UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PALERMO

FACOLTA' DI SCIENZE DELLA FORMAZIONE

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE DELLA FORMAZIONE PRIMARIA

INDIRIZZO ELEMENTARE

SCHEMI DI RAGIONAMENTO APPROSSIMATO

IN SITUAZIONI D'INSEGNAMENTO/APPRENDIMENTO

NELLA SCUOLA PRIMARIA

TESI DI LAUREA DI

Giusi Greco
Matr. 0405907

RELATORI

Prof. Filippo Spagnolo

Prof. ssa Alessandra La Marca

ANNO ACCADEMICO 2004/2005

INDICE GENERALE

PREMESSA

L’interesse per la ricerca e lo studio che ho affrontato, nasce dalla profonda curiosità di conoscere come, nella mente del bambino di età compresa tra i 6 e gli 11 anni, si riscontrino gli schemi di ragionamento approssimato, in seguito alle lezioni svolte dal professore F. Spagnolo durante il corso di Didattica della matematica.

Così, affascinata dall’argomento e grazie al sostegno del professore, ho deciso di accingermi a questo percorso di ricerca.

All’inizio, erano tantissimi i dubbi, le domande, gli interrogativi che si affollavano dentro di me, ma via via mi addentravo nella ricerca l’interesse cresceva sempre più.

Il mio primo passo verso la ricerca è stato quello di procedere all’indagine del significato del concetto di APPROSSIMAZIONE. Così ho compiuto una mia documentazione personale, attraverso la lettura del “Pallino della matematica” di Stanislas Dehane, del “Gene della matematica” di Devlin, di “Genesi del numero nel bambino” di J. Piaget; tutto questo mi ha permesso di costruirmi, mentalmente, un quadro teorico generale sulle diverse posizioni dei vari autori rispetto al concetto di approssimazione.

Per indagare, quindi, la presenza o meno delle rappresentazioni approssimate nei bambini, ho articolato la ricerca in due fasi:

- *pre-test*
- *sperimentazione*

La fase di pre-test, ha previsto la somministrazione individuale di un test ad un piccolo campione, esso ha avuto un riscontro poco positivo rispetto alle aspettative; questo mi ha permesso di correggere ed in qualche modo migliorare il questionario che avevo inizialmente ideato, andando alla ricerca di situazioni che potessero centrare ancor meglio l’argomento in discussione.

Il test che ho redatto è stato utilizzato durante la fase di sperimentazione, la quale ha visto coinvolto un campione piuttosto ampio, composto da 95 bambini appartenente al primo e al secondo biennio di scuola primaria.

I dati sono stati raccolti su alcuni protocolli. Alla raccolta è seguita l’analisi dei dati sperimentali, la quale ha previsto: l’analisi a-priori dei comportamenti ipotizzabili, l’analisi descrittiva (effettuata attraverso l’utilizzo di un foglio elettronico EXCEL); l’analisi quantitativa, per la quale ci si è serviti dell’analisi implicativa delle variabili di Regis Gras.

La metodologia utilizzata ha adottato come paradigma teorico di riferimento la teoria delle situazioni di Guy Brousseau e la didattica metacognitiva .

Nel lavoro di ricerca un enorme contributo mi è stato offerto dalla Pedagogia Sperimentale, per quel che concerne l'organizzazione generale, in quanto mi ha consentito di procedere seguendo la serie di tappe che riassumono l'intero processo (ipotesi, scelta del campione, metodologia, l'analisi a-priori, descrizione ed analisi dei dati sperimentali…)

Nasce così la mia ricerca, che presento di seguito nei vari capitoli. Essa è stata articolata in sei capitoli.

Il **primo capitolo** ho approfondito, analizzato e sottolineato l'aspetto teorico, ed in particolare mi sono soffermata a discutere sul concetto di numero nel bambino e sui caratteri principali dell'approssimazione, facendo un costante riferimento ad autori quali Jean Piaget, Stanislas Dehaene, Kieth Devlin, Brian Butterworth, i quali hanno offerto notevoli contributi e suggerimenti alla psicologia, alla pedagogia, alla didattica della matematica….

Il **secondo capitolo** approfondisce la ricerca dal punto di vista teorico. Ho esplicitato così in maniera sintetica le diverse tappe che la caratterizzano, al fine di comprendere meglio il dominio della Ricerca in Didattica ed il paradigma della teoria delle situazioni di Guy Brousseau, i quali sono stati considerati come punto di riferimento per l'individuazione dei contesti teorico-sperimentali.

Il **terzo capitolo** riportala fase di pre-test, con l'annessa descrizione del campione di riferimento, l'analisi a-priori, l'analisi dei dati e le modifiche apportate prima di poter procedere con la fase di sperimentazione.

Il **quarto capitolo** entra nel cuore della ricerca, in quanto costituisce la descrizione dell'esperienza di Ricerca in didattica. Esso si presenta ben articolato, infatti dopo aver riportato la premessa alla sperimentazione, ho descritto l'ipotesi, il campione, la metodologia adoperata, l'analisi a-priori e i comportamenti attesi degli allievi.

Nel **quinto capitolo** ho proceduto con la tabulazione dei dati sperimentali, operando così sia un'analisi di carattere quantitativo, sia di carattere qualitativo.

Nel **sesto capitolo** vengono riportate le considerazioni conclusive che hanno consentito un'ulteriore riflessione con l'annessa analisi dei risultati raggiunti.

Seguono infine i ringraziamenti, gli allegati e la bibliografia.

“ Osservo che quando enunciamo un
numero elevato, per esempio mille,
lo spirito non ne ha generalmente
un’idea adeguata, ha soltanto il
potere riprodurre questa idea
mediante l’idea adeguata che ha
del sistema decimale,
ove il numero è compreso”

(DAVID HUME)

CAPITOLO I

IL NUMERO: ANALISI DI UN NODO CONCETTUALE

PREMESSA

Il concetto di numero non può prescindere da quello di matematica. Se facessimo un sondaggio e chiederemmo cosa significa per te matematica sicuramente raccoglieremmo risposte del tipo <<è lo studio del numero>>, <<è la scienza dei numeri>>, <<eseguire calcoli con i numeri>>.

Queste risposte, ritenute oggi alquanto errate, richiamano un po' la concezione che si aveva in passato; fino al 500 a.C. la matematica era vista come qualcosa che riguardava i numeri: gli Egizi, i Babilonesi ed i Cinesi utilizzavano infatti il termine matematica come sinonimo di aritmetica.

Fra il 500 a.C. ed il 399 a.C., i matematici greci espansero il campo di interesse della matematica oltre lo studio dei numeri curando anche gli aspetti di carattere geometrico. Cominciarono a rivalutare i numeri considerandoli da una prospettiva geometrica, in termini ad esempio di misure di lunghezza.

Grazie quindi al contributo dei Greci la concezione di matematica passò dall'essere un insieme di numeri attraverso i quali contare, calcolare e misurare, all'essere una disciplina teorica comprendente elementi estetici e religiosi.

Dopo i Greci, studiosi quali Sir Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz inventarono i calcolo infinitesimale, facendo acquisire alla matematica una nuova connotazione: studio dei numeri, delle forme, delle variazioni e dello spazio.

Dopo il 1750 l'interesse per la matematica teorica andò crescendo sempre più costantemente sino a giungere alla fine del XIX secolo, quando ottenne molta importanza lo studio della matematica moderna intesa come la scienza dei modelli, dell'ordine, della struttura e delle relazioni logiche.

I diversi tipi di modelli (simmetrie, orbite,…) vita alle diverse branche della matematica: per fare un esempio la teoria dei numeri studia i modelli che riguardano il numero ed il calcolo.

Viene allora da chiedersi cos'è un numero? Quale idea ha l'uomo del concetto di numero?

1.1. Un nodo concettuale intricato.

Si fa presto a dire "numero" ma più difficile è rendere conto della complessità del concetto che nasce dall'incontro di aspetti diversi e si presta a differenti letture interpretative.

D'altra parte, come un nodo, appunto, che, generato dall'intrico dei fili che lo compongono è tuttavia altro dai singoli fili componenti, il concetto di numero esprime un senso che va oltre la giustapposizione delle singole istanze che lo hanno generato.

I numeri hanno influenzato quasi tutti gli aspetti più tipicamente umani della nostra vita. Essi sono stati usati, probabilmente, sin dalla preistoria.

Oggi utilizziamo abitualmente i numeri: per contare oggetti, per fare statistiche, per classificare, per indicare beni, servizi, età, codici a barre, targhe automobilistiche, per enunciare le teorie fondamentali della natura fisica ……

Usare i numeri per commerciare, ordinare, classificare …. sembra cosa facile, comoda e naturale. Questo in un certo modo potrebbe essere sorprendente, dato che i numeri sono, come dice Adam Smith, “fra le idee più astratte che la mente umana è in grado di formare”. Servirsi dei numeri, quindi, dovrebbe richiedere una grande preparazione; eppure chiunque è in grado di contare e di eseguire semplici operazioni aritmetiche.

L’importanza dei numeri non sta soltanto nella loro ovvia utilità, ma anche nella maniera in cui essi hanno foggiato il nostro modo di concepire il mondo. Come affermò Albert Einstein, essi sono la “controparte simbolica dell’universo”.

1.2. Senso comune, dizionari, enciclopedie.

Cosa sono, dunque, i numeri nel pensiero comune? Dopo aver tolto subito di mezzo l'equivoco (pure molto diffuso) per cui il numero è una parola ("uno, due, tre..."), o un simbolo ("1, 2, 3,..."), osserviamo che, per la maggior parte delle persone i numeri sono le "**entità**" con cui si "**contano**" gli oggetti. E in effetti il **saper contare** è generalmente considerata una abilità comune, posseduta dalla totalità degli individui delle popolazioni civilizzate, anche dagli analfabeti. Naturalmente ci potranno essere persone che non conoscono l'uso dei simboli, o gli algoritmi per effettuare le operazioni, ma ciò non toglie che anche gli strati più incolti di una popolazione sappiano "**contare**" gli oggetti con cui hanno a che fare, eventualmente aiutandosi con strumenti rozzi di conteggio.

Questo potrebbe far pensare che i numeri siano "**innati**", così come è innato il fatto di usare la voce per esprimersi o gli arti per muoversi, e che siano presenti nella forma che conosciamo nella mente di ogni essere umano.
Questi enti che "**servono per contare**" appaiono infatti così connaturali all'uomo e al suo pensiero che non a caso sono stati chiamati dai matematici "**numeri naturali**"; e solo molto tardi, alla fine del secolo scorso, i matematici professionisti hanno provato il bisogno di darne una definizione rigorosa.
Tutti dunque sappiamo contare, ma ci sarebbe difficile dire, ad esempio, che cos'è il 5. Un modo per tentare di "definire" il 5 potrebbe essere quello di guardare a "**ciò che hanno in comune** le dita di una mano, di un piede, i giorni lavorativi della settimana corta, i punti racchiusi tra le seguenti parentesi graffe {**. . . . .** }, le lettere racchiuse tra le seguenti parentesi quadre [C F U H L], etc...".
Naturalmente bisognerebbe prolungare la lista a tutti gli **insiemi** che hanno cinque elementi, per poter dire che ciò che tutti gli insiemi di cinque elementi hanno in comune è proprio il fatto di contenere cinque oggetti, la qualità dell'essere cinque che è una qualità astratta.
Si vede dunque che la teoria matematica prende le mosse dal "senso comune" e cerca di rispondere a esigenze cognitive molto naturali. Contemporaneamente però, si osserva anche che l'idea di base che cerca di cogliere la "cinquità" si riferisce ad un solo aspetto della "natura" del numero e non esaurisce tutte le possibilità d'uso del "cinque": ad esempio, lascia in ombra completamente (almeno all'inizio) l'aspetto **ordinale** del numero.
Questo aspetto può, a buon diritto, essere considerato altrettanto "primitivo" che quello cardinale. Individuare la posizione di un elemento in una sequenza ordinata è una operazione di base, concettualmente distinta da quella di misurare la quantità di un insieme discreto. E per dare alla parola "primitivo" una colorazione antropologica, potremmo ricordare che esistono popolazioni che non usano dare nomi ai figli, e semplicemente usano (in tutte le famiglie) soltanto l'equivalente del nostro "Primo, Secondo, Terzo....".
È il caso quindi di ricercare cosa siano i numeri nel linguaggio e nell'uso comune, per poi tentare di precisare il concetto in senso matematico. A questo scopo, scegliamo come punto di partenza un luogo ufficiale: un dizionario della lingua italiana che, per sua natura, dovrebbe essere in grado di parlare a chiunque.
Dice lo Zingarelli:

“**numero** *s.m.* **1.** (*mat.*) ente matematico che caratterizza un insieme di cose o persone | Elemento di un insieme nel quale sono definite le operazioni fondamentali (con le proprietà commutativa, associativa e distributiva della moltiplicazione rispetto all’addizione) e solitamente una relazione d’ordine | -*naturale*, numero intero positivo: 1, 2, 3… | -*relativo*, maggiore o minore di zero, zero compreso: … -2, -1, 0, 1, 2 …. | -*cardinale*, numero che dice quanti elementi vi sono in un insieme | - *ordinale*, numero che indica l’ordine tra gli elementi di un insieme | -*primo*, divisibile solo per 1 e per se stesso | - *pari*, *dispari*, divisibile o no per 2 | - *razionale*, ogni numero intero, decimale, frazionario esprimibile come un rapporto tra due numeri interi | - *frazionario*, frazione | -*immaginario*, radice quadrata di un numero negativo | - *complesso*, somma di un numero reale ed un numero immaginario.”

Delle due definizioni che troviamo la prima è troppo vaga tanto che ... non significa nulla (c'è da chiedersi cosa comunichi al lettore, visto che non viene spiegato in che senso il numero caratterizzerebbe un insieme), la seconda è più precisa, ma non dice nulla al lettore comune (anche se evoca nozioni in qualche modo note: operazioni, proprietà commutativa ...). La seconda definizione, comunque, mette in guardia nei confronti della possibile confusione tra numero e sua rappresentazione; inoltre implicitamente lo definisce come "**l'oggetto dell'aritmetica**".

Per saperne di più (abbiamo bisogno di qualche spiegazione che getti luce sulla seconda definizione che appare più tecnica) prendiamo l'Enciclopedia Italiana: qui troviamo una voce (scritta nel 1936), curata da un matematico di fama (Federigo Enriques), che rinuncia, in un primo tempo, a darne una definizione, e presenta il concetto di numero **tracciando** un excursus di tipo **storico**.

Ma come esplorare queste questioni, come fare luce nella notte dei tempi e come riuscire a guardare dentro quel sistema delicatissimo e in tumultuosa evoluzione che è il bambino?

Sarebbe interessante poter indagare su come tale concetto si è formato lungo la storia della civiltà (anzi, l**e** stori**e** dell**e** civiltà), con tutte le sue generalizzazioni e innumerevoli applicazioni; e vorremmo capire come si forma, si costruisce, o si scopre, e attraverso quali tappe, nella vita di ogni uomo.

Se per un verso non possiamo accontentarci di una nozione mal fondata su un generico "senso comune", per un altro verso anche la nozione matematica rigorosa non ci può soddisfare perché costituisce piuttosto il **punto di arrivo** di un processo alla cui analisi concorrono varie discipline.

Per indagare tali questioni è necessario ricorrere a fonti inevitabilmente indirette ed esterne alla matematica, per la cui interpretazione sono richieste una serie di ipotesi di tipo filosofico, che sono in generale abbastanza comunemente accettate. Le discipline che possono aiutare sono l'**etnografia**, la **linguistica**, la **psicologia infantile**, in misura minore l'**etologia** .

Usare l'**etnografia** vuol dire cercare di comprendere come viene affrontato un problema (nel nostro caso, quello di contare) dalle popolazioni primitive, che spesso adottano procedure meno efficaci delle nostre. A partire da questi dati si cerca per analogia e per estensione di ricostruire cosa è successo negli stadi più antichi delle civiltà che, come la nostra, hanno elaborato sistemi più complessi, e come questa evoluzione si è messa in moto.

Quando si usa la **linguistica** (applicata soprattutto ai linguaggi dei primitivi) si cerca di usare il linguaggio come una finestra sui processi mentali attraverso cui l'uomo riesce ad avvicinarsi a concetti astratti, quali i numeri.

Anche la **psicologia infantile** è centrale nello studio del concetto di numero. Un bambino si trova ad affrontare molte situazioni e problemi che noi sappiamo ricondurre alla nozione di numero; li affronta e li risolve, e le sue azioni possono aiutarci a ricostruire la genesi e lo sviluppo di una maturazione che lo porterà a condividere con noi la nozione di numero.

In questo caso come nel precedente si cerca di capire il comportamento della mente umana, "spogliata" il più possibile dalle influenze esterne, per vedere in definitiva come si origina il procedimento di astrazione che è alla base del concetto di numero.

Usare l'**etologia**, con grande cautela metodologica, vuol dire capire quali comportamenti numerici presenti negli animali hanno un analogo nell'uomo e sono quindi legati a fatti puramente biologici o genetici.

Un enorme riscontro in tutto questo è possibile averlo grazie agli studi di alcuni studiosi quali Stanislas Dehaene, Keith Devlin e Brian Butterworth, i quali attraverso diverse situazioni sperimentali di studiare l’intelligenza matematica e il concetto di numero del bambino.

Le loro ricerche prendono le mosse dalla teoria di Jean Piaget a proposito della genesi del numero nel bambino.

1.3. Il concetto di numero nel bambino secondo Jean Piaget

Gran parte delle opinioni attualmente più diffuse sulle capacità mentali dei bambini piccoli deriva dal lavoro che lo psicologo cognitivista ginevrino Jean Piaget svolse intorno agli anni ‘40-‘50.
Egli, oltre che di sviluppo mentale infantile, si interessò di studiare la *genesi del numero* nel bambino; alcune sue esperienze sono state confermate da successive osservazioni, altre invece sono state interpretate diversamente alla luce di nuove prospettive di studio. Naturalmente esiste sempre la possibilità di interpretare e spiegare in modo radicalmente diverso gli stessi fatti sperimentali; va anche detto che sono state avanzate riserve su alcuni aspetti della metodologia di Piaget e della sua scuola.
Egli sosteneva che il bambino alla nascita non possedesse un senso del numero, ma questo era qualcosa che andava acquisito intorno ai quattro-cinque anni d’età.
La sua tesi principale è che l'acquisizione del concetto di numero si sviluppa per tappe successive, parallelamente al **consolidarsi delle strutture logiche**, e che la sequenza dei numeri è la **sintesi operatoria** della comprensione sia dell'aspetto **ordinale** che dell'aspetto **cardinale**. Una volta acquisita definitivamente, è sentita dal bambino come una cosa **a priori**, da sempre conosciuta, e non più rimessa in discussione.
La comprensione della **conservazione delle quantità** (e quindi, per astrazione, la comprensione del concetto di quantità), sia che si tratti di quantità **discrete** (un insieme di oggetti come ad esempio bottoni) sia che si tratti di quantità **continue** (quale ad esempio quella di un liquido in un bicchiere), passa attraverso i **tre stadi** seguenti:
1) Al bambino piccolo sembra naturale che la quantità di bottoni o la quantità di un liquido varino a seconda della disposizione dei bottoni stessi o, rispettivamente, della forma e della dimensione dei bicchieri che contengono il liquido in questione: la percezione dei cambiamenti apparenti non è soggetta alle correzioni operate da un sistema di relazioni che garantisce l'**invarianza** delle quantità.
2) In un secondo stadio di transizione la conservazione si impone progressivamente, e viene scoperta in corrispondenza a certe configurazioni oppure in certi travasi, con particolari caratteristiche, ma non in tutti. Il bambino riesce a correlare la quantità ad uno dei parametri in gioco (altezza, o larghezza del recipiente), ma non a coordinare i diversi parametri.
3) In un terzo stadio, il bambino **postula** di colpo la conservazione delle quantità: è per lui ovvio che cambiando la disposizione dei bottoni o la forma del recipiente la quantità non cambia; le domande che gli stiamo facendo gli sembrano troppo facili, prive di

senso. Infatti, proprio questo è il punto: nelle fasi precedenti, il bambino sbaglia a rispondere perché proprio non capisce cosa vogliamo chiedergli.

Nel *primo* stadio il bambino si limita a una percezione globale, intuitiva. Con una forzatura, si potrebbe chiamare "biologica": esperimenti sugli animali e sul loro modo di percepire le quantità hanno permesso di verificare che persino nei casi più avanzati gli animali giudicano le quantità esclusivamente dal punto di vista dell'estensione spaziale o di una qualche sensazione ad essa equivalente, magari molto raffinata; un uccello tenderà a scegliere un mucchio di venti chicchi di becchime rispetto ad uno di trenta, se il primo occupa più spazio; l'uccello "non sa contare" oltre un certo limite. Si tratta ancora di una **quantità bruta**; la quantificazione non va al di là del rapporto percettivo immediato; il bambino si fida solo della percezione sensibile e comprende solo parzialmente il problema. Questo stadio può durare fino a 5 anni, talvolta oltre.

Nel *secondo* stadio il bambino comprende il problema, riesce a seguire i ragionamenti, ma oscilla continuamente tra un tentativo di coordinazione logica e la sottomissione alle illusioni percettive. Cerca di giustificare con operazione logiche quello che inizia a vedere come una esigenza, la conservazione della quantità. Non riesce però ancora a coordinare le diverse percezioni: la percezione delle quantità si sta strutturando. Questo stadio si incontra frequentemente in bambini di sei anni, ed anche oltre.

Nel *terzo* stadio è ormai acquisita la consapevolezza del fatto che la quantità si conserva, indipendentemente dalla disposizione dei bottoni, dai travasi o dalle suddivisioni. Come il bambino scopre questa invarianza, la afferma come una cosa così semplice e evidente che gli appare del tutto indipendente da ogni operazione o ogni ragionamento.

E' la scoperta della conservazione che porta alla possibilità di coordinare le diverse percezioni.

Gli stadi appena descritti sono del tutto indipendenti dalla conoscenza dei nomi e/o dei simboli dei numeri. Il numero nasce come conseguenza della scoperta dell'invarianza della quantità: talvolta si incontrano bambini che sono in grado di stabilire una **corrispondenza biunivoca** senza che questo li aiuti a padroneggiare il concetto di numero: infatti la corrispondenza è percepita fino a che esiste un contatto visivo o spaziale tra gli insiemi, ma cessa di esistere quando il contatto viene abolito o modificato.

In relazione a quanto detto dobbiamo osservare, chiarendo un punto fondamentale sorgente di infiniti malintesi e discussioni con i genitori dei bambini, che le seguenti cose sono molto diverse:

- **saper contare**, cioè avere la capacità di riconoscere e operare sulle quantità (discrete), con particolare riguardo alla **invarianza** del numero degli oggetti di un insieme rispetto alle disposizioni, suddivisioni ecc. di tali oggetti;
- **conoscere i nomi dei numeri**, sotto forma di filastrocca, eventualmente abbinata alla capacità di "fare la conta", in modo meccanico, di una sequenza di oggetti di un insieme ordinato;
- **conoscere i simboli dei numeri** , riconoscerli sul telecomando del televisore, sull'orologio, sulla facciata delle case .....

Normalmente, i bambini della scuola dell'infanzia sanno già riconoscere i simboli delle cifre arabe. Ma per loro sono solamente **simboli** o contrassegni, come se fossero la stellina, il triangolo o il coniglietto con cui identificano il proprio grembiule. Di fatto, le cifre sono per lui solo simboli e non gli è chiaro cosa ci sia dietro al simbolo 7 come numero, non è detto cioè che sia in grado di assegnarlo correttamente ad un insieme di 7 elementi.

Lo stesso discorso vale per i **nomi** dei numeri. Secondo un'esperienza che tutti avranno fatto (e da cui sostanzialmente è partito J. Piaget), il bambino sa "contare" un certo numero di biglie (ad esempio 6) ma, se ne viene cambiata la disposizione sotto i suoi occhi e gli si chiede ancora quante biglie ci sono, egli **conta di nuovo** per dare la risposta (magari sbagliandosi). Sono osservazioni di questo tipo che vengono spiegate riferendosi alla mancanza della **conservazione della quantità** da parte del bambino, anche se ha già una conoscenza corretta del nome dei numeri, del procedimento del contare, e persino della corrispondenza biunivoca.

Dunque la corrispondenza biunivoca è un passo verso la comprensione del numero, ma non è sufficiente per il bambino: nemmeno procedimenti di "scambio uno a uno" ("io ti do una moneta, tu mi dai una macchinina") lo conducono necessariamente a convincersi che le quantità degli oggetti scambiate siano le stesse, con tutte le conseguenze operative e concettuali che questo comporta.

Se prendiamo in considerazione un bambino di tre o quattro anni e, di fronte a due o tre caramelle, gli chiediamo quante siano, probabilmente risponde in modo corretto, a colpo d'occhio, senza bisogno di contarle. Lo stesso bambino mostrerà di sapere "recitare", come fosse una filastrocca, i nomi dei numeri nel loro ordine giusto, fino al cinque ed oltre. Ma ancora se gli verrà chiesto di contare le tre caramelle già considerate, non necessariamente sarà in grado di compiere l'operazione in modo corretto.

Queste osservazioni, che chiunque può facilmente verificare, mostrano che il bambino di tre-quattro anni, pur mostrando di saper praticare attività che attengono al concetto di numero, non possiede di fatto tale nozione, almeno in senso proprio e completo.

Possiamo comunque ritenere, pur con differenze notevoli di interpretazione, che proprio nell'età tra i cinque e i sei anni, nel momento del passaggio tra la scuole dell'infanzia e la scuola elementare, avviene un cambiamento nel modo di operare e ragionare del bambino.

Esperienze di vario tipo, il cui esame sistematico risale fondamentalmente al lavoro di **J. Piaget** e della sua scuola, mettono in luce che è **tra i cinque e i sei anni** che il bambino inizia ad esplicitare, come **struttura** che resterà definitivamente in lui, e che poi utilizzerà come "**naturale**":

- la nozione di **conservazione della quantità** di un insieme come una proprietà indipendente dalle forme attraverso cui un insieme o un oggetto si presenta e viene percepito (ad esempio, la forma del recipiente, o la disposizione degli oggetti).
- il **concetto di numero** come misura della quantità degli oggetti di un insieme o della posizione di un oggetto in una sequenza ordinata (come "proprietà intrinseca" dell'insieme o dell'oggetto nella sequenza).

Questo naturalmente non vuol dire che capacità numeriche più o meno esplicite non siano presenti anche molto prima, e che l'acquisizione completa del concetto di numero non si prolunghi lungo tutto l'arco della scuola primaria ed anche oltre. A più di cinquant’anni dalla pubblicazione dell'opera fondamentale di Jean Piaget e Alina Szeminska ciò che sappiamo di sicuro è che il cammino verso il numero è molto più complesso e ricco di problemi di quanto non si pensasse allora.

All’epoca gli esperimenti di Piaget furono considerati un trionfo della psicologia sperimentale.

In definitiva, le esperienze di Piaget mostrano che solo verso i 7 anni si può dare per scontato che i bambini abbiano in maggioranza acquisito l'invarianza della quantità e quindi sappiano usare a proposito i numeri, nel loro aspetto ordinale e cardinale. L'età intorno ai sei anni è quindi critica ai fini di questa acquisizione; a quest'età i bambini si trovano in un'area di "**sviluppo prossimale**", ed è per questo che proprio il concetto di numero ha un ruolo centrale nella **continuità** da costruire tra la scuola dell'infanzia e la scuola primaria.

Di fatto, è innegabile che il bambino sviluppi il concetto di numero attraverso una serie di stadi che vengono a maturazione piuttosto rigidamente. E' bene non forzare questa rigidità, ma si può tanche se è possibile favorire la maturazione guidando il bambino attraverso esperienze concrete in cui siano presenti l'aspetto ordinale, l'aspetto cardinale e quello di misura, senza necessariamente organizzare formalmente tali esperienze prima del tempo.

1.4. L’ipotesi di Stanislas Dehaene

Soltanto da circa dieci anni, raffinatissimi strumenti possono consentire di visualizzare in modo sempre più preciso l’attività cerebrale ed avviare nuovi rivoluzionari studi sul cervello, arrivando, a localizzare anche i circuiti neurali della matematica.

Infatti, di contro a quanto sostenuto dai costruttivisti (con il suo massimo esponente Piaget), Stanislas Dehaene dichiara che: << il cervello del bambino non è una spugna; è un organo già strutturato che impara soltanto ciò che è in risonanza con le sue conoscenze anteriori>>.

Egli sostiene inoltre che già al momento della nascita i bambini possiedano eccellenti capacità di distinzione numerica.

Il neonato è capace di distinguere insiemi contenenti due oggetti da insiemi che ne contengono tre, ed inoltre pare che le sue capacità intuitive siano così raffinate da riconoscere la differenza tra due e tre suoni.

Secondo S. Dehaene ciò è possibile in quanto nel nostro cervello vi è un organo preposto alla percezione e alla rappresentazione delle quantità numeriche (codificate geneticamente), le cui caratteristiche lo collegano indubbiamente alle facoltà protoaritmetiche presenti negli animali e nei bambini molto piccoli.

L'ipotesi di Dehaene è che gli esseri umani siano provvisti di un "senso matematico", che essi condividono con altre specie animali, e che questo istinto sia l'espressione del funzionamento di un organo mentale, un insieme di circuiti cerebrali capaci di trattare l'informazione presente nell'ambiente in termini di quantità.

Dagli esperimenti sulle capacità di calcolo negli animali ai risultati recenti sui bambini pre-linguistici, Dehaene percorre l'immensa letteratura sperimentale dedicata alle competenze numeriche negli esseri umani e negli animali per concludere che il nostro istinto matematico è realizzato da un circuito cerebrale, presente anche in altre specie, che funziona come un **accumulatore**, un contatore approssimativo che ci permette di percepire, di memorizzare e confrontare grandezze numeriche; “esso, rappresenta i numeri come quantità approssimate, un po’ come fosse il livello di liquido in una bottiglia, dove numeri diversi sono rappresentati da livelli diversi.

L’Accumulatore opera registrando eventi, una goccia di liquido per ogni evento”. (Butterworth, 1999, p. 22)

Proprio come i ratti siamo in grado di numerare rapidamente collezioni di oggetti (visivi o sonori), addizionarli e confrontarne la cardinalità, facendo una rapida stima delle grandezza di un insieme.

Esiste un limite a questa capacità di numerazione?

Nel 1886, Cattel, dimostrò che quando ad un soggetto si mostra per un tempo molto breve un cartoncino con vari puntini neri, questi riesce a contarli con precisione soltanto se il loro numero non è superiore a 3. Al di la di questa cifra gli errori si vanno accumulando rapidamente.

Molto importante fu anche il contributo di Bourdon, il quale scoprì la legge fondamentale del conteggio visuale nell’uomo. Il tempo necessario per riconoscere e contare una quantità fissa di punti cresce all’inizio lentamente da 1 fino a 3, al di là di questo limite, si innalza bruscamente, aumentando notevolmente il numero di errori.

Ma qual è il rapporto tra questa rudimentale intuizione delle quantità e l'evoluzione delle conoscenze matematiche nella storia umana? Quali risorse cognitive ci consentono di oltrepassare l'approssimazione incarnata nel nostro cervello ed apprendere il rigore degli algoritmi aritmetici?

Se il nostro cervello si limitasse a condividere le risorse numeriche del cervello di topi e piccioni, i nostri sistemi di calcolo non andrebbero al di la del numero 3. Ma il nostro cervello contiene molto di più: esso contiene circuiti specializzati per la rappresentazione simbolica che consentono di associare simboli arbitrari a rappresentazioni mentali: in altre parole, il nostro è il cervello di una specie provvista di linguaggio.

Dehaene presenta una serie di esperimenti molto convincenti volti a mostrare come la nostra capacità di calcolo usi risorse differenti per la rappresentazione dei primi tre numeri interi positivi: uno, due e tre.

In questi casi elementari, infatti, la nostra percezione delle quantità è istantanea. Noi non "contiamo" i numeri fino a tre: ne percepiamo immediatamente la presenza.

“Uno, due e tre sono quantità che il cervello percepisce senza sforzo e senza far di conto” (Dehaene, pp. 102). Il termine tecnico per indicare questo processo è: "subitizzazione", termine derivato dal latino *subitus*, che sottolinea il suo aspetto di “subitaneo” o “improvviso”. A partire dal numero 4 invece, le risorse cognitive per operare sulle quantità sono differenti: esse dipendono dalle nostre capacità di manipolare simboli. Quindi, per la subitizzazione sono necessarie delle operazioni visive, la cui durata aumenta al variare del numero da riconoscere.

Ciononostante, il nostro istinto numerico più primitivo interviene anche nella manipolazione delle cifre simboliche: per confrontare grandezze numeriche diverse, approssimare grandi quantità, eseguire calcoli complicati, il nostro cervello non può evitare di rappresentarsi i numeri come quantità continue e provviste di proprietà spaziali, così come farebbe un topo o uno scimpanzé.

In tutte le lingue, la notazione per i primi tre numeri è "analogica", a partire dal 4, la notazione diventa simbolica, cosa che indica i limiti della percezione immediata delle quantità numeriche.

Questo meccanismo, quindi, genera una discontinuità tra il numero 3 e il numero 4, in quanto la precisione dell’accumulatore decresce all’aumentare dei numeri, così diviene sempre più difficile distinguere un numero n dai suoi vicini n+1 e n-1. Sembra che 4 sia il primo numero che il nostro accumulatore non distingue più bene dai suoi vicini 3 e 5. Ecco perché, al di la del 4, siamo costretti a contare gli oggetti: il nostro accumulatore continua a fornirci una stima del numero, ma la sua precisione non è più sufficiente per scegliere con esattezza la parola giusta.

Il fatto che quando superiamo i 3 oggetti il nostro comportamento cambia, indica che molto probabilmente il nostro cervello si serve di due meccanismi diversi.

Per insiemi contenenti al massimo tre elementi, il riconoscimento della numerosità sembra pressoché istantaneo e viene effettuato senza contare. Per insiemi di quattro o più elementi il risultato viene ottenuto contando gli elementi. Il tempo necessario per stabilire la numerosità di un insieme aumenta in modo lineare passando da tre a sei.

Quanto sin ora esposto trova ulteriori conferme negli studi condotti su pazienti con particolari lesioni cerebrali. È stato dimostrato che sebbene spesso le lesioni cerebrali distruggono diverse facoltà mentali, a volte possono essere ben localizzate offrendo grandi spunti agli studi.

Una dimostrazione a tal proposito viene data da Dehaene, il quale narra il caso di una paziente cerebrolesa, la quale aveva cancellato la capacità di contare, ma se le si mostravano tre punti su uno schermo era in grado di dire quanti fossero.

1.4.1. Cosa succede quando si hanno di fronte numeri grandi?

L'esperienza quotidiana ci dimostra che qualsiasi adulto riesce a stimare, con un margine di incertezza, numeri ben superiori al tre e al quattro. Messi di fronte ad una folla, non siamo in grado di indicarne il numero preciso, ma anche senza contare riusciamo a farne una buona stima. Queste approssimazioni, in genere sono abbastanza esatte, soprattutto se si tratta di situazioni riscontrabili nella vita quotidiana in cui possiamo verificarne l'esattezza.

La nostra percezione di numeri grandi obbedisce alle stesse leggi che regolano il comportamento animale; per esempio ci è più facile distinguere due numeri lontani tra di loro come 70 e 100, piuttosto due numeri vicini come 85 e 86. la nostra valutazione delle quantità obbedisce ad un effetto distanza.

La prima dimostrazione sperimentale di tale fenomeno risale al 1967 grazie agli studi di due psicologi americani Robert Moyer e Thomas Landauer; il loro esperimento consisteva nel mostrare coppie di numeri, per esempio 8 e 9, e chiedere ad un soggetto di indicare da che parte stesse la cifra più grande. I tempi delle risposte erano cronometrati elettronicamente.

I primi risultati dimostrarono che, questo confronto così elementare, richiedeva quasi mezzo secondo ed era inoltre possibile riscontrare errori; la sorpresa più grande si ebbe quando venne notata una variazione delle prestazioni in funzione dei numeri presentati, infatti di fronte a due numeri, uno dei quali fosse molto più piccolo dell'altro (ad esempio 2 e 9), i soggetti rispondevano rapidamente e con precisione. Nel caso in cui i due numeri erano più vicini, per esempio 5 e 6, i tempi di risposta si allungavano ed inoltre almeno in un caso su dieci la risposta era sbagliata.

Inoltre si notò che pur mantenendo fissa la distanza numerica, i tempi di risposta aumentavano via via i numeri diventavano più grandi. In altre parole, decidere quale fosse più grande tra 1 e 2 era semplicissimo, ma per decidere tra 2 e 3 occorreva un po' di più, e fra 8 e 9 ancora di più e così via.

Gli esperimenti di confronto numerico ed altre indagini dimostrano che nel nostro cervello abbiamo "una sorta di linea mentale dei numeri", lungo la quale vediamo i

numeri come punti su una retta, con l’uno a sinistra ed il due alla sua destra, e poi il tre e così via.
Per decidere qual è il maggiore fra i due procediamo, inizialmente localizzandoli entrambi sulla nostra linea mentale, e poi verificando quale dei due si trovi alla destra dell’altro.
Su questa retta però i numeri non si trovano distanziati in modo uniforme; quanto più ci spingiamo avanti nella nostra linea mentale, tanto più ravvicinati si trovano i nostri numeri.

1.4.2 Apprendere il lessico e la sintassi dei numeri non è tutto!

Molto spesso i bambini conoscono il significato dei nomi dei numeri, quali quantità rappresentano, ma questo non basta. Sono molte le cose che devono imparare, per esempio le convenzioni sul loro uso.
In particolare assume una certa importanza la distinzione che sussiste tra “numeri approssimati e numeri esatti”.
Dehaene, nel suo libro[1], racconta una serie di storie con un non-sense numerico; in particolare una è molto divertente:
“Al museo di storia naturale un visitatore domanda al custode:
<<Qual è l'età di quel dinosauro?>>
<<Settanta milioni e trentasette anni>> risponde l'uomo.
E, poiché il visitatore si meraviglia di una datazione così precisa, il custode spiega:
<<Sono ormai trentasette anni che lavoro qui, e quando sono arrivato mi hanno detto che aveva settanta milioni di anni!>>”.
Questo dialogo ci fa sorridere; ma per quale motivo? Senza dubbio possiamo affermare che ciò avviene perché viene violato un principio implicito e universale sull'uso dei numeri, il quale impone che si usino certi numeri “approssimati” in un senso approssimativo, mentre tutti gli altri devono avere un significato esatto. Quando si dice che un dinosauro è vecchio settanta milioni di anni, s'intende implicitamente che ci sia un'approssimazione di dieci milioni di anni. Tale convenzione linguistica conduce talvolta a curiosi paradossi. Così, quando una quantità precisa coincide per caso con un numero approssimato, non ci si può accontentare di enunciarla senza accompagnarla con un avverbio che stabilisca la sua precisione (per esempio *esattamente*)

[1] Stanislas Dehaene, *Il pallino della matematica. Scoprire il genio dei numeri che è in noi*, Ed. Oscar Mondadori, Milano 2001

Tutte le lingue del mondo adottano un sistema di numeri approssimati; per quale ragione? Dehaene afferma, senza dubbio, che tutti gli uomini del mondo sono dotati dello stesso apparato cognitivo e si trovano a dover affrontare la stessa difficoltà di concettualizzazione delle grandi quantità.

Più un numero è grande, più diminuisce la precisione della sua rappresentazione mentale. È per indicare questa incertezza, quindi, che usiamo i numeri approssimati.

Ma come è possibile ciò?

Questi nuovi risultati sperimentali dovrebbero spazzare via certe idee dei cosiddetti costruttivisti, che hanno avuto in Piaget il loro riferimento e che hanno portato nell'insegnamento della matematica a una vera catastrofe, come osserva Dehaene. L'assurdo rigore didattico dei bourbakisti e le teorie di Piaget già oggi suscitano molte perplessità fra gli insegnanti. Il cervello del bambino è, al momento della nascita, una pagina bianca, asserivano i costruttivisti, e quindi l'insegnamento precoce del numero sarebbe dannoso perché il bambino non ne potrebbe comprendere il significato. Sarebbe quindi necessario per i costruttivisti partire dalle basi formali della matematica (tradotte, in pratica, in una indigesta insalata russa definita "insiemistica"), senza perdere tempo in operazioni e applicazioni concrete che non verrebbero comprese.

1.5. Da Brian Butterworth a Keith Devlin

La teoria del neuroscienziato francese Stanislas Dehaene trova grande approvazione negli studi dello psicologo britannico Brian Butterworth e Kieth Devlin, i quali partendo dalla metafora dell'accumulatore di Dehaene elaborano concetti dai significati nuovi.

"Essere umani oggi significa conoscere il mondo dei numeri; essere incapaci in aritmetica è un grave handicap" (Butterworth, 1999, p. 359).

La base della matematica è rappresentata dal nostro senso di numerosità e questo certamente non dipende dal tipo di istruzione.

Butterwoth, attraverso la sua personale ricerca nella neuropsicologia dei numeri, dimostrò che il "genoma umano contiene le istruzioni per costruire circuiti celebrali specializzati, chiamati nel loro complesso ***Modulo Numerico***, la cui funzione è quella di classificare il mondo in termini di quantità numerica (o numerosità), mettendoci nella condizione di percepire il numero di elementi di un insieme" (Butterworth, 1999, p. 20).

Come dimostrano i dipinti ed i graffiti sulle pareti delle caverne, i nostri antenati ed in particolare l'Homo Sapiens (30.000 anni fa) avevano già queste capacità; probabilmente anche l'Homo Neandarthalensis e persino l'Homo erectus la possedessero, ma i reperti archeologici non sono molto esaustivi.

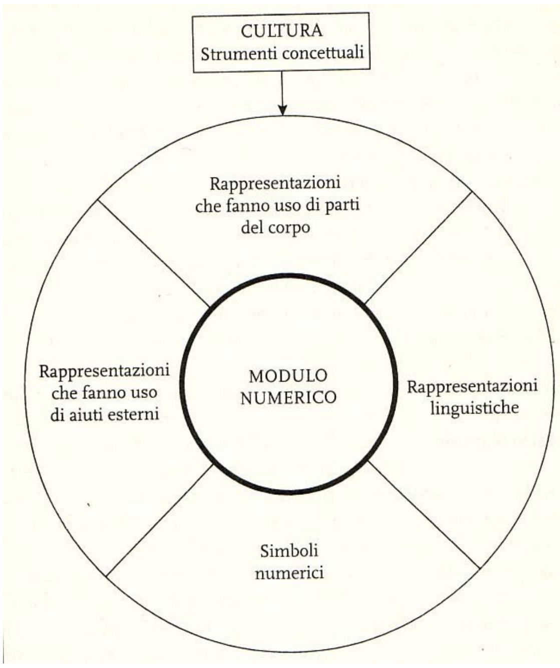
Le capacità numeriche umane vengono rese uniche attraverso lo sviluppo e la trasmissione di strumenti culturali (che ampliano le attitudini del modulo numerico) che in primo luogo facilitano l'operazione del conteggio, quali l'uso delle parole per esprimere i numeri e l'uso delle dita o delle tacche per contare.

Il nostro cervello matematico quindi secondo Butterworth contiene questi due elementi: un Modulo Numerico e la capacità di utilizzare gli strumenti matematici forniti dalla nostra cultura.

Ciò sta a significare che la capacità di concepire la numerosità è presente nel nostro cervello ed è pronta ad essere usata sia che la società possieda buoni strumenti matematici, sia che essa non li contenga; in ogni caso le risorse culturali fornite dal linguaggio e da altri segni possono migliorare in maniera notevole la sua applicazione.

Secondo Brian Butterworth, quindi, il modulo numerico rappresenta il nucleo centrale di tutte le nostre capacità matematiche ed intorno a questo costruiamo le capacità più avanzate, apprendendo dalla cultura da cui siamo circondati ciò che è già noto sui numeri.

Le capacità numeriche di ognuno, quindi, dipendono da tre fattori: il nucleo centrale innato, le conoscenze matematiche della cultura in cui siamo immersi e la misura in cui ognuno ha acquisito tali conoscenze.



L'ipotesi del cervello matematico sostiene che esista un rapporto fra natura e cultura nell'ambito delle capacità numeriche; la natura fornisce un nucleo di capacità per classificare piccoli insiemi di oggetti nei termini della loro numerosità (Modulo Numerico), per le capacità più avanzate, l'uomo ha bisogno dell'istruzione, ossia di acquisire gli strumenti concettuali forniti dalla cultura in cui viviamo.

La capacità di riconoscere piccole numerosità in laboratorio è stata dimostrata nelle grandi scimmie, nei ratti, nei pappagalli e nei corvi; per questi è molto importante specie per capire se il gruppo è in minoranza rispetto all'avversario, per cui è il caso di fuggire, per sapere se ci sono più bacche in un cespuglio piuttosto che in un altro…. Il cervello umano quindi si è evoluto per percepire insiemi di individui e per riconoscerne la numerosità. Il cervello umano quindi ha evoluti circuiti celebrali specializzati per sfruttare il fatto che gran parte della realtà percepibile può essere enumerata.

L'uomo però, si differenzia dalle altre specie per due importanti competenze. La prima consiste nella capacità di distinguere la numerosità di un insieme di quattro elementi da un insieme di tre, ed inoltre siamo in grado di sperimentare la qualità astratta dell'essere quattro e di riflettere su questa esperienza consapevole.

In secondo luogo va sottolineata la capacità di contare. Questo ci permette di contare oltre il quattro, utilizzando specifiche parole intese come strumento più familiare usato a questo scopo.

La combinazione del nostro senso innato per la numerosità con queste due competenze rappresentano il fondamento su cui è stato eretto il grande edificio della matematica moderna.(Butterworth, 1999, pp. 359-360)

La tesi di Dehaene illustra un meccanismo cerebrale simile, chiamato *accumulatore*, che rappresenta i numeri come quantità approssimate e non come numerosità.

Ciò che accomuna la tesi di Dehaene con quella di Butterworth consiste nell'aver considerato il cervello umano come un "motore" che possiede un meccanismo di comprensione delle quantità numeriche, ereditato dal mondo animale,e che lo guidi nell'apprendimento della matematica.

A sostegno del lavoro di Dehaene e Butterworth non si può non citare Keith Devlin costituendo così una trilogia di indagini su quello che si può indurre dalle conoscenze attuali sul cervello relativamente alle capacità matematiche umane. Ma mentre gli altri due si limitano a discutere le risultanze delle ultime ricerche neurofisiologiche (e al massimo etnologiche, in Butterworth) sulla capacità innata di riconoscimento e manipolazione di quantità piccole, in gran parte comune agli animali superiori, Devlin affronta il problema molto più difficile e problematico, dell'innesto e della crescita della

matematica simbolica sulla base delle capacità cerebrali matematiche che sono sostanzialmente analogiche.
Devlin sostiene che ogni uomo nasce con l'abilità matematica, la quale, per essere riconosciuta aspetta soltanto di emergere. Una delle capacità dell'uomo è il ***senso del numero***; ciò ha quasi niente a che fare con i numeri, ma significa semplicemente avere la capacità di capire che insiemi di oggetti possono avere misure diverse.
Noi riconosciamo la differenza che passa fra un oggetto, un insieme di due oggetti ed un insieme di tre. Riconosciamo inoltre che l'insieme di tre oggetti contiene più elementi di quello che ne ha due. Questo senso del numero è innato e pertanto non deve essere appreso.
L'autore fa un esempio: "se mi trovo in un'aula e da una parte vi è un palcoscenico con quattro persone e dall'altra parte vedo una platea di gente, certamente a primo acchito non posso sapere il numero di persone presenti in aula, sicuramente posso affermare che il numero di persone sedute in platea sono più numerosi rispetto a quelli che sono sul palco".
Questo semplice esempio serve a capire come il senso numerico non richiede un concetto dei numeri come entità astratte, né la capacità di contare; per questo è una capacità posseduta anche da molti animali (dal piccione allo scimpanzé).
Per un animale può essere utile possedere questo senso del numero, specie in caso di aggressioni o nei momenti di ricerca del cibo.
Ad esempio, per un piccolo gruppo di animali è importante sapere se un altro gruppo di animali che li sta minacciando è più piccolo o più grande del loro.
Esiste infatti una vasta letteratura sugli studi di laboratorio effettuati per indagare il senso del numero negli animali. Uno dei primi studiosi fu lo psicologo tedesco Otto Koehler, il quale intorno agli anni '40 dimostrò che gli uccelli possiedono la capacità di confrontare le dimensioni di due insiemi e presentati simultaneamente ed inoltre la capacità di ricordare il numero di oggetti presentati in tempi successivi.
Devlin attraverso svariati studi dimostrò che i bambini molto piccoli, hanno un senso del numero ben sviluppato, ciò è dimostrabile attraverso semplici prove osservabili nella quotidianità.
Se mettiamo di fronte ad un bambino di 2 o 3 anni, due mucchietti di caramelle di diversa numerosità, sicuramente, nella maggior parte dei casi, il bambino sceglierà il mucchietto più numeroso.

Questo dimostra che il bambino non ha bisogno di contare le caramelle per capire quale dei due mucchietti ne contiene di più.
Ma per i bambini, il senso del numero è ancora più sorprendente.
Nel 1992, Karen Wynn, una giovane ricercatrice dell'università di Arizona, nella sua tesi di dottorato, è pervenuta a risultati che hanno stupito gli psicologi e i matematici di tutto il mondo. Ha dimostrato che i bambini piccoli, in questo caso di quattro o cinque mesi, non soltanto hanno il senso del numero, ma sanno che 1 più 1 fa 2, che 3 meno 2 fa 1 e conoscono tutta l'aritmetica, l'addizione e la sottrazione, per i numeri 1, 2 e 3.
In seguito, altri psicologi hanno dimostrato che i neonati di due giorni possiedono la stessa abilità.
La domanda interessante è: "Come facciamo a sapere questo?". Sembrerebbe impossibile sottoporre un neonato di due giorni a una verifica matematica, invece lo è.
Karen Wynn ha incominciato con il sistemare dei bambini di cinque mesi davanti a un teatrino delle marionette. Il palcoscenico era nascosto da uno schermo. Il bambino vedeva una mano che entrava di lato, con un pupazzo in mano. La mano nascondeva il pupazzo dietro lo schermo. Poi il bambino vedeva un'altra mano con un altro pupazzo. In tal modo aveva visto l'azione di 1 più 1. Poi lo schermo si abbassava e il bambino vedeva 2 pupazzi e pensava, "OK".
Subito dopo, il bambino vedeva 2 pupazzi ma, prima di abbassare lo schermo, un'assistente aggiungeva un altro pupazzo, oppure ne toglieva uno. Ora quando si abbassava lo schermo, il bambino vedeva 3 pupazzi oppure 1 e si dimostrava sorpreso. Qualcosa non andava per il verso giusto!
Il bambino aveva visto 1 più 1. Sapeva che la risposta doveva essere 2. E quindi era sorpreso quando vedeva una risposta sbagliata.
Per valutare il grado di sorpresa del bambino, si misurò il tempo trascorso a fissare questa scena impossibile 1+1=1. Confrontando questo tempo con quello impiegato dal bambino ad osservare l'avvenimento atteso, si constatò che in media, il bambino osservava un secondo più a lungo l'addizione errata rispetto a quella corretta. La loro reazione non si basa dunque su una previsione della posizione precisa degli oggetti.
Simon e altri dimostrarono che neppure l'identità degli oggetti influisce in qualche modo, tanto che il bambino non si sorprende se ad un certo punto scopre che gli oggetti cambiano di aspetto.
Con questo metodo ed altri simili, gli psicologi hanno dimostrato che è possibile fare una verifica matematica anche con i bambini più piccoli.

Gli esperimenti di Karen Wynn furono ripetuti da alcuni studiosi su diverse specie animali, ottenendo simili risultati. Ciò diede conferma al fatto che fra tutte le specie animali, soltanto gli esseri umani sembrano capaci di servirsi di questa abilità estendendola al punto di saper quantificare e discutere insiemi con un numero di elementi nell'ordine dei miliardi. (Devlin, 2000, p. 57)

"Nella misura in cui ci è possibile dire
che la scienza o la conoscenza
comincia da qualche parte, è vero quanto segue:
la conoscenza non comincia con percezioni
o osservazioni o con la raccolta di dati o fatti,
ma comincia con problemi"
(KARL R. POPPER, 1969)

CAPITOLO II
DALLA PEDAGOGIA SPERIMENTALE

ALLA TEORIA DELLE SITUAZIONI DIDATTICHE

Premessa

Questo secondo capitolo della tesi nasce in seguito ad una riflessione maturata dalla ricerca sperimentale condotta nelle sezioni della scuola primaria.

Esso fornisce un approfondimento teorico sulla conduzione di una ricerca sperimentale in ambito educativo, esplicitando in maniera sintetica le principali tappe che la caratterizzano.

In particolare prima di addentrarmi nel processo di ricerca, ho voluto fornire una trattazione specifica sul concetto di ricerca da parte di R. Viganò, facendo inoltre costante riferimento al libro *La prepedagogicità della sperimentazione* a cura del professore Giuseppe Zanniello.

L'ultima parte del capitolo, approfondisce un quadro di riferimento teorico sulla teoria delle situazioni, un sistema in piena evoluzione nel campo della didattica della matematica, che vede come suo massimo esponente il professore francese Guy Brousseau.

2.1. La ricerca sperimentale.

Si comincia a parlare di ricerca, già nel medioevo, quando la ricerca sperimentale era svolta unicamente nelle università ed era considerata come un'attività sussidiaria dell'insegnamento, assolutamente libera.

Il concetto di ricerca è ampio, non univoco e di difficile definizione, soprattutto allorché esso si confronta con una realtà anch'essa complessa quale è l'educazione.

La ricerca è, in primo luogo, un processo e un'attività: si fa "qualcosa", mettendo in atto una sequenza logica e cronologica di decisioni e di operazioni. L'attività di ricerca è altresì contraddistinta da una tensione essenziale nei confronti dell'obiettività. Intendiamo quest'ultima nei termini di un'astrazione, de-temporalizzata e de-personalizzata, come se fosse possibile e legittimo "sospendere" idee, opinioni e valori in nome di una pretesa neutralità del sapere scientifico nei confronti delle altre dimensioni dell'esperienza e del pensiero umano. L'obiettività della ricerca indica piuttosto un atteggiamento di onestà fondamentale, un modo di porsi dinanzi all'esperienza, osservata o postulata, aperto all'accettazione integrale dei fatti, volto a mettere in dubbio e ad interrogare ogni concezione preesistente piuttosto che a confermarla. Alla luce di tutto questo, un ulteriore aspetto che concorre alla definizione della ricerca è la funzione a cui questa risponde. Essa è un'attività intenzionale e obiettiva, per l'elaborazione di nuove conoscenze.

L'importanza delle considerazioni svolte risalta allorché dalla riflessione sulla ricerca in generale passiamo a quella sulla ricerca educativa in particolare. A tale riguardo, un'osservazione colpisce chi si limita anche solo a un accostamento superficiale a questa tematica, e, a maggior ragione, chi se ne interessa per motivi scientifici e pedagogici: la ricerca educativa sembra non aver ancora provato la propria pertinenza, utilità, corrispondenza ai bisogni espressi dagli individui e dalle società umane.

La ricerca in campo educativo rappresenta "uno sforzo sistematico di comprensione motivato da un bisogno o da una difficoltà di cui ci si è resi conto, rivolti allo studio di un fenomeno complesso il cui interesse supera lo stretto ambito delle preoccupazioni personali ed immediate, dal momento che il problema viene posto sottoforma di ipotesi" (A. S. Barr)[2]

Questa definizione ha il vantaggio di operare una precisa distinzione tra il tipo di approccio promosso dal ricercatore e le prove occasionali fatti da chi agisce direttamente nella pratica.

Per avere un valore scientifico, la ricerca deve tendere ad una spiegazione generale, verso la formulazione di una legge. Ma certamente prima di raggiungere questo livello, una ricerca può anche passare attraverso una fase più o meno lunga, durante la quale gli sforzi vengono concentrati nel descrivere i singoli oggetti.

Le prescrizioni metodologiche dedotte dalla ricerca, sia essa speculativa o pratica, fondamentale o applicata, risultano spesso impraticabili in situazioni educative, di cui la complessità e la presenza di ostacoli e incertezze costituiscono tratti dominanti. Lo scarto esistente fra le conoscenze acquisite in virtù della ricerca pedagogica e le pratiche formative diffuse è palese.

La pedagogia è ad un tempo un'arte che non può prescindere dalla filosofia, una scienza e, in quanto scienza pratica, è una tecnica o per meglio dire un'articolazione razionale e intenzionale di tecniche.

Sostiene Renata Viganò: "Perché non accettare tale sfida e impegnarsi finalmente per costruire una scienza non più *dell'*educazione ma *per* l'educazione, luogo di sintesi e non più di contrapposizione di arte, ragione, tecnica, scienza, filosofia, sapienza?"

---

[2] De Landesheere (1970), p. 11

La necessità e la complessità di tale compito costituiscono l'obiettivo attuale di una ricerca autenticamente pedagogica.
C'è bisogno di proposte educative realistiche, senza che siffatto orientamento operativo indebolisca il necessario riferimento all'orizzonte teorico e interpretativo fondamentale, il quale contestualizza le prime e ne indica il senso. In questo consiste il compito e la forza della ricerca educativa, che sappia uscire dai solchi della mera speculazione o dell'empirismo cieco per aprirsi alla sinergia feconda fra approcci diversi e complementari: la deduzione teorica ma anche l'induzione esperienziale, l'analisi e la comprensione storica ma anche la verifica sperimentale.
Occorre, a tale riguardo, riflettere in modo critico sul criterio di efficienza, il quale assurge a paradigma normativo in molti discorsi e modelli attuali *sull'*educazione. Ci riferiamo, per esempio, all'attenzione quasi esclusiva posta agli aspetti connessi con il "qui ed ora" e con il "come" dell'attività educativa, a scapito degli interrogativi riguardanti il "perché" ed il "per chi" di essa. Eppure, questi interrogativi si compenetrano nell'esperienza e nell'esistenza personale e sociale.
"La ricerca dei *perché* senza l'attenzione ai *come* resta infeconda; l'affanno dietro ai *come* senza la riflessione sui *perché* rischia la perdita di senso" (R. Viganò,1999).
Tale dicotomia non è senza conseguenze sotto il profilo dei metodi impiegati dalla ricerca pedagogica. Da un lato, prevale un modello di ricerca teorico-deduttiva: questa ha prodotto contributi di indiscutibile valore ma non può pretendere da sola di comprendere l'ampiezza, la varietà e la profondità degli eventi, dei significati, delle dinamiche costituenti la realtà educativa. Da un altro lato, si privilegiano modelli sperimentali che, assunti in modo improprio in nome di una scientificità intesa in termini riduttivi, finiscono anch'essi per indurre ad accostamenti parziali e frammentari.
Questi ultimi fanno astrazione dalla complessità descritta e hanno perciò scarsa incidenza sulla pratica formativa.
In realtà, le caratteristiche della situazione educativa non corrispondono a quelle che definiscono un oggetto sperimentale. Essa postula una relazione dinamica fra soggetti, nella quale sono presenti intenzionalità variabili e differenziate, spesso connesse con strutture, sistemi relazionali e significati complessi. I soggetti della relazione educativa hanno memoria, la reversibilità e l'irreversibilità nei rapporti di causa ed effetto assumono contorni sfumati, la differenziazione procede in modo tutt'altro che lineare. In altri termini, le caratteristiche della situazione educativa sono antitetiche alle condizioni fondamentali della sperimentazione classica: isolamento delle variabili,

manipolazione controllata di queste, neutralizzazione degli effetti secondari. La "spiegazione" del fenomeno, volta a ricondurre quest'ultimo nell'orizzonte applicativo di leggi razionali generali, le quali pongono in secondo piano il particolare (elemento di distinzione) e mettono in risalto gli aspetti generali (criteri di categorizzazione) che in sé è contraddittoria con il fine stesso dell'educazione.

Quest'ultima intende promuovere ciò che rende ogni persona unica, originale e perciò complementare alle altre; "l'alunno medio" è un'astrazione concettuale e non l'interlocutore reale in una relazione educativa.

Siffatto realismo irriducibile della situazione formativa implica ulteriori elementi di complessità per la ricerca pedagogica. Gli oggetti di studio, gli elementi d'indagine sono spesso saturi di connotazioni valoriali, etiche, culturali, ideologiche. Per esempio, il contenuto dell'insegnamento, i modelli educativi e le attese nei confronti di questi non sono esenti da connotazioni e pressioni ideologiche e sociali, più o meno istituzionalizzate, le quali influiscono sulla scelta e sulla costruzione dell'oggetto di ricerca. Se si resta ancorati all'ideale di una scienza positiva "pura", la pedagogia non ha alcuna possibilità di soddisfarne i criteri.

La questione fondamentale riguarda proprio la possibilità stessa e le caratteristiche di una pedagogia sperimentale, fuori di qualsiasi accostamento riduttivo e superficiale.

Le prospettive teoriche e pratiche delineate mettono in evidenza il compito aperto della scienza del processo educativo. In essa, la cura del particolare, l'analisi di eventi e fenomeni attentamente circoscritti trovano senso solo nel più ampio contesto di significati e di relazioni in cui si collocano; l'orientamento propositivo non contraddice bensì completa e fa appello al rigore ed alla finezza della sistematizzazione descrittiva. In altri termini, lo studio sperimentale dell'educazione (ossia dell'ampio sistema di eventi, fenomeni, relazioni, processi, dinamiche, ambiti, contesti e problematiche connessi con tale concetto) è necessario per l'identità scientifica della pedagogia, ma non va ridotto a un insieme di procedure e tecniche da laboratorio, talmente formalizzate da risultare troppo distanti dall'educazione per potere offrire a quest'ultima un contributo valido.

<<Attribuisco con ciò al termine "sperimentale" – afferma R.Viganò - un significato particolare, che reputo legittimo in riferimento all'universo di discorso pedagogico ma che forse può risuonare eccentrico nei confronti dell'ortodossia rigorosa dello sperimentalismo, di cui ho citato dinanzi alcuni criteri fondamentali: isolamento delle variabili studiate, manipolazione precisa, controllo di tutti gli elementi della situazione.

I principi metodologici di pertinenza e di validità sono imprescindibili per la pedagogia come per tutte le altre scienze. Vanno perciò ricercati i modi in cui essi possono essere impiegati nell'ambito di un discorso pedagogico descrittivo ma anche normativo, in riferimento a oggetti di studio contraddistinti da una strutturale complessità, trasversalità e diacronicità>>.

La pedagogia è scienza pratica. Essa interagisce con le altre scienze dell'educazione e persegue una conoscenza non fine a sé stessa, bensì volta alla proposta e all'azione educativa. In questa prospettiva si nota la possibilità stessa di una pedagogia sperimentale: un luogo di frontiera e di dialogo fra la pedagogia, attenta allo sviluppo della persona attraverso situazioni e luoghi educativi, e la sperimentazione, intesa a manipolare, misurare, controllare gli elementi del contesto formativo allo scopo di trarre informazioni suscettibili di migliorare il rendimento di metodi educativi definiti. Si intende perciò la "nuova" pedagogia sperimentale (quella tradizionale ha ormai manifestato da tempo i propri limiti, per avere assunto criteri e metodi di altre discipline e inadatti allo specifico educativo, proprio del suo oggetto di studio) come una prospettiva di riavvicinamento ed integrazione feconda dei termini, persona e metodo, spesso troppo polarizzati dalla ricerca educativa.

La pedagogia sperimentale ha da costruire il proprio discorso i propri metodi attorno all'articolazione dinamica di tali polarità; in ciò trovano fondamento i criteri di pertinenza e di validità consoni alla sua natura. Ciò potrà inoltre favorire implicazioni più significative degli sforzi della ricerca nei confronti sia della pedagogia sia della sperimentazione e delle pratiche di formazione. Senza disconoscere la validità del repertorio di conoscenze già esistente, molto resta ancora da fare. Misurare una realtà educativa è compito arduo: le regolarità sono importanti, ma lo sono anche le differenze: l'evento puntuale è significativo, ma lo sono anche le tendenze evolutive.

2.2. La sperimentazione nella scuola italiana

La ricerca sperimentale in campo scolastico ha circa un secolo di vita.

L'importanza che la scuola ha assunto in questi ultimi anni sul piano sociale, educativo e formativo ha posto il problema di una riqualificazione delle procedure operative, didattiche, pedagogiche e metodologiche.

Sotto questo aspetto ricerca e sperimentazione sono divenute fattori essenziali del miglioramento delle procedure educative sia in riferimento al comportamento

individuale e collettivo del personale docente e degli allievi, sia in riferimento agli aspetti di insieme della prassi scolastica.

La materia relativa alla ricerca educativa e alla sperimentazione è regolata dal decreto delegato n. 419 del 31 maggio 1974, il quale all'art. 1 recita così " la sperimentazione nella scuola di ogni ordine e grado è l'espressione dell'autonomia didattica dei docenti e può esplicarsi come ricerca e realizzazione di innovazione sul piano metodologico e didattico e come ricerca e realizzazione di innovazioni degli ordinamenti e delle strutture esistenti".

La ricerca, quale processo di indagine e di scoperta, non può essere riferita ad un puro e semplice argomento intorno a cui reperire notizie e dati.

Passa poi ad elencare le due ipotesi di sperimentazione che possono esplicarsi:

a) come ricerca e realizzazione di innovazioni sul piano **metodologico** e **didattico**;
b) come ricerca e realizzazione di innovazioni degli **ordinamenti** e delle **strutture** esistenti.

La sperimentazione può essere definita una ricerca "sul campo", che per quanto ci interessa è quello educativo, con la quale si vuole dare una risposta a motivazioni di ordine innovativo.

Essa assume carattere scientifico quando supera l'approccio diretto di una prova occasionale e si costituisce come un problema a sé. Il superamento dell'approccio immediato della persona in relazione con la realtà avviene ricorrendo a *strumenti* di mediazione che si interpongono tra la conoscenza diretta e immediata e propongono il dato scientifico.

È stata sottolineata la parola "*strumenti*" per indicare un uso del termine più estensivo di quello abituale. Uno strumento non è soltanto un mezzo utile a rilevare determinati dati come può essere un test, un questionario o un mezzo meccanico, quanto pure può essere considerato uno strumento la capacità che ha il pensiero umano di suddividere la ricerca sperimentale in tanti settori, considerati altrettanto fasi della ricerca, ognuna delle quali deve avere uno sviluppo a sé.

Per chiarire il valore scientifico della sperimentazione, diciamo che questa deve presentare due aspetti:

a) per prima cosa la conclusione della ricerca sperimentale deve portare alla formulazione di una legge generale, la quale deve permettere il "controllo" di tutte le manifestazioni che rientrano nel suo ambito e deve permettere di prevedere le manifestazioni future e in qualche modo anticiparne le conseguenze;

b) un secondo aspetto riguarda, almeno nell'ambito scolastico, gli obiettivi più immediati da raggiungere e che rappresentano la conoscenza di tutti quegli aspetti che costellano l'attività scolastica in generale.

Ogni progetto di ricerca-sperimentazione a livello metodologico e didattico deve contenere l'impostazione di un preciso piano di lavoro che, partendo dall'analisi della situazione in cui si deve operare, progetti una serie di obiettivi da raggiungere, l'acquisizione di specifici contenuti con l'indicazione dei mezzi di cui occorre avvalersi e delle modalità di verifica e di valutazione dei procedimenti, degli interventi e dei risultati ottenuti.

Quanto più il progetto di ricerca è ben strutturato, tanto meglio è possibile raggiungere risultati ottimali.

Naturalmente la ricerca non nasce già completa e pronta all'uso, ma si svolge in una serie di tappe (di seguito descritte) che riassumono l'intero processo.

2.2.1. La scelta del problema

La fase preparatoria della ricerca è quella in cui, sollecitati da una motivazione interna, si individua il problema, il quale determina l'attivazione di un processo di ricerca. Una ricerca, quindi, si inizia sempre per rispondere ad una domanda o per risolvere un problema.

Il problema può nascere in seguito a letture, incontri, riflessioni personali, difficoltà incontrate nell'attività educativa.

Purtroppo bisogna constatare che non sempre la ricerca è intesa in questo modo, spesso si danno ad intendere per ricerca materiali più svariati.

Alcuni ricercatori sostengono che il problema si scopre facendo ricerca, intendendo con essa una nuova partenza sollecitata da informazioni significative o anche banali, tali da imporre la formazione del problema, capace di portare alla formazione di nuove teorie (Ferraresco, 1986)

In genere il ricercatore è sempre spinto dal desiderio di migliorare l'attività educativa e trovare valide soluzioni ad eventuali problemi riscontrati.

2.2.2. Dal problema all’ipotesi generale

L’ipotesi è la bussola della ricerca. Essa può essere sinteticamente definita come una risposta anticipata e provvisoria alla domanda di partenza, giustificata da una teoria preesistente o dalla personale cultura ed esperienza del ricercatore.

È il momento in cui si passa dalla teoria e dalle conoscenze generiche su un dato problema, alla ricerca vera e propria. Essa emerge da un attento esame della situazione concreta solitamente dopo essere stati a contatto con il problema così come si presenta nella realtà.

L’ipotesi di ricerca va formulata in modo che siano evidenti le implicazioni concrete ed in modo che sia coerente con gli obiettivi della ricerca; per questo essa in seguito va dettagliata, indicando le persone e le situazioni che si desidera studiare.

A livello scientifico, l’ipotesi riveste particolare importanza per almeno quattro motivi:

1. **costringe a limitare, se non lo si è fatto, il campo di indagine;**
2. **indirizza verso i punti empiricamente verificabili;**
3. **indica, in linea di massima, la metodologia adatta per la verifica successiva;**
4. **permette la strutturazione logica delle domande.**

L’ipotesi si può definire come una risposta anticipata alla domanda di partenza, giustificata da una teoria preesistente o dalla personale cultura ed esperienza del ricercatore.

Per questo motivo l’ipotesi deve essere:

a. **concettualmente chiara e non equivocabile;**
b. **centrata su riferimenti empirici e giudizi di fatto, prescindendo da giudizi di valore;**
c. **specifica e non generica;**
d. **sostenuta da tecniche di ricerca fattibili ed accessibili;**
e. **riportata ad uno schema teorico interpretativo e chiarificatore dei dati rilevati.**

2.2.3. Il panorama dell’esistente

La fase che ci accingiamo a descrivere, prevede la selezione e l'analisi accurata di letture specifiche che aiutino il ricercatore a mettere a fuoco il problema.

Già nel momento di dover definire il problema, nasce l'esigenza di sostenere, motivare, giustificare con riferimenti e supporti teorici le scelte che man mano si fanno.

Tutto ciò serve al ricercatore ad inquadrare il problema, sia menzionando le teorie che si ritiene contribuiscano a chiarire i presupposti, ma anche quelle che servono a definire l'ambito e il campo della ricerca.

Valutare quindi i risultati delle ricerche precedenti può essere utile al fine di condurre una nuova ricerca con un maggiore rigore scientifico.

2.2.4. Formulazione operativa delle ipotesi

Una volta esaurito lo studio dei risultati delle ricerche precedenti sul problema da analizzare, va premessa un'accurata preparazione delle ipotesi da sperimentare.

Al momento della formazione delle ipotesi non sempre si presta loro il tempo e l'attenzione che invece sarebbero dovuti. La corretta formazione delle ipotesi abitua a riflettere ed a dare risposte provvisorie ma sensate. È importante quindi che le ipotesi siano chiare e comprensibili sia nei contenuti, sia nel linguaggio usato.

"L'ipotesi va formulata con precisione sul piano teorico e pratico, enucleando le conseguenze e i corollari che ci si aspetta di vedere realizzarsi nel campo in cui l'ipotesi o le ipotesi siano vere.

Nell'ambito di una determinata ricerca, l'ipotesi assume tanta più importanza quanto più le proposizioni generali che la caratterizzano a livello teorico tendono a strutturarsi in semplici relazioni, chiaramente verificabili e riferite ad un numero limitato di variabili.

L'ipotesi indica ad ogni istante la via da seguire e permette di selezionare meglio i fatti significativi da quelli superflui; per questo è importante che sia confutabile o verificabile mediante l'esperimento, direttamente o indirettamente.

Il ruolo dell'ipotesi operativa può essere sintetizzata nei seguenti punti:

a) Trasformazione dei concetti generali in una serie di proposizioni semplici, che tendono a proporre specifici tipi di connessioni tra fenomeni dei quali è possibile la rilevazione e, se necessario, la misurazione;
b) Indirizzare, nelle fasi successive della ricerca, la raccolta dei dati e contribuire alla definizione delle elaborazioni più pertinenti;

c) In fase di formulazione delle generalizzazioni empiriche, le ipotesi operative costituiranno, infine, un saldo punto di riferimento perché permetteranno di isolare tra i risultati significativi, quelli essenziali per una più o meno globale verifica delle singole parti che compongono l'ipotesi generale."[3]

2.2.5. La scelta del campione

Affinché un piano di ricerca venga applicato è indispensabile che il ricercatore scelga i soggetti sui quali verterà la sperimentazione.

"La scelta del campione nella ricerca sperimentale riveste particolare importanza per alcune caratteristiche tipiche degli esseri umani, i quali differiscono in maniera considerevole tra di loro, molto più che le spighe di un campo di grano" (Ferraresco, 1986, p. 59).

Il campione sociologico, per essere valido deve poter rendere possibile l'operazione di inferenza statica, che consiste nella generalizzazione dei dati estrapolati da un gruppo ristretto a gruppi più ampi. Il campione, dunque si deve presentare come un sott'insieme dell'insieme universo (popolazione) e tale da conservare tutte le sue caratteristiche principali.

Il primo atto da compiere è la determinazione della popolazione a cui si vogliono estendere i risultati della ricerca.

Una volta definita la popolazione statistica ed il tipo di descrizione, si preleva un campione[4] che la rappresenti.

In questa fase della ricerca si pongono due problemi:

- **grandezza del campione**
- **scelta del campione.**

Tanto più grande è il campione tanto maggiore è la probabilità che esso si avvicini alle caratteristiche dell'universo da studiare.

Il metodo di scelta del campione deve essere tale da non favorire nessuna distorsione.

---

[3] Zanniello, *La prepedagogicità della sperimentazione*

[4] Possiamo definire il campione come la parte della popolazione in base alla quale si possono trarre inferenze intorno alla popolazione.

Le conclusioni a cui si giunge sulla base di un campione, sono corrette solo quando il campione riproduce al meglio le caratteristiche significative della popolazione è detto *rappresentativo*.

In base al tipo di ricerca, si costituiranno differentemente i campioni, a condizione che i criteri di scelta siano chiaramente esplicitati e giustificati.

Vi sono vari tipi di campionamento: il campione può essere di tipo probabilistico o non probabilistico.

a) *Campione probabilistico*. **La caratteristica che contraddistingue i campionamenti di questo tipo è data dalla possibilità, per ciascun elemento della popolazione, di essere incluso nel campione.**

- ***Campione casuale.*** **Il principio di base su cui si fonda è molto semplice. Si assegna un numero progressivo a ciascun membro della popolazione poi si estraggono a sorte i membri che faranno parte del campione.**
  Una variante del campione casuale è costituita dal *campione a gruppi:* ad esempio nelle ricerche scolastiche, nel fare l'elenco della popolazione si elencano direttamente le classi tra le quali avverrà l'estrazione.

- ***Campionamento stratificato.*** **In questo caso il ricercatore, per non incorrere nei rischi di non rappresentatività determinati da una scelta casuale, include nel campione gli elementi che caratterizzano la popolazione, in relazione al loro peso numerico. Per operare in questo modo è necessario conoscere esattamente le caratteristiche della popolazione.**

b) *Campione non probabilistico.* **Tale campionamento presenta un difetto consistente nell'impossibilità di conoscere il rischio di errore che si può commettere. Il loro impiego viene limitato a ricerche esplorative. I più conosciuti sono:**

- *Campionamento accidentale.* **La scelta è fatta in maniera veramente accidentale sino all'esaurimento della quota stabilita**.
- *Campionamento per quote.* **Viene garantita l'inclusione nel campione di quote rappresentative della popolazione, ma viene lasciata al**

ricercatore la libertà di scegliere le persone, purché rientrino nei criteri prefissati.

Sembra che il campionamento casuale è quello che offre maggiori garanzie di rappresentatività e minor rischio di distorsione.

2.2.6. La scelta del piano di esperimento.

La verifica delle ipotesi può avvenire attraverso diversi metodi d'indagine; tra quelli più comunemente applicati ricordiamo l'osservazione sistematica e l'esperimento.

L'*osservazione sistemica* è utile specialmente quando si vogliono osservare dei fenomeni che sarebbe immorale o impossibile riprodurre.

L'osservazione deve cogliere gli elementi significativi della realtà che ci si propone di osservare.

In un *esperimento,* invece, si creano le situazioni per farvi operare su fattori che interessano e per potere annotare il comportamento conseguente, nel modo, nei tempi, e nelle circostanze più comode.

Le verifiche sperimentali mirano a indurre delle costanti, a isolare l'azione di uno o più fattori. Lo schema della sperimentazione consiste nel tenere ferme e costanti tutte le variabili che compongono un determinato fenomeno, tranne la variabile indipendente: questa si va variando per osservare gli effetti che ne derivano da un fenomeno.

Il fattore sperimentale che si introduce, si presuppone efficace in rapporto al fine che ci si propone di raggiungere con la sperimentazione che si vuole attuare. Questo fattore può essere un particolare metodo, un espediente didattico, uno strumento ritenuto capace di stimolare un particolare apprendimento o di fare conseguire i risultati educativi attesi, o altro. Una delle condizioni per cui un esperimento è valido, è il grado in cui le variabili sono operativamente definite.

Spesso i piani d'esperimento "classici" rispondono con difficoltà alla complessità delle ipotesi. Per questo motivo può essere opportuno prospettare dei piani di ricerca che consentano un aggiustamento continuo, in modo da potersi adattare alle situazioni che evolvono.

2.2.7. La rilevazione dei dati.

Terminato il lavoro sul camp, il ricercatore dovrà procedere con la rilevazione dei dati. Essa deve possedere alcune caratteristiche fondamentali: essere obiettiva e adeguata, funzionale e svincolata dalle opinioni personali del ricercatore. Per questo è molto importante mettere a punto criteri e strumenti che consentano l'osservazione oggettiva dei fenomeni e la loro misurazione adeguata.

Nello scegliere uno strumento è indispensabile valutare non solo la sua intrinseca efficacia ma anche la possibilità e l'opportunità del suo impiego rispetto ai vari fattori che si vogliono osservare.

Gli strumenti di rilevazione più frequentemente utilizzati nella ricerca sperimentale a scuola sono: le osservazioni sistematiche, le composizioni scritte, i test psicologici, le prove oggettive di profitto, i questionari, i colloqui e le riflessioni parlate.

Innanzitutto è importante determinare cosa si vuole conoscere attraverso lo strumento che si vuole costruire o utilizzare, perché i problemi connessi con la ricerca possano essere sempre approfonditi e misurati.

Per verificare la validità e la fedeltà di uno strumento, la struttura delle singole parti deve essere attentamente esaminata, perché si possano scegliere gli stimoli che per chiarezza, fedeltà e capacità discriminatoria risultano più adatti per effettuare la rilevazione. L'insieme dello strumento deve essere ripetutamente controllato: è necessario, prima di impiegare uno strumento di rilevazione, sottoporlo a una verifica su scala ridotta.

2.2.8. L'elaborazione dei dati.

Una volta raccolti i dati, per vedere fino a che punto i risultati ottenuti sul campione hanno validità generale, si ricorre alla statistica, facendo uso di quelle tecniche che essa ha predisposto.

Una ricerca senza dati statistici è inconcepibile.

La statistica come metodo di elaborazione quantitativa, consente di stabilire dei confronti indispensabili perché si possa giungere a calcolare la frequenza delle variabili, in modo da ottenere un quadro chiaro delle tendenze rispetto al problema.

È indispensabile conoscere la statistica nei metodi, negli scopi, nei suoi gradi di validità per poter risalire al significato di questo o quel valore rapportandolo sia alle caratteristiche del gruppo di riferimento.

I dati devono essere tabulati ed interpretati, procedendo con una tabulazione o con una espressione grafica per vedere le misure di tendenza centrale e di variabilità, perché se ne possa apprezzare la significatività.

La tabulazione è soltanto una prima sistematizzazione dei dati. I procedimenti di tabulazione sono diversi, consistono nel trasferire i dati dagli strumenti con cui sono stati raccolti a tabelle, al fine di poterli avere agevolmente a disposizione e di poterli analizzare, elaborare ed interpretare.

La tabulazione dei dati è il passo previo per procedere all'effettuazione dei vari calcoli statistici (misure di tendenza centrale, variabilità, deviazione standard, correlazioni, ecc..) e alla rappresentazione grafica delle frequenze. Non dobbiamo comunque dimenticare che i risultati numerici acquistano significato esclusivamente grazie all'interpretazione che ne fa chi li studia.

È quindi necessario comprendere il tipo di aiuto che la statistica fornisce, utilizzandola per rendere più attendibili le nostre valutazioni, tenendo sempre presente che né migliora la natura dei dati né può supplire alla loro povertà.

La valutazione dei risultati richiede al ricercatore di porsi alcune domande per verificare se sono stati raggiunti gli scopi stabiliti, se si sono registrate deviazioni che hanno portato ad effetti inaspettati.

È importante che il ricercatore mantenga sempre un atteggiamento che lo porti a non generalizzare in modo assoluto i risultati ottenuti.

L'iter di una ricerca si conclude con la pubblicazione dei risultati. Non è una vera ricerca quella in cui i risultati non sono degni di essere resi noti e discussi pubblicamente.

2.2.9. Valutazione dei dati.

Le conclusioni di una ricerca sono valide se è valido il piano di ricerca utilizzato; per questo, nel condurre una ricerca, è necessario fissare una successione razionale di fasi spiegando i concetti e le operazioni relative a ciascuna fase.

Una corretta metodologia permetterà di estendere i risultati ottenuti a situazioni educative analoghe.

Il modello che abbiamo appena descritto è il modello classico della ricerca sperimentale che si basa sull'uso dei metodi quantitativi.

I metodi quantitativi riescono a stabilire la grandezza delle relazioni offrendo così maggiore possibilità di generalizzazione, ma riferendosi esclusivamente agli aspetti numerici e di grandezza, non riescono ad esprimere su scala quantitativa delle dimensioni del fenomeno educativi di natura qualitativa.

Recentemente si è sviluppata una corrente di ricerca che privilegia e mette in risalto i metodi di tipo qualitativo, mutuati per lo più dall'antropologia culturale, dalla psicologia sociale o dalla fenomenologia.
Nell'attuale dibattito sulla ricerca sperimentale in pedagogia, si va sempre più evidenziando l'esigenza di superare il riduzionismo dell'uso esclusivo di un metodo o di un altro, con l'intento di far sì che la ricerca possa giungere a cogliere sempre meglio gli aspetti della realtà educativa.
Inoltre, quando uno studio qualitativo e uno studio quantitativo conducono alle stesse conclusioni, si può avere maggiore certezza che i risultati ottenuti non siano influenzati dal metodo di ricerca usato.
Esiste quindi una connessione tra metodi qualitativi e quantitativi, che pur rappresentando un diverso modo di affrontare lo studio del fatto educativo, non sono antitetici e possono completarsi a vicenda.

2.2.10. Le conclusioni

Le **conclusioni** vengono tradotte in principi generali. L'ipotesi, che la ricerca verifica, deve poter assumere una validità che trascenda quella particolare ricerca per tradursi in un principio generale applicabile a situazioni consimili.
In questa fase le **conclusioni** della ricerca vengono integrate in una teoria generale di cui viene verificata la **coerenza** e la **capacità di generalizzare** i principi che la caratterizzano; ogni ricerca infatti, deve poter rinforzare la teoria di cui fa parte, includendo in modo strutturato nuove misure e quindi allargando l'orizzonte della conoscenza. La ricerca, quindi, si pone come scoperta di idee e conquista di concetti e capacità.

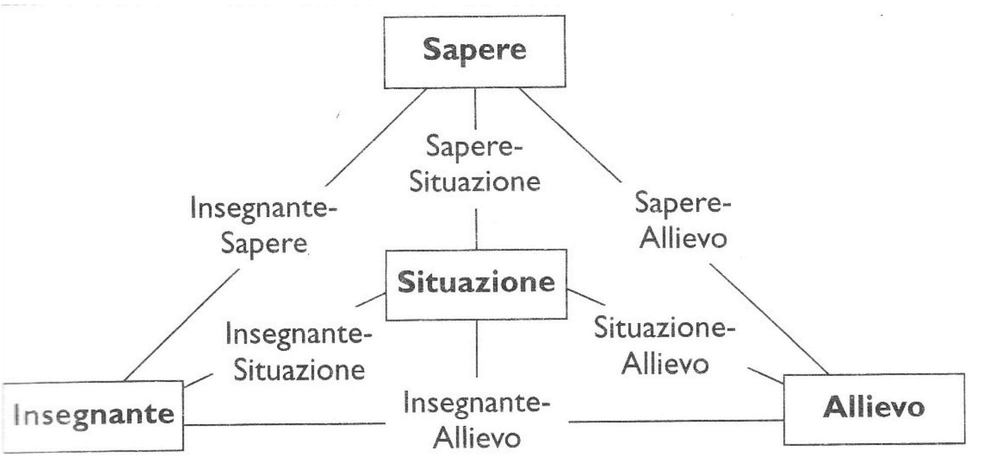
2.2.11. Problemi aperti

al termine della ricerca, il ricercatore deve saper cogliere all'interno della problematica affrontata i problemi che sussistono *a monte* o *a valle*, evidenziando così una costellazione di problemi aperti connessi con quello esaminato.
Spesso i problemi che si aprono possono essere tesi ad ampliare l'argomento di ricerca per approfondirlo.

2.3. Teoria delle situazioni: paradigma di riferimento

Il paradigma teorico di riferimento adottato durante l'intero lavoro porta la firma di Guy Brousseau, con la sua teoria delle situazioni[5]. Essa, ponendo in discussione la pratica educativa tradizionale di trasmissione lineare di un sapere precostituito che si basa su un percorso univoco che va dall'insegnante all'allievo, intende promuovere l'attivazione di un processo di strutturazione della conoscenza condivisa dal sapere matematico.

In questo senso, Brousseau prende in considerazione i possibili soggetti e le relative relazioni all'interno di una situazione didattica: il sapere, l'insegnante, l'allievo rappresentandoli nel seguente schema.



Lo schema sopra riportato mette in evidenza e riassume le relazioni esistenti tra i diversi didattici inseriti all'interno di un dato ambiente e attraverso una situazione didattica ben organizzata.

L'insegnante dovrebbe, attraverso una mediazione, fare in modo che l'allievo riesca ad avere un rapporto diretto con il sapere.

---

[5] Spagnolo Filippo,1998, pp. 95-98

L'allievo quindi si discosta dal ruolo di spettatore e si riappropria della responsabilità del processo di apprendimento, secondo una concezione reticolare del rapporto esistente tra soggetto e conoscenza, partecipando attivamente alla costruzione del proprio sapere.

Per ogni vertice e per ogni relazione è possibile individuare tre aspetti principali:

- Il **lavoro della comunità matematica** in un determinato momento storico (sapere), nel senso che viene selezionato il sapere da trasmettere alle successive generazioni.
- Il **lavoro intellettuale dell'allievo**, comparabile a quello del ricercatore,in quanto deve riprendere i "significati" ed il "senso" dei contenuti matematici in modo da formulare autonomamente, provare, ricostruire i linguaggi matematici, attraverso la proposta da parte dell'insegnante di situazioni che esso possa sperimentare.
- Il **lavoro dell'insegnante**, in quanto appartenente alla comunità dei matematici e nello stesso tempo mediatore di conoscenze.

In tal senso, i compiti del docente all'interno della teoria possono essere individuati nei seguenti punti:

- Individuazione di una "buona situazione" da proporre agli allievi
- Controllare le dinamiche relazionali
- Favorire una buona devoluzione[6] del problema senza "comunicare" direttamente una conoscenza.

Ciò sta a significare che il ruolo del docente, all'interno di questa relazione è determinante: egli, sulla base di una scrupolosa conoscenza degli allievi, deve ricontestualizzare e ripersonalizzare le conoscenze, frutto dell'adattamento ad una situazione specifica in riferimento ad un certo ambiente. Inoltre deve anche fornire agli allievi gli strumenti ed i mezzi per fargli vivere e comprendere il saper culturale che si vuole comunicare.

Il lavoro intellettuale compiuto in questo caso dall'allievo è confrontabile con quello del ricercatore: egli deve porsi problemi, definirsi attraverso buone domande, provare a

[6] La devoluzione consiste non soltanto nel presentare all'allievo il gioco al quale l'insegnante vuole che partecipi, ma anche nel fare in modo che l'allievo si senta responsabile, nel senso della conoscenza e non della colpevolezza, del risultato che egli deve cercare. La devoluzione fa appello alle motivazioni dell'allievo.
Quindi la devoluzione è l'atto attraverso il quale l'insegnante fa accettare all'allievo la responsabilità di una situazione di apprendimento (a-didattica) o di un problema e accetta lui stesso le conseguenze di questo transfert.

costruire modelli, teorie, per trovare buone risposte ad una situazione problematica specifica.
Il compito dell'insegnante è di fornire gli strumenti per simulare una "microsocietà scientifica", in cui gli allievi, calandosi metaforicamente nel ruolo di ricercatore ritrova il significato del "sapere culturale e comunicabile, confrontando i propri saperi per costruirne nuovi, formulando ed argomentando proprie ipotesi e formalizzando le loro scoperte".
L'apprendimento, quindi, attraverso l'innovazione proposta da G. Brousseau, non è più visto nella sola relazione insegnante-allievo, ma viene percepito nella relazione più complessa dei tre soggetti sapere-allievo-insegnante con un determinato ambiente all'interno di una certa situazione.
La teoria delle situazioni, quindi, si propone di recuperare la valenza formativa dell'educazione matematica, che diviene strumento per lo sviluppo psichico e in particolare della capacità di problem solving.
Accogliere questa prospettiva significa riconoscere le modalità con le quali il soggetto struttura la propria conoscenza, valorizzando il legame esistente tra questo processo e la dimensione cognitiva, relazionale, emotiva e sociale.
Strumento necessario alla modellizzazione delle situazioni didattiche è la nozione di gioco utilizzata da Brousseau come sinonimo di "**situazione**".
Come sottolinea Spagnolo (1998, p. 100), "La situazione si definisce didattica nel caso in cui l'azione dell'adulto è guidata dall'intenzione di insegnare all'allievo un determinato sapere".
Una *situazione didattica* su uno specifico tema possiede due componenti:

- la situazione a–didattica
- il contratto didattico

2.3.1. La situazione a-didattica

La *situazione a–didattica* si definisce tale «quando l'intenzione dell'insegnante non è esplicitata nei confronti dell'allievo. L'allievo sa che il problema propostogli è stato scelto per fargli acquisire nuova conoscenza e, nello stesso tempo, deve sapere che questa conoscenza è giustificata dalla logica interna della situazione». L'assunzione della responsabilità da parte dell'alunno passa attraverso la messa in discussione delle conoscenze pregresse e una conseguente situazione di conflitto, intesa

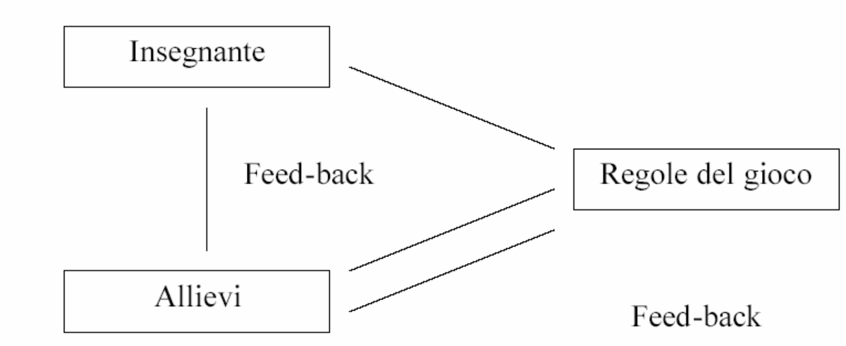
come luogo della rielaborazione e ristrutturazione delle conoscenze. La *situazione a–didattica* allora è uno spazio relazionale e cognitivo che si configura come possibilità offerta all'allievo di interagire con elementi della realtà, al fine di favorire l'auto – organizzazione della propria conoscenza.
Per analizzarne la struttura interna della situazione a-didattica è interessante configurare l'essenza delle varie fasi che la compongono.
Essa prevede diverse tappe:

- ⇒ Definizione della *consegna*
- ⇒ Situazione *d'azione*
- ⇒ Situazione di *formulazione*
- ⇒ Situazione di *validazione*

ciascuna delle quali possiede una struttura e delle caratteristiche specifiche, non lasciate all'improvvisazione.

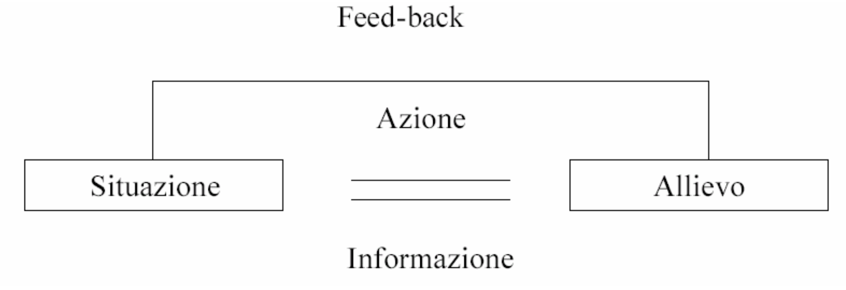
2.3.1.1 Definizione della consegna

Una situazione a – didattica inizia sempre con una consegna specifica, durante la quale l'insegnante può giocare con un allievo per illustrare le regole del gioco o consentire a due allievi di ripetere l'attività.
L'azione non solo riduce l'ambiguità del linguaggio verbale, ma si configura come *feedback* o retroazione dell'attività: da un lato l'allievo ha la possibilità di ripercorrere la situazione per effettuare un controllo e modificare l'azione, dall'altro l'insegnante ha l'occasione di cogliere il processo di retroazione attivato dall'allievo.



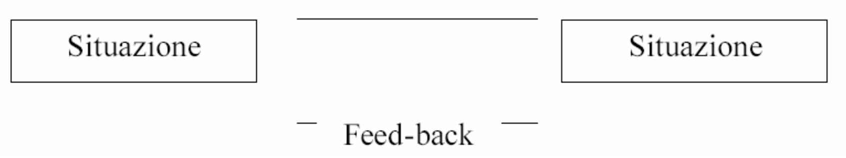
2.3.1.2. Situazione d'azione

La situazione d’azione costituisce il processo con il quale l’allievo si costruisce le strategie, ovvero apprende un metodo di risoluzione della situazione problematica presa in carico.
Gli allievi agiscono sulla situazione problema, iniziando a formulare ipotesi e strategie che sono messe alla prova da ulteriori esperienze.



2.3.1.3. Situazione di formulazione

La formulazione di una conoscenza trova riscontro nella capacità del soggetto a riprendere, riconoscere, identificare, decomporre, ricostruire tale conoscenza all’interno di un sistema linguistico.
In questa fase infatti l’allievo è motivato dalla situazione a formulare il proprio modello implicito, a verbalizzare le proprie strategie, ad argomentarle e difenderle, per far in modo che siano fatte proprie dagli altri allievi.
Il punto di partenza per ciascun alunno è l’elaborazione progressiva di un linguaggio che deve essere compreso da tutti e che, attraverso lo scambio comunicativo tra gli allievi, deve portare alla formulazione della strategia.



2.3.1.4 Situazione di validazione

I modelli conoscitivi formulati durante la fase precedente possono essere accettati o rifiutati dalla classe, metaforicamente intesa come una sorta di *comunità scientifica* che discute circa ciascuna strategia.

Le ipotesi accettate da tutti diventano teoremi, mentre gli errori diventano occasione per rivedere i propri ragionamenti e riformulare le strategie in modo corretto.
In questo modo l'errore diviene una tappa indispensabile nel processo di costruzione della conoscenza.
Con la fase di validazione si arriva a formalizzare il concetto matematico che nel tradizionale metodo di insegnamento spesso non rappresenta un punto d'arrivo ma un punto di partenza.

2.4. Il contratto didattico

Si tratta di un costrutto teorico prodotto oltre venti anni fa nell'ambito della "Teoria delle situazioni didattiche" di G. Brousseau particolarmente utile per descrivere i rapporti, riguardanti le prestazioni matematiche, che inevitabilmente (anche se spesso in modo inconsapevole) si creano in classe tra insegnante e allievi per il fatto che l'insegnante ha il compito "istituzionale" di insegnare matematica agli allievi, organizzando attività in classe a ciò finalizzate, e gli allievi devono (più o meno di buon grado...) adeguarsi a quello che l'insegnante pretende.
Il costrutto teorico del "contratto didattico", elaborato inizialmente nel quadro delle ricerche in didattica della matematica, è stato via via esteso ad altre discipline (in particolare in Francia la didattica della fisica e la didattica delle scienze ne fanno un uso esteso).
Il *contratto didattico* viene definito da Spagnolo (1998, 98) come «Risultato della negoziazione dei rapporti stabiliti esplicitamente e/o implicitamente tra un allievo e un gruppo di allievi, un certo ambiente ed un sistema educativo, al fine di far appropriare gli allievi di un sapere costituito o invia di costituzione».
Si tratta dunque di un insieme di regole stabilite all'interno della classe, derivanti dalla presa in carico della situazione, le quali organizzano le relazioni tra il contenuto oggetto di insegnamento, gli alunni, l'insegnante e le attese, al fine di favorire una buona devoluzione della situazione problematica.
Il contratto didattico permette di interpretare vari fenomeni che riguardano le prestazioni matematiche degli allievi e, più in generale, l'insegnamento-apprendimento della matematica, come ad esempio:

- il comportamento degli allievi nei problemi del tipo "età del capitano" ("Su una imbarcazione viaggiano il capitano, due marinai e ventitre pecore; quale è l'età del capitano?" — risposta: 46 anni ...);

- il tentativo disperato, nella risoluzione di un problema, di ricordare degli schemi risolutivi quando si tratterebbe invece di ragionare ex novo;
- il tentativo (peraltro assai meno frequente del precedente!) di costruire un ragionamento risolutivo originale laddove basterebbe applicare una formula opportuna;
- l'adozione sistematica di forme di organizzazione della risoluzione di un problema (ad esempio accompagnandola con una sequenza di disegni che rappresentano i diversi "passaggi") suggerite (e che funzionano) in casi particolari ma possono risultare di grave impaccio in altri problemi;
- le modalità di studio personale della matematica (fortemente influenzate da quelle che gli allievi pensano siano le prestazioni richieste dall'insegnante);
- molte delle difficoltà e delle incomprensioni tra insegnante di matematica e allievi che si manifestano nel passaggio a un nuovo livello scolastico (dalle elementari alle medie, dalle medie alle superiori) o nel cambio di insegnante di matematica all'interno di uno stesso ciclo scolastico.

La problematica del contratto didattico è particolarmente rilevante nella didattica della matematica in quanto la natura delle prestazioni matematiche è molto varia (a volte occorre ricordare, altre volte riflettere, altre volte ancora progettare, esplorare, ecc.), quindi la scelta del comportamento intellettuale più adatto in ogni circostanza è assai impegnativa, con il rischio inevitabile che l'allievo (soprattutto l'allievo meno sicuro di sé) si interroghi non su "cosa conviene fare" ma su "cosa l'insegnante si aspetta che io faccia".

L'importanza oggi riconosciuta del contratto didattico nell'insegnamento-apprendimento della matematica suggerisce che è bene che gli insegnanti si chiedano (nel momento in cui propongono una attività da svolgere) cosa i loro allievi possono aspettarsi di dover fare, e soprattutto prestino attenzione ai comportamenti dei loro allievi per individuare la possibile prevalenza di atteggiamenti del tipo "cosa devo fare per soddisfare l'insegnante", a prescindere dal contenuto e dalla logica interna della prestazione richiesta. E' anche bene che l'insegnante imposti con la massima chiarezza il rapporto contrattuale con i propri allievi, anche attraverso discussioni su cosa gli allievi si aspettano di dover fare nelle diverse circostanze e chiarimenti sulla varietà di comportamenti utili per affrontare i compiti più complessi (ricordare, applicare, esplorare, ecc.).

CAPITOLO III
FASE DI PRE-TEST

Premessa

Allo scopo di evitare errori di interpretazione più grossolani, domande superflue, modalità di risposte inappropriate, ridondanti e confuse, è stato svolta quella che nella ricerca viene definita fase di pre-test.

La fase di pre-test, si è svolta analizzando un campione piuttosto ristretto. Essa ha coinvolto quattro bambini, appartenenti al primo e al secondo ciclo (due frequentanti la prima classe e due frequentanti la classe terza).

Ai bambini è stato somministrato un test caratterizzato da diverse tipologie di problemi facenti riferimento rispettivamente a:

- contesto geometrico (situazioni/problema dove era d'obbligo l'approssimazione);
- contesto aritmetico (divisioni successive);
- esercizi sull'effetto distanza

Tutti hanno risposto al compito. I dati sono stati raccolti su appositi protocolli. L'analisi dei dati è stata condotta partendo dall'analisi a-priori dei comportamenti attesi e a questa è seguita l'analisi quantitativa e statistica dei dati effettuata tramite il programma EXCEL.

Dall'analisi dei dati è scaturito che non tutti gli esercizi, così come erano stati impostati, soddisfacevano le mie aspettative, quindi è stato necessario apportare delle variazioni al questionario originario affinché si potesse procedere alla fase di sperimentazione.

È rimasto invariato il primo problema, si è modificato di poco il secondo, mentre è stata annullata la parte relativa al contesto aritmetico, poiché, in base a quanto rilevato, non ha fornito risultati soddisfacenti.

3.1. Campione

L'indagine è stata rivolta a 4 allievi di scuola primaria del Circolo Didattico "San Ciro" di Marineo. In particolare due bambini frequentavano la classe prima e due la classe terza.
Particolare attenzione bisognava dare agli allievi più piccoli, in quanto vista l'età e la mancanza di un bagaglio conoscitivo pregresso necessitavano di una continua guida da parte dell'insegnante, il che non ha favorito l'attendibilità della prova.

3.2. Strumenti impiegati

Il mezzo di indagine che ho utilizzato mirava al rilevamento della presenza o meno di schemi di ragionamento approssimato nei bambini frequentanti la scuola primaria.
Per verificare quanto detto ho somministrato 3 tipologie di problemi[7] da risolvere inerenti a tre diversi contesti:

- contesto geometrico (situazioni/problema dove era d'obbligo l'approssimazione);
- contesto aritmetico (divisioni successive);
- esercizi di numerosity percetion.

Rispetto al contesto geometrico sono stati preparati due problemi. Essi constano di alcune domande aperte con motivazione alla risposta. Si tratta di risolvere l'area ed il perimetro di due figure irregolari, che differiscono per un particolare: il primo problema è stampato su carta millimetrata, mentre il secondo su un foglio bianco in modo che la mente rimanga svincolata da qualsiasi misura di riferimento.

3.3. Analisi a-priori[8]

L'analisi a–priori consente di interpretare e di tentare delle previsioni sui fenomeni didattici da rilevare. Per tale motivo sono state riportate le strategie ipotizzate di ogni classe con le rispettive tabulazioni dei dati.
Queste ultime sono state riprodotte mediante uso di foglio elettronico Excel, indicando in colonna le strategie ed in riga la classe di appartenenza ed un numero progressivo.
Gli indici 1 e 0 indicano l'avverarsi o meno di ciascuno degli eventi descritti.

---

[7] Vedi allegato 1.
[8] Vedi allegato 2.

3.4. Analisi dei dati

Analizzando i dati ed i protocolli raccolti[9], si evince che i risultati rilevati non soddisfacevano le mie aspettative.

L'analisi dei questionari somministrati, mi è stata utile, in quanto mi ha permesso di correggere ed in qualche modo migliorare le situazioni/problema inizialmente ideate, andando alla ricerca di situazioni che potessero centrare ancora meglio l'argomento in discussione.

Sulla base dei risultati emersi:

1. I problemi relativi al contesto geometrico sono rimasti quasi del tutto invariati;
2. Vengono eliminati gli esercizi relativi al contesto aritmetico;
3. Vengono inseriti alcuni esercizi sull'effetto distanza.

[9] Vedi allegato3.

CAPITOLO IV
LA SPERIMENTAZIONE

Premessa

L'inizio di una ricerca è un momento insidioso e delicato. Essa, in realtà, è una laboriosa attività intellettuale in cui ci si pongono interrogativi, si studia, si considerano i diversi approcci al problema e si azzardano ipotesi su come stanno le cose.

Nel seguente capitolo vengono descritte e presentate le fasi del lavoro sperimentale condotto presso la scuola statale di Marineo, nell'anno scolastico 2003/'04.

La sperimentazione ha previsto la somministrazione di due problemi aperti ed un esercizio sull'"effetto distanza" ad un campione di 97 alunni, con l'obiettivo specifico di rilevare le strategie risolutive e le argomentazioni ricorrenti di allievi di scuola elementare, rispetto alle situazioni – problema proposte.

Le situazioni proposte contengono due problemi aperti: nello specifico, nel primo problema aperto (situazione problema A) viene richiesto all'alunno di calcolare l'area ed il perimetro di un delfino (figura irregolare) stampato su carta millimetrata e di motivare la propria risposta; in questo modo l'alunno può rispondere servendosi delle varie unità di misura che trova prestampate su carta millimetrata.

Nel secondo problema aperto (situazione problema B) viene proposto all'alunno un problema simile al precedente, ma in questo caso non avrà a disposizione nessuna unità di misura di riferimento, per cui per rispondere dovrà mettere in atto meccanismi di ragionamento approssimato.

La somministrazione delle situazioni – problema è stata attuata tra aprile e maggio 2003, concordando degli appuntamenti con l'insegnante dell'ambito logico – matematico di ciascuna classe, al fine di creare un clima funzionale allo svolgimento della prova.

In particolar modo, sono state descritte l'ipotesi sperimentale, il campione, la metodologia utilizzata, l'analisi a-priori.

4.1. Individuazione del problema e definizione dell'oggetto di indagine

Il primo momento dell’attività ideativa con cui inizia la mia ricerca è la definizione dell’oggetto d’indagine.
È stato importante, quindi, come prima cosa, chiarirlo a me stessa, per poter così, circoscrivere il campo, valutare il lavoro che stavo per intraprendere, cogliere le implicazioni, il significato e il valore, facendomi così una prima idea dei risultati che sarebbero potuti emergere.
Quindi, ho cercato di chiarirmi mentalmente cosa volevo scoprire concretamente, collocando così la questione entro un quadro teorico esistente.
In particolar modo, il lavoro sperimentale nasce in seguito alla domanda che mi sono posta: “che tipi di schemi di ragionamento attivano i bambini per approssimare?”. A questo interrogativo, una risposta era stata data da alcuni studiosi ed in particolar modo da Dehaene, Piaget ed altri (di cui ho ampiamente discusso al capitolo 1).
Lo scopo che mi accingevo a perseguire era quello di partire da studi preesistenti per tentare di pervenire a risultati nuovi.

4.2. Ipotesi sperimentale di ricerca

La formulazione delle ipotesi di ricerca, è una presupposizione iniziale, ammessa provvisoriamente, come punto di partenza di una dimostrazione, volta a spiegare gli eventi di cui non si ha una “perfetta conoscenza”. La caratteristica di un’ipotesi è la sua falsicabilità, ovvero la possibilità, attraverso tentativi sistemici, di dimostrarne la falsità.
In tal senso, lo scopo che mi sono posta di raggiungere è rappresentato dalla possibilità di risalire ai diversi processi di ragionamento approssimato nei bambini di età compreso tra i 6 e i 12 anni.
In particolare, ***l’ipotesi generale*** posta è la seguente “*se* i bambini rispondono correttamente agli esercizi sull’“effetto distanza” *allora* presentano schemi di ragionamento approssimato”.
L’ipotesi alternativa è fondata sulla difficoltà di comprendere la consegna, che non consentirebbe ai soggetti l’attivazione dei processi di ragionamento approssimato.
L’ipotesi nulla, è l’inesistenza di ragionamento approssimato, il che non consentirebbe l’esecuzione della consegna.
Per poter falsificare le ipotesi poste, ho somministrato un questionario al campione di riferimento, il quale doveva rispondere individualmente.

4.3. Campione di ricerca

La ricerca sperimentale è stata svolta presso il Circolo Didattico "San Ciro" di Marineo, durante l'anno scolastico 2004-2005 nel periodo compreso tra Ottobre e Novembre. Essa ha visto coinvolti, rispetto alla popolazione un campione piuttosto ampio, composto da 95 bambini frequentanti il primo e il secondo biennio di scuola primaria.

Non sono stati coinvolti i bambini frequentanti la classe prima, in quanto, vista l'età e l'assenza di conoscenze pregresse richieste per la risoluzione del questionario, avrebbero avuto bisogno del supporto da parte del ricercatore o dell'insegnante, creando una condizione che in qualche modo avrebbe falsato e compromesso i risultati della ricerca stessa.

4.4. Metodologia

Un aspetto importante della ricerca è rappresentato dalla metodologia utilizzata. Essa è stata caratterizzata dalla stesura di due quesiti che inducono il bambino all'attivazione di schemi di ragionamento approssimato (ove esistenti).

Dopo aver formulato i quesiti, ho stilato l'analisi a-priori, costituita da una lista di comportamenti attesi, relativi al compito, da parte del campione.

Questa lista, pone dei limiti, nel senso che tiene in considerazione un numero di eventi prevedibili; per questo motivo ho lasciato un ampio spazio ai comportamenti che non avevo previsto.

4.5. Strumenti impiegati

La ricerca mira al rilevamento degli schemi di ragionamento approssimato di fronte alla risoluzione di problemi appartenenti all'ambito geometrico e all'effetto distanza[10].

Per questo motivo, sono stati somministrati ai bambini 3 quesiti[11], per individuare quali sono le strategie risolutive e le argomentazioni ricorrenti relative ai contenuti proposti:

---

[10] Si rifà ad una dimostrazione sperimentale svolta nel 1967 da R. Moyer e T. Landauer. Il loro esperimento consisteva semplicemente nel mostrare coppie di numeri, per esempio 9 e 7, e chiedere ad un soggetto di indicare da che parte stesse la cifra più grande. Gli studiosi osservarono che le prestazioni dei soggetti variavano in funzione dei numeri presentati e che pur mantenendo fissa la distanza tra i due numeri il tempo di risposta rallentava via via i numeri diventavano più grandi. (Dehaene, 2001)

[11] vedi allegato 4

1. il primo quesito appartiene all'ambito geometrico; si tratta di una figura irregolare stampata su carta millimetrata, e della quale, i soggetti dovranno calcolarne l'area e il perimetro utilizzando la strategia ritenuta appropriata
2. anche il secondo quesito appartiene all'ambito geometrico, ma è caratterizzato da una variante diversa; mentre il primo problema era fornito su carta millimetrata, questo è stato stampato su un foglio di carta bianco, in modo tale che la mente sia svincolata da misure di riferimento.
3. l'ultimo esercizio viene definito da Dehaene "Numerosity Perception" e consiste nel mostrare ai bambini, per alcuni secondi, due insiemi per volta di differente numerosità, chiedendo di identificare l'insieme più numeroso.

Ad ogni elemento del campione verranno distribuiti i quesiti sopraelencati, ad eccezione dell'ultimo, ai quali dovranno rispondere individualmente evitando di collaborare con i compagni.

4.6. Analisi a-priori

L'analisi a-priori[12], consente di interpretare e di tentare delle previsioni sui fenomeni didattici. Inoltre viene definita da Spagnolo[13] come:

- Lo spazio degli eventi riguardante la particolare situazione didattica, cioè l'insieme delle possibili strategie risolutive corrette e non ipotizzabili in quel determinato contesto.
- Una situazione didattica fondamentale per l'insieme di problemi alla quale la situazione didattica afferisce.
- Le variabili didattiche che permettono un cambiamento dei comportamenti degli allievi.
- La possibilità di analizzare in modo più accurato qualunque strumento di analisi e valutazione delle situazioni d'insegnamento/apprendimento.

La costruzione dell'analisi a-priori è avvenuta in più momenti:

---

[12] vedi allegato 5

[13] Spagnolo F. (1998), *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*, Edizione La Nuova Italia, Firenze

1. durante la costruzione dei questionari, facendo riferimento alle attese personali del ricercatore e all’analisi epistemologica dei contenuti messi in gioco;
2. dopo la fase di pre-test;
3. dopo la sperimentazione.

Per tale motivo, l’analisi a-priori ha permesso di determinare le possibili strategie risolutive in riferimento alle situazioni problema.

CAPITOLO V
ANALISI E VALUTAZIONE DEI RISULTATI

5.1 Strumenti per l'analisi dei dati sperimentali

L'analisi dei dati sperimentali, in riferimento alla somministrazione dei problemi al campione di 95 alunni, è stata ottenuta grazie all'analisi a-priori dei comportamenti ipotizzabili, attraverso l'applicazione della statistica descrittiva con il calcolo della frequenza relativa percentuale (tabulando i dati con il programma excel) ed attraverso l'uso del software statistico CHIC[14], il quale permette di studiare le implicazioni tra gli indicatori. Tale software è stato messo a punto nel 1997 dal prof. Regis Gras e dai suoi collaboratori che si occupano di ricerca in didattica.

5.2 Analisi descrittiva

"Ogni forma di scienza sperimentale presuppone una misura, vale a dire il riconoscimento di una corrispondenza fra i dati qualitativamente definiti e le espressioni usate per rappresentare il numero di unità da essi contenuti. Ciononostante i numeri non parlano da soli; bisogna evidenziare i rapporti esistenti tra loro." (De Landesheere, 1970, p.381)

Infatti, in seguito alla raccolta dei dati ho fatto ricorso all'applicazione della statistica descrittiva, quella scienza rivolta all'analisi delle caratteristiche del collettivo osservato nella sua totalità.

I dati emersi dalla somministrazione delle prove sperimentali sono stati tabulati sulla base dell'analisi a-priori e sono stati inseriti in cinque tabelle a doppia entrata in EXCEL, in riferimento ad ogni singolo quesito dei questionari proposti e ad ogni classe di appartenenza.

Nelle tabelle in EXCEL[15] è stata rilevata la presenza l'assenza delle strategie adottate da ogni singolo elemento del campione, mediante gli strumenti sperimentali utilizzati nella ricerca.

---

[14] I grafici elaborati dal software Chic, danno la possibilità di controllare e scegliere il livello di accettabilità delle implicazioni desunte e le implicazioni stesse sono stabilite in accordo con le leggi probabilistiche della statistica inferenziale.
(Gras P. (1997), "metodologia di analisi d'indagine", Quaderni di ricerca in didattica, n. 7, 99-109)

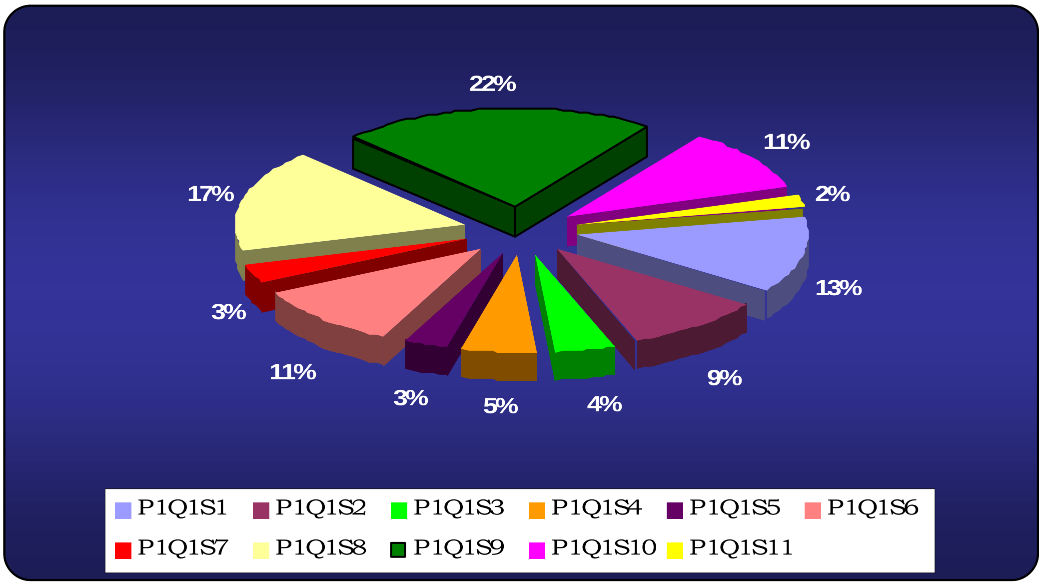
[15] Le tabelle ottenute grazie al supporto EXCEL sono consultabili all'allegato 6

All’interno delle tabelle sono stati indicati per ciascun alunno i seguenti elementi:

- La lettera indica la classe di appartenenza dell’alunno
- Il numero indica il singolo bambino
- VALORE 1: strategia di cui l’alunno si è servito
- VALORE 0: strategia di cui l’alunno non si è servito

Dall'analisi del primo quesito sono emersi i seguenti dati:

P1Q1



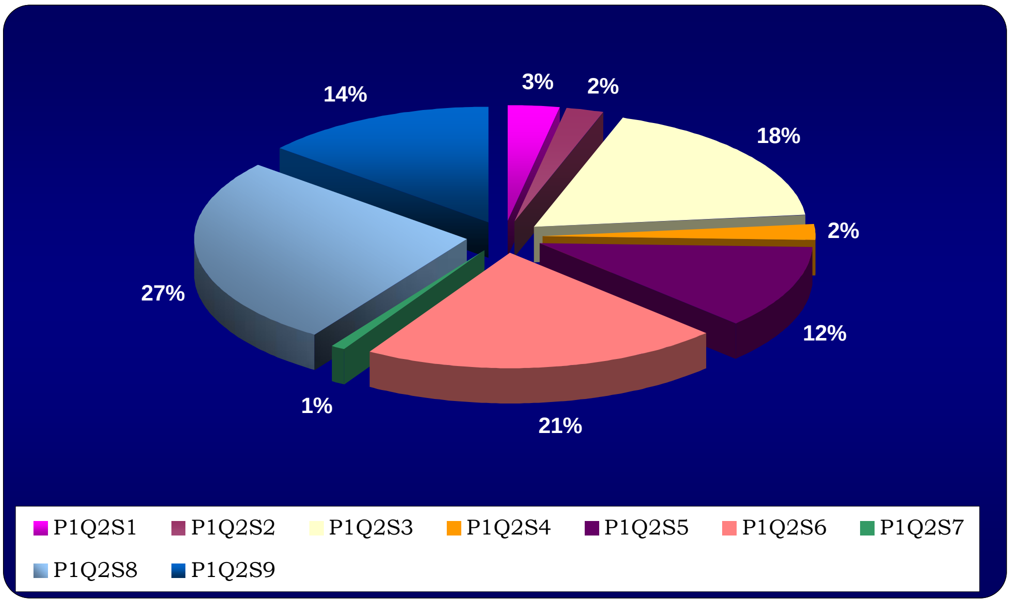
- Il 22% del campione opera in maniera precisa, inscrivendo la figura irregolare entro una regolare, misurando e applicando le regole della geometria
- Il 17% degli alunni conosce operativamente i procedimenti per la misura ottenendo un'approssimazione grossolana
- Il 12% circa (P1Q1S3, P1Q1S4, P1Q1S5) conosce operativamente i procedimenti per la misura precisa
- IL 13% del campione mette in atto strategie di approssimazione per eccesso
- Il 9% invece, mette in atto strategie di approssimazione per difetto
- Una piccola percentuale, pari al 3%, risolvere il problema non esplicitando la strategia adottata e giustificando ciò con l'esecuzione di calcoli svolti a mente.

Da quanto rilevato dall'analisi dei dati si evince che il 69% degli alunni hanno messo in atto strategie risolutive tali da condurre a risultati molto precisi, in quanto conoscono operativamente i procedimenti per la misura precisa; il restante 31% invece ha impiegato strategie che conducono ad un'approssimazione piuttosto grossolana.

P1Q2

Il primo problema comprende anche un secondo quesito, che richiede agli allievi di calcolare in maniera molto precisa il perimetro della figura data.

La somministrazione dello stesso ha permesso di rilevare i seguenti dati:



Il 32% del campione (P1Q2Q1, P1Q2S2, P1Q2S9, P1Q2S10) per risolvere il problema mette in atto strategie che lo conducono ad applicare quanto viene stabilito dal contratto didattico: “per risolvere un problema bisogna avere le misure e applicare le formule”.

Il 28% del campione (P1Q2S4, P1Q2S5 e P1Q2S9) sceglie una propria unità di misura e la riporta tante volte sino a ricoprire la superficie.

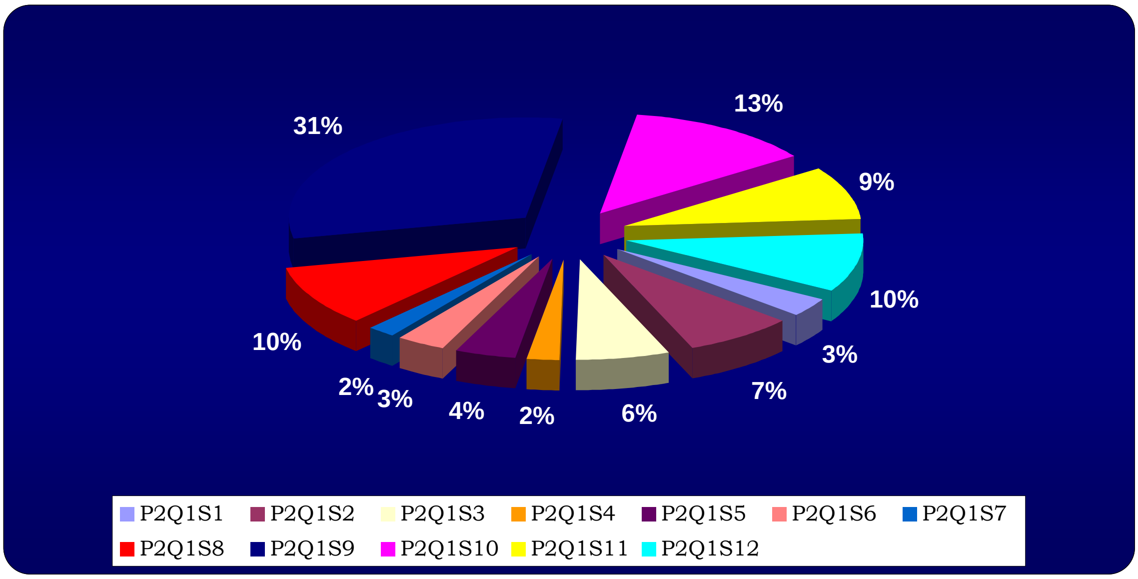
Considerato che il problema è stato stampato su foglio di carta millimetrata, il 39% (P1Q2S3 e P1Q2S6) degli allievi risolve il problema facendo riferimento all’unità di misura fornita nel foglio stesso, però mentre alcuni utilizzano come strategia la conta dei quadrati piccoli, altri si avvalgono della conta dei quadrati più grandi ottenendo comunque in ogni caso misure approssimate più o meno precise.

Dalle risposte registrate appare chiaro che il 61% del campione mette in atto strategie di approssimazione grossolana, mentre il 39% mette in atto strategie di approssimazione pervenendo a risultati precisi, in quanto la mente rimane vincolata a misure di riferimento.

P2Q1

Il secondo problema pone gli stessi quesiti del primo. Si differenzia dal primo per una semplice, ma fondamentale caratteristica. Mentre il primo problema era stato stampato su un foglio di carta millimetrata (fornendo così un'unità di misura di riferimento), il secondo è stato stampato su un foglio di carta completamente bianco. Questo fa si che per risolvere il problema, il soggetto mantiene la mente svincolata da qualsiasi misura di riferimento.

In particolare il primo quesito richiede al soggetto di calcolare in maniera precisa la superficie della figura. Dall'analisi dei questionari sono emersi i dati di seguito riportati:



Il 44% del campione (P2Q1S9 e P2Q1S10) per la soluzione del problema ha la necessità di effettuare misure e calcoli, infatti inscrive la figura data entro una figura regolare, misura ed infine effettua i calcoli, ottenendo misure piuttosto precise

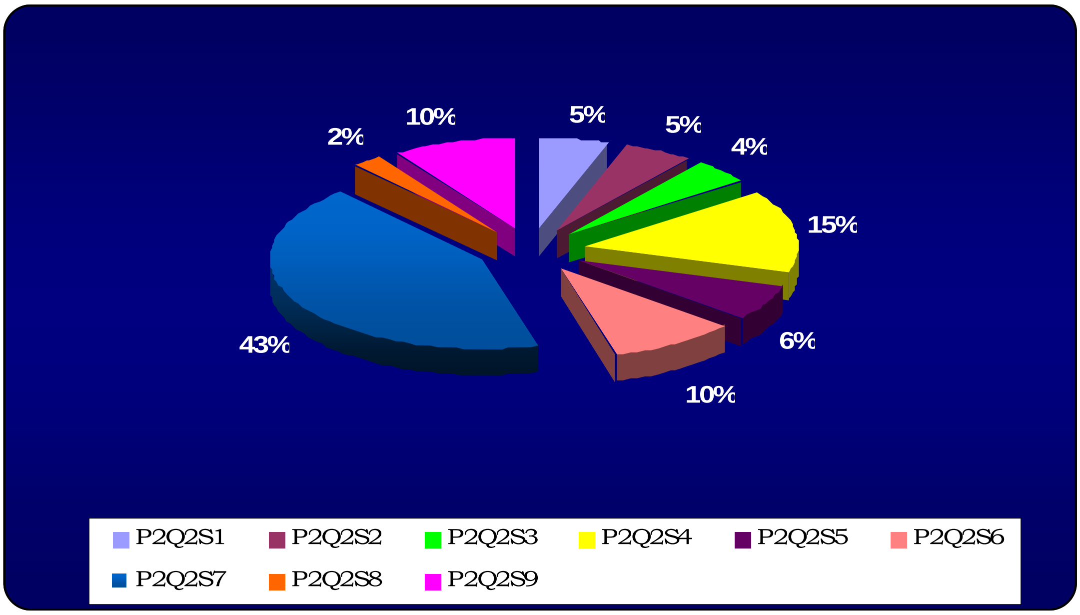
Il 50% del campione preferisce scegliere una propria unità di misura e ricoprire interamente o quasi la superficie; facendo così i bambini ottengono delle misure approssimate più o meno precise a seconda della precisione con la quale ripetono l'unità di misura.

Soltanto una piccolissima percentuale (6%) confonde l'area con il perimetro mettendo in atto strategie fuorvianti.

P2Q2

Il secondo problema, così come il primo, ha un secondo quesito, che richiede agli allievi di calcolare il perimetro della figura data in maniera precisa.

Dalla somministrazione dello stesso sono stati rilevati i seguenti dati:



L'87% del campione (P2Q2S1, P2Q2S2, P2Q2S3, P2Q2S4 e P2Q2S7) nella risoluzione del problema mette in atto strategie risolutive che richiamo quanto viene stabilito dal contratto didattico: per risolvere un problema bisogna che l'allievo abbia dei dati con i quali operare". Dunque gli allievi hanno svolto procedure di misura e calcolo applicando le formule necessarie.

Il 12% sceglie unità di misure proprie ottenendo dei calcoli molto approssimati, non pervenendo spesso alla soluzione.

Soltanto una piccola percentuale pari al 2% risolve il problema senza rilevare alcuna strategia risolutiva e giustificando che per risolvere il problema calcola a mente.

5.3. Albero delle similarità

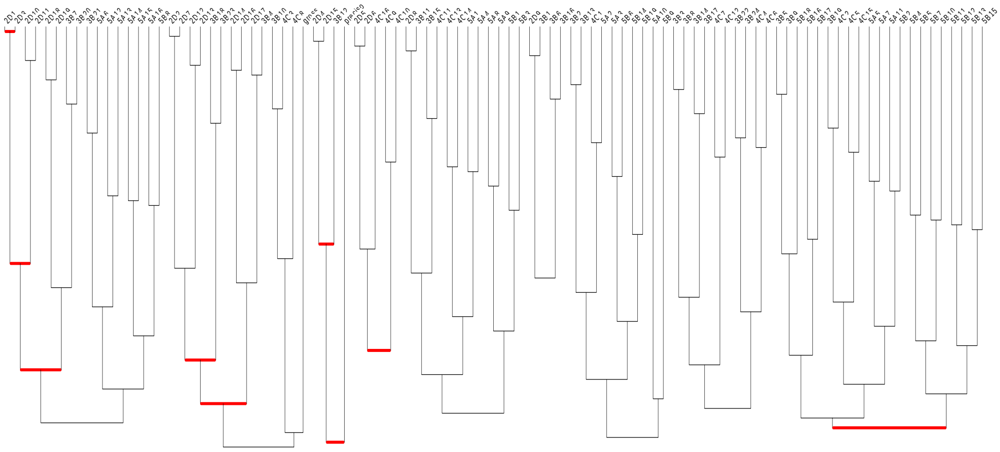
Per l'analisi implicativa, ho utilizzato il programma dello CHIC, il quale mi ha permesso di controllare e scegliere il livello di accettabilità delle implicazione.

Per poter fare ciò ho ipotizzato due variabili supplementari che riconducono a due profili ideali di bambini:

- Grossolano: rientrano in questa categoria tutti i soggetti che nel risolvere il problema mettono in atto strategie che conducono a risultati piuttosto grossolani
- Preciso: fanno parte di questa tutti i soggetti che nella soluzione del problema mettono in atto strategie che conducono a risultati molto più vicini alla soluzione corretta. In questa categoria rientrano tutti i bambini che per trovare una soluzione hanno avuto la necessità di effettuare misure e calcoli secondo quanto viene stabilito dal contratto didattico.

Di seguito vengono riportati i grafici di similarità tenendo conto delle due variabili supplementari individuate, in riferimento alle risposte di ogni soggetto.

P1Q1



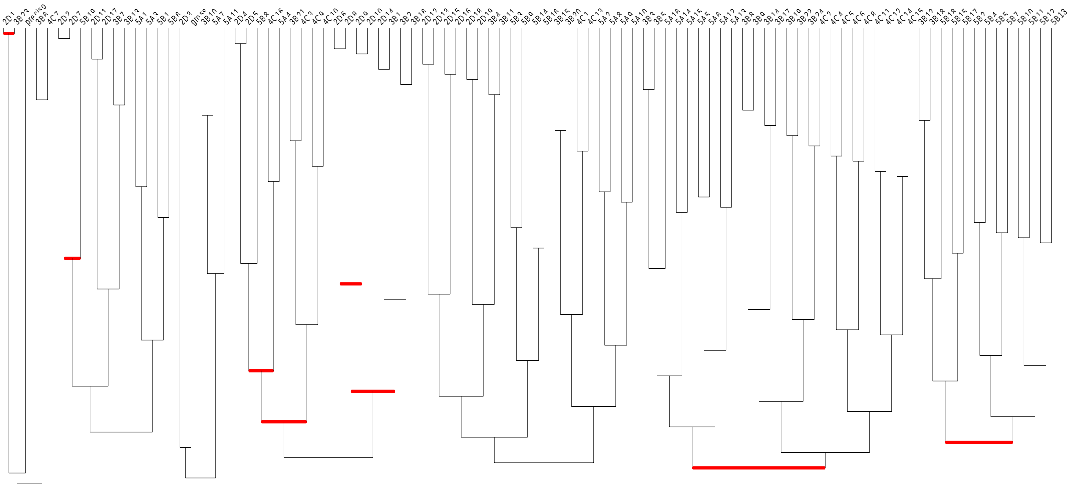
Albero delle similarità : G:\TESI\Sperimentazione\PROTOCOLLI UNICI\PROTOCOLLO UNICO P1Q1_trasp1.csv

Dall’osservazione del grafo di similarità si delineavano alcuni gruppi emergenti:

- ~ Nel primo gruppo si nota un’elevata similarità tra 2D1 e 2D3, i quali si correlano con 2D10 e 2D11, ed in modo trascurabile con i gruppi2D18 e 2D19 e 3B7 E 3B20.
- ~ Nel secondo gruppo si nota una similarità trascurabile tra 2D4 2D15 e 3B12, i quali rientrano nella categoria “precisi”.

Tutti gli altri mettono in atto strategie diverse da quelle previste.

P1Q2

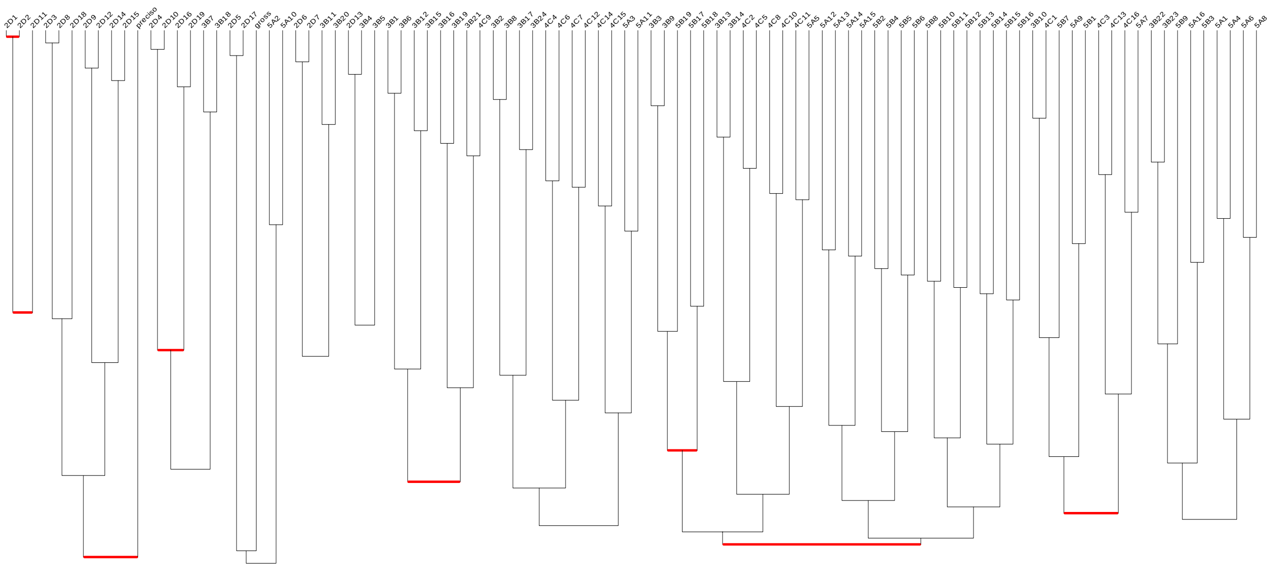


Albero delle similarità : G:\TESI\Sperimentazione\PROTOCOLLI UNICI\PROTOCOLLO UNICO P1Q2_trasp1.csv

Dall’osservazione del grafo di similarità si delineavano alcuni gruppi emergenti:

- Si nota un’elevata similarità tra 2D1 e 3B23, i quali si correlano in modo trascurabile con 3B8 e 4C7, mettendo in atto strategie “precise”

P2Q1

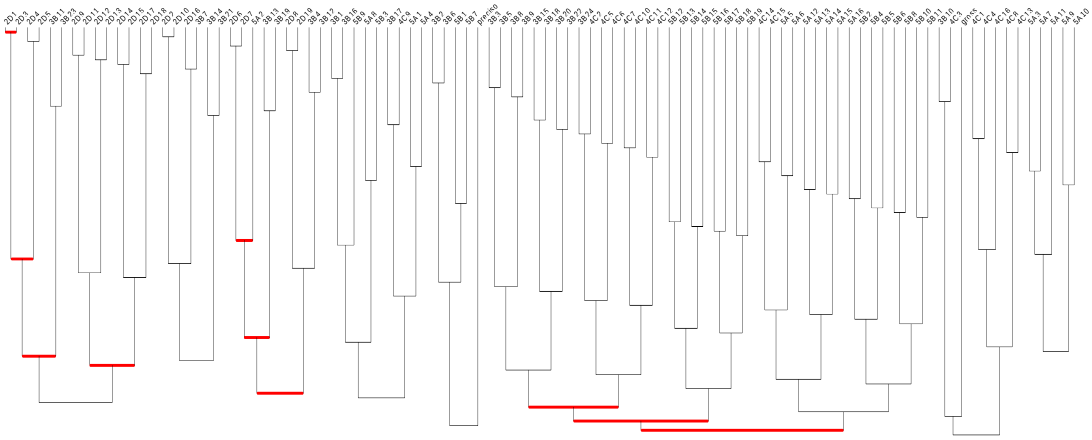


Albero delle similarità : G:\TESI\Sperimentazione\PROTOCOLLI UNICI\PROTOCOLLO P2Q1_trasp1.csv

Dall'osservazione del grafo di similarità si possono riscontrare due gruppi:

- ~ Nel primo gruppo si nota un'elevata similarità tra 2D1 e 2D2, i quali si correlano con 2D11.
- ~ Nel secondo gruppo rientrano tutti i soggetti facenti parte della variabile precisi e tra questi: 2D3, 2D8, 2D18, 2D9, 2D12, 2D14, 2D15.

P2Q2



Albero delle similarità : G:\TESI\Sperimentazione\PROTOCOLLI UNICI\PROTOCOLLO P2Q2_trasp1.csv

Dall’osservazione del grafo di similarità si delineavano alcuni gruppi emergenti:

- Rispetto alla variabile “preciso”, si nota una certa similarità tra 3B2, 3B6, 5B1 e 5B7
- Rispetto alla variabile “grossolano”, si nota una certa similarità tra 3B10, 4C3, 4C13, 4C8, 4C16, 4C4 e 4C1.

5.4. Conclusioni

Dall’analisi dei dati si evince che le due variabili supplementari individuate, discriminano piccoli gruppi di allievi.
In realtà, sulla base dell’analisi a-priori e delle osservazioni di natura qualitativa, ci si aspettava una differenziazione di gruppi molto più numerosi.
Presumibilmente un grande gruppo di soggetti, mette in atto strategie non facilmente individuabili. Sulla base di quanto riscontrato si individuano diversi problemi aperti.

5.5. Problemi aperti

Nell’ottica del miglioramento, ritengo sia importante mettere in evidenza alcune questioni aperte che possono fungere da ipotesi per eventuali ricerche successive:

- Che relazione c’è tra il contratto didattico e la capacità di approssimare in maniera grossolana o precisa?
- Come interviene il contratto didattico sulla capacità del soggetto di approssimare?
- Esiste una didattica che favorisce l’approssimazione libera?

Le domande elencate nascono per sottolineare il carattere non esaustivo della ricerca, la quale non ha la pretesa di aver fornito contributi significativi alla ricerca, ma si pone come l’occasione per riflettere e approfondire su aspetti teorici rilevanti, raccogliendo diverse prospettive che favoriscono una più ampia visione del fenomeno.

CAPITOLO VI
CONCLUSIONI

6.1. Riflessioni conclusive

Ispirandosi alla teoria delle situazioni di Guy Brousseau (1998), quale paradigma di riferimento nella ricerca in didattica, il lavoro sperimentale è stato rivolto a configurare i diversi schemi di ragionamento approssimato che i bambini mettono in atto di fronte a situazioni di insegnamento- apprendimento.

Dall'analisi dei dati quantitativi e qualitativi si evince che l'ipotesi di partenza non è stata falsificata, in quanto si sono verificate situazioni che non avevo previsto: è emersa una netta differenza tra i bambini frequentanti il primo biennio ed i bambini del secondo biennio. I primi nel risolvere i problemi adottano strategie molto libere, i secondi invece, quasi nell'unanimità, rispondono seguendo le regole dettate dal contratto didattico (secondo il quale per risolvere un problema occorre possedere i dati ed operare con le formule).

A questo punto avrei dovuto cambiare direzione, apportando delle modifiche sia al titolo, sia all'ipotesi, iniziando così un percorso più mirato al problema in questione.

Il titolo più confacente sarebbe stato: "*Influsso del contratto didattico sugli schemi di ragionamento approssimato*"; l'ipotesi invece sarebbe dovuta diventare: "se l'allievo fa un ragionamento approssimato allora risponde secondo il contratto didattico".

Questo risultato è un forte stimolo utile a dar vita ad una serie di lavori volti a curare gli aspetti evidenziati.

Dal punto di vista del ricercatore, il paradigma utilizzato per elaborare questo lavoro di tesi, mi ha permesso di confrontarmi con un modo nuovo di fare scuola. La dimensione della ricerca infatti, permette di avvicinarsi al sapere in modo critico, problematizzando la realtà al fine di comprenderla.

La ricerca e la sperimentazione sono diventate fattori essenziali di miglioramento delle procedure educative sia in riferimento al comportamento individuale del docente e degli allievi, sia agli aspetti di insieme della prassi scolastica.

La ricerca così intesa consente un costante rinnovamento nei mezzi, nelle tecniche e nei contenuti dell'istruzione, ravvivati dal contatto immediato con i più recenti apporti della scienza pedagogica e psicologica, con le proposte più avanzate della metodologia. Grazie a questa esperienza di ricerca ho avuto modo di maturare la consapevolezza che l’apprendimento mediante la ricerca e la scoperta sia di molto superiore al metodo tradizionale, sia sul piano psicologico che su quello didattico e formativo.

L’assunzione di tale atteggiamento mi ha permesso di conoscere meglio la realtà scolastica, ma soprattutto di approcciarmi ai problemi dell’insegnamento con particolare sensibilità e con ottica razionale.

L’attività di ricerca, dunque, ha previsto il superamento della didattica “trasmissiva”, attivando motivazioni ed interessi negli alunni ed orientando l’interesse all’apprendimento in molteplici direzioni.

RINGRAZIAMENTI

Non avrei mai potuto sviluppare la mia ricerca senza il sostegno da parte dei miei docenti (relatori) prof. Filippo Spagnolo e prof.ssa Alessandra La Marca.

Il loro aiuto, la loro disponibilità ed i loro incoraggiamenti sono stati per me un aiuto inestimabile. Mi hanno dato la possibilità di conoscere un nuovo modo di operare, permettendomi di acquisire un metodo di lavoro scientifico.

Desidero inoltre ringraziare il dirigente scolastico e il corpo docenti del Circolo Didattico "San Ciro" di Marineo, presso il quale ho svolto la sperimentazione, per la disponibilità e la fiducia che mi hanno dato, senza la quale non avrei mai avuto la possibilità di applicare la mia ricerca sul campo.

Un particolare grazie va alla mia famiglia, la quale, insieme a me, ha vissuto ogni momento di ansia, preoccupazione, felicità, sostenendomi sempre ed incoraggiandomi ad andare avanti.

Un grazie a tutti coloro che mi sono stati vicini (amici, colleghi).

Con il presente lavoro si chiude per me un percorso formativo universitario.

Bibliografia

- Ajello M., “Analisi a-priori come strumento per la strutturazione di un percorso di insegnamento apprendimento per moduli”, *Quaderni di ricerca in didattica*, G.R.I.M., Palermo, N° 9, pp. 155-164

- Buttherworth Brian, (1999) *Intelligenza matematica, Vincere la paura dei numeri scoprendo le doti innate della mente* , Rizzoli, Milano

- Dehaene Stanislas, (2001) *Il pallino della matematica. Scoprire il genio dei numeri che è in noi*, Oscar Saggi Mondatori, Milano

- Devlin Keith, (2000) *Il gene della matematica,* Longanesi & c., Milano

- De Landsheere Gilbert, (1973), *Introduzione alla ricerca in educazione*, La Nuova Italia, Firenze

- Ferraresco Luigi, (1986)*La ricerca sociale*, La scuola, Brescia

- Gherardi V. (2000), *Insegnare nella scuola primaria. La ricerca nella didattica,* Carocci, Roma

- Gras P. (1997), “ Metodologia di analisi d’indagine”, *Quaderni di ricerca in didattica,* 7, 99-109.

- G.R.I.M.,Quaderni di ricerca in didattica n. 4- Palermo1994

- G.R.I.M., Quaderni di ricerca in didattica, n. 8 – Palermo 1999

- La Marca Alessandra, (1999), *Didattica e sviluppo della competenza metacognitiva*, Palumbo, Palermo

- Laeng Mauro (1992), *Pedagogia sperimentale*, La Nuova Italia, Firenze

- Lino S., Cocuzza S. (2002), *I pre-requisiti per l'apprendimento della matematica*, Del Cerro, Pisa.

- Piaget Jean (2000),*Lo sviluppo mentale del bambino*, Einaudi, Torino

- Piaget Jean, Szeminska Alina (1987) *La genesi del numero nel bambino*, La Nuova Italia, Firenze

- Spagnolo Filippo (1998) *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*, La Nuova Italia, Firenze

- Speranza Francesco (1990), *Insegnare la matematica nella scuola elementare*, Zanichelli, Bologna

- Viganò Renata (1999), *Pedagogia e sperimentazione*, Vita e Pensiero, Milano

- Zoltan Dienes (1977), *La matematica nella scuola elementare*, La Nuova Italia, Firenze

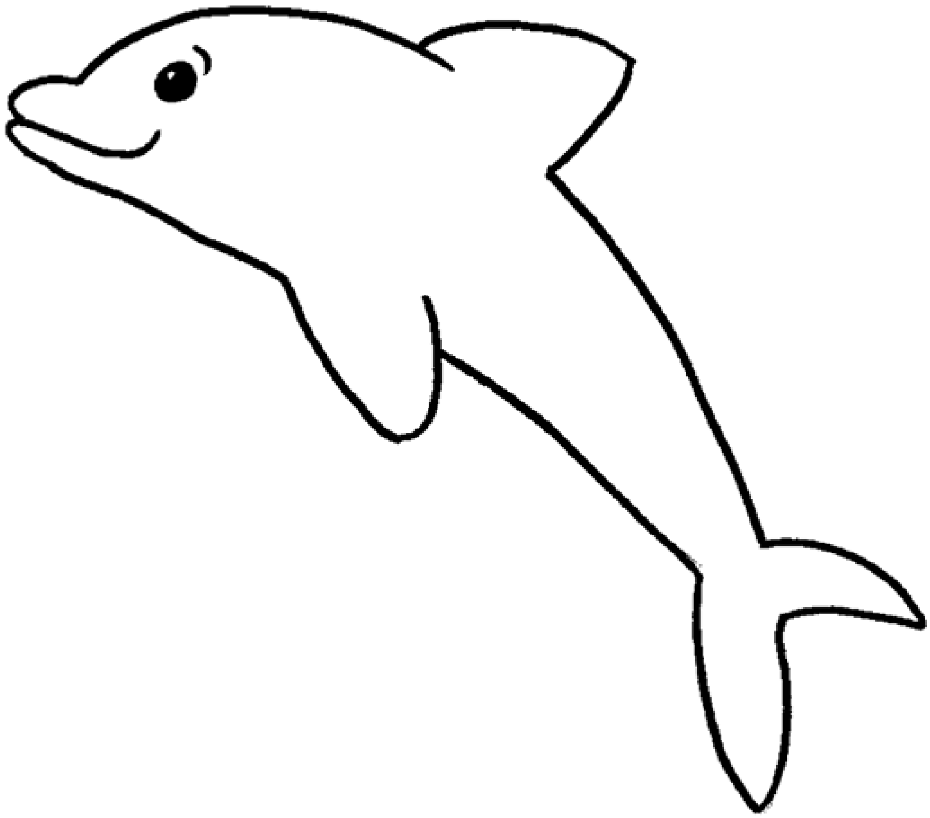
- Zanniello Giuseppe (1997) (a cura di), *La prepedagogicità della sperimentazione*, Palumbo, Palermo

Allegato 1

Mi sai dire quanto misura l'area della superficie occupata dal delfino?

E quanto il suo perimetro?

Motiva la tua risposta.



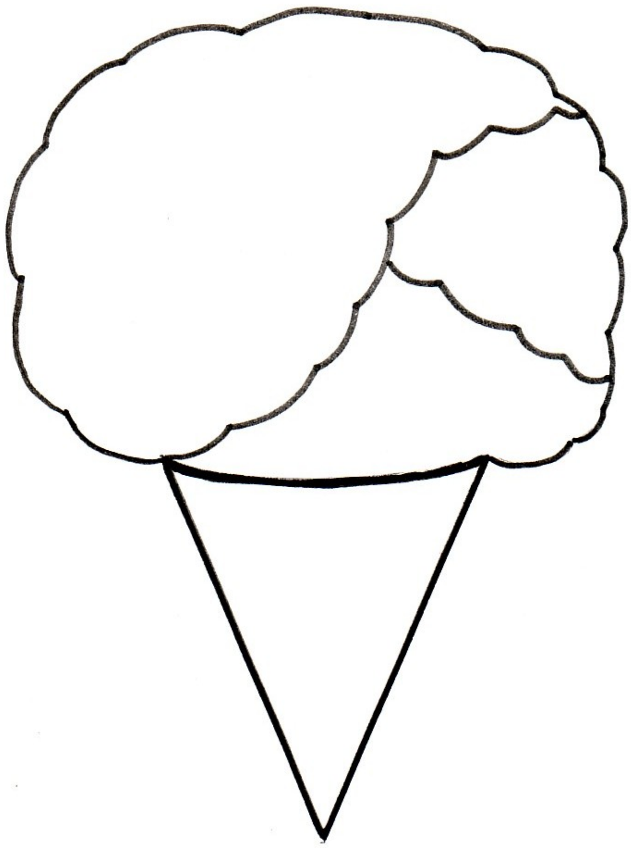
E' possibile avere una misura più precisa di quella che hai trovato?

Motiva la tua risposta.

2. Mi sai dire quanto misura l'area della superficie occupata dal cono gelato?

E quanto è il suo perimetro?

Motiva la tua risposta

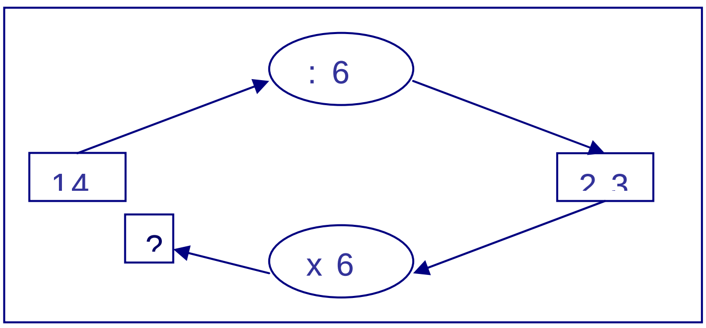


E’ possibile avere una misura più precisa di quella che hai trovato?

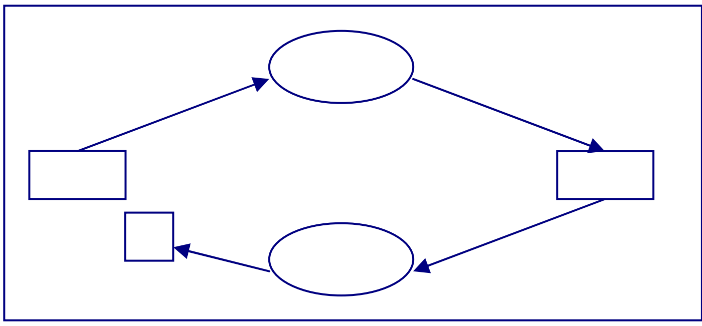
Motiva la tua risposta

3. Risolvi le seguenti divisioni e fai la prova seguendo il modello dato.

14:6 =



85:9 =



Motiva la tua risposta

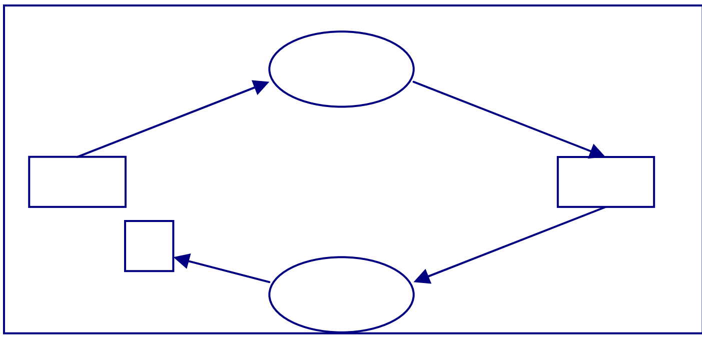
……

……

……

…………………………………………………………………………………

2643:495=



Motiva la tua risposta

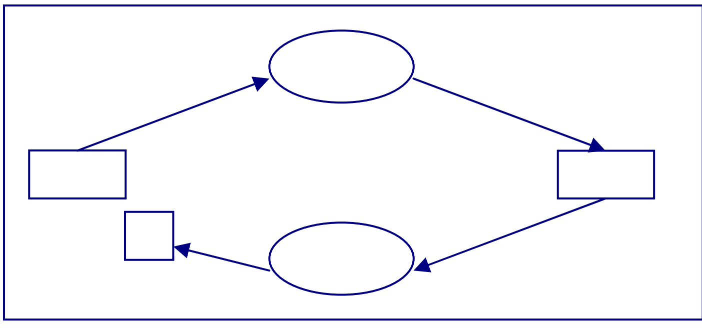
……

……

……

……………………………………………………………………………………

76:6=



Motiva la tua risposta

……

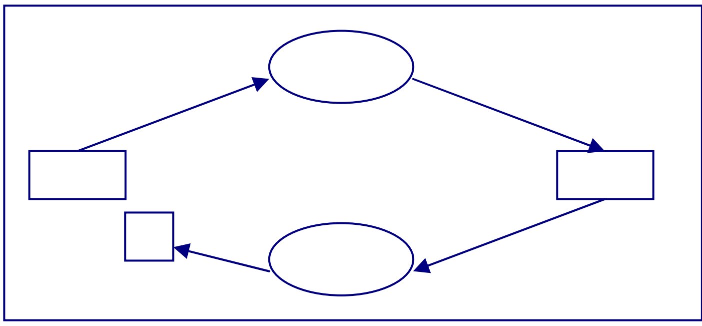
……

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

…………………………...

86:5=



Motiva la tua risposta

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Allegato 2

Analisi a-priori

L'importanza dell'analisi a-priori, non è legata soltanto alla semplice tabulazione dei dati, ma consente anche di individuare:

- **L'insieme delle possibili risposte corrette e non che si possono ipotizzare in quel contesto;**
- **Le variabili didattiche che permettono un cambiamento dei comportamenti degli allievi;**
- **La possibilità di analizzare in modo più accurato lo strumento valutazione.**

Di seguito vengono riportate tutte le possibili risposte degli allievi relative a ciascun quesito.

Gli indici P, S, Q (che rispettivamente indicano Problema, Situazioni e Quesito), costituiscono gli elementi del codice usato nella descrizione dei risultati dell'elaborazione statistica delle risposte degli alunni ipotizzate nella seguente analisi a-priori.

P_1 Q_1

P_1 Q_1 S_1

Conta tutti i quadrati grandi per eccesso e dice che l'area è tot. quadrati

P_1 Q_1 S_2

Conta tutti i quadrati grandi per difetto e dice che l'area è tot. quadrati

P_1 Q_1 S_3

Conta tutti i quadrati piccoli per eccesso e dice che l'area è tot. quadrati

P_1 Q_1 S_4

Conta tutti i quadrati piccoli per difetto e dice che l'area è tot. quadrati

P_1 Q_1 S_5

Calcola l'area di un quadrato grande e lo moltiplica per il numero dei quadrati calcolati per eccesso

P_1 Q_1 S_6

Calcola l'area di un quadrato grande e lo moltiplica per il numero dei quadrati calcolati per difetto

P_1 Q_1 S_7

Calcola l'area di un quadrato piccolo e lo moltiplica per il numero dei quadrati calcolati per eccesso

P_1 Q_1 S_8

Calcola l'area di un quadrato piccolo e lo moltiplica per il numero dei quadrati calcolati per difetto

$P_1 Q_1 S_9$
Sceglie una propria unità di misura e lo riporta tante volte, sino a ricoprire l'intera superficie

$P_1 Q_1 S_{10}$
Confonde l'area con il perimetro e misura il contorno con il righello

$P_1 Q_1 S_{11}$
Traccia delle linee orizzontali all'interno della figura, distanziate un tot. cm e le conta

$P_1 Q_1 S_{12}$
Fa i calcoli approssimati a mente

$P_1 Q_1 S_{13}$
Considera la figura come se fosse tridimensionale, per cui conta i quadrati che occupano la superficie a lui visibile e moltiplica per 2

Le variabili individuate dall'analisi a priori vengono raggruppate per individuare schemi di ragionamento:

Approssimazione per eccesso	$P_1 Q_1 S_1$ **Conta tutti i quadrati grandi per eccesso e dice che l'area è tot. quadrati** $P_1 Q_1 S_5$ **Calcola l'area di un quadrato grande e lo moltiplica per il numero dei quadrati calcolati per eccesso**
Approssimazione per difetto	$P_1 Q_1 S_6$ **Calcola l'area di un quadrato grande e lo moltiplica per il numero dei quadrati calcolati per difetto** $P_1 Q_1 S_2$ **Conta tutti i quadrati grandi per difetto e dice che l'area è tot. quadrati**
Misura precisa	$P_1 Q_1 S_3$ **Conta tutti i quadrati piccoli per eccesso e dice che l'area è tot. quadrati** $P_1 Q_1 S_4$ **Conta tutti i quadrati piccoli per difetto e dice che l'area è tot. quadrati** $P_1 Q_1 S_7$ **Calcola l'area di un quadrato piccolo e lo moltiplica per il numero dei quadrati calcolati per eccesso** $P_1 Q_1 S_8$ **Calcola l'area di un quadrato piccolo e lo moltiplica per il numero dei quadrati**

	calcolati per difetto
Conosce operativamente i procedimenti per la misura	P_1 Q_1 S_9 **Sceglie una propria unità di misura e lo riporta tante volte, sino a ricoprire l'intera superficie**
Considera il valore dell'area come quello del perimetro	P_1 Q_1 S_{10} **Confonde l'area con il perimetro e misura il contorno con il righello**
	P_1 Q_1 S_{11} **Traccia delle linee orizzontali all'interno della figura, distanziate un tot. cm e le conta**
	P_1 Q_1 S_{12} **Fa i calcoli approssimati a mente**
	P_1 Q_1 S_{13} **Considera la figura come se fosse tridimensionale, per cui conta i quadrati che occupano la superficie a lui visibile e moltiplica per 2**

P_1 Q_2

Q_2=**quesito n°2**

P_1 Q_2S_1

Misura con il righello facendo attenzione a seguire la linea di contorno

P_1 Q_2S_2

Misura con il righello in maniera approssimata

P_1 Q_2S_3

Traccia un'asse centrale alla figura, in modo da dividerla in due parti più o meno simmetriche, lo misura e moltiplica per 2

P_1 Q_2S_4

Misura con il righello il contorno della figura, pezzettino per pezzettino, riportando di volta in volta il numero ottenuto, alla fine fa la somma

P_1 Q_2S_5

Conta i quadrati che attraversano la linea di contorno

Approssimazione grossolana	P_1 Q_2S_2 **Misura con il righello in maniera approssimata** P_1 Q_2S_3 **Traccia un'asse centrale alla figura, in modo da dividerla in due parti più o meno simmetriche, lo**

	misura e moltiplica per 2
Approssimazione più precisa	P_1 Q_2S_1 **Misura con il righello facendo attenzione a seguire la linea di contorno** P_1 Q_2S_4 **Misura con il righello il contorno della figura, pezzettino per pezzettino, riportando di volta in volta il numero ottenuto, alla fine fa la somma** P_1 Q_2S_5 **Conta i quadrati che attraversano la linea di contorno**

P_1 Q_3

Q_3=quesito n°3

P_1 Q_3S_1
Risponde No, perché non può mai avere una misura precisa

P_1 Q_3S_2
Risponde Si, perché se conta i quadratini piccoli, allora si può ottenere una misura più precisa

P_2 Q_1

P_2 Q_1S_1
Conta tutti i quadrati grandi per eccesso e dice che l'area è tot. quadrati

P_2 Q_1S_2
Conta tutti i quadrati grandi per difetto e dice che l'area è tot. quadrati

P_2 Q_1S_3
Conta tutti i quadrati piccoli per eccesso e dice che l'area è tot. quadrati

P_2 Q_1S_4

Conta tutti i quadrati piccoli per difetto e dice che l'area è tot. quadrati

P_2 Q_1S_5
Calcola l'area di un quadrato grande e lo moltiplica per il numero dei quadrati calcolati per eccesso

P_2 Q_1S_6
Calcola l'area di un quadrato grande e lo moltiplica per il numero dei quadrati calcolati per difetto

P_2 Q_1S_7
Calcola l'area di un quadrato piccolo e lo moltiplica per il numero dei quadrati calcolati per eccesso

P_2 Q_1S_8
Calcola l'area di un quadrato piccolo e lo moltiplica per il numero dei quadrati calcolati per difetto

P_2 Q_1S_9
Sceglie una propria unità di misura e lo riporta tante volte, sino a ricoprire l'intera superficie

P_2 Q_1S_{10}
Confonde l'area con il perimetro e misura il contorno con il righello

P_2 Q_1S_{11}
Traccia delle linee orizzontali all'interno della figura, distanziate un tot. cm e le conta

P_2 Q_1S_{12}
Considera la figura costituita da due parti, un triangolo e un cerchio irregolare. Misura i lati del triangolo e calcola la superficie, misura approssimativamente la circonferenza e calcola l'area del cerchio. Alla fine somma i risultati ottenuti

P_2 Q_1S_{13}
Considera che la figura è bidimensionale, per cui conta i quadrati che occupano la superficie a lui visibile e moltiplica per 2

Approssimazione per eccesso	P_2 Q_1 S_1 **Conta tutti i quadrati grandi per eccesso e dice che l'area è tot. quadrati** P_2 Q_1 S_5 **Calcola l'area di un quadrato grande e lo moltiplica per il numero dei quadrati calcolati per eccesso**
Approssimazione per difetto	P_2 Q_1 S_6 **Calcola l'area di un quadrato grande e lo moltiplica per il numero dei quadrati calcolati per difetto** P_2 Q_1 S_2 **Conta tutti i quadrati grandi per difetto e dice che l'area è tot. quadrati**
Misura precisa	P_2 Q_1 S_3 **Conta tutti i quadrati piccoli per eccesso e dice che l'area è tot. quadrati** P_2 Q_1 S_4 **Conta tutti i quadrati piccoli per difetto e dice che l'area è tot. quadrati** P_2 Q_1 S_7 **Calcola l'area di un quadrato piccolo e lo moltiplica per il numero dei quadrati calcolati per eccesso** P_2 Q_1 S_8 **Calcola l'area di un quadrato piccolo e lo moltiplica per il numero dei quadrati calcolati per difetto**
Conosce operativamente i procedimenti per la misura	P_2 Q_1 S_9 **Sceglie una propria unità di misura e lo riporta tante volte, sino a ricoprire l'intera superficie**
Considera il valore dell'area come quello del perimetro	P_2 Q_1 S_{10} **Confonde l'area con il perimetro e misura il contorno con il righello**
	P_2 Q_1 S_{11} **Traccia delle linee orizzontali all'interno della figura, distanziate un tot. cm e le conta**
	P_2 Q_1 S_{12} **Considera la figura costituita da due parti, un triangolo e un cerchio irregolare. Misura i lati del triangolo e calcola la superficie, misura approssimativamente la circonferenza e calcola l'area del cerchio. Alla fine somma i risultati ottenuti**
	P_2 Q_1 S_{13} **Considera la figura come se fosse tridimensionale, per cui conta i quadrati che occupano la superficie a lui visibile e moltiplica per 2**

P_2Q_2

P_2 Q_2S_1
Misura con il righello facendo attenzione a seguire la linea di contorno

P_2 Q_2S_2
Misura con il righello in maniera approssimata

P_2 Q_2S_3
Traccia un'asse centrale alla figura, in modo da dividerla in due parti più o meno simmetriche, lo misura e moltiplica per 2

P_2 Q_2S_4
Misura con il righello il contorno della figura, pezzettino per pezzettino, riportando di volta in volta il numero ottenuto, alla fine fa la somma

P_2 Q_2S_5
Conta i quadrati che attraversano la linea di contorno

Approssimazione grossolana	P_1 Q_2S_2 **Misura con il righello in maniera approssimata** P_1 Q_2S_3 **Traccia un'asse centrale alla figura, in modo da dividerla in due parti più o meno simmetriche, lo misura e moltiplica per 2**
Approssimazione più precisa	P_1 Q_2S_1 **Misura con il righello facendo attenzione a seguire la linea di contorno** P_1 Q_2S_4 **Misura con il righello il contorno della figura, pezzettino per pezzettino, riportando di volta in volta in**

	volta il numero ottenuto, alla fine fa la somma P_1 Q_2S_5 **Conta i quadrati che attraversano la linea di contorno**

P_3 D_1

D_1=divisione n°1

$P_3D_1S_1$

Non è capace di approssimare i calcoli

$P_3D_1S_2$

Non risponde perché la programmazione di classe non ha previsto lo svolgimento delle divisioni

$P_3D_1S_3$

Dopo aver svolto i calcoli, non trova riscontro tra prodotto e dividendo, per cui l'alunno motiva la risposta dicendo che "non è esatta perché c'è la virgola"

P_3D_2

$P_3D_2S_1$

Non è capace di approssimare i calcoli

$P_3D_2S_2$

Non risponde perché la programmazione di classe non ha previsto lo svolgimento delle divisioni

$P_3D_2S_3$

Dopo aver svolto i calcoli, non trova riscontro tra prodotto e dividendo, per cui l'alunno motiva la risposta dicendo che "non è esatta perché c'è la virgola"

P_3D_3

$P_3D_3S_1$
Non è capace di approssimare i calcoli

$P_3D_3S_2$
Non risponde perché la programmazione di classe non ha previsto lo svolgimento delle divisioni

$P_3D_3S_3$
Dopo aver svolto i calcoli, non trova riscontro tra prodotto e dividendo, per cui l'alunno motiva la risposta dicendo che "non è esatta perché c'è la virgola"

P_3D_4

$P_3D_4S_1$
Non è capace di approssimare i calcoli

$P_3D_4S_2$
Non risponde perché la programmazione di classe non ha previsto lo svolgimento delle divisioni

$P_3D_4S_3$
Dopo aver svolto i calcoli, non trova riscontro tra prodotto e dividendo, per cui l'alunno motiva la risposta dicendo che "non è esatta perché c'è la virgola"

Allegato 3

ANALISI DEI DATI

Così come in ogni ricerca didattica, dopo la somministrazione del pre-test, mi sono ritrovata a raccogliere dei dati, formata da un insieme di informazioni, apparentemente elementari. In realtà ogni informazione elementare riporta, in generale, un comportamento di un allievo, in una situazione.
L'analisi statistica, quindi non potrà fare ameno di tenere in considerazione tre variabili essenziali: allievo, situazione, comportamento.

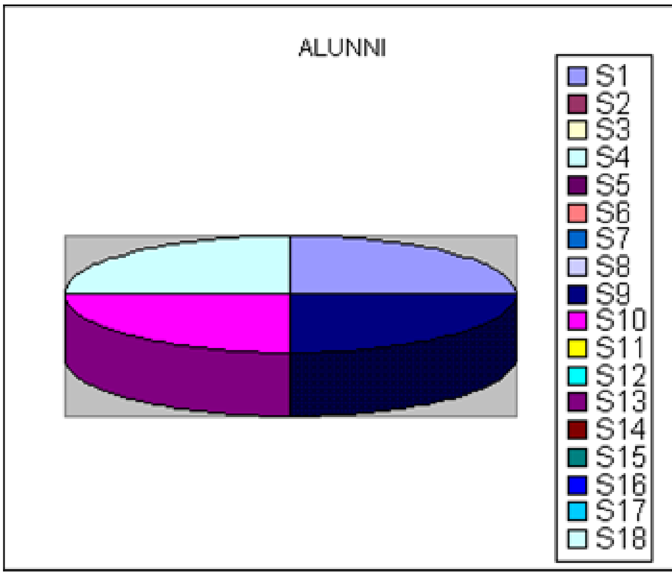
Analisi relativa al primo problema.

$P_1 Q_1$ =

area relativa al primo problema

	P_1Q_1															
	$P_1Q_1S_1$	$P_1Q_1S_2$	$P_1Q_1S_3$	$P_1Q_1S_4$	$P_1Q_1S_5$	$P_1Q_1S_6$	$P_1Q_1S_7$	$P_1Q_1S_8$	$P_1Q_1S_9$	$P_1Q_1S_{10}$	$P_1Q_1S_{11}$	$P_1Q_1S_{12}$	$P_1Q_1S_{13}$	$P_1Q_1S_{14}$	$P_1Q_1S_{15}$	$P_1Q_1S_{16}$
1D1	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
1D2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
3A1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3A2	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	ALUNNI	PERCENTUALE
$P_1Q_1S_1$	1	25%
$P_1Q_1S_2$	0	0%
$P_1Q_1S_3$	0	0%
$P_1Q_1S_4$	0	0%
$P_1Q_1S_5$	0	0%
$P_1Q_1S_6$	0	0%
$P_1Q_1S_7$	0	0%
$P_1Q_1S_8$	0	0%
$P_1Q_1S_9$	1	25%
$P_1Q_1S_{10}$	1	25%
$P_1Q_1S_{11}$	0	0%

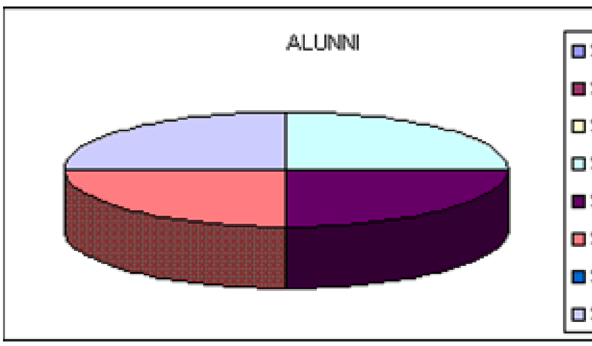


$P_1Q_1S_{12}$	0	0%
$P_1Q_1S_{13}$	0	0%
$P_1Q_1S_{14}$	0	0%
$P_1Q_1S_{15}$	0	0%
$P_1Q_1S_{16}$	0	0%
$P_1Q_1S_{17}$	0	0%
$P_1Q_1S_{18}$	1	25%

P_1Q_2 = perimetro relativo al primo problema

	P_1Q_2							
	$P_1Q_2S_1$	$P_1Q_2S_2$	$P_1Q_2S_3$	$P_1Q_2S_4$	$P_1Q_2S_5$	$P_1Q_2S_6$	$P_1Q_2S_7$	$P_1Q_2S_8$
1D1	0	0	0	1	0	0	0	0
1D2	0	0	0	0	0	1	0	0
3A1	0	0	0	0	1	0	0	0
3A2	0	0	0	0	0	0	0	1

SITUAZIONI	ALUNNI	PERCENTUALE
P_1Q_2S1	0	0%
P_1Q_2S2	0	0%
P_1Q_2S3	0	0%
P_1Q_2S4	1	25%
P_1Q_2S5	1	25%
P_1Q_2S6	1	25%

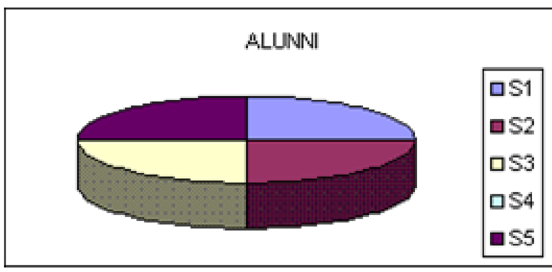


P_1Q_2S7	0	0%
P_1Q_2S8	1	25%

P_1Q_3 = misura relativa la primo problema

	P_1Q_3				
	$P_1Q_3S_1$	$P_1Q_3S_2$	$P_1Q_3S_3$	$P_1Q_3S_4$	$P_1Q_3S_5$
1D1	0	1	0	0	0
1D2	0	0	0	0	1
3A1	1	0	0	0	0
3A2	0	1	0	0	0

SITUAZIONI	ALUNNI	PERCENTUALE
P_1Q_3S1	1	25%
P_1Q_3S2	1	25%



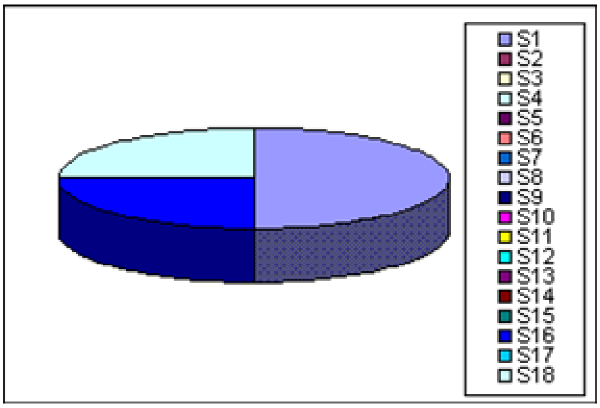
P_1Q_3S3	1	25%
P_1Q_3S4	0	0%
P_1Q_3S5	1	25%

Analisi relativa al secondo problema

P_2Q_1 = area relativa al secondo problema

	P_2Q_1															
	$P_2Q_1S_1$	$P_2Q_1S_2$	$P_2Q_1S_3$	$P_2Q_1S_4$	$P_2Q_1S_5$	$P_2Q_1S_6$	$P_2Q_1S_7$	$P_2Q_1S_8$	$P_2Q_1S_9$	$P_2Q_1S_{10}$	$P_2Q_1S_{11}$	$P_2Q_1S_{12}$	$P_2Q_1S_{13}$	$P_2Q_1S_{14}$	$P_2Q_1S_{15}$	$P_2Q_1S_{16}$
1D1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1D2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3A1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3A2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

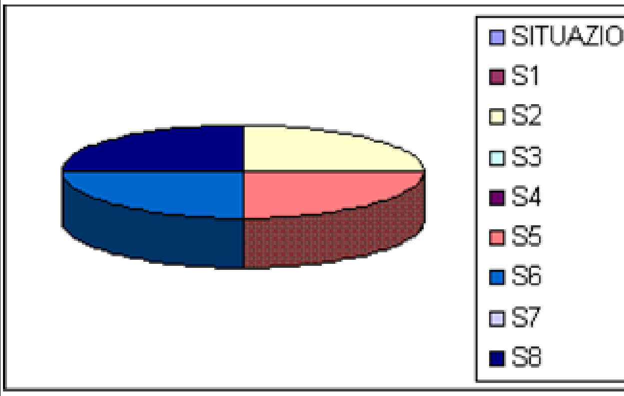
SITUAZIONI	ALUNNI	PERCENTUALE
P_2Q_1S1	2	50%
P_2Q_1S2	0	0%
P_2Q_1S3	0	0%
P_2Q_1S4	0	0%
P_2Q_1S5	0	0%
P_2Q_1S6	0	0%
P_2Q_1S7	0	0%
P_2Q_1S8	0	0%
P_2Q_1S9	0	0%
P_2Q_1S10	0	0%
P_2Q_1S11	0	0%
P_2Q_1S12	0	0%
P_2Q_1S13	0	0%
P_2Q_1S14	0	0%
P_2Q_1S15	0	0%
P_2Q_1S16	1	25%
P_2Q_1S17	0	0%
P_2Q_1S18	1	25%



P_2Q_2=perimetro relativo al secondo problema

	P_2Q_2							
	$P_2Q_2S_1$	$P_2Q_2S_2$	$P_2Q_2S_3$	$P_2Q_2S_4$	$P_2Q_2S_5$	$P_2Q_2S_6$	$P_2Q_2S_7$	$P_2Q_2S_8$
1D1	0	1	0	0	0	0	0	0
1D2	0	0	0	0	0	1	0	0
3A1	0	0	0	0	1	0	0	0
3A2	0	0	0	0	0	0	0	1

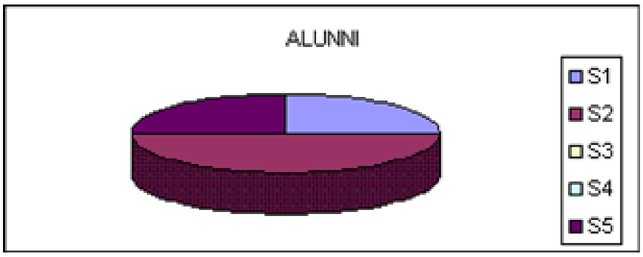
SITUAZION	ALUNNI	PERCENTUALE
P_2Q_2S1	0	0%
P_2Q_2S2	1	25%
P_2Q_2S3	0	0%
P_2Q_2S4	0	0%
P_2Q_2S5	1	25%
P_2Q_2S6	1	25%
P_2Q_2S7	0	0%
P_2Q_2S8	1	25%



P_2Q_3=misura relativa al secondo problema

	P_2Q_3				
	$P_2Q_3S_1$	$P_2Q_3S_2$	$P_2Q_3S_3$	$P_2Q_3S_4$	$P_2Q_3S_5$
1D1	0	1	0	0	0
1D2	0	0	0	0	1
3A1	1	0	0	0	0
3A2	0	1	0	0	0

SITUAZIONI	ALUNNI	PERCENTUALE
P_2Q_3S1	1	25%
P_2Q_3S2	2	50%
P_2Q_3S3	0	0%
P_2Q_3S4	0	0%
P_2Q_3S5	1	25%

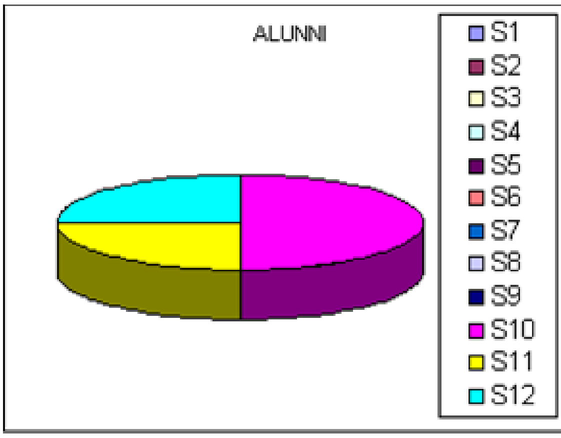


Analisi relativa al terzo problema

P_3D_1 = prima divisione relativa al terzo problema

	P_3D_1									
	$P_3D_1S_1$	$P_3D_1S_2$	$P_3D_1S_3$	$P_3D_1S_4$	$P_3D_1S_5$	$P_3D_1S_6$	$P_3D_1S_7$	$P_3D_1S_8$	$P_3D_1S_9$	P_3
1D1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1D2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3A1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3A2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

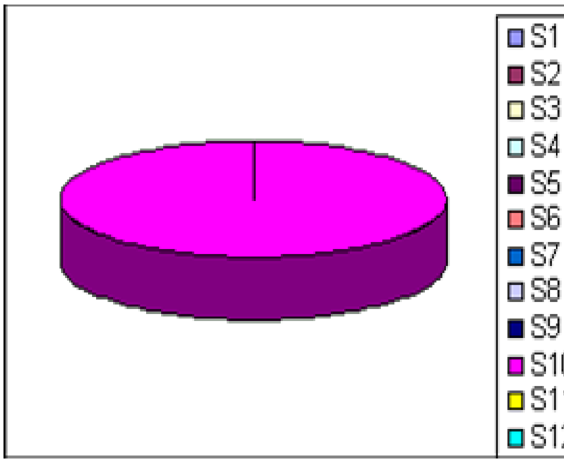
SITUAZIONI	ALUNNI	PERCENTUALE
P_3D_1S1	0	0%
P_3D_1S2	0	0%
P_3D_1S3	0	0%
P_3D_1S4	0	0%
P_3D_1S5	0	0%
P_3D_1S6	0	0%
P_3D_1S7	0	0%
P_3D_1S8	0	0%
P_3D_1S9	0	0%
P_3D_1S10	2	50%
P_3D_1S11	1	25%
P_3D_1S12	1	25%



P_3D_2 = seconda divisione relativa al terzo problema

	P_3D_2										
	$P_3D_2S_1$	$P_3D_2S_2$	$P_3D_2S_3$	$P_3D_2S_4$	$P_3D_2S_5$	$P_3D_2S_6$	$P_3D_2S_7$	$P_3D_2S_8$	$P_3D_2S_9$	$P_3D_2S_{10}$	$P_3D_2S_{11}$
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

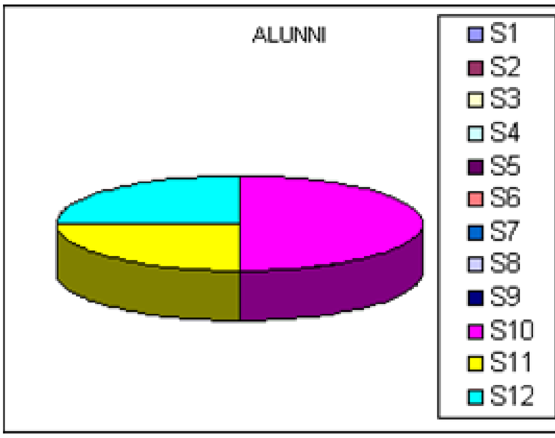
SITUAZIONI	ALUNNI	PERCENTUALE
P_3D_2S1	0	0%
P_3D_2S2	0	0%
P_3D_2S3	0	0%
P_3D_2S4	0	0%
P_3D_2S5	0	0%
P_3D_2S6	0	0%
P_3D_2S7	0	0%
P_3D_2S8	0	0%
P_3D_2S9	0	0%
P_3D_2S10	4	100%
P_3D_2S11	0	0%
P_3D_2S12	0	0%



P_3D_3=terza divisione relativa al terzo problema

	P_3D_3										
	$P_3D_3S_1$	$P_3D_3S_2$	$P_3D_3S_3$	$P_3D_3S_4$	$P_3D_3S_5$	$P_3D_3S_6$	$P_3D_3S_7$	$P_3D_3S_8$	$P_3D_3S_9$	$P_3D_3S_{10}$	$P_3D_3S_{11}$
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

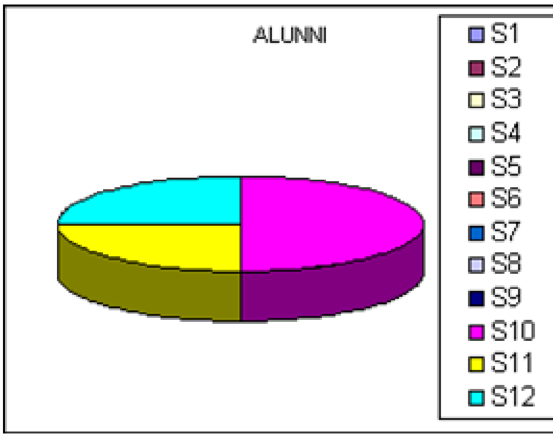
SITUAZIONI	ALUNNI	PERCENTUALE
P_3D_3S1	0	0%
P_3D_3S2	0	0%
P_3D_3S3	0	0%
P_3D_3S4	0	0%
P_3D_3S5	0	0%
P_3D_3S6	0	0%
P_3D_3S7	0	0%
P_3D_3S8	0	0%
P_3D_3S9	0	0%
P_3D_3S10	2	50%
P_3D_3S11	1	25%
P_3D_3S12	1	25%



	P_3D_4											
	$P_3D_4S_1$	$P_3D_4S_2$	$P_3D_4S_3$	$P_3D_4S_4$	$P_3D_4S_5$	$P_3D_4S_6$	$P_3D_4S_7$	$P_3D_4S_8$	$P_3D_4S_9$	$P_3D_4S_{10}$	$P_3D_4S_{11}$	P_3D_4
1D1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
1D2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
3A1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
3A2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

P_3D_4=quarta divisione relativa al terzo problema

SITUAZIONI	ALUNNI	PERCENTUALE
P_3D_4S1	0	0%
P_3D_4S2	0	0%
P_3D_4S3	0	0%
P_3D_4S4	0	0%
P_3D_4S5	0	0%
P_3D_4S6	0	0%
P_3D_4S7	0	0%
P_3D_4S8	0	0%
P_3D_4S9	0	0%
P_3D_4S10	2	50%
P_3D_4 S11	1	25%
P_3D_4S12	1	25%



Allegato 4

Calcola in maniera precisa la misura della superficie occupata dal delfino.

………

…………………………………………………………………

Motiva la risposta

………

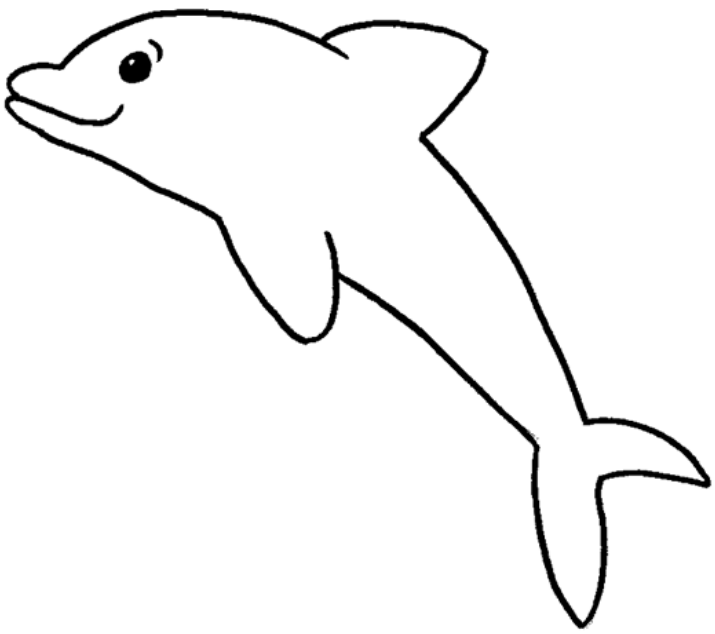
…………………………………………………………………

Mi sai dire in maniera precisa la misura del perimetro?

………………………………………………………………………………………………

Motiva la risposta

………………………………………………………………………………………………



È possibile avere una misura più precisa di quella che hai trovato?

………………………………………………………………………………………………

Motiva la risposta

………

…………………………………………………………………

Calcola in maniera precisa la misura della superficie occupata dalla lumaca.

……………………………………………………………………………………

Motiva la risposta

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………

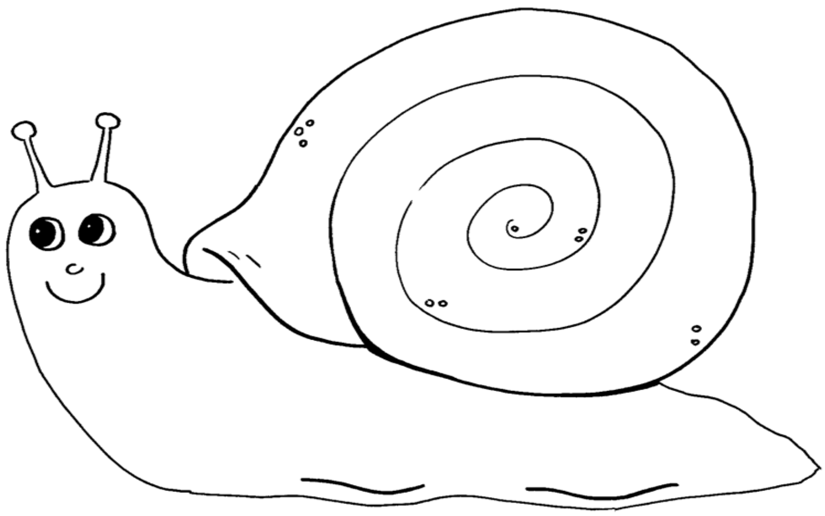
Mi sai dire in maniera precisa la misura del perimetro?

…………………………………………………………………………………..

Motiva la risposta

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………



E′ possibile avere una misura più precisa di quella che hai trovato?

…………………………………………………………………………………

Motiva la risposta

……………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………….

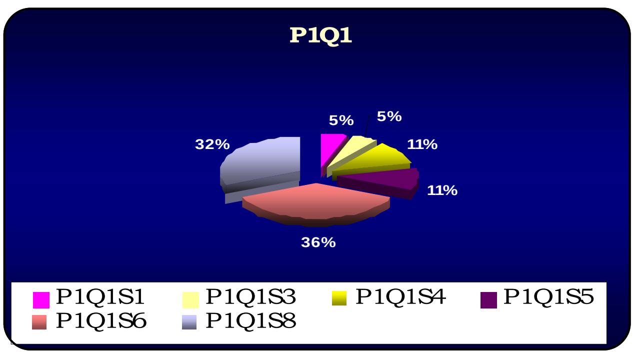
Allegato 6

P1Q1

	P1Q1S1	P1Q1S2	P1Q1S3	P1Q1S4	P1Q1S5	P1Q1S6	P1Q1S7	P1Q1S8	P1Q1S9	P1Q1S10	P1Q1S11
2D1	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
2D2	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
2D3	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
2D4	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
2D5	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
2D6	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
2D7	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
2D8	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2D9	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
2D10	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
2D11	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
2D12	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
2D13	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
2D14	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
2D15	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
2D16	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
2D17	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
2D18	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
2D19	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0

CLASSE 2D

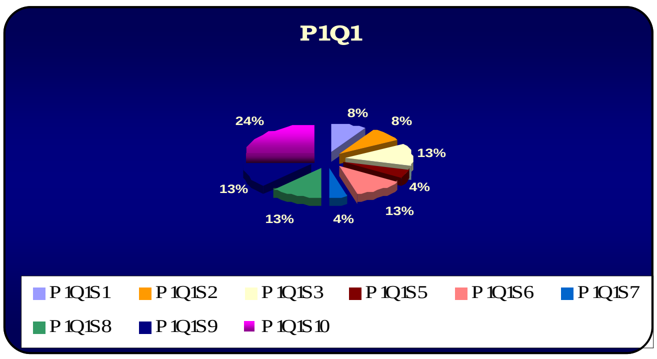
	Alunni	Percentuale
P1Q1S1	1	5%
P1Q1S2	0	0%
P1Q1S3	1	5%
P1Q1S4	2	11%
P1Q1S5	2	11%
P1Q1S6	7	36%
P1Q1S7	0	0%
P1Q1S8	6	32%
P1Q1S9	0	0%
P1Q1S10	0	0%
P1Q1S11	0	0%
TOTALE	19	100%



CLASSE 3B

	P1Q1S1	P1Q1S2	P1Q2S3	P1Q1S4	P1Q1S5	P1Q1S6	P1Q1S7	P1Q1S8	P1Q1S9	P1Q1S10	P1Q1S11
3B1	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
3B2	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3B3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
3B4	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
3B5	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
3B6	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
3B7	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
3B8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
3B9	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
3B10	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
3B11	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3B12	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
3B13	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3B14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
3B15	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3B16	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
3B17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
3B18	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
3B19	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
3B20	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
3B21	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
3B22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
3B23	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
3B24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0

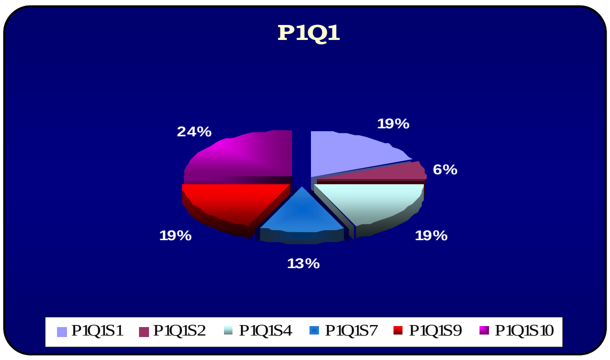
	Alunni	Percentuale
P1Q1S1	2	8%
P1Q1S2	2	8%
P1Q1S3	3	13%
P1Q1S4	0	0%
P1Q1S5	1	4%
P1Q1S6	3	13%
P1Q1S7	1	4%
P1Q1S8	3	13%
P1Q1S9	3	13%
P1Q1S10	6	24%
P1Q1S11	0	0%
TOTALE	24	100%



CLASSE 4C

	P1Q1S1	P1Q1S2	P1Q1S3	P1Q1S4	P1Q1S5	P1Q1S6	P1Q1S7	P1Q1S8	P1Q1S9	P1Q1S10	P1Q1S11
4C1	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4C2	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
4C3	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
4C4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
4C5	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
4C6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
4C7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
4C8	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
4C9	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
4C10	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
4C11	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4C12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
4C13	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4C14	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4C15	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
4C16	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0

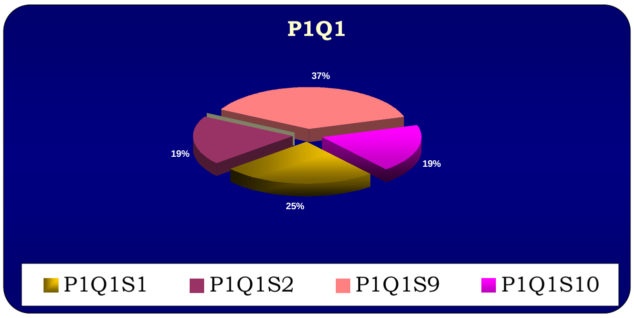
	Alunni	Percentuale
P1Q1S1	3	19%
P1Q1S2	1	6%
P1Q1S3	0	0%
P1Q1S4	3	19%
P1Q1S5	0	0%
P1Q1S6	0	0%
P1Q1S7	2	13%
P1Q1S8	0	0%
P1Q1S9	3	19%
P1Q1S10	4	24%
P1Q1S11	0	0%
TOTALE	16	100%



	P1Q1S1	P1Q1S2	P1Q1S3	P1Q1S4	P1Q1S5	P1Q1S6	P1Q1S7	P1Q1S8	P1Q1S9	P1Q1S10	P1Q1S11
5A1	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5A2	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5A3	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5A4	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5A5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
5A6	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5A7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
5A8	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5A9	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5A10	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5A11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
5A12	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5A13	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5A14	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5A15	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5A16	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0

CLASSE 5 A

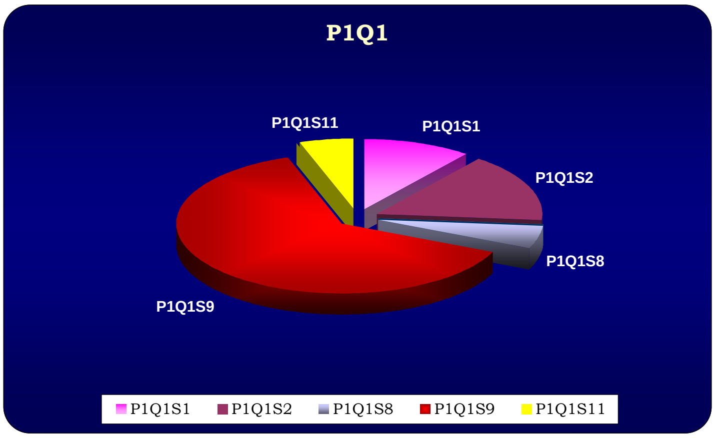
	Alunni	Percentuale
P1Q1S1	4	25%
P1Q1S2	3	19%
P1Q1S3	0	0%
P1Q1S4	0	0%
P1Q1S5	0	0%
P1Q1S6	0	0%
P1Q1S7	0	0%
P1Q1S8	0	0%
P1Q1S9	6	37%
P1Q1S10	3	19%
P1Q1S11	0	0%
TOTALE	16	100%



CLASSE 5B

	P1Q1S1	P1Q1S2	P1Q1S3	P1Q1S4	P1Q1S5	P1Q1S6	P1Q1S7	P1Q1S8	P1Q1S9	P1Q1S10	P1Q1S11
5B1	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0		0
5B2	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5B3	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5B4	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5B5	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5B6	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5B7	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5B8	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5B9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5B10	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5B11	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5B12	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5B13	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5B14	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5B15	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5B16	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5B17	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5B18	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5B19	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	Alunni	Percentuale
P1Q1S1	2	11%
P1Q1S2	3	16%
P1Q1S3	0	0%
P1Q1S4	0	0%
P1Q1S5	0	0%
P1Q1S6	0	0%
P1Q1S7	0	0%
P1Q1S8	1	5%
P1Q1S9	12	63%
P1Q1S10	0	0%
P1Q1S11	1	5%
TOTALE	19	100%



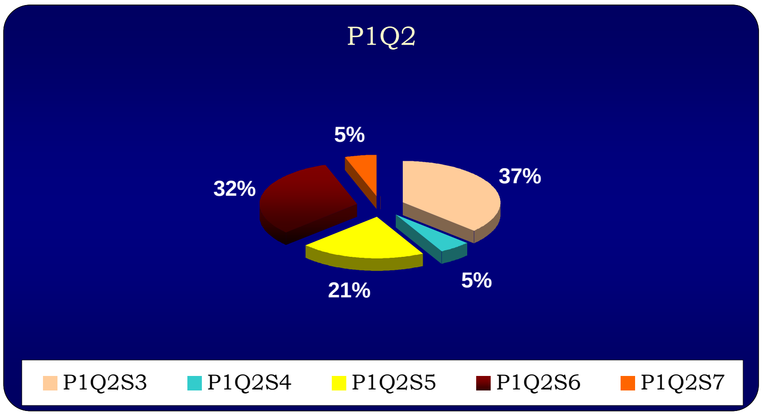
P1Q2

CLASSE 2D

	P1Q2S1	P1Q2S2	P1Q2S3	P1Q2S4	P1Q2S5	P1Q2S6	P1Q2S7	P1Q2S8	P1Q2S9
2D1	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
2D2	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
2D3	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
2D4	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
2D5	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
2D6	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
2D7	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
2D8	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
2D9	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
2D10	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
2D11	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
2D12	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
2D13	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
2D14	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
2D15	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
2D16	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
2D17	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
2D18	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
2D19	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0

	Alunni	Percentuale
P1Q2S1	0	0%
P1Q2S2	0	0%
P1Q2S3	7	37%
P1Q2S4	1	5%
P1Q2S5	4	21%
P1Q2S6	6	32%
P1Q2S7	1	5%
P1Q2S8	0	0%

P1Q2S9	0	0%
TOTALE	19	100%

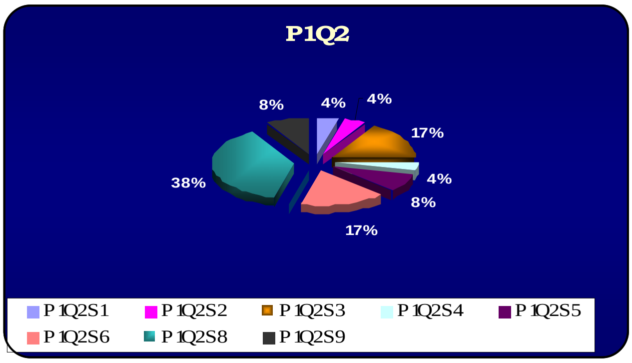


CLASSE 3B

	P1Q2S1	P1Q2S2	P1Q2S3	P1Q2S4	P1Q2S5	P1Q2S6	P1Q2S7	P1Q2S8	P1Q2S9
3B1	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
3B2	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
3B3	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
3B4	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
3B5	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
3B6	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
3B7	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
3B8	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
3B9	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
3B10	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
3B11	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
3B12	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
3B13	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
3B14	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
3B15	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
3B16	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
3B17	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
3B18	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
3B19	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
3B20	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
3B21	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
3B22	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
3B23	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
3B24	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0

	Alunni	Percentuale
P1Q2S1	1	4%
P1Q2S2	1	4%
P1Q2S3	4	17%
P1Q2S4	1	4%
P1Q2S5	2	8%

P1Q2S6	4	17%
P1Q2S7	0	0%
P1Q2S8	9	38%
P1Q2S9	2	8%
TOTALE	24	100%

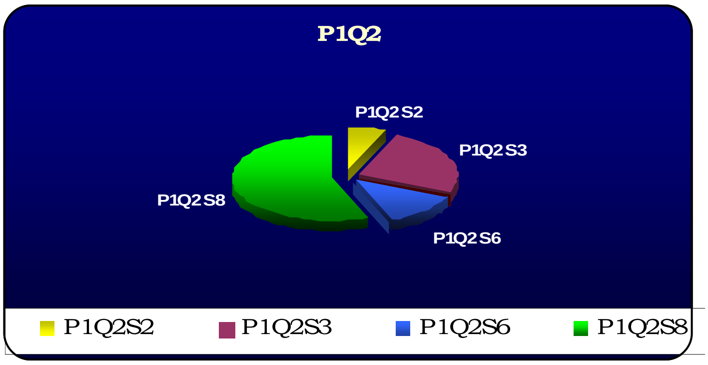


CLASSE 4C

	P1Q2S1	P1Q2S2	P1Q2S3	P1Q2S4	P1Q2S5	P1Q2S6	P1Q2S7	P1Q2S8	P1Q2S9
4C1	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
4C2	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
4C3	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
4C4	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
4C5	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
4C6	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
4C7	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
4C8	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
4C9	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
4C10	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
4C11	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
4C12	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
4C13	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
4C14	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
4C15	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
4C16	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0

	Alunni	Percentuale
P1Q2S1	0	0%
P1Q2S2	1	6%
P1Q2S3	4	25%
P1Q2S4	0	0%
P1Q2S5	0	0%
P1Q2S6	2	13%
P1Q2S7	0	0%
P1Q2S8	9	56%
P1Q2S9	0	0%

TOTALE	16	100%

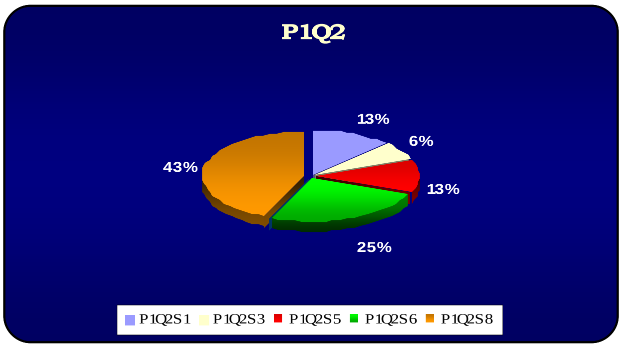


CLASSE 5 A

	P1Q2S1	P1Q2S2	P1Q2S3	P1Q2S4	P1Q2S5	P1Q2S6	P1Q2S7	P1Q2S8	P1Q2S9
5A1	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
5A2	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5A3	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
5A4	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
5A5	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
5A6	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
5A7	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5A8	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5A9	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5A10	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5A11	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5A12	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
5A13	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
5A14	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
5A15	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
5A16	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0

	Alunni	Percentuale
P1Q2S1	2	13%
P1Q2S2	0	0%
P1Q2S3	1	6%
P1Q2S4	0	0%
P1Q2S5	2	13%
P1Q2S6	4	25%
P1Q2S7	0	0%
P1Q2S8	7	43%
P1Q2S9	0	0%

TOTALE	16	100%

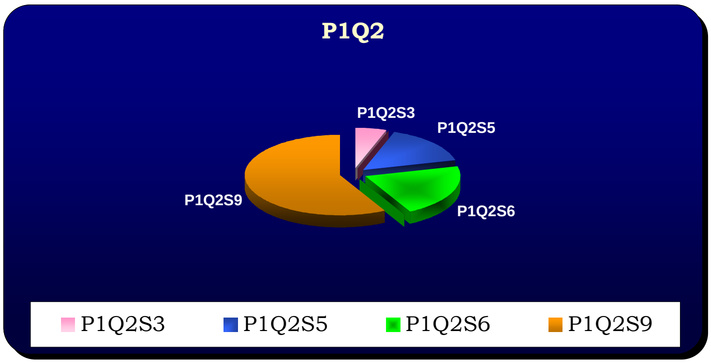


CLASSE 5B

	P1Q2S1	P1Q2S2	P1Q2S3	P1Q2S4	P1Q2S5	P1Q2S6	P1Q2S7	P1Q2S8	P1Q2S9
5B1	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
5B2	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5B3	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5B4	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5B5	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5B6	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
5B7	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5B8	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
5B9	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5B10	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5B11	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5B12	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5B13	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5B14	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5B15	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5B16	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5B17	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5B18	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5B19	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0

	Alunni	Percentuale
P1Q2S1	0	0%
P1Q2S2	0	0%
P1Q2S3	1	5%

P1Q2S4	0	0%
P1Q2S5	3	16%
P1Q2S6	4	21%
P1Q2S7	0	0%
P1Q2S8	0	0%
P1Q2S9	11	58%
TOTALE	19	100%



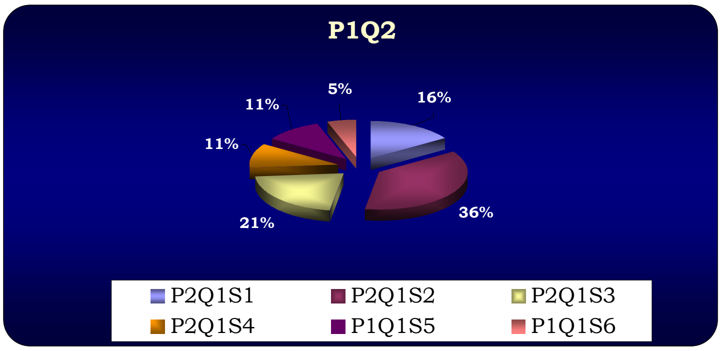
P2Q1

CLASSE 2 D

	P2Q1S1	P2Q1S2	P2Q1S3	P2Q1S4	P2Q1S5	P2Q1S6	P2Q1S7	P2Q1S8	P2Q1S9	P2Q1S10	P2Q1S11	P2Q1S12
2D1	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2D2	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2D3	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2D4	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2D5	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
2D6	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
2D7	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
2D8	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2D9	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2D10	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2D11	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2D12	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2D13	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
2D14	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2D15	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2D16	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2D17	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
2D18	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2D19	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	Alunni	Percentuale

P2Q1S1	3	16%
P2Q1S2	7	36%
P2Q1S3	4	21%
P2Q1S4	2	11%
P1Q1S5	2	11%
P1Q1S6	1	5%
P1Q1S7	0	0%
P1Q1S8	0	0%
TOTALE	19	100%



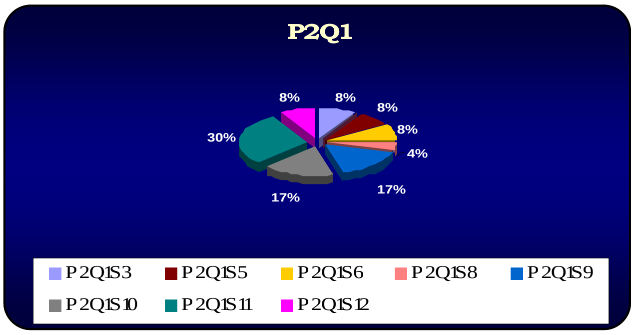
CLASSE 3B

	P2Q1S1	P2Q1S2	P2Q1S3	P2Q1S4	P2Q1S5	P2Q1S6	P2Q1S7	P2Q1S8	P2Q1S9	P2Q1S10	P2Q1S11	P2Q1S12
3B1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
3B2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
3B3	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
3B4	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
3B5	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
3B6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
3B7	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3B8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
3B9	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
3B10	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
3B11	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
3B12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
3B13	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
3B14	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
3B15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
3B16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
3B17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
3B18	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3B19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
3B20	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
3B21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0

3B22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
3B23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
3B24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0

	P2Q1S1	P2Q1S2	P2Q1S3	P2Q1S4	P2Q1S5	P2Q1S6	P2Q1S7	P2Q1S8	P2Q1S9	P2Q1S10	P2Q1S11	P2Q1S12
4C1	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0

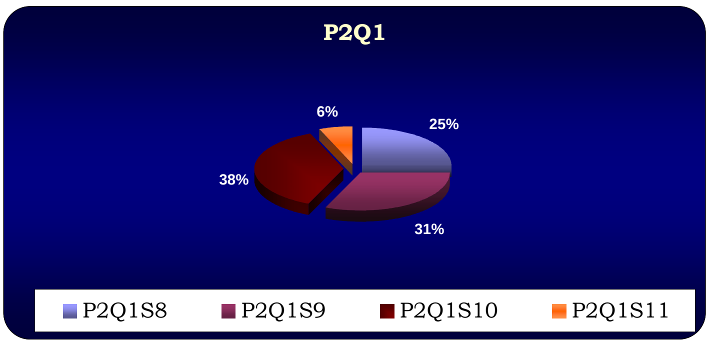
	Alunni	Percentuale
P2Q1S1	0	0%
P2Q1S2	0	0%
P2Q1S3	2	8%
P2Q1S4	0	0%
P2Q1S5	2	8%
P2Q1S6	2	8%
P2Q1S7	0	0%
P2Q1S8	1	4%
P2Q1S9	4	17%
P2Q1S10	4	17%
P2Q1S11	7	30%
P2Q1S12	2	8%
TOTALE	24	100%



CLASSE 4C

4C2	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
4C3	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
4C4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
4C5	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
4C6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
4C7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
4C8	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
4C9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
4C10	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
4C11	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
4C12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
4C13	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
4C14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
4C15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
4C16	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0

	Alunni	**Percentuale**
P2Q1S1	0	0%
P2Q1S2	0	0%
P2Q1S3	0	0%
P2Q1S4	0	0%
P2Q1S5	0	0%
P2Q1S6	0	0%
P2Q1S7	0	0%
P2Q1S8	4	25%
P2Q1S9	5	31%
P2Q1S10	6	38%
P2Q1S11	1	6%
TOTALE	16	100%

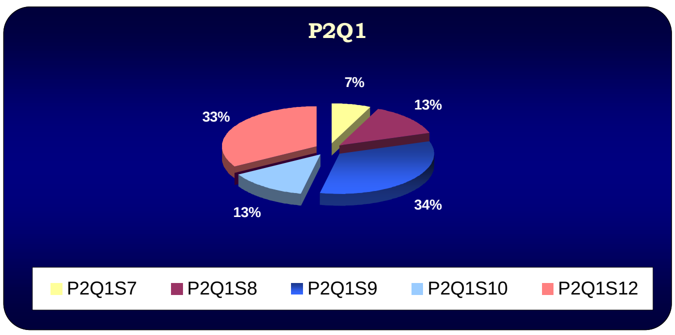


CLASSE 5 A

	P2Q1S1	P2Q1S2	P2Q1S3	P2Q1S4	P2Q1S5	P2Q1S6	P2Q1S7	P2Q1S8	P2Q1S9	P2Q1S10	P2Q1S11	P2Q1S12

5A1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5A2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
5A3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5A4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5A5	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5A6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5A7	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
5A8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5A9	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
5A10	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
5A11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5A12	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5A13	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5A14	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5A15	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5A16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**

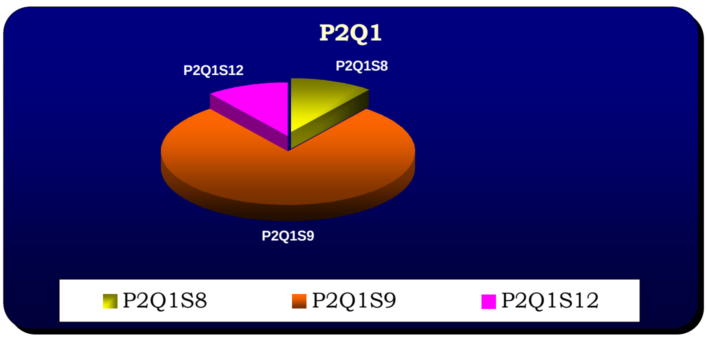
	Alunni	Percentuale
P2Q1S1	0	0%
P2Q1S2	0	0%
P2Q1S3	0	0%
P2Q1S4	0	0%
P2Q1S5	0	0%
P2Q1S6	0	0%
P2Q1S7	1	7%
P2Q1S8	2	13%
P2Q1S9	5	34%
P2Q1S10	2	13%
P2Q1S11	0	0%
P2Q1S12	5	33%
TOTALE	16	100%



CLASSE 5B

	P2Q1S1	P2Q1S2	P2Q1S3	P2Q1S4	P2Q1S5	P2Q1S6	P2Q1S7	P2Q1S8	P2Q1S9	P2Q1S10	P2Q1S11	P2Q2S12
5B1	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
5B2	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5B3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5B4	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5B5	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5B6	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5B7	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
5B8	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5B9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5B10	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5B11	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5B12	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5B13	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5B14	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5B15	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5B16	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5B17	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5B18	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5B19	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0

	Alunni	Percentuale
P2Q1S1	0	0%
P2Q1S2	0	0%
P2Q1S3	0	0%
P2Q1S4	0	0%
P2Q1S5	0	0%
P2Q1S6	0	0%
P2Q1S7	0	0%
P2Q1S8	2	11%
P2Q1S9	15	78%
P2Q1S10	0	0%
P2Q1S11	0	0%
P2Q1S12	2	11%
TOTALE	19	100%

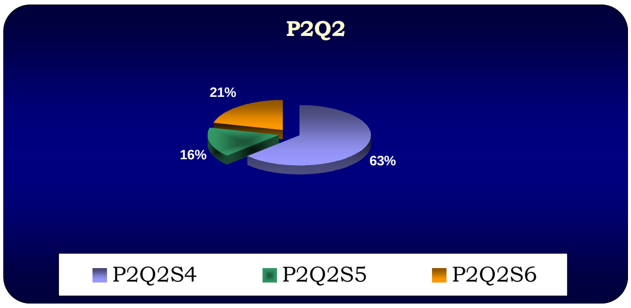


P2Q2

CLASSE 2D

	P2Q2S1	P2Q2S2	P2Q2S3	P2Q2S4	P2Q2S5	P2Q2S6	P2Q2S7	P2Q2S8	P2Q2S9
2D1	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
2D2	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
2D3	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
2D4	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
2D5	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
2D6	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
2D7	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
2D8	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
2D9	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
2D10	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
2D11	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
2D12	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
2D13	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
2D14	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
2D15	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
2D16	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
2D17	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
2D18	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
2D19	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0

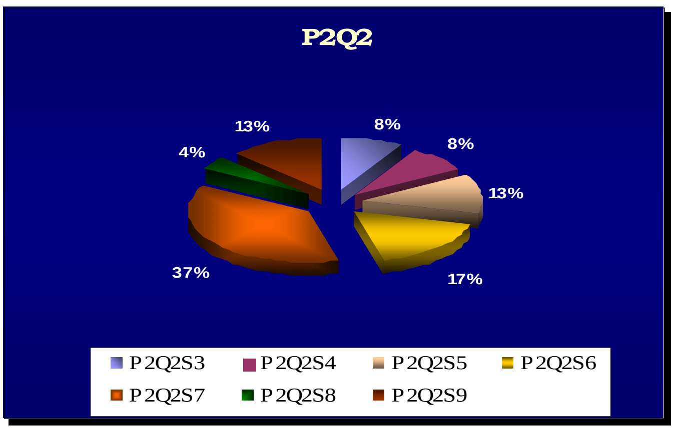
	Alunni	Percentuale
P2Q2S1	0	0%
P2Q2S2	0	0%
P2Q2S3	0	0%
P2Q2S4	12	63%
P2Q2S5	3	16%
P2Q2S6	4	21%
P2Q2S7	0	0%
P2Q2S8	0	0%
P2Q2S9	0	0%
TOTALE	19	100%



CLASSE 3B

	P2Q2S1	P2Q2S2	P2Q2S3	P2Q2S4	P2Q2S5	P2Q2S6	P2Q2S7	P2Q2S8	P2Q2S9
3B1	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
3B2	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
3B3	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
3B4	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
3B5	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
3B6	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
3B7	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
3B8	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
3B9	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
3B10	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
3B11	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
3B12	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
3B13	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
3B14	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
3B15	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
3B16	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
3B17	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
3B18	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
3B19	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
3B20	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
3B21	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
3B22	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
3B23	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
3B24	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0

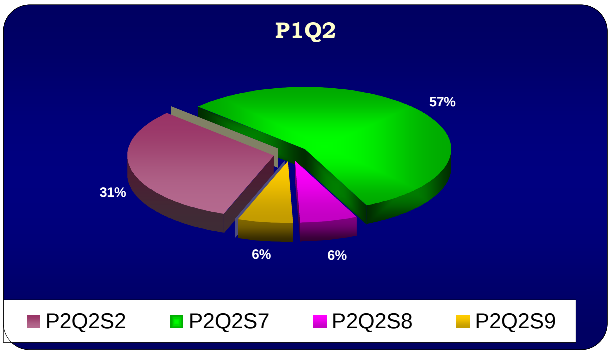
	Alunni	Percentuale
P2Q2S1	0	0%
P2Q2S2	0	0%
P2Q2S3	2	8%
P2Q2S4	2	8%
P2Q2S5	3	13%
P2Q2S6	4	17%
P2Q2S7	9	37%
P2Q2S8	1	4%
P2Q2S9	3	13%
TOTALE	24	100%



CLASSE 4 C

	P2Q2S1	P2Q2S2	P2Q2S3	P2Q2S4	P2Q2S5	P2Q2S6	P2Q2S7	P2Q2S8	P2Q2S9	P2Q2S10
4C1	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
4C2	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
4C3	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
4C4	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
4C5	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
4C6	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
4C7	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
4C8	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
4C9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
4C10	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
4C11	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
4C12	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
4C13	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
4C14	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
4C15	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
4C16	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0

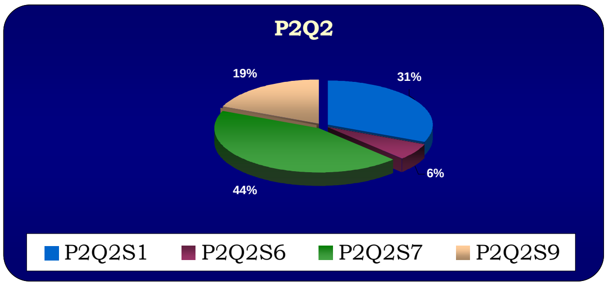
	Alunni	Percentule
P2Q2S1	0	0%
P2Q2S2	5	31%
P2Q2S3	0	0%
P2Q2S4	0	0%
P2Q2S5	0	0%
P2Q2S6	0	0%
P2Q2S7	9	57%
P2Q2S8	1	6%
P2Q2S9	1	6%
TOTALE	16	100%



CLASSE 5 A

	P2Q2S1	P2Q2S2	P2Q2S3	P2Q2S4	P2Q2S5	P2Q2S6	P2Q2S7	P2Q2S8	P2Q2S9
5A1	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5A2	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5A3	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5A4	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5A5	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5A6	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5A7	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5A8	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5A9	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5A10	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5A11	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5A12	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5A13	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5A14	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5A15	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5A16	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0

	Alunni	Percentuale
P2Q2S1	5	31%
P2Q2S2	0	0%
P2Q2S3	0	0%
P2Q2S4	0	0%
P2Q2S5	0	0%
P2Q2S6	1	6%
P2Q2S7	7	44%
P2Q2S8	0	0%
P2Q2S9	3	19%
TOTALE	16	100%

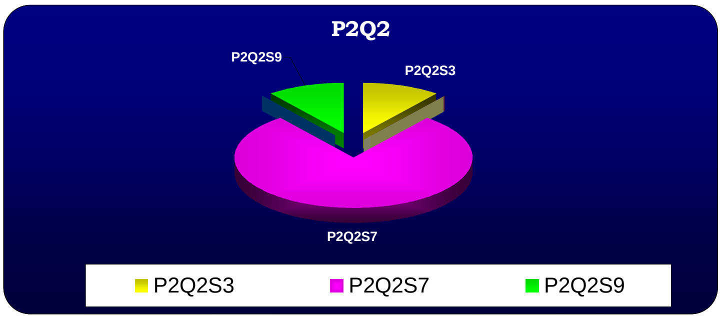


CLASSE 5B

	P2Q2S1	P2Q2S2	P2Q2S3	P2Q2S4	P2Q2S5	P2Q2S6	P2Q2S7	P2Q2S8	P2Q2S9
5B1	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
5B2	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5B3	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5B4	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5B5	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5B6	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5B7	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
5B8	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5B9	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5B10	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5B11	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5B12	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5B13	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5B14	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5B15	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5B16	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5B17	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5B18	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5B19	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0

	Alunni	Percentuale
P2Q2S1	0	0%
P2Q2S2	0	0%
P2Q2S3	2	11%
P2Q2S4	0	0%
P2Q2S5	0	0%
P2Q2S6	0	0%
P2Q2S7	15	78%
P2Q2S8	0	0%
P2Q2S9	2	11%

TOTALE	19	100%



P3

CLASSE 2D

	A	B	C	D
2D1	1	1	1	1
2D2	1	0	1	1
2D3	1	0	1	1
2D4	1	0	1	1
2D5	1	1	1	1
2D6	1	1	1	1
2D7	1	1	1	1
2D8	1	0	0	1
2D9	1	0	1	1
2D10	1	1	1	1
2D11	0	1	0	1
2D12	0	1	1	0
2D13	1	1	1	1
2D14	1	1	1	1
2D15	1	1	0	1
2D16	1	1	1	1
2D17	1	1	1	1
2D18	1	0	1	1
2D19	1	1	0	1

CLASSE 3 B

	A	B	C	D
3B1	1	0	1	1
3B2	1	1	1	1
3B3	1	0	1	1
3B4	0	0	1	1
3B5	1	1	1	1
3B6	1	0	1	1
3B7	1	1	1	1
3B8	0	0	1	1
3B9	0	1	1	1
3B10	1	0	1	1

3B11	1	0	1	1
3B12	1	0	0	1
3B13	1	0	1	1
3B14	1	1	0	1
3B15	1	0	1	0
3B16	1	0	1	1
3B17	1	0	1	1
3B18	0	1	1	1
3B19	1	1	1	1
3B20	1	1	1	1
3B21	0	1	1	1
3B22	1	1	0	1
3B23	1	1	1	1
3B24	1	0	1	1

CLASSE 5 A

	A	**B**	**C**	**D**
5A1	1	1	1	1
5A2	1	1	1	1
5A3	1	1	1	1
5A4	1	0	1	1
5A5	1	1	1	1
5A6	1	1	0	1
5A7	1	0	1	1
5A8	1	1	1	1
5A9	1	1	1	1
5A10	1	1	1	1
5A11	1	0	1	1
5A12	1	0	1	1
5A13	1	0	1	1
5A14	1	0	1	1
5A15	0	1	1	1
5A16	1	0	1	1

CLASSE 5 B

	A	B	C	D
5B1	1	0	1	1
5B2	1	0	1	1
5B3	1	1	1	1
5B4	1	1	1	0
5B5	1	0	0	1
5B6	1	0	1	1
5B7	1	1	0	1
5B8	1	0	1	1
5B9	1	0	1	1
5B10	0	1	1	1
5B11	1	1	0	1
5B12	1	0	1	1
5B13	1	0	1	1
5B14	1	1	0	1
5B15	1	0	1	1
5B16	1	0	1	1
5B17	1	1	0	1
5B18	1	1	1	0
5B19	1	0	1	1