	21%
3	62	79%
0	0	0%
C		
3	31	21%

4	63	79%
0	0	0%
D		
4	35	29%
5	59	71%
0	0	0%
G		
4	20	31%
9	40	62%
0	5	7%
H		
10	28	43%
11	32	49%
0	5	8%

Da un primo esame della tabella 1 attraverso cui ottengo, per conteggio finale, la distribuzione semplice di frequenza delle 94 unità considerate (bambini), sembra che, di fronte ai vari mucchietti di caramelle, i bambini sceglievano sempre quello più numeroso, nonostante differissero solo di una unità, anche quando il numero di elementi, come nel quesito H, è aumentato a 10 e a 11. In base a questi risultati posso affermare che, nel gruppo di bambini da me analizzati, di età compresa tra i tre e i sei anni, non si verifica l'effetto grandezza e l'effetto distanza, contrariamente alla teoria di Dehaene.

Però, analizzando le risposte in base al fattore tempo, e quindi all'età dei bambini, come si evince dalla tabella 2 di seguito riportata, per i più piccoli, quelli di tre anni, la differenza nella domanda A e B, tra quelli che hanno scelto il primo o il secondo mucchietto non è così schiacciante come per gli altri bambini (più grandi). Inoltre nelle domande C e D, cioè quando gli si chiede di scegliere tra il mucchio con tre caramelle e quello con quattro, e poi tra quello con quattro e quello con cinque, mostrano di trovarsi in difficoltà, e scelgono il mucchio con meno caramelle.

Tabella 2. Distribuzione delle frequenze delle risposte fornite dai bambini alle domande A, B, C, e D in relazione al fattore età, (frequenze assolute).
L'indice "0" nelle seguenti tabelle indica l'assenza di risposta da parte del bambino.

ETà	DOMANDE FORMULATE											
	A			**B**			**C**			**D**		
	1	2	0	2	3	0	3	4	0	4	5	0
3 anni	6	8	0	6	8	0	8	6	0	8	6	0
4 anni	5	17	0	8	14	0	35	17	0	7	15	0
5 anni	10	34	0	15	29	0	14	30	0	16	28	0
6 anni	4	10	0	3	11	0	3	11	0	4	10	0

Tabella 3. Distribuzione delle frequenze delle risposte fornite dai bambini alle domande A, B, C, e D in relazione al fattore età, (valori percentuali).

ETà	DOMANDE FORMULATE											
	A			**B**			**C**			**D**		
	1	2	0	2	3	0	3	4	0	4	5	0
3 anni	43%	57%	0%	43%	57%	0%	57%	43%	0%	57%	43%	0%
4 anni	23%	77%	0%	36%	64%	0%	23%	77%	0%	32%	68%	0%
5 anni	23%	77%	0%	34%	66%	0%	32%	68%	0%	36%	64%	0%
6 anni	29%	71%	0%	21%	79%	0%	21%	79%	0%	24%	71%	0%

Lo stesso avviene quando gli si chiede di scegliere tra il mucchio con dieci e undici caramelle, vale a dire quando aumenta il numero degli elementi da confrontare, i bambini più piccoli scelgono il mucchio con meno caramelle, (tabelle 4-5).

Tabella 4. Distribuzione delle frequenze delle risposte fornite dai bambini alle domande G ed H in relazione al fattore età, (valori assoluti).

ETà	DOMANDE FORMULATE					
	G			**H**		
	4	9	0	10	11	0
3 anni	6	3	4	5	4	4
4 anni	4	16	1	10	10	1
5 anni	10	21	0	13	18	0

Tabella 5. Distribuzione delle frequenze delle risposte fornite dai bambini alle domande G ed H in relazione al fattore età, (valori percentuali).

ETà	DOMANDE FORMULATE					
	G			**H**		
	4	9	0	10	11	0
3 anni	46%	23%	31%	38%	31%	31%
4 anni	19%	76%	5%	48%	48%	5%
5 anni	32%	68%	0%	42%	42%	0%

Inoltre, sempre in base alle tabelle 4-5, possiamo notare che i bambini di tre anni, tra il mucchio con quattro e il mucchio con nove elementi scelgono quello con quattro, si verifica perciò per questi l’effetto distanza, non per i bambini dai quattro anni in su.

Posso affermare che i risultati di questa indagine concordano in parte con la teoria di Stanislas Dehaene, secondo la quale, per i bambini più piccoli, e nel mio caso quelli di tre anni, al di là di un certo limite, diventa incapace a distinguere un numero n dal suo successore $n+1$. Questo è ciò che si nota dal numero quattro in poi.

Tutto questo, dimostra, inoltre, che i bambini di tre anni possiedono una rappresentazione mentale approssimativa e continua dei numeri che subisce l’effetto distanza e l’effetto grandezza, non vale, secondo i risultati della mia indagine, per i bambini dai quattro anni in su.

Tabella 6. Distribuzione delle frequenze delle risposte fornite dai bambini alle domande E-F, (valori assoluti e percentuali)

DOMANDE FORMULATE					
E			**F**		
File ugualmente distanziate			File diversamente distanziate		
Uguali	diverse	Non lo sa	Uguali	diverse	Non lo sa
64	29	1	19	71	4
68%	31%	1%	20%	76%	4%

Durante la somministrazione del test E-F, ho mostro ai bambini due file dello stesso numero di caramelle, avvolte con carta dello stesso colore, e della stessa lunghezza; ho chiesto loro di dirmi se le due file fossero uguali, il 29 % era convinto che fossero diverse, un solo bambino non lo ha saputo, e il 68 % dei bambini che fossero uguali.

Nel momento in cui, nella domanda F, ho modificato la lunghezza di una delle due file, senza dare la possibilità al bambino di far vedere che non aggiungevo o toglievo niente, ho ottenuto risposte apposte a prima. Il 71 % adesso era convinto che le due file fossero diverse, il 19 % che fossero uguali (perché conta le caramelle) e il 3 % non lo ha saputo.

I bambini, adesso credono che là dove la fila è più lunga vi siano << di più >> caramelle, e che in quella più corta ce ne siano <<di meno>>, questo significa che traducono la lunghezza delle file in termini di valore quantitativo.

Tutto questo porta a dire che l'equivalenza ammessa nella domanda E dal 68 % dei bambini, è un'equivalenza non durevole, ma basata sulle apparenze percettive, sull'una o sull'altra delle due qualità globali delle

file, cioè sulla lunghezza occupata o sulla densità, i due rapporti non sono ancora componibili.
Non appena si alteri la figura percettiva che ha permesso prima di stabilire l'equivalenza, questa cessa immediatamente, poiché il bambino non è ancora in grado di stabilire una corrispondenza univoca e reciproca.
Tutto questo è in disaccordo con la teoria dei sostenitori dell'idea primitiva del numero, i quali sostengono che il bambino possiede la nozione del numero molto prima di saper contare e di conoscere i nomi, poiché, egli ha il concetto della corrispondenza uno ad uno.
I risultati dell'indagine, concordano però con la teoria di Piaget secondo cui il bambino non possiede la nozione di numero se non prima dei sei anni e mezzo o sette, quando vi è conservazione dell'insieme numerico, attraverso la conservazione delle equivalenze.

4.2 Analisi dei risultati relativi all'indagine condotta sul gruppo delle prime classi della scuola primaria.

Qui di seguito viene riportata la distribuzione delle frequenze delle risposte dei bambini della scuola primaria formulate sulle schede proposte, (valori assoluti e percentuali).

SCHEDA 1

Item a	**Totale risposte**	**%**
Esatto	92	97%
Errato	3	3%

Incompleto	0	0%
Non eseguito	0	0%
Item b		
Esatto	89	94%
Errato	6	6%
Incompleto	0	0%
Non eseguito	0	0%
Item c		
Esatto	89	94%
Errato	6	6%
Incompleto	0	0%
Non eseguito	0	0%

Nella prima scheda veniva chiesto ai bambini di confrontare e di indicare quali tra due numeri fosse il più grande, per verificare se nei bambini di 6 anni è presente l'effetto distanza e l'effetto grandezza, e quindi capire se hanno una rappresentazione mentale del numero globale o discreta. In tutti e tre gli item, il 97%, il 94% e nel terzo item ancora il 94% dei bambini hanno risposto in maniera esatta, senza mostrare alcun problema. Da questi risultati si evince che non si verifica l'effetto grandezza o l'effetto distanza e che per questi bambini i numeri sono entità discrete e non globali.

SCHEDA 2

Item a	**Totale risposte**	**%**
Esatto	53	56%
Errato	39	41%
Incompleto	0	0%
Non eseguito	3	3%
Item b		
Esatto	64	67,3%
Errato	26	27,3%
Incompleto	0	0%
Non eseguito	5	5,4%
Item c		
Esatto	64	67,4%
Errato	28	29,5%
Incompleto	0	0%
Non eseguito	3	3,1%

Nella scheda 2, ho voluto vedere quanto nel conteggio di una durata lo scorrere continuo del tempo diventa una successione discreta di intervalli temporali, sempre con l'biettivo di vedere se per i bambini di questa età i numeri sono entità discrete o globali. Anche in questo caso la maggior parte ha risposto in maniera esatta, però il numero delle risposte positive è calato, non più il 94 o il 97 % come prima, ma il 56 e il 67% e tra il 3 e il 5% non ha svolto l'esercizio.

Anche dai risultati di questa scheda si evince che non si verifica l'effetto grandezza o l'effetto distanza e che per questi bambini i numeri sono entità discrete e non globali.

SCHEDA 3

Item a	**Totale risposte**	**%**
Esatto	41	43,2%
Errato	6	6,3%
Incompleto	47	49,5%
Non eseguito	1	1%
Item b		
Esatto	77	81%
Errato	5	5,3%
Incompleto	12	12,7%
Non eseguito	1	1%

Grosse difficoltà hanno mostrato i bambini nello svolgimento dell'item a della scheda 3, in cui si chiedeva di completare un tragitto con i numeri e con le frecce. Solo 41 bambini hanno risposto in maniera esatta, 6 in modo errato, un bambino non l'ha svolto e 47 hanno eseguito parzialmente l'item, completandolo solo con le frecce o solo con i numeri. Questo item, mi è servito per verificare se i bambini hanno acquisito il passaggio dall'ordine seriale a quello numerico. L'item b, in particolare, evidenzia meglio questo passaggio poiché si avvale dell'istogramma che ha carattere percettivo, infatti in questo caso, 77 bambini su 95, hanno saputo svolgere correttamente l'esercizio, 12 l'hanno lasciato incompleto, 1 non ha risposto, e 5 hanno eseguito l'item in maniera errata.

SCHEDA 4

Item a	**Totale risposte**	**%**
Esatto	33	35%
Errato	59	62 %
Incompleto	0	0%
Non eseguito	3	3%

Con l'item della scheda 4 mi sono proposta di verificare l'acquisizione del concetto di corrispondenza biunivoca, anche quando particolarità spaziali costituiscono elemento di disturbo, utile per verificare se vi è conservazione del numero. Ho constatato che anche in questo caso, così come i bambini della scuola dell'infanzia, anche se è stato un po' più alto il numero di quelli che hanno risposto in maniera esatta, 33, la maggior parte dei bambini, 59 ha risposto in maniera errata, e 3 non hanno svolto l'esercizio.

SCHEDA 5

Item a	**Totale risposte**	**%**
Esatto	12	13%

Errato	83	87%
Incompleto	0	0%
Non eseguito	0	0%

Interessante il risultato dell'item della scheda 5, quasi tutti hanno risposto in maniera errata, 83 su 95, e solo 12 in maniera esatta. L'obiettivo di questo item rispecchia una delle condizioni necessarie affinché, secondo la teoria di Jean Piaget, il bambino arrivi al concetto di numero e cioè la conservazione dell'insieme. Si ha conservazione dell'insieme quando il bambino avrà la nozione che l'insieme è un insieme di parti che si possono distribuire a piacere. La relazione fra le parti e il tutto è la relazione logica per eccellenza costitutiva di questa conservazione e ciò implica una certa reversibilità del pensiero che il bambino in questo caso dimostra di non possedere ancora. Egli è in grado di pensare al tutto o alle parti e le paragone le une alle altre ma non è ancora in grado di pensare simultaneamente al tutto e alla parte, in questa maniera, quando egli ha tolto con il pensiero una parte, il tutto non esiste più e non resta che l'altra parte. Se non c'è reversibilità di pensiero, non può esserci conservazione del tutto.

SCHEDA 6

Item a	**Totale risposte**	**%**
Esatto	73	77%
Errato	16	17%

Incompleto	6	6%
Non eseguito	0	0%

In disaccordo con tutto questo sono i risultati dell'item della scheda 6. Settantatre bambini su 95 hanno risposto in maniera esatta, 16 in maniera errata e 6 non hanno svolto l'esercizio. Ho notato un po' di confusione da parte dei bambini nel confrontare le asticelle 3-4 o 5-6 anziché tra le prime tre che sono più simili percettivamente. Questo item rispecchia un'altra delle condizioni necessarie affinché il bambino conservi il numero e cioè saper ordinare in serie degli elementi e psicologicamente procedere in ordine in modo da non far corrisponder un elemento ad uno di quelli già contati, o da non dimenticarne qualcuno, collegare un elemento con un altro mediante la relazione d'ordine "più di…." ma nel contempo pensare ancora lo stesso elemento ancora disponibile per confrontarlo con un terzo elemento mediante un'altra relazione d'ordine inversa alla precedente.

Anche questa condizione implica che ci sia una certa reversibilità del pensiero, quindi secondo questa prova i bambini dimostrano una certa reversibilità di pensiero contrariamente da quanto è emerso dalla scheda precedente.

Capitolo Quinto

Conclusioni

5.1 Riflessioni conclusive

Con la mia indagine ho messo a confronto la più importante teoria cognitivista sul concetto di numero nel bambino tra i tre e i sei anni, quella di Jean Piaget, con alcuni studi moderni, in particolare quelli di Stanislas Dehaene e di Brian Butterworth, non, ovviamente, per negare l'importanza dell'una o dell'altra, ma perché mi sono proposta di chiarire a me stessa, in quanto futura insegnante, i processi attraverso cui il bambino giunge all'acquisizione del concetto di numero, e il tipo di rappresentazione mentale, discreta o continua, che del numero ha in quella fascia di età.

Posso affermare che i risultati della mia indagine concordano in parte con la teoria di Stanislas Dehaene, secondo la quale, per i bambini più piccoli, e nel mio caso quelli di tre anni, al di là di un certo limite, diventa incapace a distinguere un numero n dal suo successore $n+1$. Questo è ciò che si nota dal numero quattro in poi.

I risultati del mio lavoro dimostrano che i bambini più piccoli, quelli di tre anni e in un caso anche quelli di quattro valutano le quantità discontinue come se si trattasse di quantità continue, lo dimostrano i risultati dei test che verificano l'effetto distanza e l'effetto grandezza e perciò possiedono una rappresentazione mentale approssimativa e continua dei numeri e non discreta, non vale per quelli di quattro anni in su.

I risultati del test E-F concordano con la teoria di Piaget secondo cui i numeri dei bambini della fase pre-operatoria non sono dei veri e propri numeri ma delle figure percettive, lo dimostra il fatto che non appena si

alteri la figura percettiva che ha permesso di stabilire in un primo momento l’equivalenza, questa cessa immediatamente, poiché il bambino non è ancora in grado di stabilire una corrispondenza univoca e reciproca.
Tutto questo è in disaccordo con la teoria dei sostenitori dell’idea primitiva del numero, i quali sostengono, invece che, il bambino possiede la nozione del numero molto prima di saper contare e di conoscere i nomi, poiché, egli ha il concetto della corrispondenza uno ad uno.
I risultati del lavoro svolto con i bambini di sei anni della scuola primaria sono meno omogenei e un po’ più contrastanti rispetto a quelli della scuola dell’infanzia, secondo certi item sembra che abbiano una rappresentazione discreta dei numeri e che abbiano già acquisito il concetto di numero.
Secondo altri item come per esempio l’item a della scheda 4 con il quale mi sono proposta di verificare l’acquisizione del concetto di corrispondenza biunivoca, necessario per verificare se vi è conservazione del numero, anche se c’è stato un leggero aumento di risposte corrette rispetto ai bambini della scuola dell’infanzia, la maggior parte ha risposto in maniera errata. Interessante il risultato dell’item della scheda 5, quasi tutti hanno risposto in maniera errata e l’obiettivo di questo item rispecchia una delle condizioni necessarie affinché, secondo la teoria di Jean Piaget, il bambino arrivi al concetto di numero e cioè la conservazione dell’insieme. In disaccordo con tutto questo sono i risultati dell’item della scheda 6. Settantatre bambini su novantacinque hanno risposto in maniera esatta. Questo item rispecchia un’altra delle condizioni necessarie affinché il bambino conservi il numero e cioè saper ordinare in serie degli elementi e psicologicamente procedere in ordine in modo da non far corrisponder un elemento ad uno di quelli già contati, o da non dimenticarne qualcuno, collegare un elemento con un altro mediante la relazione d’ordine “più

di….” ma nel contempo pensare ancora lo stesso elemento ancora disponibile per confrontarlo con un terzo elemento mediante un’altra relazione d’ordine inversa alla precedente.

L’esito della mia indagine sperimentale mi induce a pensare che i bambini molto piccoli, già intorno ai tre anni hanno delle idee sui numeri che non possono fare a meno di vedere e sentire intorno a sé, e che essi si sforzano di trovare un significato in ciò che osservano.

È chiaro, però, che il concetto di numero viene costruito gradualmente e che è un processo che dura molti anni, la scuola, e quindi gli insegnanti hanno il dovere di aiutare il bambino in questo percorso non facile. Innanzitutto è fondamentale per un’insegnante cercare di comprendere le fasi di sviluppo e i processi mentali che il bambino mette in atto nel processo di apprendimento.

Inoltre è molto importante tenere in considerazione il fatto che i bambini hanno un modo di ragionare, di pensare e di elaborare alcune nozioni fondamentali come quella di spazio, tempo e numero in maniera diversa dall’adulto, quando lavoriamo con i bambini dobbiamo essere in grado di rinunciare all’impostazione del nostro pensiero di adulti e di adeguarci al loro. Per noi adulti, sei palline distanziate o ravvicinate sono sempre sei, per i bambini di una certa fascia di età, così come è avvenuto nella mia indagine, non è così.

Penso, inoltre che, un approccio idoneo, in termini di metodologia didattica sia fondamentale affinché si formi nel bambino un atteggiamento favorevole e non di rifiuto nei confronti della matematica.

Soprattutto nella scuola primaria la costruzione di competenze matematiche va perseguita in contesti culturalmente ricchi, motivanti, che stimolino la curiosità e gli interessi dei bambini, al fine di non fare apparire i numeri concetti astratti e sterili, poco utili e lontani dalla realtà al di fuori dell’aula scolastica.

5.2 Problemi aperti

- ✓ Quando i bambini acquisiscono pienamente il concetto di numero?
- ✓ Lo acquisiscono tutti?
- ✓ Quanto influisce il tipo di didattica e il tipo di materiale adottato dagli insegnanti nell’acquisizione del concetto numerico?
- ✓ Quanto influiscono gli stimoli provenienti dall’ambiente circostante nel quale vive il bambino?
- ✓ Quanto influisce il tipo di rapporto umano tra alunno e insegnante?
- ✓ Un errato approccio alla matematica durante gli anni della scuola dell’infanzia, può pregiudicare in maniera definitiva le prestazioni dei bambini in ambito logico-matematico?
- ✓ Durante il processo di insegnamento, quanti insegnanti cercano di adeguare il loro pensiero a quello dei bambini?

Appendice

Tabulati completi delle risposte dei bambini della scuola dell'infanzia

I dati sono stati riprodotti mediante uso di foglio elettronico Excel, per ovvie ragioni di privacy ho omesso il nome degli alunni, i quali vengono indicati con un numero.

Gli indici 1 e 0 in dicano l'avverarsi o meno di ciascuno degli eventi descritti.

		DOMANDA A			DOMANDA B		
		1caramella	2 caramelle	non risponde	2 caramelle	3 caramelle	non risponde
1)	6 anni	0	1	0	0	1	0
2)	5 anni	0	1	0	1	0	0
3)	6 anni	1	0	0	0	1	0
4)	5 anni	0	1	0	0	1	0
5)	5 anni	0	1	0	1	0	0
6)	6 anni	0	1	0	1	0	0
7)	6 anni	0	1	0	0	1	0
8)	5 anni	1	0	0	1	0	0
9)	5 anni	1	0	0	0	1	0
10)	6 anni	1	0	0	0	1	0
11)	6 anni	0	1	0	0	1	0
12)	5 anni	1	0	0	1	0	0
13)	6 anni	1	0	0	1	0	0
14)	5 anni	0	1	0	1	0	0
15)	6 anni	1	0	0	0	1	0
16)	5 anni	0	1	0	0	1	0
17)	5 anni	1	0	0	1	0	0
18)	5 anni	1	0	0	1	0	0
19)	5 anni	0	1	0	0	1	0
20)	5 anni	0	1	0	0	1	0
21)	5 anni	0	1	0	0	1	0
22)	5 anni	0	1	0	0	1	0
23)	5 anni	1	0	0	1	0	0
24)	3 anni	1	0	0	0	1	0
25)	4 anni	0	1	0	0	1	0

26) 4 anni	1	0	0	0	1	0
27) 4 anni	0	1	0	0	1	0
28) 3 anni	1	0	0	1	0	0
29) 3 anni	0	1	0	0	1	0
30) 3 anni	1	0	0	1	0	0
31) 4 anni	0	1	0	1	0	0
32) 3 anni	0	1	0	0	1	0
33) 3 anni	0	1	0	1	0	0
34) 4 anni	0	1	0	1	0	0
35) 4 anni	1	0	0	0	1	0
36) 3 anni	0	1	0	0	1	0
37) 3 anni	0	1	0	0	1	0
38) 4 anni	0	1	0	0	1	0
39) 3 anni	0	1	0	0	1	0
40) 4 anni	0	1	0	0	1	0
41) 3 anni	1	0	0	0	1	0
42) 4 anni	1	0	0	0	1	0
43) 4 anni	0	1	0	1	0	0
44) 3 anni	1	0	0	1	0	0
45) 4 anni	1	0	0	1	0	0
46) 5 anni	0	1	0	1	0	0
47) 5 anni	0	1	0	1	0	0
48) 4 anni	0	1	0	1	0	0
49) 5 anni	0	1	0	0	1	0
50) 5 anni	0	1	0	0	1	0
51) 5 anni	0	1	0	0	1	0
52) 5 anni	0	1	0	0	1	0
53) 5 anni	0	1	0	0	1	0
54) 5 anni	0	1	0	0	1	0
55) 5 anni	0	1	0	0	1	0
56) 5 anni	0	1	0	0	1	0
57) 5 anni	0	1	0	0	1	0
58) 5 anni	0	1	0	0	1	0
59) 4 anni	0	1	0	0	1	0
60) 5 anni	0	1	0	0	1	0
61) 5 anni	0	1	0	0	1	0
62) 5 anni	0	1	0	1	0	0
63) 6 anni	0	1	0	0	1	0
64) 6 anni	0	1	0	0	1	0
65) 6 anni	0	1	0	0	1	0
66) 6 anni	0	1	0	0	1	0
67) 4 anni	0	1	0	0	1	0
68) 6 anni	0	1	0	0	1	0
69) 5 anni	0	1	0	1	0	0
70) 4 anni	0	1	0	0	1	0
71) 5 anni	0	1	0	0	1	0
72) 4 anni	0	1	0	0	1	0
73) 4 anni	0	1	0	0	1	0
74) 3 anni	0	1	0	1	0	0
75) 3 anni	1	0	0	0	1	0
76) 3 anni	0	1	0	1	0	0

77) 6 anni	0	1	0	1	0	0
78) 5 anni	0	1	0	0	1	0
79) 4 anni	1	0	0	1	0	0
80) 5 anni	0	1	0	0	1	0
81) 5 anni	0	1	0	1	0	0
82) 4 anni	0	1	0	1	0	0
83) 5 anni	0	1	0	0	1	0
84) 5 anni	1	0	0	0	1	0
85) 5 anni	0	1	0	0	1	0
86) 4 anni	0	1	0	1	0	0
87) 5 anni	0	1	0	1	0	0
88) 5 anni	1	0	0	0	1	0
89) 4 anni	0	1	0	0	1	0
90) 5 anni	0	1	0	1	0	0
91) 5 anni	1	0	0	0	1	0
92) 5 anni	1	0	0	0	1	0
93) 4 anni	0	1	0	0	1	0
94) 5 anni	0	1	0	0	1	0

	DOMANDA C			DOMANDA D		
	3 caramelle	4 caramelle	non risponde	4 caramelle	5 caramelle	non risponde
1) 6 anni	1	0	0	0	1	0
2) 5 anni	0	1	0	0	1	0
3) 6 anni	1	0	0	1	0	0
4) 5 anni	1	0	0	1	0	0
5) 5 anni	0	1	0	0	1	0
6) 6 anni	0	1	0	1	0	0
7) 6 anni	1	0	0	0	1	0
8) 5 anni	1	0	0	1	0	0
9) 5 anni	1	0	0	0	1	0
10) 6 anni	0	1	0	0	1	0
11) 6 anni	0	1	0	0	1	0
12) 5 anni	1	0	0	1	0	0
13) 6 anni	0	1	0	1	0	0
14) 5 anni	0	1	0	1	0	0
15) 6 anni	0	1	0	0	1	0
16) 5 anni	0	1	0	0	1	0
17) 5 anni	1	0	0	0	1	0
18) 5 anni	0	1	0	1	0	0
19) 5 anni	1	0	0	0	1	0
20) 5 anni	1	0	0	1	0	0
21) 5 anni	0	1	0	0	1	0
22) 5 anni	0	1	0	0	1	0
23) 5 anni	0	1	0	1	0	0
24) 3 anni	1	0	0	1	0	0
25) 4 anni	0	1	0	1	0	0

26) 4 anni	0	1	0	0	1	0
27) 4 anni	0	1	0	0	1	0
28) 3 anni	1	0	0	1	0	0
29) 3 anni	1	0	0	0	1	0
30) 3 anni	0	1	0	1	0	0
31) 4 anni	0	1	0	1	0	0
32) 3 anni	1	0	0	0	1	0
33) 3 anni	0	1	0	0	1	0
34) 4 anni	1	0	0	0	1	0
35) 4 anni	1	0	0	1	0	0
36) 3 anni	0	1	0	0	1	0
37) 3 anni	0	1	0	0	1	0
38) 4 anni	1	0	0	1	0	0
39) 3 anni	1	0	0	1	0	0
40) 4 anni	0	1	0	0	1	0
41) 3 anni	0	1	0	1	0	0
42) 4 anni	0	1	0	1	0	0
43) 4 anni	0	1	0	0	1	0
44) 3 anni	1	0	0	1	0	0
45) 4 anni	0	1	0	0	1	0
46) 5 anni	0	1	0	1	0	0
47) 5 anni	0	1	0	1	0	0
48) 4 anni	0	1	0	0	1	0
49) 5 anni	0	1	0	0	1	0
50) 5 anni	0	1	0	0	1	0
51) 5 anni	0	1	0	1	0	0
52) 5 anni	1	0	0	0	1	0
53) 5 anni	0	1	0	0	1	0
54) 5 anni	0	1	0	0	1	0
55) 5 anni	0	1	0	0	1	0
56) 5 anni	1	0	0	0	1	0
57) 5 anni	0	1	0	1	0	0
58) 5 anni	0	1	0	0	1	0
59) 4 anni	0	1	0	0	1	0
60) 5 anni	0	1	0	0	1	0
61) 5 anni	0	1	0	0	1	0
62) 5 anni	0	1	0	0	1	0
63) 6 anni	0	1	0	0	1	0
64) 6 anni	0	1	0	0	1	0
65) 6 anni	0	1	0	0	1	0
66) 6 anni	0	1	0	0	1	0
67) 4 anni	0	1	0	0	1	0
68) 6 anni	0	1	0	0	1	0
69) 5 anni	0	1	0	1	0	0
70) 4 anni	0	1	0	0	1	0
71) 5 anni	1	0	0	0	1	0
72) 4 anni	1	0	0	1	0	0
73) 4 anni	1	0	0	0	1	0
74) 3 anni	1	0	0	1	0	0
75) 3 anni	0	1	0	1	0	0
76) 3 anni	1	0	0	0	1	0

77) 6 anni	0	1	0	1	0	0
78) 5 anni	0	1	0	1	0	0
79) 4 anni	0	1	0	0	1	0
80) 5 anni	0	1	0	1	0	0
81) 5 anni	0	1	0	1	0	0
82) 4 anni	0	1	0	1	0	0
83) 5 anni	0	1	0	0	1	0
84) 5 anni	1	0	0	0	1	0
85) 5 anni	1	0	0	0	1	0
86) 4 anni	0	1	0	0	1	0
87) 5 anni	0	1	0	0	1	0
88) 5 anni	1	0	0	0	1	0
89) 4 anni	0	1	0	0	1	0
90) 5 anni	0	1	0	1	0	0
91) 5 anni	1	0	0	0	1	0
92) 5 anni	1	0	0	0	1	0
93) 4 anni	0	1	0	0	1	0
94) 5 anni	0	1	0	0	1	0

	DOMANDA E			DOMANDAF		
	file di caramelle ugualmente distanziate			file di caramelle diversamente distanziate		
	sono uguali	sono diverse	non lo sa	sono uguali	sono diverse	non lo sa
1) 6 anni	1	0	0	0	1	0
2) 5 anni	1	0	0	0	1	0
3) 6 anni	1	0	0	0	1	0
4) 5 anni	1	0	0	0	1	0
5) 5 anni	1	0	0	0	1	0
6) 6 anni	1	0	0	0	1	0
7) 6 anni	1	0	0	0	1	0
8) 5 anni	1	0	0	0	1	0
9) 5 anni	1	0	0	1	0	0
10) 6 anni	0	1	0	0	1	0
11) 6 anni	0	1	0	0	1	0
12) 5 anni	0	1	0	1	0	0
13) 6 anni	0	1	0	0	1	0
14) 5 anni	0	1	0	0	1	0
15) 6 anni	0	1	0	0	1	0
16) 5 anni	0	1	0	0	1	0
17) 5 anni	0	1	0	0	1	0
18) 5 anni	0	1	0	0	1	0
19) 5 anni	0	1	0	0	1	0
20) 5 anni	0	1	0	0	1	0
21) 5 anni	1	0	0	0	1	0
22) 5 anni	1	0	0	1	0	0
23) 5 anni	1	0	0	1	0	0
24) 3 anni	1	0	0	0	1	0
25) 4 anni	1	0	0	0	1	0
26) 4 anni	1	0	0	0	1	0

27) 4 anni	1	0	0	0	1	0
28) 3 anni	1	0	0	0	0	1
29) 3 anni	1	0	0	0	1	0
30) 3 anni	1	0	0	1	0	0
31) 4 anni	1	0	0	0	1	0
32) 3 anni	1	0	0	0	1	0
33) 3 anni	0	1	0	0	1	0
34) 4 anni	0	1	0	0	1	0
35) 4 anni	1	0	0	1	0	0
36) 3 anni	1	0	0	0	0	1
37) 3 anni	1	0	0	0	1	0
38) 4 anni	1	0	0	0	1	0
39) 3 anni	1	0	0	0	1	0
40) 4 anni	1	0	0	0	1	0
41) 3 anni	1	0	0	0	0	1
42) 4 anni	1	0	0	0	1	0
43) 4 anni	1	0	0	0	1	0
44) 3 anni	1	0	0	0	1	0
45) 4 anni	1	0	0	0	1	0
46) 5 anni	1	0	0	0	1	0
47) 5 anni	1	0	0	0	1	0
48) 4 anni	1	0	0	0	1	0
49) 5 anni	1	0	0	0	1	0
50) 5 anni	0	1	0	0	1	0
51) 5 anni	0	1	0	0	1	0
52) 5 anni	0	1	0	0	1	0
53) 5 anni	0	1	0	0	1	0
54) 5 anni	0	1	0	0	1	0
55) 5 anni	1	0	0	0	1	0
56) 5 anni	1	0	0	0	1	0
57) 5 anni	0	1	0	0	1	0
58) 5 anni	1	0	0	1	0	0
59) 4 anni	1	0	0	1	0	0
60) 5 anni	0	1	0	0	1	0
61) 5 anni	1	0	0	1	0	0
62) 5 anni	1	0	0	1	0	0
63) 6 anni	1	0	0	1	0	0
64) 6 anni	1	0	0	1	0	0
65) 6 anni	0	1	0	0	1	0
66) 6 anni	1	0	0	1	0	0
67) 4 anni	1	0	0	1	0	0
68) 6 anni	1	0	0	1	0	0
69) 5 anni	0	1	0	0	1	0
70) 4 anni	1	0	0	1	0	0
71) 5 anni	1	0	0	1	0	0
72) 4 anni	0	1	0	0	1	0
73) 4 anni	0	0	1	0	0	1
74) 3 anni	0	1	0	0	1	0
75) 3 anni	0	1	0	0	1	0
76) 3 anni	1	0	0	1	0	0
77) 6 anni	1	0	0	1	0	0

78) 5 anni	1	0	0	0	1	0
79) 4 anni	1	0	0	0	1	0
80) 5 anni	1	0	0	0	1	0
81) 5 anni	0	1	0	0	1	0
82) 4 anni	1	0	0	0	1	0
83) 5 anni	1	0	0	0	1	0
84) 5 anni	1	0	0	0	1	0
85) 5 anni	1	0	0	0	1	0
86) 4 anni	1	0	0	0	1	0
87) 5 anni	1	0	0	0	1	0
88) 5 anni	0	1	0	0	1	0
89) 4 anni	0	1	0	0	1	0
90) 5 anni	0	1	0	0	1	0
91) 5 anni	1	0	0	0	1	0
92) 5 anni	1	0	0	0	1	0
93) 4 anni	1	0	0	0	1	0
94) 5 anni	1	0	0	0	1	0

Test svolto a Dicembre 2004

	DOMANDA G			**DOMANDA H**		
	4 caramelle	9 caramelle	non lo sa	10 caramelle	11 Caramelle	non lo sa
1) 3 anni	0	1	0	0	1	0
2) 3 anni	0	1	0	0	1	0
3) 4 anni	0	1	0	1	0	0
4) 4 anni	0	0	1	0	0	1
5) 3 anni	1	0	0	1	0	0
6) 5 anni	0	1	0	1	0	0
7) 3 anni	1	0	0	1	0	0
8) 5 anni	0	1	0	1	0	0
9) 4 anni	1	0	0	0	1	0
10) 5 anni	0	1	0	1	0	0
11) 5 anni	0	1	0	0	1	0
12) 5 anni	0	1	0	0	1	0
13) 3 anni	1	0	0	1	0	0
14) 3 anni	0	0	1	0	0	1
15) 3 anni	0	0	1	0	0	1
16) 3 anni	1	0	0	1	0	0
17) 5 anni	1	0	0	0	1	0
18) 3 anni	1	0	0	0	1	0
19) 5 anni	0	1	0	0	1	0
20) 5 anni	1	0	0	1	0	0
21) 5 anni	1	0	0	0	1	0
22) 4 anni	0	1	0	0	1	0
22) 5 anni	0	1	0	1	0	0

23) 5 anni	1	0	0	0	1	0
24) 5 anni	0	1	0	0	1	0
25) 5 anni	0	1	0	0	1	0
26) 5 anni	0	1	0	0	1	0
27) 5 anni	1	0	0	1	0	0
28) 5 anni	0	1	0	1	0	0
29) 5 anni	1	0	0	0	1	0
30) 3 anni	0	1	0	0	1	0
31) 3 anni	1	0	0	1	0	0
32) 3 anni	0	0	1	0	0	1
33) 3 anni	0	0	1	0	0	1
34) 4 anni	0	1	0	0	1	0
35) 4 anni	0	1	0	0	1	0
35) 5 anni	0	1	0	1	0	0
36) 5 anni	1	0	0	1	0	0
37) 5 anni	0	1	0	0	1	0
38) 4 anni	1	0	0	1	0	0
40) 4 anni	0	1	0	0	1	0
41) 4 anni	0	1	0	1	0	0
42) 4 anni	0	1	0	0	1	0
43) 4 anni	1	0	0	1	0	0
44) 4 anni	0	1	0	1	0	0
45) 5 anni	0	1	0	1	0	0
46) 5 anni	1	0	0	1	0	0
47) 5 anni	0	1	0	0	1	0
48) 4 anni	0	1	0	0	1	0
49) 5 anni	1	0	0	0	1	0
50) 5 anni	1	0	0	1	0	0
51) 4 anni	0	1	0	0	1	0
52) 4 anni	0	1	0	1	0	0
53) 4 anni	0	1	0	1	0	0
54) 5 anni	0	1	0	1	0	0
55) 4 anni	0	1	0	0	1	0
56) 5 anni	0	1	0	0	1	0
57) 4 anni	0	1	0	1	0	0
58) 5 anni	0	1	0	0	1	0
59) 4 anni	1	0	0	0	1	0
60) 4 anni	0	1	0	1	0	0
61) 4 anni	0	1	0	1	0	0
62) 5 anni	0	1	0	0	1	0
63) 5 anni	0	1	0	0	1	0
64) 5 anni	0	1	0	0	1	0

Bibliografia

Butterworth B. (1999), *Intelligenza Matematica, vincere la paura dei numeri scoprendo le doti innate della mente*, Milano,Rizzoli. Tit. orig.: *The Mathematical Brian*, Basingstoke, UK: Macmillan, 1999.

D'Amico A. (2002), *Lettura, scrittura, calcolo. Processi cognitivi e disturbi dell'apprendimento*,Modica, Edizioni Carlo Amore.

Dehaene S. (2000), *Il Pallino della Matematica, Scoprire il genio dei numeri che è in noi,* Milano, Saggi. Tit. orig.: *La bosse des maths.*

Devlin k. (2002), *"Il Gene della matematica, per scoprire il matematico (nascosto) in ognuno di no",.* >> La lente di Galileo << 24, Milano, Longanesi & C..
Tit.orig.: *The Math Gene.*

Dines Z. P. (1971), *La matametica moderna nell'insegnamento primario*, Firenze, Edizioni OS.

Dienes Z. P. (1971), *Le sei tappe del processo d'apprendimento in matematica*, Firenze, Edizioni O S.

Fraire M.-Rizzi A. (1993), *Elementi di statistica*, Roma, La Nuova Italia Scientifica.

G.R.I.M. (1979), CIDI QUADERNI, *Sperimentazione sulla didattica della matematica nella prima elementare*, Palermo

Lino S.- Cocuzza S. (2002), *I Pre-requisiti per l'apprendimento della matematica*, *Indicazioni metodologiche e proposte didattiche*, Pisa, Edizioni del Cerro.

Lucangeli D.-S. Poli-A. Molin (2003), *L'intelligenza numerica*. *Abilità cognitive e metacognitivi nella costruzione della conoscenza numerica dai 6 anni agli 8,* Trento, Erickson.

Peja Daniela Olmetti (1998), *Teorie e tecniche dell'osservazione in classe*, Firenze, Giunti.

Piaget J.- Szeminska A. (1968), *La genesi del numero nel bambino,* Firenze, La Nuova Italia. Tit. orig.: *La genèse du nombre chez l'enfant*. Neuchatel Delachaux et Niestlé,1941.

Piaget J.- B. Boscher- A. Chatelet. (1970) *Avviamento al calcolo,* Firenze, La Nuova Italia. Tit. orig.:*Initiation au calcul (enfants de 4 a 7 ans).*

Piaget J., Inhelder (1971), *Lo sviluppo delle quantità fisiche nel bambino*. *Conservazione e atomismo,* Firenze, La Nuova Italia. Tit. orig.: *Le developpement des quantités physiques chez l'enfant.*

Piaget J. (2000), *Lo sviluppo mentale del bambino*,Torino, Einaudi. Tit. orig.: *Six études de Psicologie*, Editions Gouthier,1964.

15-17 novembre 2001, “Matematica 2001”,XXII Convegno UMI-CHM, Ischia.

Spagnolo F. (1998), *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*, Firenze, La Nuova Italia.

Speranza Francesco- Daniela Medici Zaffara- Pasquale Quattrocchi (1990), *Insegnare la Matematica, nella scuola elementare*, Bologna, Zanichelli .

Zanniello G. (1997) (a cura di), *La prepedagocità della sperimentazione*, Palermo, Palumbo.

Sitografia

http://www.homolacus.com/teorici/piaget/piaget.htm
http://www.infantiae.org/disasp270302uno.htm
http://www.matematicamente.it/attisanticesarea/Marchini.pdf
http://www2.unipr.it/urdidmath/Problemi/Parte%201/126.problisitdid.pdf
http://www.math.unipa.it/~grim/ricercirsae.pdf
http://www.math.unipa.it/~grim/storiadida.pdf