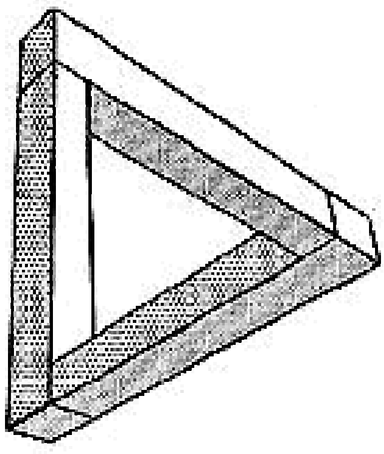
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PALERMO
FACOLTA' DI
SCIENZE DELLA FORMAZIONE

CORSO DI LAUREA IN
SCIENZE DELLA FORMAZIONE PRIMARIA
A.A. 2001-2002

LE CONCEZIONI DEGLI ALLIEVI DELLA SCUOLA ELEMENTARE SUL TRIANGOLO



Il triangolo impossibile di Penrose

Autrice: PALMA CUTUGNO

Relatori
Prof.ssa ALESSANDRA LA MARCA
Prof.re FILIPPO SPAGNOLO

Indice generale

"Il triangolo è una figura triangolare"
G.T. IV elementare

"I triangoli sono delle linee, però una è orizzontale e le altre due oblique, e così si forma il triangolo"
B.I. IV elementare

"Il triangolo è una varietà di linee diverse e di forme diverse"
M.G. IV elementare

"Il triangolo è una figura geometrica con varie forme e vari nomi che deve avere tre linee, alcuni angoli e non deve avere aperture nei lati"
Z.L. IV elementare

Introduzione

L'idea di studiare i misconcetti sul triangolo è nata dal contatto diretto con la realtà scolastica. Grazie alle attività di tirocinio ho avuto modo di sperimentare in una IV elementare una unità didattica che aveva come obiettivo quello di studiare insieme ai bambini le relazioni fra i lati di un triangolo, con un approccio di tipo metacognitivo. Durante lo svolgimento delle attività previste i bambini hanno manifestato convinzioni sbagliate sul concetto di triangolo, che ostacolavano la comprensione. Da qui, la necessità di studiare tali misconcetti attraverso un lavoro sperimentale (cap. I), e di ipotizzare unità didattiche funzionali a prevenirli e correggerli (cap. II)
I dati sperimentali sono stati raccolti per mezzo di un questionario a domande aperte, strutturato in base alle osservazioni fatte durante le attività di tirocinio e ad una breve analisi epistemologica e storico-epistemologica dell'argomento trattato.
L'analisi dei dati sperimentali è stata condotta attraverso l'analisi a priori dei comportamenti ipotizzabili, l'analisi descrittiva (con l'uso di un foglio elettronico di EXCEL) e l'analisi implicativa delle variabili (attraverso l'uso dello CHIC).
Le unità didattiche proposte sono rivolte ad alunni di III, IV elementare e riguardano:

- ❖ la definizione di triangolo e le sue principali caratteristiche;
- ❖ la relazione fra i lati di un triangolo e la classificazione rispetto alla congruenza dei lati;
- ❖ la relazione fra gli angoli e la classificazione rispetto all'ampiezza degli angoli;
- ❖ le altezze di un triangolo

La metodologia utilizzata è ispirata alla didattica metacognitiva e alla teoria delle situazioni di G. Brousseau, gli obiettivi sono definiti in base al S.O.F.E (Sistema degli Obiettivi Fondamentali dell'Educazione)[1].

[1] AAVV (1997), Dal fine agli obiettivi dell'educazione personalizzata, Palermo, Palumbo.

Capitolo 1

1.0 Presentazione del lavoro sperimentale

Il fine della ricerca è quello di individuare le visioni ricorrenti e gli stereotipi, riguardanti il triangolo, dei bambini di scuola elementare.
L'indagine è stata rivolta a 77 allievi (11-12 anni) delle classi prime della scuola media "Vittorio Emanuele" di Palermo, all'inizio dell'anno scolastico 2001-2002 (Settembre-Ottobre). Il bagaglio di conoscenze, nel campione esaminato, è quello acquisito durante gli anni di scuola materna ed elementare, nonostante sia possibile che molte conoscenze acquisite vengano perse nel corso degli anni.
L'ipotesi alternativa, sulla quale è stato progettato il questionario, è che esistono una serie di concezioni errate sul triangolo che potrebbero ostacolare la comprensione e l'apprendimento degli alunni.
L'ipotesi nulla è che non esistono concezioni errate sul triangolo che potrebbero ostacolare la comprensione e l'apprendimento degli alunni.
Non sarà possibile falsificare direttamente né l'ipotesi nulla né quella alternativa, tuttavia, respingendo l'ipotesi nulla si potrà affermare la plausibilità dell'ipotesi alternativa con un livello di validità pari all'intensità d'implicazione selezionata all'interno dello Chic.
I grafici elaborati con questo strumento danno la possibilità di controllare e scegliere il livello di accettabilità delle implicazioni, le quali sono stabilite in accordo con le leggi probabilistiche della statistica inferenziale[2].

[2] GRAS R. (1997), "Metodologia di analisi d'indagine", Quaderni di ricerca in didattica, n.7, Palermo
La rivista è disponibile on-line al seguente indirizzo: http://math.unipa.it/%grim/memquad.htm

1.1 Analisi epistemologica e storico-epistemologica

Di seguito è presentata una breve analisi delle definizioni di triangolo tratte da F. Enriques, *Gli elementi di Euclide e la critica antica e moderna,* Roma, Alberto Stock editore, 1925, e da alcuni testi di geometria per le scuole superiori.
Le strategie risolutive individuate nella storia, e nella riorganizzazione epistemologica possono arricchire lo stato dei comportamenti ipotizzati sulla risoluzione del problema dato.
L'analisi epistemologica è lo studio delle sistematizzazioni date all'interno dei linguaggi matematici: in base ai sistemi di assiomi scelti, sono costruite modellizzazioni diverse. Le rappresentazioni epistemologiche sono messe a punto da una comunità scientifica in un dato contesto storico.
L'analisi storico-epistemologica cerca di ricostruire i linguaggi matematici attraverso l'indagine storica sulla riorganizzazione della grammatica del linguaggio e sui significati dimenticati riguardo ad un particolare concetto.

Concetti primitivi	Postulati	Definizioni	Testo
Punto,retta,piano	Da qualsiasi punto si può condurre una retta ad ogni altro punto. (esiste una ed una sola retta che passa per due punti) Ogni retta terminata si può prolungare continuamente, per dritto.	Il trilatero è una figura compresa da tre rette	F. ENRIQUES (1925), *Gli elementi di Euclide e la critica antica e moderna,* Roma, Alberto Stock editore
Punto,retta,piano	Esistono infiniti punti, infinite rette, infiniti piani Per due punti distinti passa una retta ed una sola Ogni retta contiene almeno due punti Dati due punti distinti di una retta r, se A precede B, allora B segue A.	Il triangolo è un *poligono* con tre lati	S.L. CIRILLO (1989), *Geometria e scoperta,*Napoli, Ferraro

	Dati tre punti distinti A,B,C, di una retta r, se A precede B e B precede C, allora anche A precede C. Tra due punti distinti di una retta r è sempre compreso almeno un terzo punto Se due punti distinti di una retta appartengono allo stesso piano, allora tutti i punti della retta appartengono al piano In un piano esistono almeno tre punti distinti non appartenenti ad una stessa retta Per tre punti non allineati passa un piano ed uno solo.		
Punto,retta, piano	Nello spazio esistono infinite punti, rette, piani Per ogni copia di punti distinti, A e B, esiste una e una sola retta che li contiene Ogni retta è costituita dai infiniti punti Ogni retta è	Il testo riporta 3 definizione di triangolo: Il triangolo è un *poligono* con tre lati Dati tre punti non allineati A, B, C, si chiama triangolo ABC la figura costituita dall'intersezione dei tre *angoli convessi* ABC, BCA, CAB, ciascuno dei quali ha	AA.VV.(2000), *Algebra, geometria,elementi di informatica,*Padova, CEDAM

	dotata di due ordinamenti lineari, detti versi o sensi, uno opposto all'altro, rispetto ai quali è densa e limitata Per ogni terna di punti non allineati dello spazio esiste uno e un solo piano che li contiene Se una retta a due punti in comune con un piano, essa è inclusa nel piano Ogni piano contiene infiniti punti e infinite rette Ogni retta r di un piano divide l'insieme degli ulteriori suoi punti in due parti non vuote, tale che: -se i punti A e B appartengono parti diverse, allora il segmento AB taglia la retta r in un punto -se i punti C e D appartengono alla stessa parte, allora anche il segmento CD è incluso in questa.	per *vertice* uno dei punti dati e ha i lati passanti per gli altri Il triangolo è la parte di *piano* delimitata da tre *punti* A, B, C, non allineati e dai *segmenti* che li congiungono a due a due.	

1.2 Questionario sulla concezione del triangolo

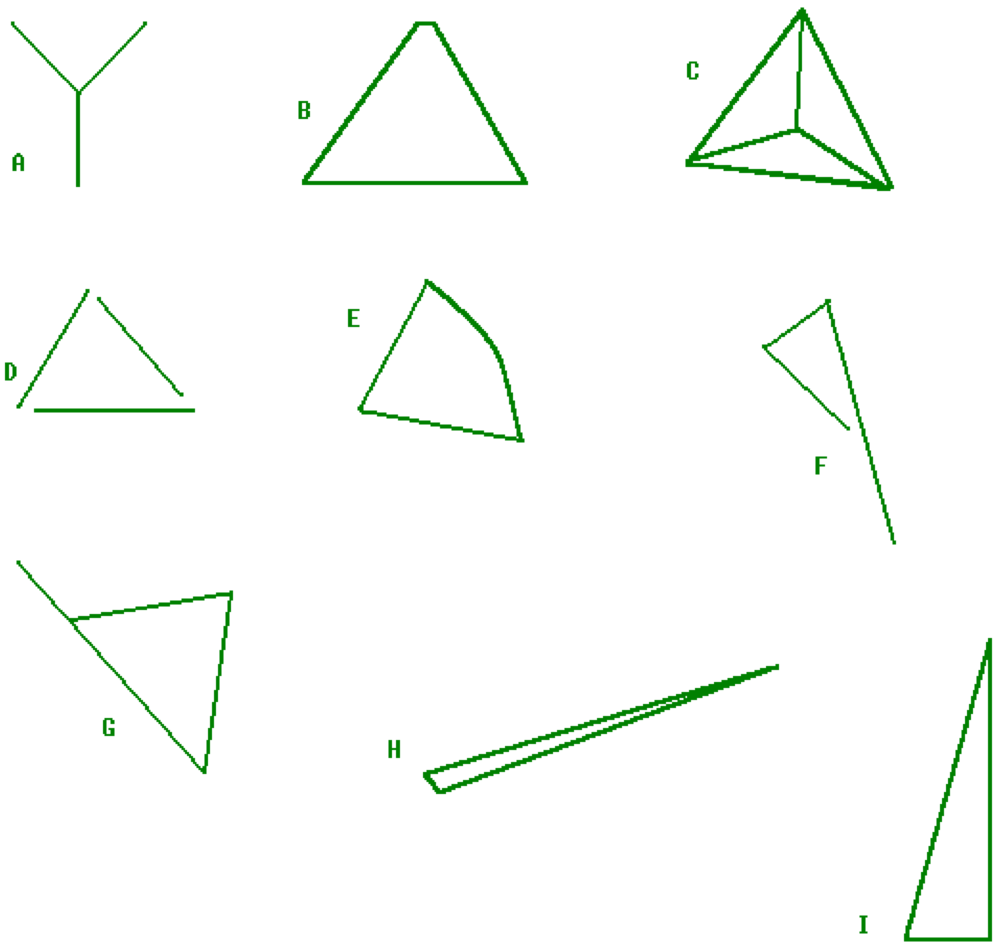
1.2.0 Premessa

L’indagine è stata condotta proponendo un questionario a domande aperte, poste con i seguenti scopi:

- Nella prima domanda i bambini sono invitati a dire di ogni figura se è o meno un triangolo e spiegare il perché. In questo modo sono stimolati a riflettere sulle proprietà del triangolo e a pensare, anche se non consapevolmente, ad una prima definizione della figura geometrica in questione.
- Nella seconda domanda gli allievi devono disegnare un triangolo ed esplicitare la loro definizione. Il disegno effettuato è una testimonianza dell’immagine mentale della figura geometrica.
- La terza e la quarta domanda mirano a comprendere se i bambini intuiscono una qualche relazione fra i tre lati e fra i tre angoli del triangolo, e quali strategie adottano nella scelta delle misure.
- L'ultima domanda ha lo scopo di rendere evidente il concetto d'altezza elaborato e i misconcetti che non permettono di comprendere quale sia l'altezza di un triangolo qualsiasi.

1.2.1 Questionario

A. Quali fra le seguenti figure è un triangolo e quale non lo è? Perché?



B. Disegna un triangolo. Sai spiegare cos'è? Come deve essere una figura per chiamarsi triangolo?

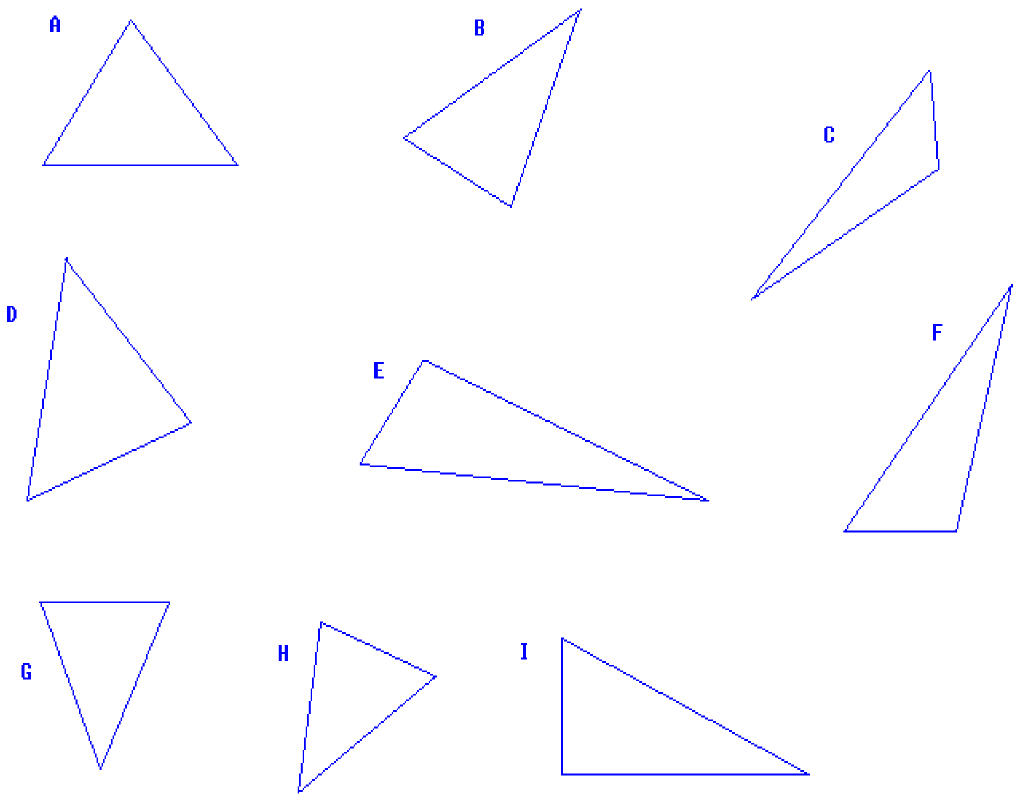
C. Completa le tabelle con le misure dei lati di ogni triangolo

	Triangolo a	Triangolo b	Triangolo c	Triangolo d	Triangolo e
AB					
BC					
CD					

D. Completa le tabelle con le misure degli angoli di ogni triangolo

	Triangolo a	Triangolo b	Triangolo c	Triangolo d	Triangolo e
A	90°				
B	100°				
C					

E. Quanto sono alti questi triangoli? Disegna l'altezza o le altezze di ogni triangolo.



1.2.2 Analisi a priori dei comportamenti attesi

Vengono riportate, per ciascun quesito, la tabulazione delle possibili risposte. L'analisi a priori non serve solo per tabulare i dati ma consente di individuare:

- Lo "spazio degli eventi" cioè l'insieme delle possibili risposte corrette e non, che si possono ipotizzare in quel contesto.
- In base allo spazio degli eventi, il "buon problema" da sfruttare nelle unità didattiche.
- Le variabili didattiche, cioè quelle che permettono un cambiamento dei comportamenti degli allievi
- Infine dà la possibilità di analizzare in modo più accurato lo strumento valutativo.

La costruzione dell'analisi a priori è avvenuta per tappe successive:

- Durante la costruzione del questionario.
- Dopo un pre-test effettuato su due bambini di quarta elementare
- Dopo la somministrazione dei questionari al campione.

Accanto ad ogni risposta ipotizzata sono inseriti, in percentuale, i risultati della somministrazione.

Domanda A: quali fra le seguenti figure è un triangolo e quale non lo è? Perché?	**Tot.risp**	**Tot.%**
A1: riconosce come triangoli le figure che hanno tre lati	42	55
A2: riconosce come triangoli le figure che hanno tre angoli	30	39
A3: riconosce come triangoli le figure che somigliano al triangolo equilatero	24	31
A4: riconosce come triangoli le figure chiuse	18	23
A5: riconosce come triangoli le figure piane	18	23
A6: riconosce i triangoli come poligoni	0	0
A7: riconosce i triangoli come figure con tre vertici	5	6
A8: riconosce i triangoli come figure con tre lati consecutivi	42	55
A9: riconosce i triangoli ma non fornisce spiegazioni.	0	0
A10: afferma che la figura C è un solido/una piramide.	20	26
A11: riconosce i triangoli come spezzate non miste (ha un lato curvo)	45	58
A12: riconosce come triangoli i triangoli isosceli (è un triangolo perché è isoscele)	3	4
A13: riconosce come triangoli i triangoli scaleni	7	9
A14: riconosce come triangoli i triangoli rettangoli	4	5
A15: riconosce come triangoli i triangoli acutangoli	0	0
A16: riconosce come triangoli i triangoli ottusangoli	0	0
A17: vede l'oggetto come frame riferito al contesto della propria realtà quotidiana invece di vederlo come oggetto della geometria.	35	45
A 18: riconosce i triangoli come figura geometrica.	11	14
A 19: afferma: è un triangolo perché è un triangolo	15	19
A 20: afferma che f e g non sono triangoli perché hanno un lato troppo lungo.	37	48
A 21: riconosce il triangolo come spezzata chiusa.	2	3

B) Disegna un triangolo. Sai spiegare cos'è? Come deve essere una figura per chiamarsi triangolo?		
B1: deve essere un poligono	3	4
B2: deve avere tre lati	42	55
B3: deve avere tre angoli	37	48
B4: deve avere tre vertici	6	8
B5: deve essere una spezzata chiusa	4	5
B6: deve essere una figura piana	2	3
B7: deve avere tre lati consecutivi	5	6
B8: deve avere tre lati uguali e tre angoli uguali.	17	22
B9: disegna consapevolmente un triangolo equilatero	9	12
B10: disegna consapevolmente un triangolo scaleno	1	1,3
B11: disegna consapevolmente un triangolo isoscele	1	1,3
B12: disegna consapevolmente un triangolo rettangolo	4	5
B13: disegna consapevolmente un triangolo acutangolo	0	0
B14: disegna consapevolmente un triangolo ottusangolo	0	0
B15: disegna un triangolo equilatero	36	47
B16: disegna un triangolo isoscele	18	23
B17: disegna un triangolo scaleno/rettangolo	4	5
B18: disegna il triangolo con la base orizzontale, come se fosse un corpo pesante.	70	91
B19: vede l'oggetto come frame riferito al contesto della loro realtà quotidiana invece di vederlo come oggetto della geometria.	2	3
B20: riconosce come triangoli i triangoli isosceli	2	3
B21: riconosce come triangoli i triangoli scaleni	1	1,3
B22: riconosce come triangoli i triangoli rettangoli	0	0
B23: riconosce come triangoli i triangoli acutangoli	0	0
B24: riconosce come triangoli i triangoli ottusangoli	0	0
B25: definisce il triangolo come una figura che può avere tre lati uguali, tre lati diversi o due lati uguali e uno diverso.	6	8
B26: riconosce i triangoli come figura geometrica.	18	23
B27: riconosce i triangoli come parti di piano	1	1,3
B28: afferma: per essere un triangolo deve avere la forma di un triangolo	2	3
B29: deve essere una spezzata non mista (deve avere i lati dritti)	4	5
B30: la somma degli angoli deve essere 180°	2	3
B31: la base deve essere minore della somma dei lati.	1	1,3
C) Completa la tabella con le misure dei lati di ogni triangolo		
C1: non adotta alcun criterio per scegliere le misure di ogni lato	15	19
C2: sceglie sempre misure uguali fra loro	10	13
C3: sceglie sempre misure diverse fra loro	0	0
C4: sceglie misure molto vicine fra loro	13	17
C5: sceglie misure molto lontane fra loro	0	0
C6: sceglie sempre due misure uguali e una diversa	4	5
C7: disegna i triangoli e misura ogni lato con il righello	18	23

C8: fa in modo che ogni lato sia minore della somma degli altri due	1	1,3
C9: è convinto che per scegliere correttamente i lati basta considerare misure o uguali fra loro, o diverse o due uguali e una diversa.	35	45
C10: inserisce misure corrette senza usare la regola.	35	45
D) Completa la tabella con le misure degli angoli di ogni triangolo		
D1: non adotta alcun criterio per scegliere le misure di ogni angolo	28	36
D2: sceglie misure uguali fra loro	3	4
D3: sceglie misure diverse fra loro	0	0
D4: sceglie misure molto vicine fra loro	0	0
D5: sceglie misure molto lontane fra loro	0	0
D6: sceglie due misure uguali e una diversa	1	1,3
D7: disegna i triangoli e misura ogni angolo con il goniometro	4	5
D8: sceglie due angoli maggiori o uguali a 90°.	43	56
D9: si accorge che (a) non può essere un triangolo.	12	16
D10: fa in modo che la somma degli angoli interni sia 180°	7	9
D11: sceglie 3 angoli acuti oppure uno retto o ottuso e due acuti.	13	17
D12: è convinto che per scegliere correttamente gli angoli basta considerare misure o uguali fra loro, o diverse o due uguali e una diversa.	18	23
E)Quanto sono alti questi triangoli? Disegna l'altezza o le altezze di ogni triangolo.		
E1: traccia l'altezza verticale	30	39
E2: traccia l'altezza lungo i lati	10	13
E3: traccia l'altezza sempre dentro il triangolo	43	56
E4: traccia l'altezza partendo dal vertice che sta più in alto	5	6
E5: per disegnare l'altezza considera il lato e il vertice opposto più distanti tra loro	0	0
E6: traccia l'altezza congiungendo un vertice al punto medio del lato opposto	18	23
E7: traccia una linea verticale che parte dal vertice più alto ed è perpendicolare ad un piano di riferimento assoluto che coincide con un "pavimento" immaginario su cui poggia il triangolo.	12	16
E8: traccia un segmento che va da un vertice alla base opposta ma non è perpendicolare.	24	31
E9: traccia correttamente un'altezza	4	5
E10: traccia correttamente tre altezze	2	3
E11: traccia due o tre altezze ma non in modo corretto.	10	13
E12: traccia correttamente l'altezza nei triangoli che più somigliano a quello equilatero	16	21
E13: traccia un segmento che va da un lato ad un altro ed è perpendicolare ad uno dei due lati.	7	9
E14: traccia correttamente l'altezza quando il triangolo ha la base orizzontale, come se fosse un corpo pesante.	14	18

1.3 Analisi dei dati sperimentali

L'analisi dei dati è stata ottenuta attraverso l'applicazione della statistica descrittiva (frequenza relativa percentuale) e attraverso l'uso di Chic che permette di studiare le implicazioni fra gli item.

1.3.0 Analisi descrittiva

Le percentuali più significative delle risposte sono qui di seguito riportate:

Domanda A

Nella domanda A gli allievi giustificano la loro risposta ricorrendo alle seguenti proprietà del triangolo tra le quali sembra esserci una sorta di gerarchia:

1. (58%) non avere lati curvi (essere una spezzata semplice)

L'alta percentuale degli allievi che esplicitano questa proprietà può essere dovuta alla figura E.

2. (A1; 55%) avere tre lati
3. (A8; 55%) avere i lati uniti (consecutivi)
4. (A2; 39%) avere tre angoli
5. (A4; 23%) essere figure chiuse
6. (A5; 23%) essere figure piane
7. (A18;14%) essere una figura geometrica
8. (A7; 8%) avere tre vertici
9. (A21; 3%) essere una spezzata chiusa.
10. (A6; 0%) essere un poligono

Altre percentuali significative sono associate a tre misconcetti:

- (A17; 45%) vede l'oggetto come frame[3] riferito al contesto della propria realtà quotidiana invece di vederlo come oggetto della geometria.

---

3 Concetto elaborato principalmente dalla sociologia, dagli studi sull'intelligenza artificiale e dalla pragmatica per indicare le modalità attraverso cui gli individui inquadrano (il verbo inglese frame significa "incorniciare", "inquadrare") la loro comprensione di eventi, azioni, situazioni sociali e testi. Pur esistendo sfumature tra le definizioni fornite da ciascuna disciplina, il frame indica la cornice interpretativa entro cui di volta in volta si percepiscono, si identificano e si etichettano un numero altrimenti infinito di occorrenze del mondo. Il frame fornisce essenzialmente un modo di descrivere l'azione o il testo (le singole occorrenze) a cui viene applicato, indicando le coordinate per affrontare o per muoversi all'interno di ciò che, una volta incorniciato, diviene un fatto o un testo significativo. Applicare un frame significa perciò rispondere a domande quali: "Che cosa sta accadendo?", "Di che tipo di evento si tratta o si sta narrando?". L'idea è che vi siano nuclei di significati già intersoggettivamente condivisi, un'enciclopedia in cui sono depositati regole e codici prestabiliti, cui aderiamo per organizzare la nostra esperienza individuale e collettiva.
L'esempio più comune di frame è quello rappresentato da una situazione di gioco, entro cui vigono regole precise e si compiono azioni specifiche da parte di attori che mantengono ruoli e scopi predeterminati. Quando giochiamo, sappiamo che i nostri ruoli e le nostre azioni mantengono un significato diverso da quello che invece si attiverebbe, ad esempio, nel frame "contesto di lavoro". Vi possono essere però livelli differenti di consapevolezza del frame da applicare, e due individui possono trovarsi a interpretare la medesima situazione incorniciandola entro frame diversi, incorrendo così in malintesi e fraintendimenti. Alcune cornici si trovano inoltre già esplicitate nel linguaggio, e generalmente si attivano automaticamente (il gioco, il cinema, un contesto di lavoro, un litigio), altre si formano invece a partire dalla peculiarità della situazione comunicativa di cui si deve estrapolare il significato.

Nonostante la domanda esplicitasse la natura geometrica degli oggetti da esaminare, il 45% degli allievi interpreta alcune delle figure proposte, come rappresentazioni di oggetti reali di cui ha esperienza: così la figura A diventa la lettera Y, la figura F una bandiera e la figura H uno spillo.

- (A3; 31%) riconosce come triangoli le figure che somigliano al triangolo equilatero.

Questo schema mentale rigido potrebbe essere dovuto diversi fattori condizionanti quali l'esperienza che i soggetti hanno del triangolo, l'immagine mentale che si sono creati, le strategie scelte e le attività svolte in classe, il modo in cui i libri di testo presentano questa figura geometrica, …

- (A19; 19%) afferma: è un triangolo perché è un triangolo

La risposta potrebbe essere riconnessa alla difficoltà di verbalizzare i propri processi mentali, e a tendenze egocentriche che possono portare il bambino a ritenere che l'altro abbia la sua stessa immagine mentale di triangolo, ed a trascurare di esplicitare ulteriori informazioni[4].

Domanda B

Nella domanda B il 59% degli allievi disegna consapevolmente (B9; 12%) o inconsapevolmente (B15; 47%) un triangolo equilatero, il 22%(B8) afferma che un triangolo deve avere tre lati uguali e tre angoli uguali.
Si ripresenta lo schema mentale rigido della risposta A3 con un'incidenza degna di nota.

Il 91% (B18) degli alunni disegna il triangolo con la base orizzontale, come se fosse un corpo pesante.
Ci troviamo di fronte ad un'altra immagine mentale fortemente stereotipata, che, accanto al misconcetto per cui il triangolo è riconosciuto solo come triangolo equilatero, può portare alla creazione di altre intuizioni sbagliate.

Gli allievi esplicitano, per definire il triangolo, le seguenti proprietà:

1. (B2; 55%) avere tre lati
2. (B3; 48%) avere tre angoli
3. (B26%; 23%) essere una figura geometrica
4. (B25; 8%) definisce il triangolo come una figura che può avere tre lati uguali, tre lati diversi o due lati uguali e uno diverso.

Questi alunni, per definire il triangolo ricorrono alla classificazione rispetto alla congruenza dei lati.

5. (B4; 8%) avere tre vertici
6. (B7; 6%) avere tre lati consecutivi
7. (B5; 5%) essere una spezzata chiusa
8. (B29; 9%) essere una spezzata semplice (avere tutti i lati dritti)
9. (B1; 4%) essere un poligono
10. (B6; 3%) essere una figura piana
11. (B28; 3%) afferma: per essere un triangolo deve avere la forma di un triangolo.

Si ripresentano, anche se con una bassa incidenza, le tendenze egocentriche accennate nella risposta A19.

---

[4] G.PETTER (1992), *Dall'infanzia alla preadolescenza. Aspetti e problemi dello sviluppo psicologico*, Giunti, Firenze

12. (B27; 1,3%) definisce i triangoli come parti di piano.

Per comprendere la bassa incidenza di questo diverso modo di definire il triangolo, bisognerebbe condurre una ricerca su come i libri di testo in circolazione presentano questa figura geometrica.

Domanda C

Nella domanda C i criteri per scegliere le misure dei lati sono:

1. (C9; 45%) è convinto che per scegliere correttamente i lati basta considerare misure o uguali fra loro, o diverse o due uguali e una diversa.

Per inserire misure corrette gli allievi ricorrono alla classificazione dei triangoli rispetto alla congruenza dei lati.

2. (C7; 23%) disegna i triangoli e misura ogni lato con il righello.
3. (C1; 19%) nessun criterio
4. (C4; 17%) sceglie misure molto vicine fra loro
5. (C2;13%) sceglie misure sempre uguali fra loro

Ancora una volta il concetto di triangolo è ristretto quello equilatero.

6. (C8; 1,3%) fa in modo che ogni lato sia minore della somma degli altri due.

Solo un bambino su 77 ricorda la regola. Ciò dovrebbe farci interrogare sulle strategie usate in classe per garantire l’apprendimento.

Il 45% (C9) del campione inserisce misure corrette senza usare la regola, usando strategie alternative.

Domanda D

Nella domanda D i criteri per scegliere le misure degli angoli sono:

1. (D1; 36%) nessun criterio
2. (D12; 23%) è convinto che per scegliere correttamente gli angoli basta considerare misure o uguali fra loro, o diverse o due uguali e una diversa, così come aveva fatto per i lati.
3. (D11; 17%) sceglie 3 angoli acuti oppure uno retto o ottuso e due acuti.

Il bambino intuitivamente si accorge che non ci può essere più di un angolo di 90°.

4. (D7; 5%) disegna i triangoli e misura ogni angolo con il goniometro.
5. (D2; 4%) sceglie misure uguali fra loro.

Il concetto di triangolo è ristretto a quello equilatero.

6. Il 56% (D8) del campione sceglie due angoli maggiori o uguali a 90°, il 16% (D9) non si accorge che “a” non può essere un triangolo,il 9%(D19) fa in modo che la somma degli angoli interni sia 180°.

Ancora una volta solo pochi allievi sono in grado di riattivare i concetti appresi negli studi precedenti.

Domanda E

Nella domanda E i criteri per disegnare l’altezza sono:

1. (E3; 56%) traccia l’altezza sempre dentro il triangolo.
2. (E1; 39%) traccia l’altezza verticale
3. (E8; 31%) traccia un segmento che va da un vertice alla base opposta ma non è perpendicolare.
4. (E6; 23%) traccia l'altezza congiungendo un vertice al punto medio del lato opposto.

5. (E7; 16%) traccia una linea verticale che parte dal vertice più alto ed è perpendicolare ad un piano di riferimento assoluto che coincide con un "pavimento" immaginario su cui poggia il triangolo
6. (E2; 13%) traccia l'altezza lungo i lati.
7. (E13; 9%) traccia un segmento che va da un lato ad un altro ed è perpendicolare ad uno dei due lati.

Solo il 3% (E10) del campione traccia correttamente le altezze, il 5% (E9) traccia correttamente un'altezza, il 13% (E11) traccia due o tre altezze ma non in modo corretto, il 21% traccia correttamente le altezze nei triangoli che più somigliano a quello equilatero.

1.3.1 Analisi implicativa delle variabili

Tenendo conto dell'analisi a priori e dell'analisi statistica è stato possibile ipotizzare profili di bambini ideali portatori dei misconcetti ipotizzati (variabili supplementari), che sono stati inseriti nella tabulazione dei dati insieme agli allievi (indicati da lettere minuscole seguite da un numero: la lettera indica la classe d'appartenenza, il numero un particolare bambino). Grazie all'uso dello Chic è stato possibile indagare sul modo in cui il campione considerato si situa rispetto alle variabili supplementari (ipotetici bambini che rappresenterebbero i misconcetti ipotizzati), osservando il modo in cui esse venivano coinvolte nelle implicazioni.
I profili che si riferiscono alle stesse domande sono stati analizzati contemporaneamente.

Variabili supplementari

P1: formalmente corretto.
Avrà 1 nelle risposte:

A1: riconosce come triangoli le figure che hanno tre lati	55%[5]
A2: riconosce come triangoli le figure che hanno tre angoli	39%
A5: riconosce come triangoli le figure piane	23%
A7: riconosce i triangoli come figure con tre vertici	6%
A8: riconosce i triangoli come figure con tre lati consecutivi	55%
A11: riconosce i triangoli come spezzate non miste (ha un lato curvo)	58%
A 21: riconosce il triangolo come spezzata chiusa.	3%
B1: deve essere un poligono	4%
B2: deve avere tre lati	55%
C8: fa in modo che ogni lato sia minore della somma degli altri due	1,3%
D10: fa in modo che la somma degli angoli interni sia 180°	9%
E10: traccia correttamente tre altezze	3%

P2: riconosce come triangoli le figure che si possono ricondurre ai triangoli equilateri.
Avrà 1 nelle risposte:

A3: riconosce come triangoli le figure che somigliano al triangolo equilatero	31%
B8: deve avere tre lati uguali e tre angoli uguali.	22%
B15: disegna un triangolo equilatero	47%
C2: sceglie sempre misure uguali fra loro	13%
D2: sceglie misure uguali fra loro	4%

P3: riconosce come triangoli le figure che si possono ricondurre ai triangoli isosceli.
Avrà 1 nelle risposte:

A12: riconosce come triangoli i triangoli isosceli	4%
B16: disegna un triangolo isoscele	23%
C6: sceglie sempre due misure uguali e una diversa	5%

[5] Frequenza relativa percentuale. Vedi analisi descrittiva pag. 14

D6: sceglie due misure uguali e una diversa	1,3%

P4: vede l'oggetto come frame riferito al contesto della sua realtà quotidiana invece di vederlo come oggetto della geometria.
Avrà 1 nelle risposte:

A17: vede l'oggetto come frame riferito al contesto della loro realtà quotidiana invece di vederlo come oggetto della geometria.	45%
B19: vede l'oggetto come frame riferito al contesto della loro realtà quotidiana invece di vederlo come oggetto della geometria.	2

P6: non distingue tra la definizione di triangolo e la classificazione rispetto alla congruenza dei lati e all'ampiezza degli angoli
Avrà 1 nelle risposte:

A3: riconosce come triangoli le figure che somigliano al triangolo equilatero	31%
A12: riconosce come triangoli i triangoli isosceli (è un triangolo perché è isoscele)	4%
A14: riconosce come triangoli i triangoli rettangoli	5%
B25: definisce il triangolo come una figura che può avere tre lati uguali, tre lati diversi o due lati uguali e uno diverso.	8%
C9: è convinto che per scegliere correttamente i lati basta considerare misure o uguali fra loro, o diverse o due uguali e una diversa.	45%
D11: sceglie 3 angoli acuti oppure uno retto o ottuso e due acuti.	17%
D12: è convinto che per scegliere correttamente gli angoli basta considerare misure o uguali fra loro, o diverse o due uguali e una diversa.	23%

P7: non adotta alcun criterio per scegliere le misure dei lati e degli angoli del triangolo.
Avrà 1 nelle risposte:

C1: non adotta alcun criterio per scegliere le misure di ogni lato	19%
D1: non adotta alcun criterio per scegliere le misure di ogni angolo	36%

P8: traccia l'altezza sempre verticale.
Avrà 1 nelle risposte:

E13: traccia un segmento che va da un lato ad un altro ed è perpendicolare ad uno dei due lati.	9%

P9: traccia l'altezza lungo i lati.
Avrà 1 nelle risposte:

E2: traccia l'altezza lungo i lati	13%

P10: traccia l'altezza sempre dentro il triangolo.
Avrà 1 nelle risposte:

E3: traccia l'altezza sempre dentro il triangolo	56%

P11: traccia la mediana .
Avrà 1 nelle risposte:

E6: traccia l'altezza congiungendo un vertice al punto medio del lato opposto	23%
E12: traccia correttamente l'altezza nei triangoli che più somigliano a quello	21%

equilatero	

P12: traccia una linea verticale che parte dal vertice più alto ed è perpendicolare ad un piano di riferimento assoluto che coincide con un "pavimento" immaginario su cui poggia il triangolo.
Avrà 1 nelle risposte:

E7: traccia una linea verticale che parte dal vertice più alto ed è perpendicolare ad un piano di riferimento assoluto che coincide con un "pavimento" immaginario su cui poggia il triangolo.	16%

P13: traccia un segmento che va da un lato ad un altro ed è perpendicolare ad uno dei due lati.
Avrà 1 nelle risposte:

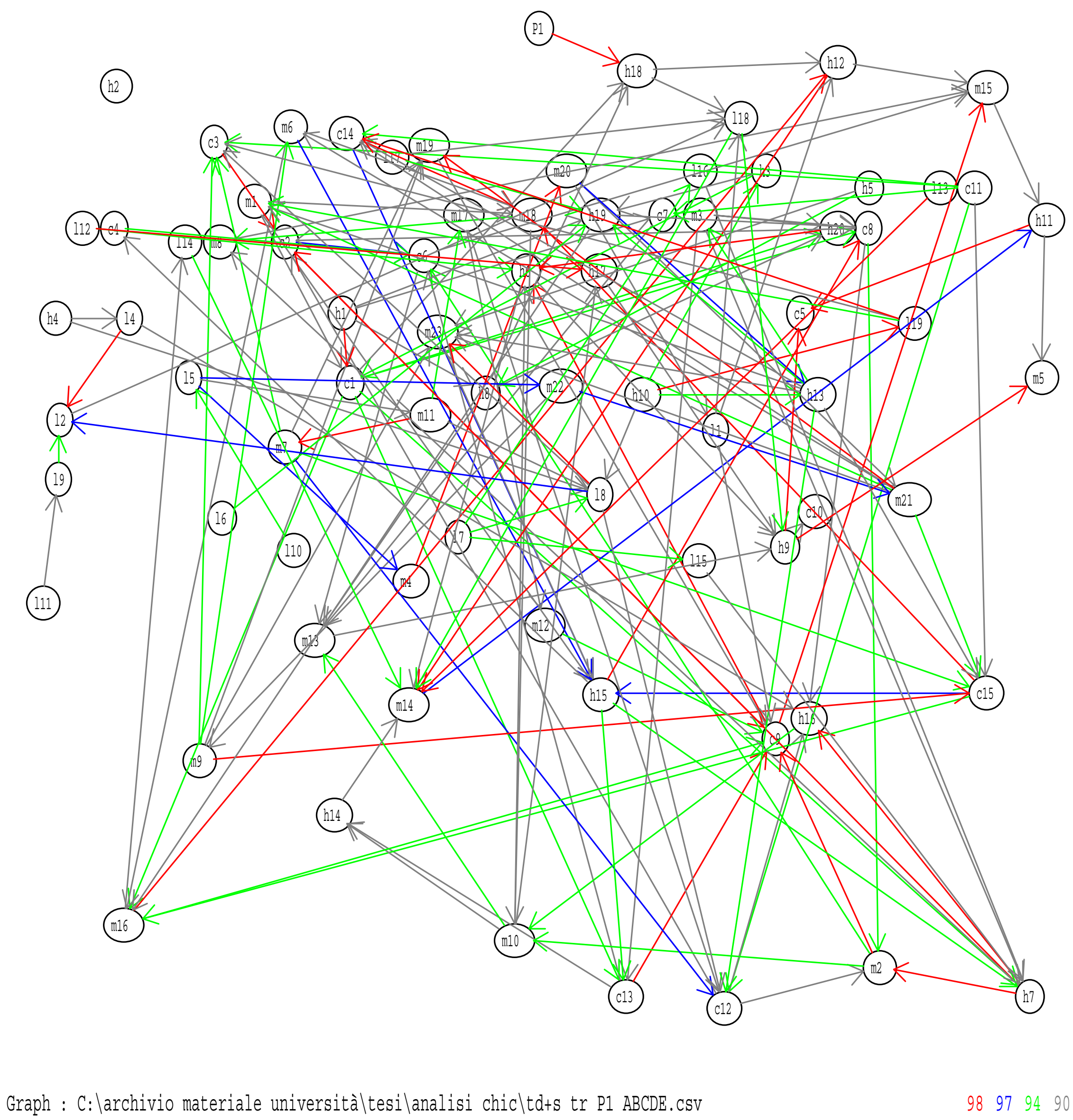
E13: traccia un segmento che va da un lato ad un altro ed è perpendicolare ad uno dei due lati.	9%

P1

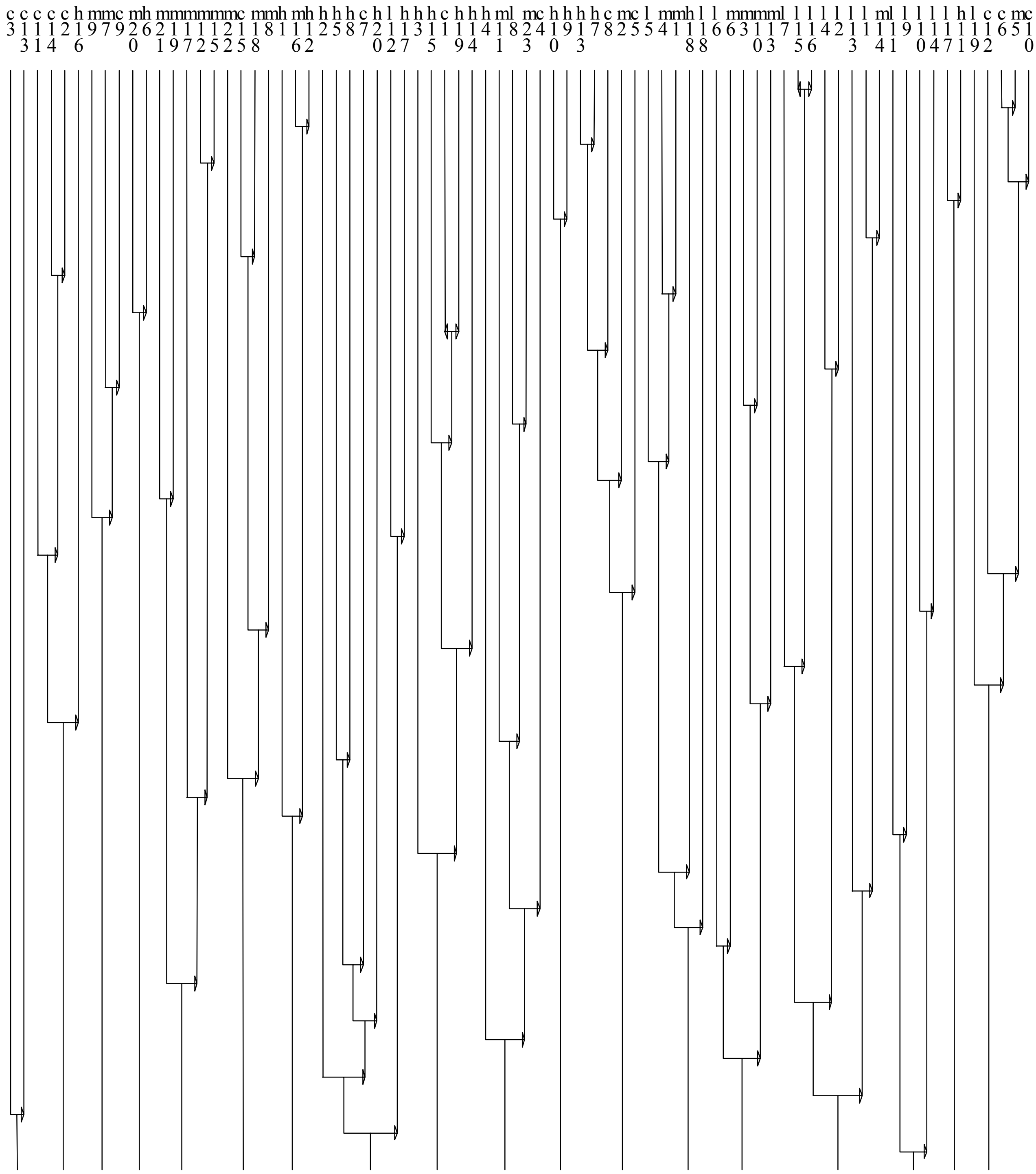
Consideriamo la variabile supplementare P1: formalmente corretto.
Avrà 1 nelle risposte:

A1: riconosce come triangoli le figure che hanno tre lati	55%
A2: riconosce come triangoli le figure che hanno tre angoli	39%
A5: riconosce come triangoli le figure piane	23%
A7: riconosce i triangoli come figure con tre vertici	6%
A8: riconosce i triangoli come figure con tre lati consecutivi	55%
A11: riconosce i triangoli come spezzate non miste (ha un lato curvo)	58%
A 21: riconosce il triangolo come spezzata chiusa.	3%
B1: deve essere un poligono	4%
B2: deve avere tre lati	55%
C8: fa in modo che ogni lato sia minore della somma degli altri due	1,3%
D10: fa in modo che la somma degli angoli interni sia 180°	9%
E10: traccia correttamente tre altezze	3%

Grafico d'implicazione

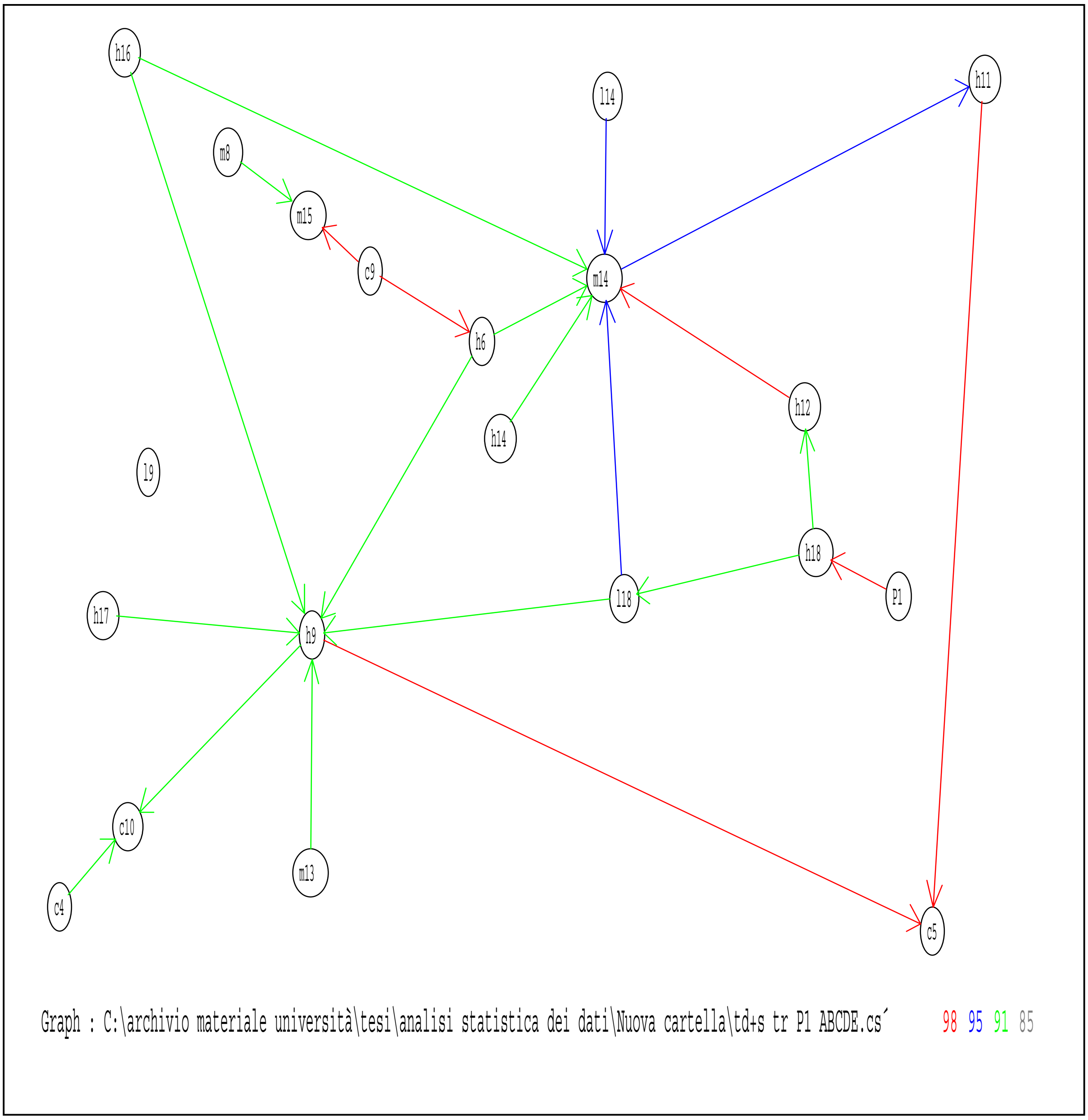


Come possiamo vedere, con un'intensità d'implicazione del 98%, la variabile supplementari P1 implica h18, il quale a sua volta ha legami d’implicazione con altre variabili. Per rendere il grafico più leggibile, consideriamo l'albero gerarchico delle implicazioni senza la variabile supplementare:



Hierarchical tree : td+s tr P1 ABCDE.csv

Questo grafo ci serve per individuare i bambini più rappresentativi del nostro campione, scegliendoli fra quelli implicati dal maggior numero di variabili.
Considerando i cammini implicativi presenti nel grafico essi sono: c4,c5,c9,c10,c13,m8,m13,m14,m15,h6,h9,h11,h12,h14,h16,h17,h18,l9,l14,l18.
Ora possiamo ritornare al grafo delle implicazioni che, con un minor numero di variabili, sarà più chiaro. Ricordiamo che le variabili rimaste sono rappresentative rispetto al campione.



Se guardiamo i cammini implicativi, sono coinvolte le variabili h18,h12,m14,h11,c5,l18,h9.
Possiamo concludere che nel campione esaminato P1 è presente.
I bambini in questione, pur non avendo dato tutte le risposte formalmente corrette, si avvicinano al profilo P1.

P2,P3,P6

Consideriamo le variabili supplementari
P2: riconosce come triangoli le figure che si possono ricondurre ai triangoli equilateri.
Avrà 1 nelle risposte:

A3: riconosce come triangoli le figure che somigliano al triangolo equilatero	31%
B8: deve avere tre lati uguali e tre angoli uguali.	22%
B15: disegna un triangolo equilatero	47%
C2: sceglie sempre misure uguali fra loro	13%
D2: sceglie misure uguali fra loro	4%

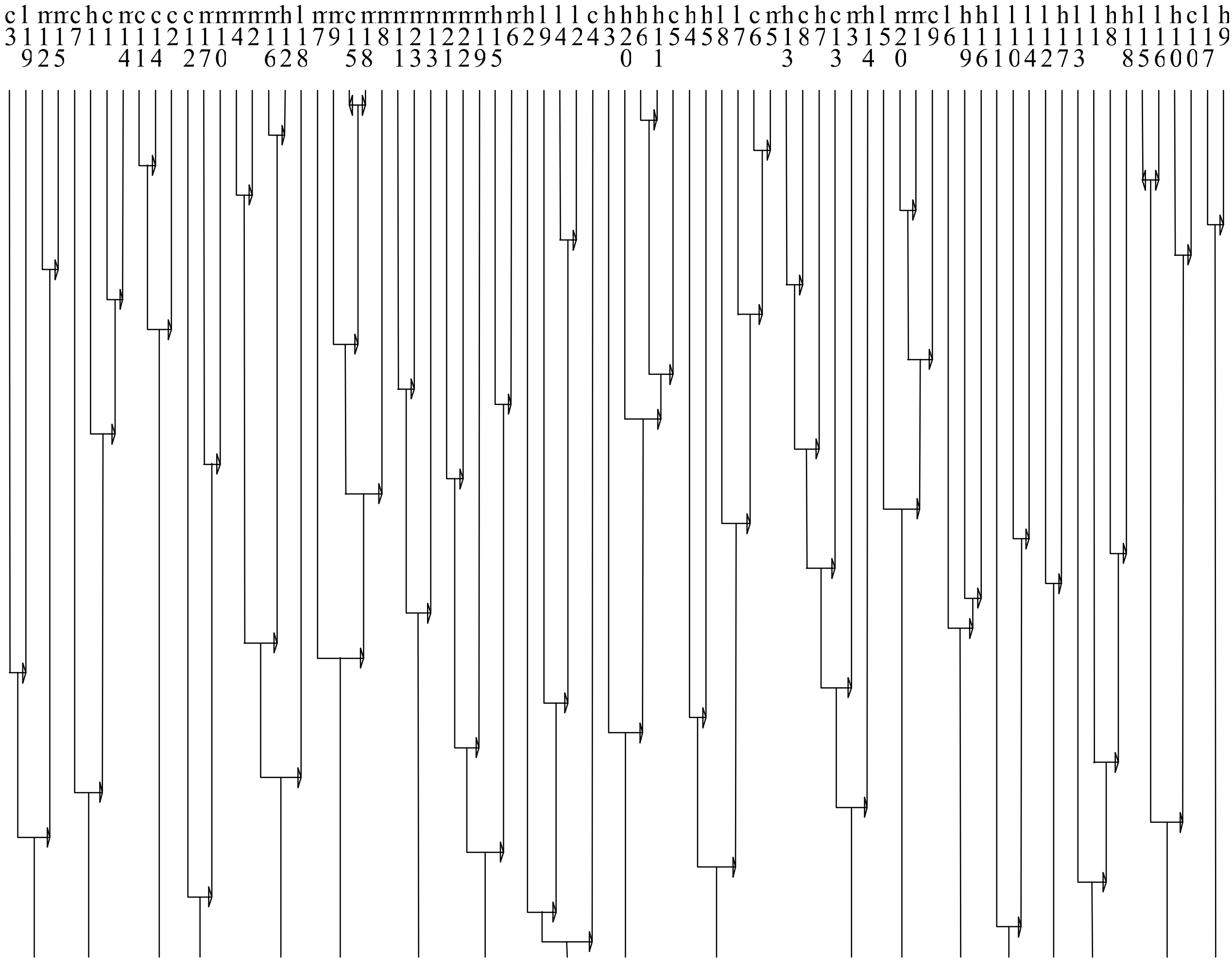
P3: riconosce come triangoli le figure che si possono ricondurre ai triangoli isosceli.
Avrà 1 nelle risposte:

A12: riconosce come triangoli i triangoli isosceli	4%
B16: disegna un triangolo isoscele	23%
C6: sceglie sempre due misure uguali e una diversa	5%
D6: sceglie due misure uguali e una diversa	1,3%

P6: non distingue tra la definizione di triangolo e la classificazione rispetto alla congruenza dei lati e all'ampiezza degli angoli
Avrà 1 nelle risposte:

A3: riconosce come triangoli le figure che somigliano al triangolo equilatero	31%
A12: riconosce come triangoli i triangoli isosceli (è un triangolo perché è isoscele)	4%
A14: riconosce come triangoli i triangoli rettangoli	5%
B25: definisce il triangolo come una figura che può avere tre lati uguali, tre lati diversi o due lati uguali e uno diverso.	8%
C9: è convinto che per scegliere correttamente i lati basta considerare misure o uguali fra loro, o diverse o due uguali e una diversa.	45%
D11: sceglie 3 angoli acuti oppure uno retto o ottuso e due acuti.	17%
D12: è convinto che per scegliere correttamente gli angoli basta considerare misure o uguali fra loro, o diverse o due uguali e una diversa.	23%

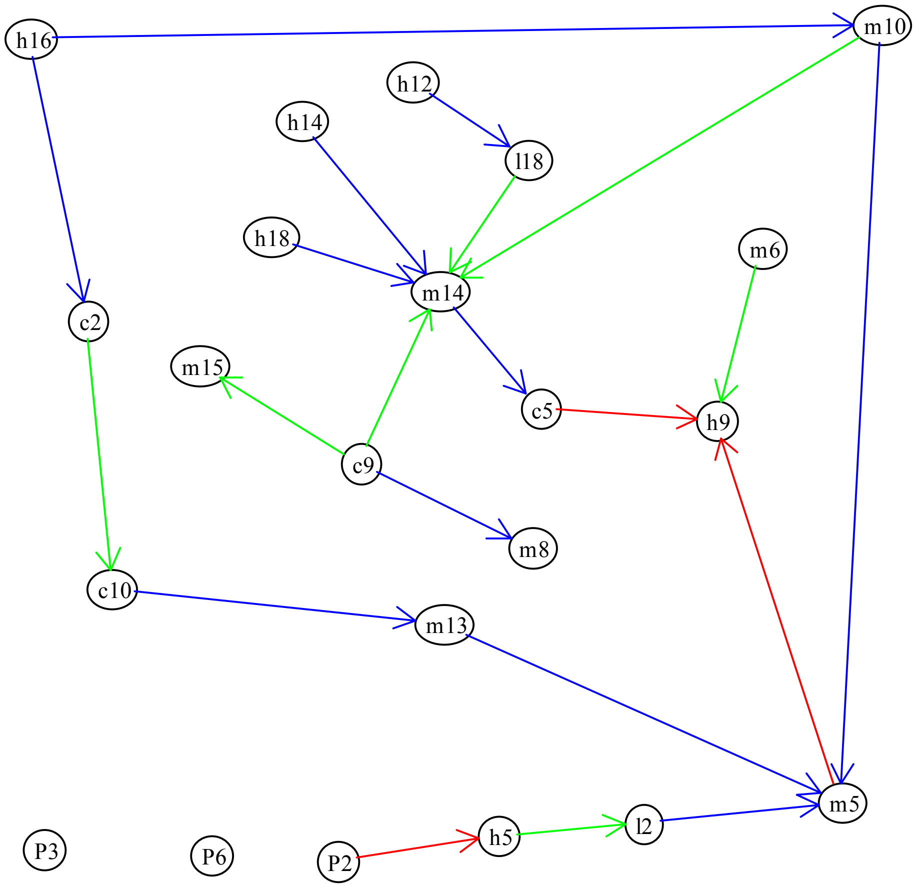
Albero gerarchico delle implicazioni



Hierarchical tree : C:\td+s tr P236 ABCD.csv

Considerando i cammini implicativi presenti nel grafico i bambini più rappresentativi del nostro campione sono: c2,c5,c9,c10,m5,m6,m8,m10,m13,m14,m15,h2,h5,h9,h12,h14,h16,h18,l2,l14,l16, l18.

Grafico delle implicazioni



Graph : C:\File ricevuti\tesi\Nuova cartella\td+s tr P236 ABCD.csv 99 95 93 85

Possiamo vedere che nel campione esaminato solo P2 è presente con un'intensità d'implicazione significativa.
Se guardiamo i cammini implicativi, sono coinvolte le variabili h5,l2,m5,h9.

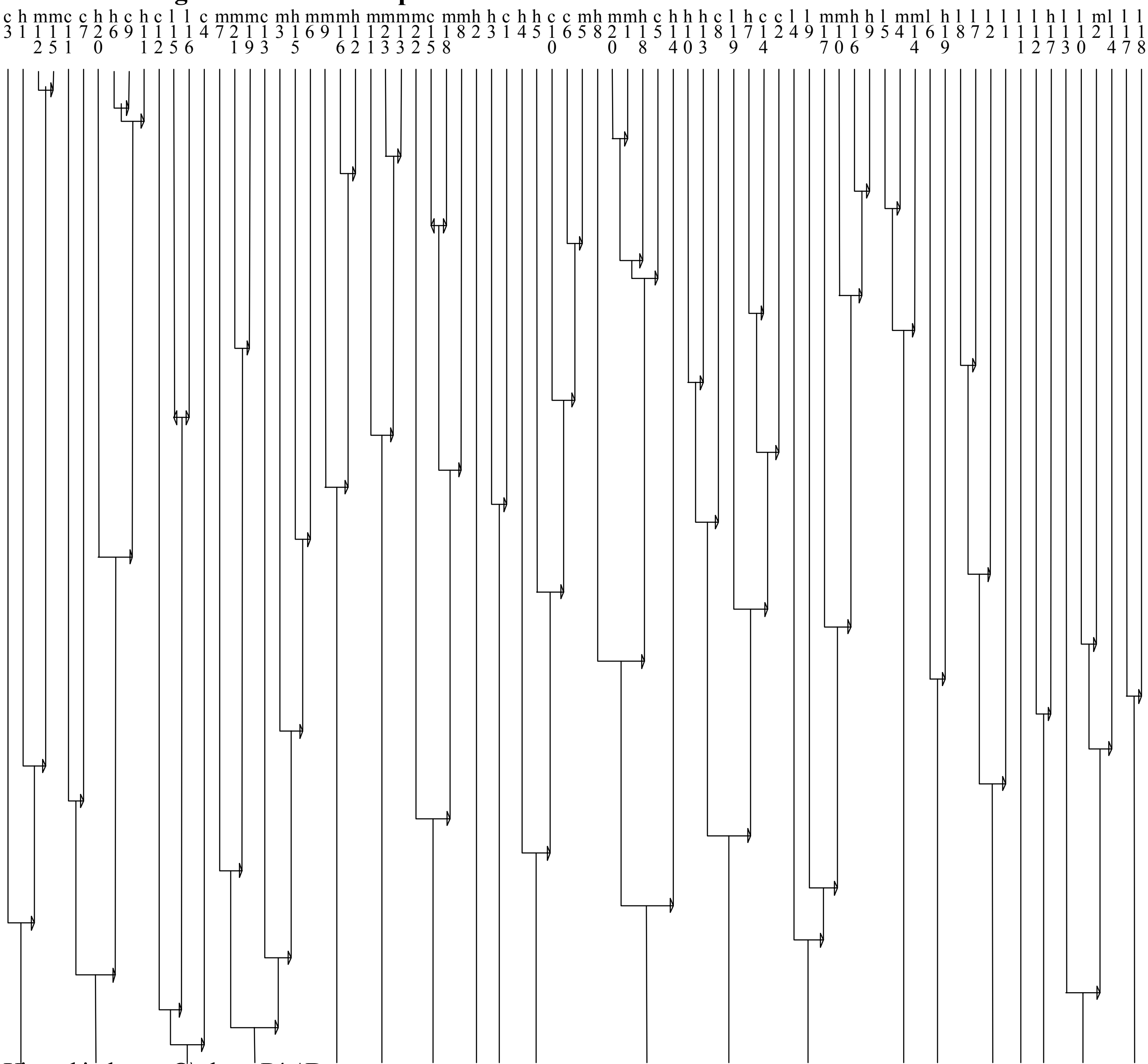
P4

Consideriamo la variabile supplementare P4: vede l’oggetto come frame riferito al contesto della sua realtà quotidiana invece di vederlo come oggetto della geometria.

Avrà 1 nelle risposte:

A17: vede l’oggetto come frame riferito al contesto della loro realtà quotidiana invece di vederlo come oggetto della geometria.	45%
B19: vede l’oggetto come frame riferito al contesto della loro realtà quotidiana invece di vederlo come oggetto della geometria.	2

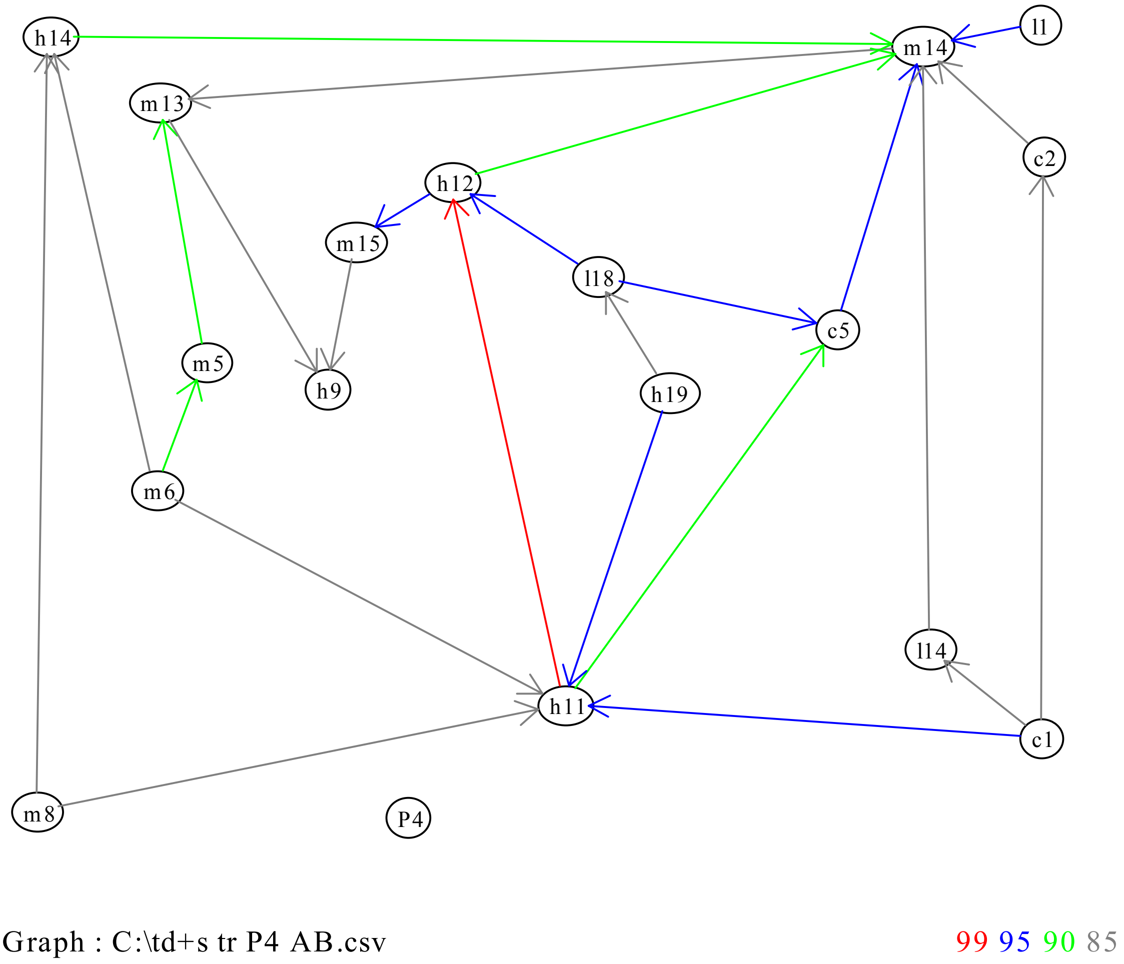
Albero gerarchico delle implicazioni



Hierarchical tree : C:\td+s tr P4 AB.csv

Considerando i cammini implicativi presenti nel grafico i bambini più rappresentativi del nostro campione sono: c1,c2,c4,c5,m5,m6,m8,m13,m14,m15,h9,h11,h12,h14,h17,h19,l1,l14,l18.

Grafico delle implicazioni.



Nel campione esaminato P4 non è presente con un indice d'implicazione significativa.

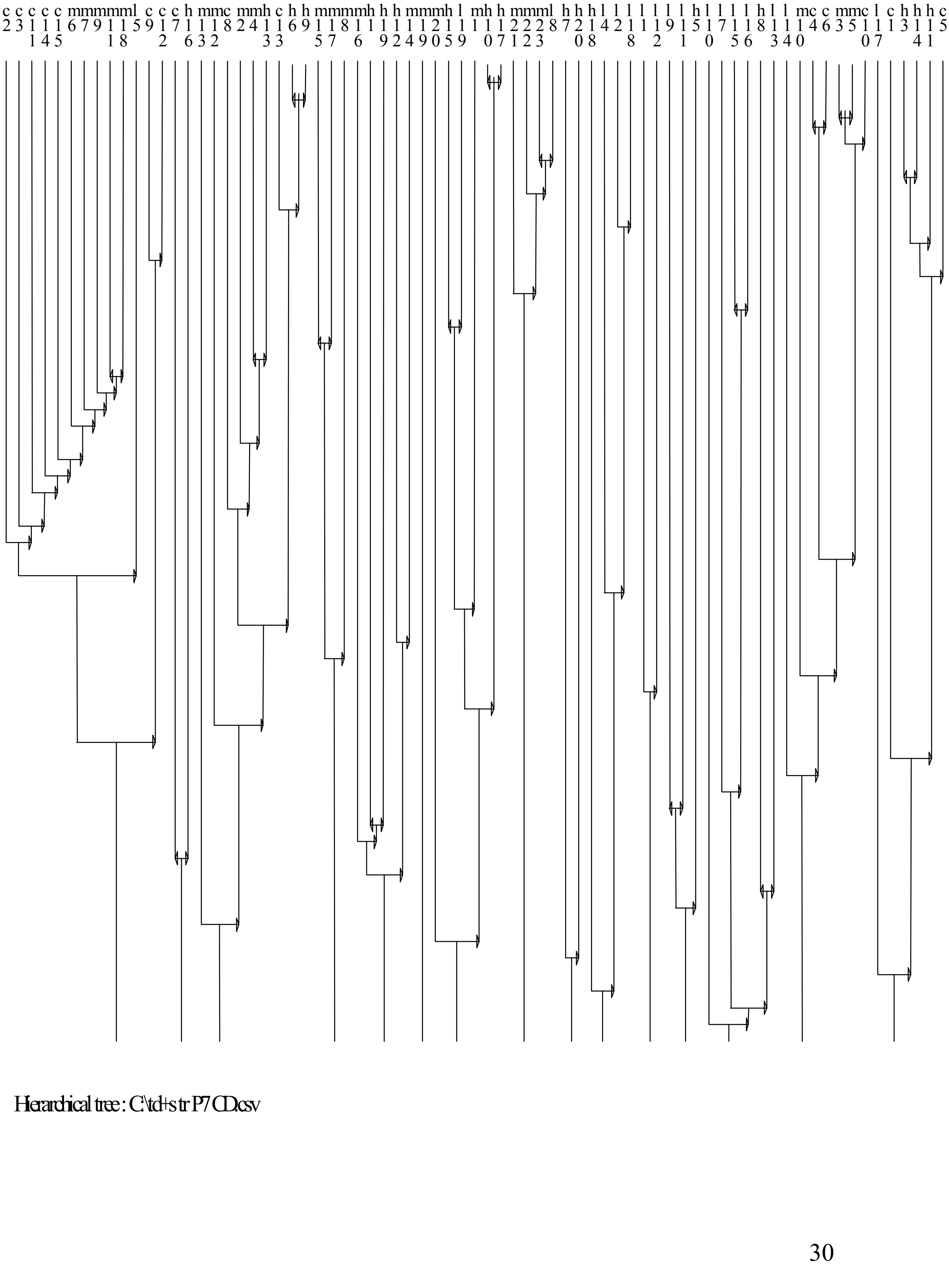
P7

Consideriamo la variabile supplementare P7: non adotta alcun criterio per scegliere le misure dei lati e degli angoli del triangolo.

Avrà 1 nelle risposte:

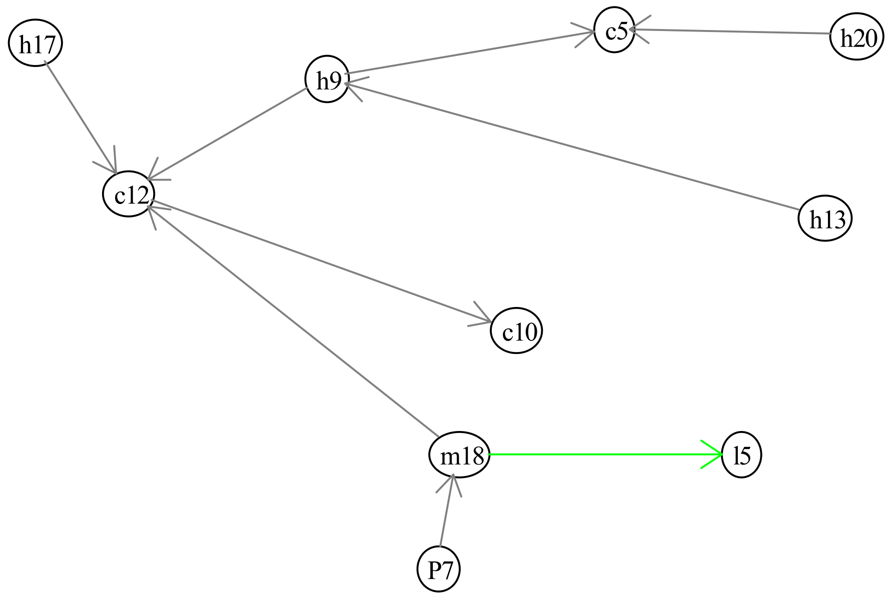
C1: non adotta alcun criterio per scegliere le misure di ogni lato	19%
D1: non adotta alcun criterio per scegliere le misure di ogni angolo	36%

Albero gerarchico delle implicazioni



Considerando i cammini implicativi presenti nel grafico i bambini più rappresentativi del nostro campione sono: c5,c10,c12,m8,m14,m18,l5,l8,l12,l13,l16,l18,h5,h9,h13,h16,h17,h20.

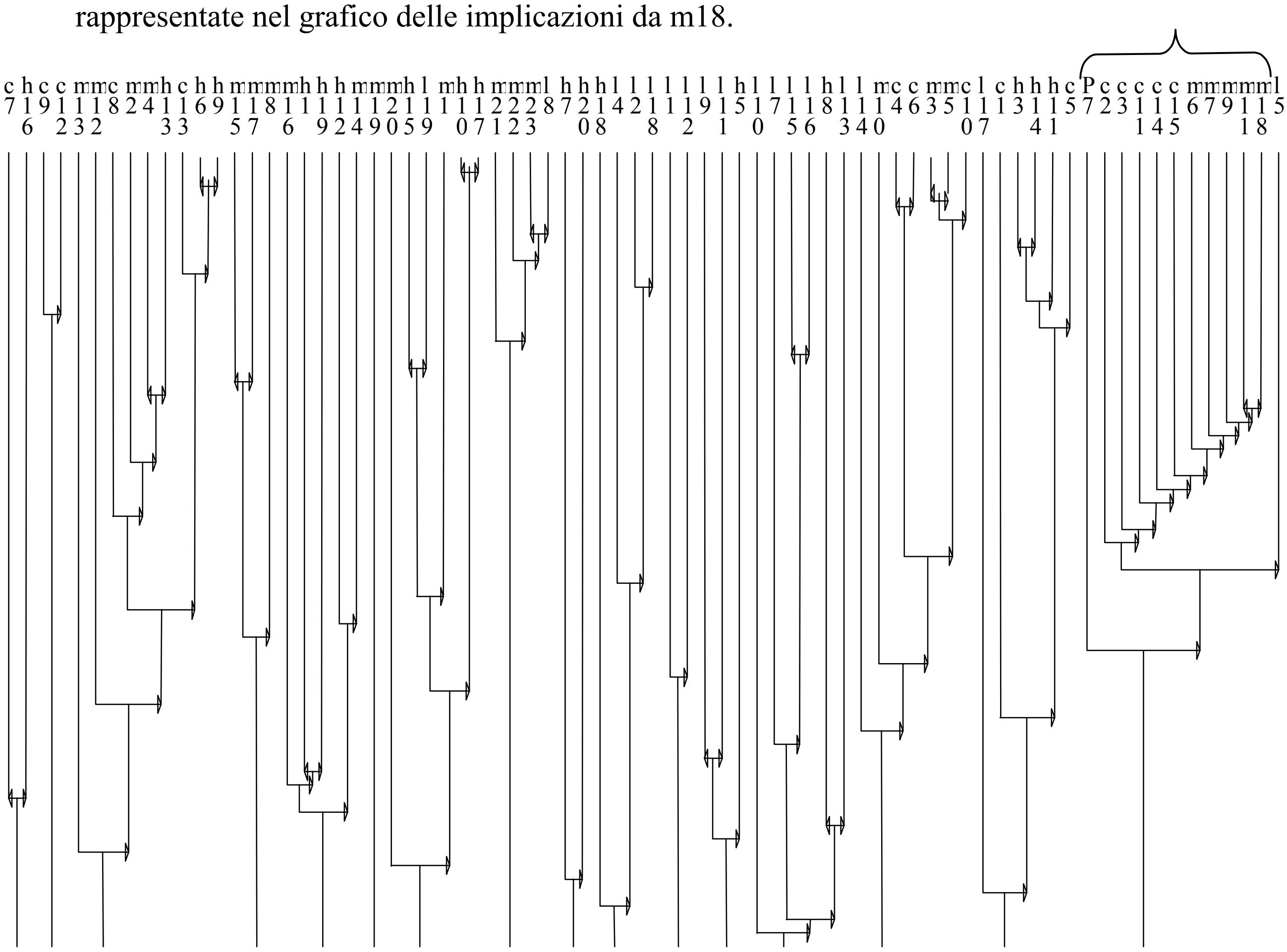
Grafico delle implicazioni



Graph : C:\File ricevuti\tesi\Nuova cartella\td+s tr P7 CD.csv 99 95 90

Possiamo vedere che nel campione esaminato P7 è presente con un'intensità d'implicazione dell'81%. Se guardiamo i cammini implicativi, sono coinvolte le variabili m18,c12,c10,l5.

Anche l'albero gerarchico delle implicazioni (questa volta con la variabile supplementare) ci mostra che P7 implica un gruppo considerevole di variabili, rappresentate nel grafico delle implicazioni da m18.



Hierarchical tree : C:\File ricevuti\tesi\nuova cartella\Nuova cartella\td+s tr P7 CD.csv

P8,P9,P10,P11,P12,P13

Consideriamo la variabile supplementare:
P8: traccia l’altezza sempre verticale.
Avrà 1 nelle risposte:

E13: traccia un segmento che va da un lato ad un altro ed è perpendicolare ad uno dei due lati.	9%

P9: traccia l’altezza lungo i lati.
Avrà 1 nelle risposte:

E2: traccia l'altezza lungo i lati	13%

P10: traccia l’altezza sempre dentro il triangolo.
Avrà 1 nelle risposte:

E3: traccia l'altezza sempre dentro il triangolo	56%

P11: traccia la mediana .
Avrà 1 nelle risposte:

E6: traccia l'altezza congiungendo un vertice al punto medio del lato opposto	23%
E12: traccia correttamente l’altezza nei triangoli che più somigliano a quello equilatero	21%

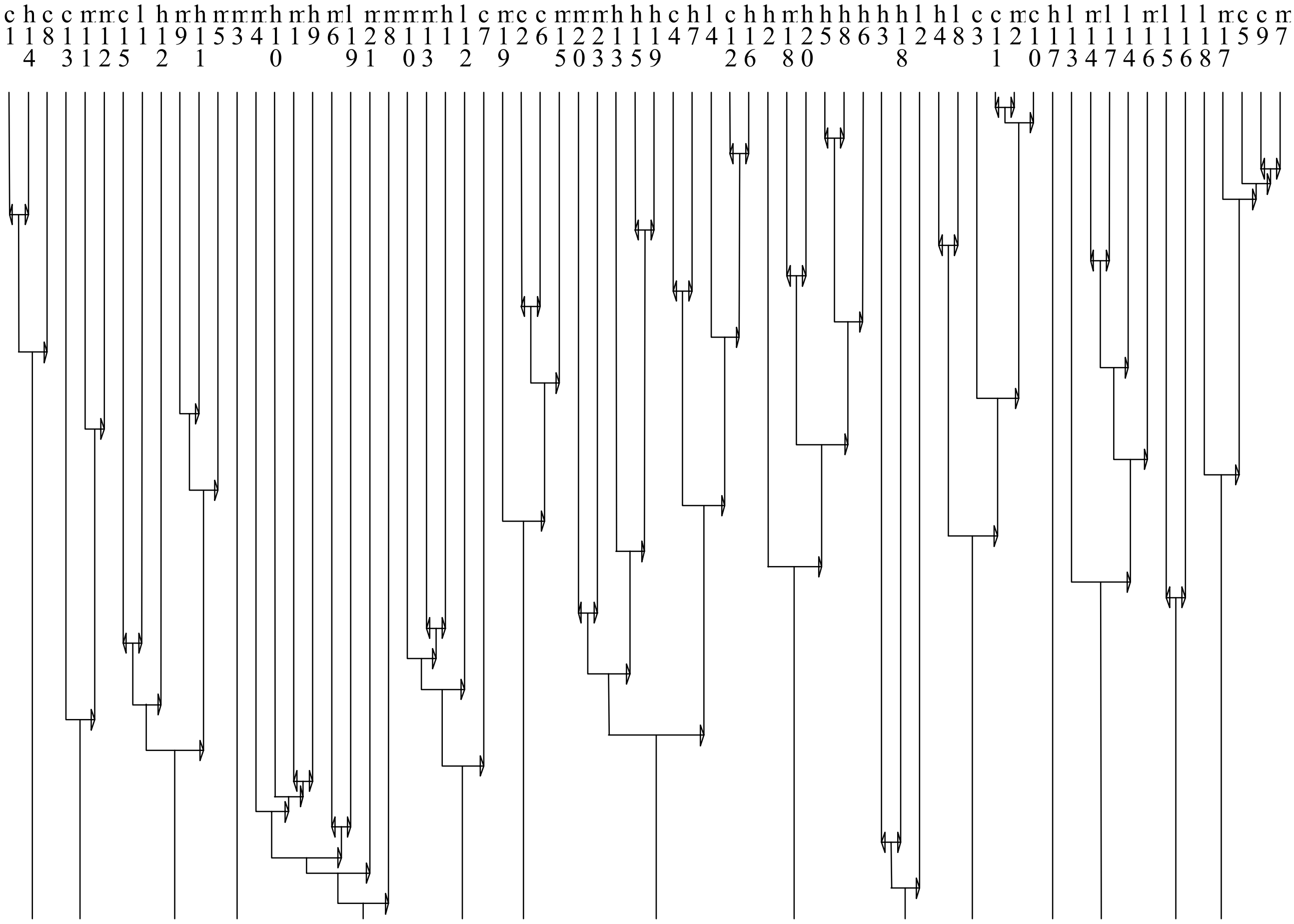
P12: traccia una linea verticale che parte dal vertice più alto ed è perpendicolare ad un piano di riferimento assoluto che coincide con un "pavimento" immaginario su cui poggia il triangolo.
Avrà 1 nelle risposte:

E7: traccia una linea verticale che parte dal vertice più alto ed è perpendicolare ad un piano di riferimento assoluto che coincide con un "pavimento" immaginario su cui poggia il triangolo.	16%

P13: traccia un segmento che va da un lato ad un altro ed è perpendicolare ad uno dei due lati.
Avrà 1 nelle risposte:

E13: traccia un segmento che va da un lato ad un altro ed è perpendicolare ad uno dei due lati.	9%

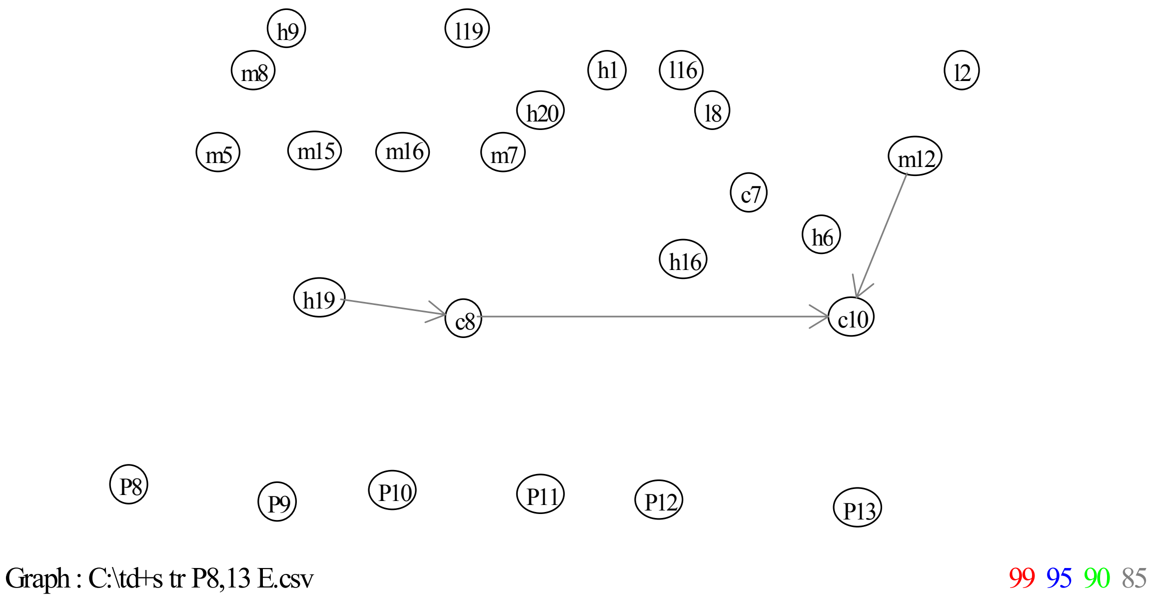
Albero gerarchico delle implicazioni



Hierarchical tree : C:\td+s tr P8,13 E.csv

Considerando i cammini implicativi presenti nel grafico i bambini più rappresentativi del nostro campione sono: c7,c8,c10,m5,m7,m8,m12,m15,m16,h1,h6,h9,h16,h19,h20,l2,l8,l16,l19.

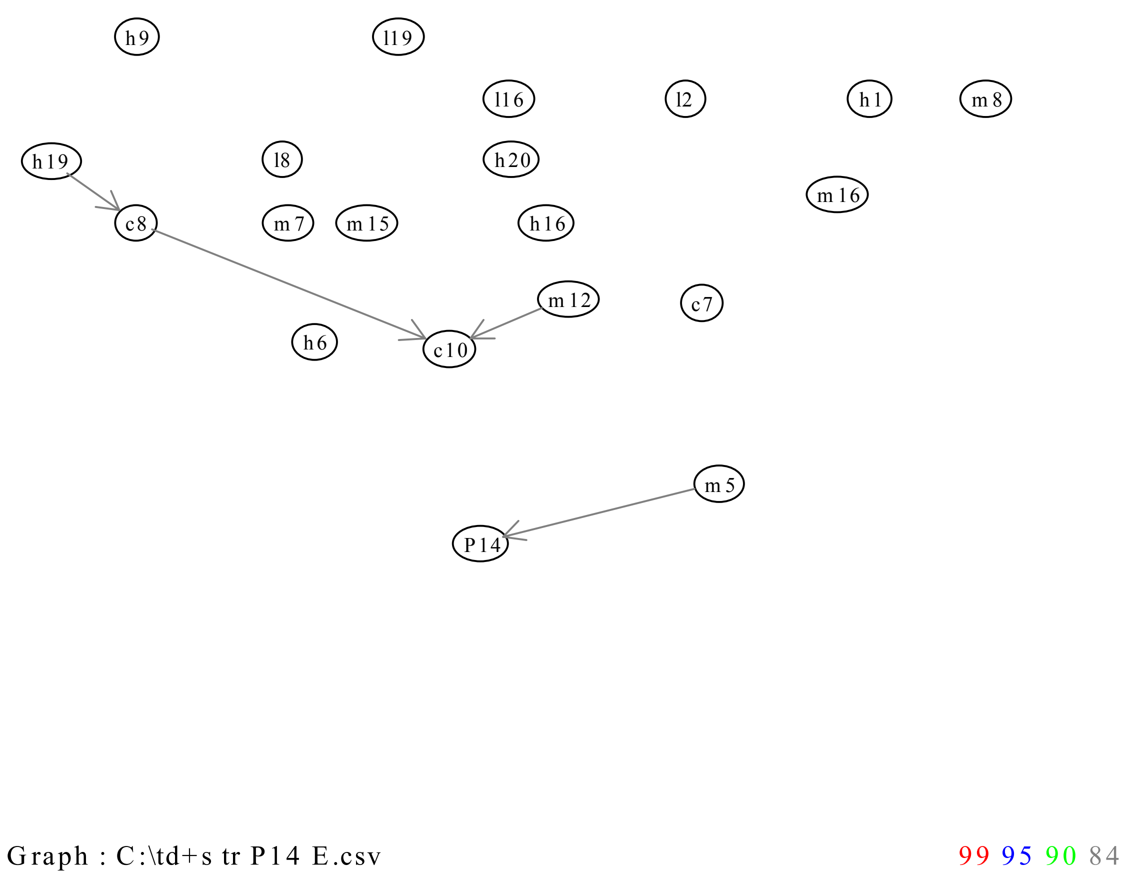
Grafico delle implicazioni.



Nessuna delle variabili considerate, presa separatamente, entra in gioco. Ciò significa che nel campione esaminato un numero significativo di bambini presenta più misconcetti contemporaneamente.

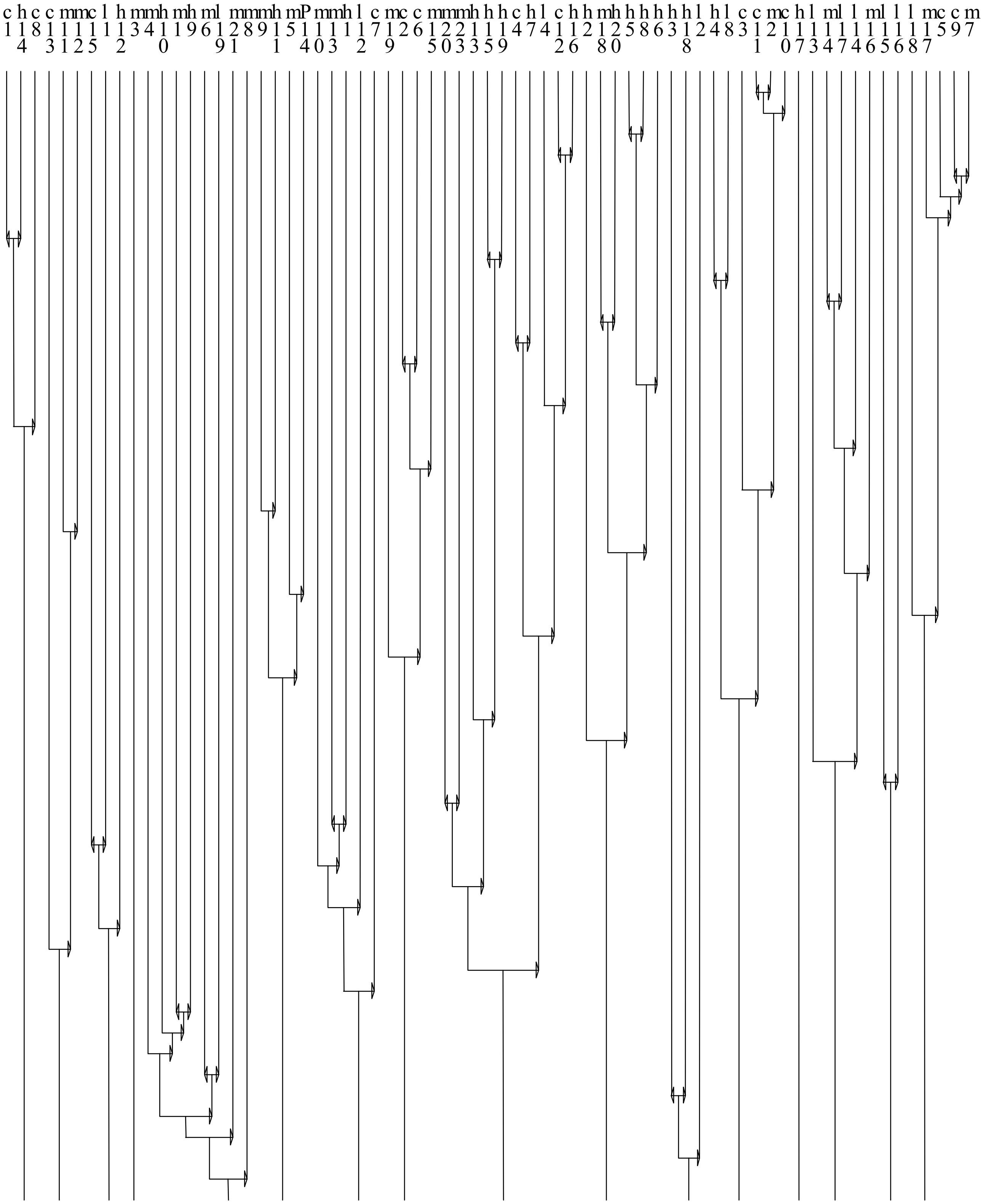
P14

Consideriamo la variabile supplementare P14: presenta contemporaneamente tutti i misconcetti ipotizzati (avrà 1 nelle risposte: E1,E2,E3,E6,E12,E7,E13)



La variabile P14 entra in gioco con un'intensità d'implicazione dell'84%.

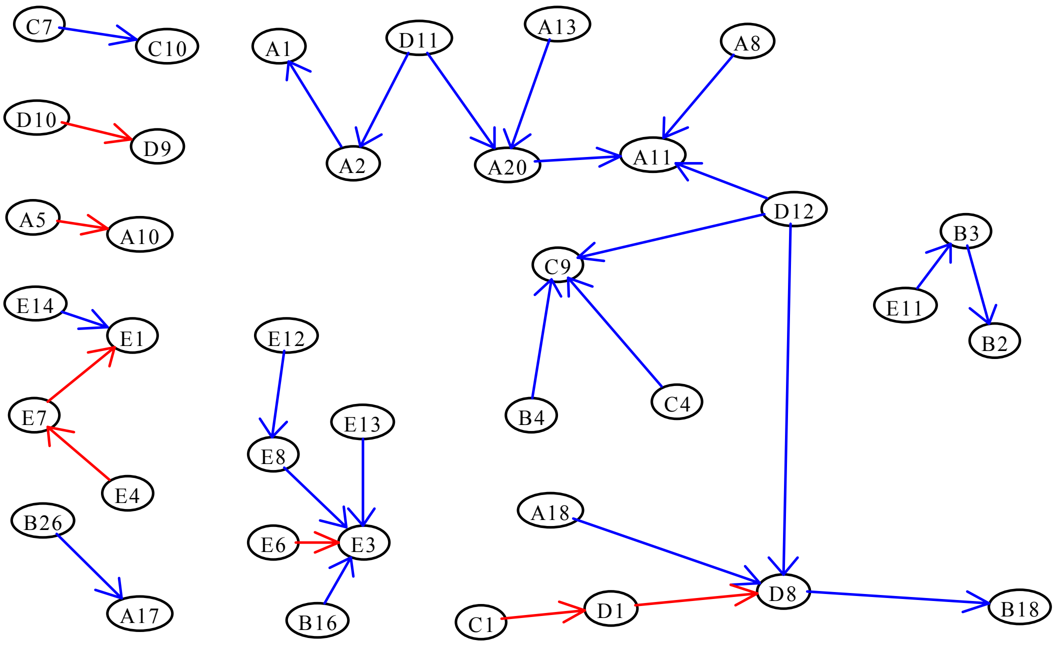
Albero gerarchico delle implicazioni



Hierarchical tree: C:\td\s tr P14E.csv

Analisi delle implicazioni tra le risposte al questionario

Il seguente grafico descrive i legami d'implicazione tra le risposte al questionario. I cammini implicativi mi daranno la possibilità di vedere i rapporti gerarchici esistenti tra le varie risposte. Tenterò di dare significato a tali legami, e scoprire le concezioni sul triangolo dei bambini del campione esaminato.



Graph : C:\archivio materiale università\tesi\analisi statistica dei dati\grafici tab dati\tab dati csv.csv
95 99

Schematicamente possiamo descrivere otto sottografici:

1. I bambini che disegnano i triangoli e misurano ogni lato con il righello (C7; 23%), inseriscono correttamente le misure dei lati senza usare la regola (C10; 45%)
2. Quando i bambini, per inserire le misure degli angoli, fanno in modo che la somma degli angoli interni sia 180° (D10; 9%) si accorgono che (a) non può essere un triangolo (D9; 17%)
3. Quando i bambini riconoscono come triangoli le figure piane (A5; 23%), sostengono che la figura C è un solido (A10; 26%). Non è vero il contrario: non sempre, quando riconoscono la piramide, esplicitano la proprietà del triangolo "essere una figura piana".
4. Quando i bambini definiscono il triangolo come figura geometrica (B26; 23%), vedono le figure della domanda A come frame riferiti al contesto della loro realtà quotidiana invece di vederli come oggetto della geometria (A17;45%). Ciò potrebbe significare che non hanno chiara la distinzione fra oggetti geometrici e oggetti della loro realtà quotidiano. Il termine "figura geometrica" potrebbe essere un verbalismo; la poca chiarezza concettuale si rivelerebbe sul piano linguistico.

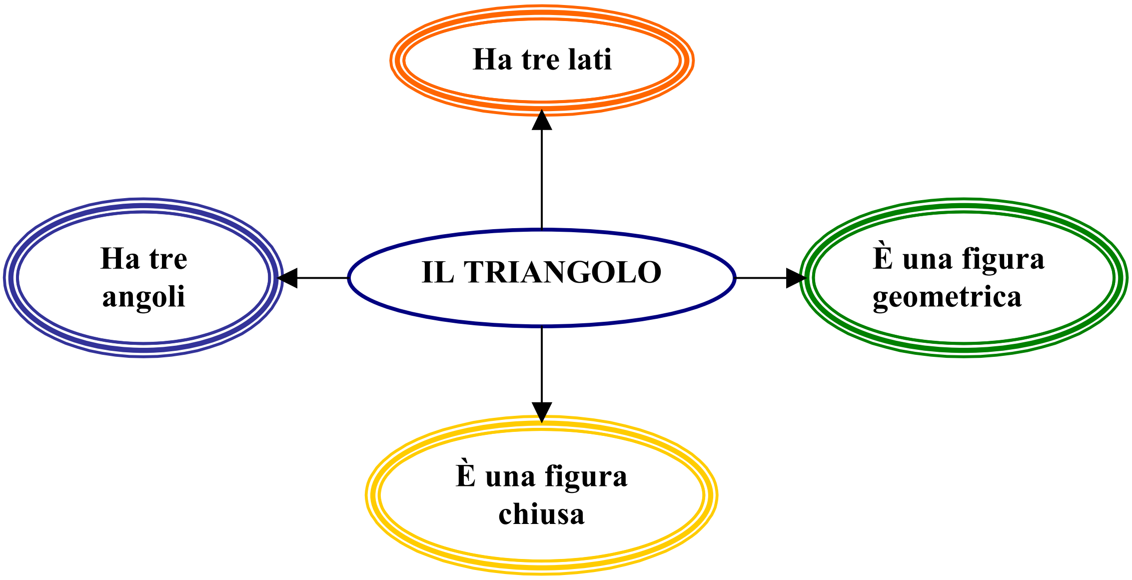
5. Nel quinto sottografo possiamo notare il cammino implicativo: E11: "traccia due o tre altezze ma non in modo corretto", B3: "deve avere tre angoli", B2 "deve avere tre lati". Quando i bambini disegnano più di un'altezza anche se non in modo corretto (E11; 13%), esplicitano le proprietà dei triangoli "avere tre angoli" (B3;48%) e "avere tre lati" (B2; 55%). Possiamo ipotizzare una gerarchia fra i tre concetti: sembra, infatti, che i bambini arrivino a concettualizzare ed esplicitare per prima la proprietà dei triangoli "avere tre lati", poi "avere tre angoli" ed infine "avere tre altezze".
6. Quando i bambini, per disegnare le altezze, usano le strategie: E4(6%): "traccia l'altezza partendo dal vertice che sta più in alto", E7(16%): "traccia una linea verticale che parte dal vertice più alto ed è perpendicolare ad un piano di riferimento assoluto che coincide con un "pavimento" immaginario su cui poggia il triangolo", E14(18%): "traccia correttamente l'altezza quando il triangolo ha la base orizzontale, come se fosse un corpo pesante", sono convinti che l'altezza debba essere verticale (E1;39%). Tali strategie, dunque, potrebbero essere ricondotte al misconcetto E1 che acquisterebbe notevole importanza.
7. L'ultimo sottografo ci fa vedere un complesso cammino implicativo che coinvolge le variabili
   D12 (23%): "è convinto che per scegliere correttamente gli angoli basta considerare misure o uguali fra loro, o diverse o due uguali e una diversa", D8 (56%): "sceglie due angoli maggiori o uguali a 90°" e B18 (91%): "disegna il triangolo con la base orizzontale, come se fosse un corpo pesante", C1 (19%): "non adotta alcun criterio per scegliere le misure di ogni lato", D1 (36%): "non adotta alcun criterio per scegliere le misure di ogni angolo".

   Nello stesso sottografo possiamo notare altre interessanti implicazioni:
   a) Ritroviamo la gerarchia A1 (55%): "riconosce come triangoli le figure che hanno tre lati", A2 (39%): "riconosce come triangoli le figure che hanno tre angoli". Ancora una volta sembra che i bambini arrivino a concettualizzare ed esplicitare per prima la proprietà dei triangoli "avere tre lati", poi "avere tre angoli".
   b) I bambini che scelgono le misure dei lati molto vicine fra loro"(C4 ;17%) sono convinti che, per scegliere correttamente i lati, basta considerare misure o uguali fra loro, o diverse o due uguali e una diversa (C9; 45%).
   c) I bambini che non adottano criteri per la scelta dei lati (C1; 19%) non ne hanno adottati nemmeno per la scelta degli angoli (D1; 36%) ma non viceversa. Ci sono infatti casi in cui il bambino adotta un criterio per i lati ma non per gli angoli.
   d) I bambini che per scegliere correttamente gli angoli considerano misure o uguali fra loro, o diverse o due uguali e una diversa (D12; 23%) usano la stessa strategia per i lati (C9; 45%), ma non è vero il contrario. Dunque, D12 sembra essere usata, nella scelta degli angoli, per analogia con C9, usata per i lati.

Tutti questi misconcetti si presentano dunque associati nelle risposte di molti bambini. Quelli più implicati B18 e D8.

1.4 Conclusioni

L'analisi quantitativa dei dati mi ha permesso di ricavare la seguente matrice cognitiva riguardante il concetto di triangolo nei bambini del campione esaminato.



È possibile ipotizzare una gerarchia tra le proprietà più facilmente riconosciute: i bambini concettualizzano ed esplicitano prima la proprietà "avere tre lati" e poi "avere tre angoli[6].

Le definizioni riscontrate mostrano una certa somiglianza con quelle riportate nell'analisi storico epistemologica.

Gli stereotipi più diffusi riguardano:

- una certa confusione, riscontrabile sul piano linguistico, fra contesto della geometria e contesto del quotidiano.
  Nonostante sapessero di stare rispondendo ad un questionario di geometria, il 45% dei bambini ha interpretato alcune delle figure proposte come rappresentazione di oggetti reali di cui avevano esperienza (aghi, bandiere, lettere dell'alfabeto, …). Queste ipotesi è avvalorata dal fatto che i bambini che usano l'espressione "figura geometrica" presentano il misconcetto in questione[7]. Ciò potrebbe significare che il termine usato è un verbalismo di cui bambini non hanno chiaro il significato.
  Possiamo ipotizzare che nei bambini esiste un conflitto tra linguaggio della matematica e linguaggio del quotidiano.
- La presenza di uno schema mentale rigido che porta i bambini a generalizzare all'insieme dei triangoli la proprietà "avere le misure delle ampiezze degli angoli e delle lunghezze dei lati vicine tra loro o uguali".
  I dati dell'analisi descrittiva supportano questa ipotesi: il 31% dei bambini riconosce come triangoli le figure che somigliano al triangolo equilatero; il 59% disegna un triangolo equilatero, il resto del campione triangoli che hanno le misure dei lati e degli angoli vicine tra loro; il 22% afferma che il

---

[6] Vedi pag. 38, Analisi delle implicazioni tra le risposte al questionario

[7] Vedi nota 6

triangolo deve avere i lati e gli angoli uguali; nella scelta dei lati il 30% sceglie misure uguali o vicine tra loro.

- Un'immagine mentale fortemente stereotipata che porta la totalità del campione a disegnare il triangolo con la base orizzontale, come se fosse un corpo pesante.

Per quanto riguarda la scelta delle misure dei lati e degli angoli la percentuale dei bambini che ricorda e applica la regola formale è trascurabile (1,3% per le misure dei lati, 9% per le misure degli angoli).
La maggioranza del campione (45% per le misure dei lati, 23% per le misure degli angoli) ricorre alla classificazione dei triangoli rispetto alla congruenza dei lati scegliendo o tre misure uguali, o due uguali e una diversa, o tre misure diverse, ed estendendo per analogia questo criterio anche alla scelta degli angoli[8].
Parte del campione (19% per le misure dei lati, 36% per le misure degli angoli) non adotta alcun criterio nella scelta delle misure. Questa mancanza di strategie è più comune nella scelta degli angoli, che sembra creare maggiori difficoltà[9].
Grazie all'analisi implicativa, sappiamo che parte del campione non usa strategie né per la scelta dei lati, né per la scelta degli angoli[10].
Nel complesso, alcune delle strategie usate si rivelano vincenti[11].

Il campione presenta tre stereotipi significativi riguardo al concetto di altezza:

- L'altezza è una linea verticale.
  Questo stereotipo non permette di disegnare correttamente l'altezza se il triangolo non ha la base orizzontale. Ricordiamo che il 91% degli alunni ha disegnato un triangolo con la base orizzontale.
- L'altezza deve essere disegnata dentro il triangolo.
  Questo misconcetto potrebbe essere la causa della difficoltà incontrata dai bambini nel disegnare l'altezza in un triangolo scaleno non rettangolo.
- L'altezza deve dividere a metà a base del triangolo

Questi stereotipi potrebbero essere dovuti in al conflitto generato tra il significato geometrico e il significato comune della parola altezza[12]. Interessante, in questo senso, è la strategia E7: traccia una linea verticale che parte dal vertice più alto ed è perpendicolare ad un piano di riferimento assoluto che coincide con un "pavimento" immaginario su cui poggia il triangolo. Si può ipotizzare che i bambini usino, per disegnare l'altezza del triangolo, la stessa strategia usata per misurare la propria statura, segnando sul muro la distanza fra il pavimento e il punto dove arriva la propria testa.
L'analisi implicativa dei dati ci suggerisce che nel campione esaminato un numero significativo di bambini presenta contemporaneamente più misconcetti sull'altezza[13].
In particolare, quando i bambini, per disegnare le altezze, usano le strategie E7 "traccia una linea verticale che parte dal vertice più alto ed è perpendicolare ad un piano di riferimento assoluto che coincide con un "pavimento" immaginario su cui poggia il triangolo", E14 "traccia correttamente l'altezza quando il triangolo ha la

---

[8] Vedi nota 6
[9] Vedi nota 6
[10] Vedi variabile supplementare P7 pag. 28
[11] Vedi nota 6
[12] "Distanza tra il punto più alto e ciò che si considera come base". Enciclopedia generale Mondatori, Milano, 1986.
[13] Vedi variabile supplementare P14 pag. 36

base orizzontale, come se fosse un corpo pesante", sono convinti che l'altezza debba essere verticale. Tali strategie, dunque, potrebbero essere ricondotte al misconcetto E1 che acquisterebbe notevole importanza.

Ulteriori informazioni potranno essere raccolte migliorando lo strumento d'indagine sulla base dei risultati raggiunti, costruendo un'analisi a priori della risposte ad ogni singola figura delle domande A ed E, riformulando le variabili supplementari.

L'analisi descrittiva ha permesso inoltre di rilevare:

- una percentuale significativa di allievi che non ricordano regole e definizioni
- una certa imprecisione nei termini utilizzati.

Infatti, solo pochissimi alunni ricordano la regola per definire la relazione fra i tre lati o fra i tre angoli di un triangolo, o fanno uso di termini specifici quali "poligono", "spezzata chiusa", "lati consecutivi".

1.5 Problemi aperti

I risultati ottenuti permettono di individuare nuovi spunti di riflessione, che potrebbero essere il punto di partenza per nuove ricerche:

- Quali sono i fattori, genetici o ambientali, che contribuiscono al radicarsi dei misconcetti ipotizzati?
- In che modo influiscono sull'apprendimento?
- Qual è la loro evoluzione durante gli anni scolastici?
- Gli allievi sembrano basarsi molto sul disegno per attingere informazioni. Potrebbero essere questi disegni stereotipati la fonte di molti misconcetti e intuizioni sbagliate?

Capitolo 2

2.0 Dalle concezioni spontanee sul triangolo alla sua definizione

Sulla base dei misconcetti studiati, che rappresentano le variabili didattiche che entrano in gioco nel processo di insegnamento-apprendimento, e dei presupposti teorici ricavabili dai Programmi didattici per la scuola elementare del 1985, dalla definizione dei Nuovi Curricoli per la formazione di base (2000), dalla Teoria delle Situazioni e dalla Didattica Metacognitiva, si è tentato di ipotizzare percorsi didattici funzionali all'apprendimento della definizione e delle proprietà del triangolo.

2.1 Referenti teorici

2.1.0 La geometria nei Programmi Didattici per la scuola elementare (D.P.R. n. 104 12 febbraio 1985) e nei Nuovi Curricoli per la formazione di base (in attuazione della legge 30 del 2 febbraio 2000)

La scelta degli obiettivi, da conseguire nelle unità didattiche, è stata fatta sulla base dei Programmi Didattici per la scuola elementare e dei Contenuti Essenziali per la formazione di base.
In questi due documenti la geometria assume un particolare ruolo formativo: accanto alle altre discipline diviene mezzo privilegiato per la formazione integrale dell'uomo e del cittadino.
L'insegnamento della geometria deve partire da contesti esperenziali ricchi e motivanti per l'allievo, e avviare all'uso del linguaggio e del ragionamento geometrico come strumenti per l'interpretazione del reale. L'uso del linguaggio naturale, sia parlato che scritto, sarà essenziale per la mediazione fra il linguaggio quotidiano e il linguaggio della geometria. Le esperienze e la verbalizzazione con linguaggio naturale dovranno precedere la formalizzazione e la riflessione sui sistemi di notazione simbolica propri della geometria. Saranno privilegiate le attività di costruzione e di soluzione di problemi. Il conseguimento delle competenze e conoscenze sopra elencate richiede tempo e partecipazione attiva degli allievi al progetto formativo.

Il documento dei contenuti essenziali per la formazione di base indica competenze trasversali che devono essere promosse nell'aggregazione disciplinare matematica e quindi anche in geometria.
Esse sono:
- Comunicare, comprendere e interpretare informazioni
- Costruire ragionamenti
- Formulare ipotesi e congetture
- Generalizzare
- Inventare
- Porre in relazione

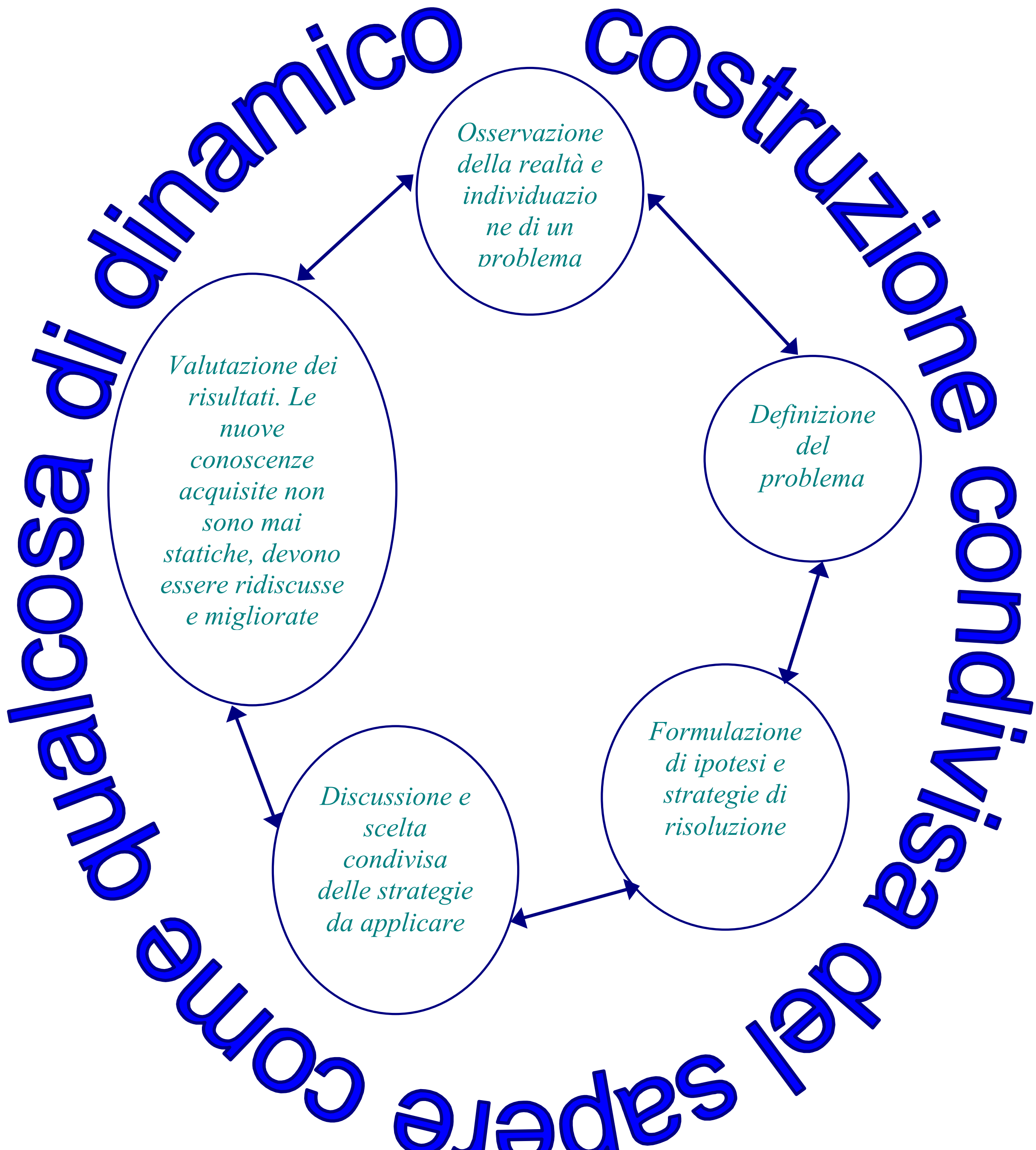
- Porre problemi e progettare possibili soluzioni
- Rappresentare

Obiettivi generali
- Conoscere le principali figure geometriche piane e solide e delle loro trasformazioni elementari;
- Acquisire i concetti fondamentali lunghezza, area, volume, angolo, parallelismo, perpendicolarità;
- Introdurre le diverse grandezze e padroneggiare i relativi procedimenti di misura;
- Usare la visualizzazione, il ragionamento spaziale e la modellizzazione geometrica per risolvere problemi del mondo reale o interni alla matematica;
- Sviluppare argomenti e semplici concatenazioni di proposizioni in ambiente geometrico.

Contenuti
- Organizzazione e descrizione dello spazio
    - Orientamento, riconoscimento e localizzazione di oggetti e di forme
    - Sistemi di riferimento
- Schematizzazione dello spazio
    - Figure geometriche piane e solide
    - Trasformazioni elementari
        - Isometrie
        - Similitudini
- Misura

2.1.1 La teoria delle situazioni

La teoria delle situazioni si propone di recuperare la valenza formativa dell'educazione matematica, che diviene strumento per lo sviluppo psichico è in particolare della capacità di problem solving.
E' messa in discussione la pratica educativa tradizionale di trasmissione di un sapere precostituito, attraverso un percorso univoco che va dall'insegnante all'allievo.
La teoria delle situazioni propone di attivare un processo di ricostruzione condivisa del sapere matematico.

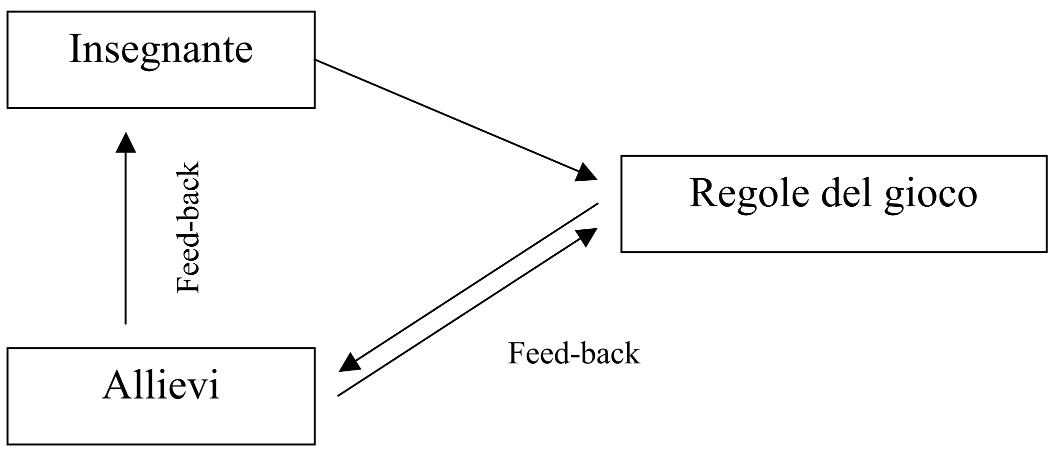


Nello specifico, ci si propone di promuovere l'apprendimento dei concetti matematici partendo da situazioni problematiche significative per gli allievi.
Secondo questa prospettiva, gli allievi si riappropriano della responsabilità del processo di apprendimento, partecipando attivamente alla costruzione del proprio sapere.
Il lavoro intellettuale compiuto in questo caso dall'allievo è confrontabile con quello del ricercatore: egli deve porsi problemi, definirsi attraverso buone domande, provare a costruire modelli, teorie, per trovare buone risposte ad una situazione problematica specifica.
Il compito dell'insegnante è di fornire gli strumenti per simulare una "microsocietà scientifica", in cui i piccoli ricercatori possano confrontare i loro saperi per costruirne di nuovi, formulare e argomentare e proprie ipotesi, formalizzare le loro scoperte.

Schema di una situazione a-didattica

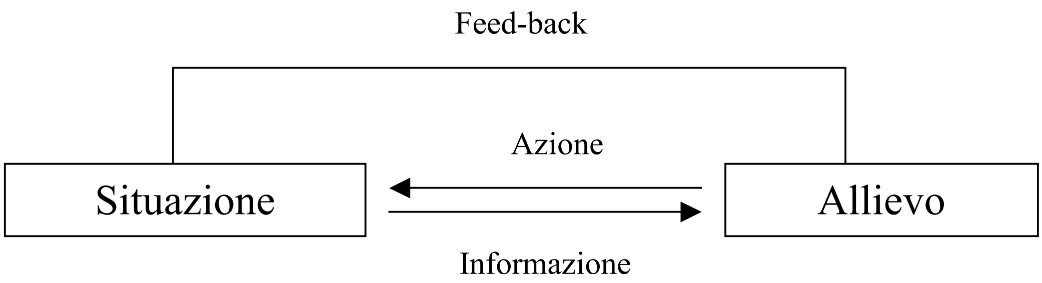
Nella situazione a-didattica l'allievo costruisce la sua conoscenza non per ragioni didattiche, ma perché motivato dalla logica interna alla situazione. L'obiettivo didattico perseguito dall'insegnante non è dichiarato.

I fase: la consegna.



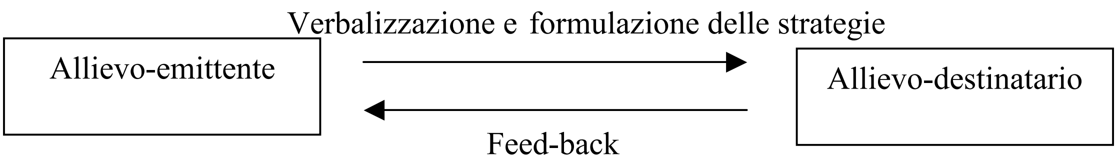
L'insegnante espone all'allievo le regole del gioco, il problema, l'argomento della situazione a-didattica, servendosi anche di una dimostrazione pratica con un allievo. L'azione, infatti, riduce l'ambiguità del linguaggio verbale. Attraverso l'azione, inoltre, insegnante può cogliere il processo di retroazione attivato dall'allievo il quale può ripercorrere la situazione per effettuare un controllo e modificare l'azione.

Seconda fase: situazione di azione



Gli allievi agiscono sulla situazione problema, iniziando formulare ipotesi strategie che sono messe alla prova da ulteriori esperienze.
L'interazione fra l'allievo e il suo ambiente (gli altri allievi, la situazione problematica, l'insegnante), grazie alla quale sono ipotizzate le prime strategie, è definita *dialettica dell'azione*.
Siamo in una fase in cui l'allievo costruisce un modello implicito: un insieme di relazioni o regole in base alle quali l'allievo prende le sue decisioni senza essere capace di averne coscienza e quindi di formularle.

Terza fase: situazione di formulazione



In questa fase l'allievo è portato dalla situazione a formulare il proprio modello implicito, verbalizzare le proprie strategie, argomentarle e difenderle, per far in modo che siano fatte proprie dagli altri allievi.
Per far ciò, ognuno dovrà elaborare progressivamente un linguaggio tale da essere compreso da tutti.
Lo scambio comunicativo tra gli allievi porta a continua di formulazione della strategia: siamo nella fase di *dialettica della formulazione*.

Quarta fase: situazione di validazione

I modelli formulati possono essere accettate o rifiutate dalla classe. All'interno del gruppo e gli allievi sono in una situazione paritaria che permette loro di discutere per accettare o rifiutare le possibili strategie. Le ipotesi accettate da tutti diventano teoremi.
Spesso gli allievi accettano teorie sbagliate, la situazione adidattica deve condurli a rivedere i loro ragionamenti e riformulare le strategie in modo corretto. In questo modo l'errore diviene una tappa indispensabile nel processo di costruzione della conoscenza.

Con la fase di validazione si arriva formalizzare il concetto matematico che nel metodo tradizionale di insegnamento non rappresenta un punto d'arrivo ma un punto di partenza.

2.1.2 La didattica metacognitiva

Gli studi sulla metacognizione nascono in seno alla psicologia cognitivista e risentono dell'influenza degli studi sull'intelligenza artificiale e di quella più diretta della ricerca sullo sviluppo della memoria[14].
Secondo gli studi di metacognizione, apprendere non significa solo acquisire elementi di conoscenza, vuol dire anche avere consapevolezza di ciò che accade nelle situazioni di apprendimento: riconoscere e controllare le strategie adottate, i propri limiti e le proprie risorse, rendersi conto della difficoltà che un determinato compito comporta.
Il tema della metacognizione presenta quattro aspetti fondamentali:

- la conoscenza sul funzionamento generale della mente;
- la conoscenza e la consapevolezza che l'individuo ha dei propri processi cognitivi;
- il controllo, cioè l'uso di strategie con cui l'individuo controlla i propri processi cognitivi,
- gli aspetti motivazionali (variabili psicologiche sottostanti[15]).

Nella trattazione della conoscenza metacognitiva si possono inquadrare anche le convinzioni o credenze (beliefs), con particolare riferimento alle convinzioni sull'apprendimento.

La conoscenza sul funzionamento generale della mente

Questo primo livello metacognitivo riguarda le conoscenze sul funzionamento della mente umana. L'insegnante potrà fornire all'alunno informazioni generali sulla natura dei processi mentali (memoria, percezione, attenzione, ...) e sui fattori che li influenzano. In questo modo l'alunno, essendo consapevole delle potenzialità e dei limiti dei vari processi cognitivi, potrà mettere in atto strategie al fine di controllarli.
Spesso si guarda alle capacità di memoria, attenzione, apprendimento, come abilità innate, immutabili; è fondamentale che gli alunni comprendano che esistono strategie funzionali a migliorare i processi cognitivi.

Conoscenza e consapevolezza dei propri processi cognitivi

Ogni persona presenta differenti stili cognitivi d'apprendimento. E' essenziale, quindi, passare dalle conoscenze generali sul funzionamento dei processi cognitivi a quelle individuali, che portano l'alunno a essere consapevole dei propri processi cognitivi e comportamentali, dei propri punti di forza e di debolezza. Ciò è possibile attraverso percorsi di osservazione e controllo delle proprie abitudini sui principali processi mentali.
Attuare processi di autoanalisi, però, non è semplice, soprattutto quando si tratta di portare a consapevolezza i propri limiti, se questi sono percepiti come minacciosi per il proprio livello di autostima. Diventa fondamentale, allora, creare un clima educativo in cui l'alunno possa comprendere che il valore intrinseco di

---

[14] Flavell J.H. (1970), *Developmental studies of mediated memory*, in Reese H.W., Lipsit L.P. (a cura di), Advances in child development and behavior, vol. 5, Academic Press, New York.
[15] Cornoldi C. (1995), *Metacognizione e apprendimento,* Bologna, Il Mulino

ogni persona umana va al di là delle abilità cognitive, e che l'errore o il dubbio sono una mancanza facilmente colmabile, da esplicitare e comprendere per migliorare se stessi ed i propri processi di apprendimento.
La consapevolezza delle strategie personali, che mettiamo in atto per apprendere, implica un continuo monitoraggio sui propri apprendimenti. I bambini di scuola elementare, in particolare quelli del primo ciclo, hanno difficoltà a ripercorrere, alla fine del lavoro svolto, le strategie applicate; è utile in questo caso far pensare il bambino ad alta voce con opportune domande, o metterlo in situazioni in cui è motivato ad illustrare ad altri le proprie strategie, per portarlo alla consapevolezza del percorso fatto al fine di individuare e correggere eventuali errori.

Controllo: strategie per migliorare i propri processi cognitivi.

L'altro aspetto della metacognizione riguarda le strategie che l'individuo mette in atto per controllare i propri processi cognitivi.
Il controllo metacognitivo riguarda tutti gli aspetti dell'apprendimento scolastico in cui l'allievo, a qualsiasi livello di scolarità, pianifica, controlla e valuta il proprio funzionamento cognitivo in una situazione problematica.
Il processo di autoregolazione inizia quando l'allievo valuta il compito di apprendimento e lo rapporta alle proprie possibilità. In base a questa analisi, l'allievo si pone degli obiettivi e cerca di raggiungerli, mediante varie strategie e tattiche di pianificazione, monitoraggio e valutazione dei risultati.
Brown[16] sintetizza il processo di autoregolazione nelle seguenti fasi:

- Predizione: capacità di predire il proprio livello di prestazione in un compito o di stimare in grado di difficoltà di una prova
- Pianificazione: capacità di organizzare le azioni che portano l'obiettivo
- Monitoraggio: capacità di controllare un'attività cognitiva intrapresa, in particolare la soluzione di un problema. Risolvere un problema implica, infatti, una serie di operazioni, la correttezza di ciascuna delle quali è condizione necessaria per la soluzione. Il monitoraggio è un controllo progressivo, che si esercita sulle singole fasi.
- Valutazione: riguarda la capacità di mettere alla prova una strategia di apprendimento nella sua globalità ed eventualmente modificarla.

Il merito di questa classificazione sta nella sequenza dei processi, che può essere adattata a diverse situazioni di controllo.

Variabili psicologiche sottostanti

Il concetto di metacognizione implica aspetti motivazionali. Se dal punto di vista metacognitivo l'allievo in grado di autoregolarsi, pianifica il tempo di studio, si pone obiettivi, controlla progressivamente e valuta il proprio apprendimento, è consapevole delle risorse a propria disposizione, conosce e applica strategie utili al raggiungimento degli obiettivi, dal punto di vista motivazionale deve essere in grado di sostenere un impegno prolungato, non deve dipendere da valutazioni esterne ma deve saper dare un feedback a se stesso, deve reagire positivamente,

---

[16] BOSCOLO P. (1997), *Psicologia dell'apprendimento scolastico. Aspetti cognitivi e motivazionali*, Torino, UTET

con una valutazione di sé realistica, agli insuccessi. Le strategie motivazionali riguardano i modi in cui l'allievo cerca di conservare la stima o senso del valore sé.

Ecco alcuni processi che caratterizzano l'autoregolazione motivazionale:

- il senso di efficacia: il concetto, elaborato da A. Bandura, indica la convinzione che la persona ha di poter esercitare un controllo sugli eventi, il giudizio sulle proprie potenzialità riguardo ad un determinato compito. La percezione della propria efficacia influenza la scelta delle attività, lo sforzo e la persistenza dell'individuo: le persone con un alto senso di autoefficacia si cimentano in compiti più impegnativi e mostrano maggior resistenza alle difficoltà. Gli individui acquisiscono informazioni circa la loro efficacia da varie fonti: il feedback interno ed esterno circa le proprie prestazioni, l'esperienza di altri, la persuasione da parte di altre persone. Nell'ambito scolastico, prima di iniziare l'attività, gli studenti hanno diverse convinzioni circa le loro capacità di acquisire conoscenze, e il senso di efficacia dipende dalle esperienze precedenti e dalle abilità di ciascuno. Durante l'attività o l'esecuzione di un compito alcuni fattori, come il feedback da parte degli insegnanti, danno agli allievi informazioni di cui si servono per valutare la propria efficacia.
- Locus of control: indica il luogo dove l'alunno ritiene che si trovino i fattori responsabili di ciò che gli accade, dei suoi successi e dei suoi insuccessi. Il locus of control può essere interno o esterno: il fallimento di un esame può essere attribuito a se stessi (all'aver usato una strategia sbagliata), o a qualcosa di esterno da sé (alla sfortuna, al cattivo umore del professore, ...). Un locus of control distorto, eccessivamente proiettato all'esterno, comporta una deresponsabilizzazione personale e un atteggiamento passivo.
- Stile di attribuzione: riguarda l'atteggiamento e le convinzioni che l'alunno dimostra nei confronti delle strategie e della loro utilità nel processo di apprendimento. Non avrebbe senso insegnare una strategia metacognitiva di memoria ad un alunno non ha nessuna fiducia riguardo ai benefici che questa potrebbe avere sulla sua capacità di apprendere.
- Porre obiettivi: la capacità di scegliere obiettivi adeguati alle proprie capacità e alle risorse esterne disponibili favorisce il senso di efficacia. Il perseguire obiettivi facili è utile all'inizio dell'acquisizione di un'abilità, mentre quelli difficili sono più adatti in una fase più avanzata, perché danno l'individuo maggiori informazioni sulle sue capacità.
- La ricerca di aiuto: il comportamento metacognitivo implica aspetti non solo cognitivi e motivazionali, ma anche sociali; rivolgersi ad altri per la soluzione di un problema o l'esecuzione di un compito. Non tutte le richieste di aiuto hanno un carattere strategico e possono essere considerate adattive; copiare da un compagno, per esempio, è un modo per ottenere aiuto che non può essere considerato adattivo. La richiesta di aiuto è adattiva quando lo scopo dell'allievo è di imparare, e non solo di superare una difficoltà del compito che si sta eseguendo. Della situazione scolastica, a tutti i livelli di scolarità, gli allievi fanno di regola poche domande per timidezza, per timore di disturbare l'attività in corso o di essere considerati negativamente dagli insegnanti e dai compagni. La difficoltà di chiedere aiuto è maggiore nelle situazioni in cui l'errore è vissuto come fortemente penalizzante: è essenziale che il bambino percepisca l'insuccesso come dovuto alla mancanza di abilità o informazioni specifiche, mancanza superabile con opportune domande.

- Motivazione: può essere definita come l'insieme dei fattori che condizionano la messa in moto e il mantenimento di energia psico-fisica da parte dell'individuo, per il raggiungimento di un obiettivo. La motivazione può essere estrinseca, cioè sostenuta da un rinforzo positivo esterno (l'approvazione degli altri, premi e gratificazioni, …), o intrinseca dovuta al riconoscimento personale dell'importanza che riveste una certa acquisizione, con conseguente investimento spontaneo di energie e attivazione di comportamenti diretti all'obiettivo. In classe è difficile insegnare la motivazione ma è possibile attivarla e sostenerla:
    - anticipando contenuti, obiettivi e metodi in modo da creare aspettative;
    - tenendo conto dei bisogni e delle aspettative degli studenti;
    - dando un senso e un significato alle proposte didattiche;
    - proponendo problemi significativi per gli alunni;
    - occupandosi dell'aspetto relazionale;
    - valorizzando gli stili cognitivi di ognuno;
    - differenziando i compiti;
    - ponendo attenzione ai processi d'apprendimento oltre che ai prodotti.

  Al contrario l'eccessivo verbalismo, l'essere centrati sul programma più che sui bisogni degli allievi, tentare di fare recepire il sapere piuttosto che ricostruirlo, porre obiettivi inadeguati, presentare l'errore come un fallimento, ostacolano la motivazione e di conseguenza l'apprendimento.
- La volontà: può essere definita come un sistema dinamico di processi di controllo psicologico che proteggono la concentrazione e lo sforzo orientato dalle distrazioni personali e ambientali, che aiutano così l'apprendimento. Per raggiungere l'obiettivo l'individuo mette in atto varie strategie di volontà: di controllo motivazionale e di controllo emotivo. Le prime tendono a rafforzare la motivazione: per esempio, pensare ad un buon risultato può rendere più sopportabile la fatica dovuta allo studio di un argomento poco interessante. Le strategie di controllo emotivo servono a gestire stati emozionali che potrebbero ostacolare il raggiungimento di un obbiettivo, quali ansia, insicurezza, paura.
- Le strategie difensive: le strategie difensive consistono nel creare ostacoli alla propria prestazione, in modo da avere una giustificazione nel caso di un eventuale insuccesso, e una maggiore gratificazione da parte degli altri del caso di successo. Quello delle strategie difensive è un problema molto complesso. L'insegnante dovrebbe essere consapevole dell'esistenza di tali strategie a per evitare di etichettare fin dall'inizio come svogliato un alunno che può essere invece troppo motivato ma non in modo produttivo. In secondo luogo, l'insegnante dovrebbe aiutare l'allievo ad avere fiducia in se stesso e negli adulti significativi, creare un clima di classe in cui l'individuo è portato a competere non con i compagni ma con se stesso.
- Autostima: riguarda l'insieme di percezioni, valutazioni e sentimenti che si provano nei confronti della propria persona. È strettamente connessa con tutti gli aspetti elencati fino ad ora: migliorare l'autostima significa tenere conto del senso di auto efficacia, del locus of control, della motivazione, della volontà, dell'alunno.

Le convinzioni o credenze (beliefs)

Una convinzione è una conoscenza di cui siamo certi.

Le credenze (beliefs) relative un certo settore dell'esperienza, influenzano il modo in cui gli individui acquisiscono, interpretano ed elaborano le nuove conoscenze.
Un sistema di convinzioni comprende di regola categorie di concetti definiti come buoni o cattivi. La componente affettiva e valutativa è quella più spesso chiamata in causa per distinguere conoscenza da convinzione o credenza: la convinzione è basata sulla valutazione, sul giudizio individuale, mentre la conoscenza si basa su fatti oggettivi.
Alcune credenze, come da esempio la convinzione che la conoscenza sia una verità asciutta la convinzione che la conoscenza sia basata sull'autorità, la convinzione che la capacità di apprendere sia fissa, non modificabile, possono avere effetti negativi sull'apprendimento.

Modello di un intervento basato sulla didattica metacognitiva

I fase: contratto formativo

Questa prima fase ha il compito di ridurre la distanza fra allievi e docente, e fra allievi e contenuti:

- informando la classe sui contenuti e negoziandoli;
- costruendo insieme gli obiettivi della propria azione didattica;
- anticipando e contrattando il metodo di lavoro;
- prendendosi carico delle aspettative, dei bisogni, dei prerequisiti degli allievi;
- pianificando insieme le attività, i tempi, di spazi, gli strumenti;
- facendo emergere preconoscenze sull'argomento trattato;

In questo modo è possibile restituire agli alunni la dignità di persone coinvolte nei processi educativi, offrire occasioni reali di esperienze democratiche, sostenere la motivazione, responsabilizzare gli alunni rispetto al proprio processo di apprendimento.

II fase: processo di apprendimento

In questa fase, durante la quale inizia il processo di ricostruzione del sapere, l'insegnante deve porre attenzione a:

- tenere alto il livello di interesse e motivazione
- curare le relazioni in classe
- promuovere conoscenze dichiarative (contenuti), procedurali (abilità cognitive, affettive, sociali), metacognitive (conoscenza, consapevolezza e controllo dei propri processi cognitivi)
- usare metodi e tecniche che favoriscano l'apprendimento (attenzione agli stili cognitivi, cooperative learning, problem solving, …), facendo in modo che i bambini ne siano, per quanto possibile, consapevoli.
- rielaborare le conoscenze servendosi di molteplici mediatori didattici:
  - Mediatori attivi, i quali fanno ricorso all'esperienza diretta (esplorazioni, esperimenti, ricerca)
  - Mediatori iconici, che si basano sulla rappresentazione grafica e spaziale (di segni, schemi)
  - Mediatori analogici, che riguardano i giochi di simulazione (far finta di...)
  - Mediatori simbolici, che consistono nei codici di rappresentazione simbolica convenzionale (linguaggi)
- Prevedere momenti intermedi di ricostruzione e monitoraggio del percorso fatto.

III fase: valutazione

Durante questa fase l'insegnante e gli alunni controllano e valutano le conoscenze dichiarative, procedurali e metacognitive acquisite. In questo delicato momento sarà necessario affrontare l'ansia per le prove di verifica:

- comunicando in modo chiaro e preciso ciò che gli alunni devono sapere e saper fare,
- suggerendo tecniche di studio personalizzate,
- negoziando i criteri di valutazione
- coinvolgendo gli alunni nella correzione degli errori
- presentando l'errore non come fallimento, ma come punto di partenza per apprendimenti successivi.

Sarebbe auspicabile, inoltre, osservare il lavoro durante lo svolgimento con griglie di osservazione per l'insegnante e per gli alunni.

2.2 Proposte didattiche

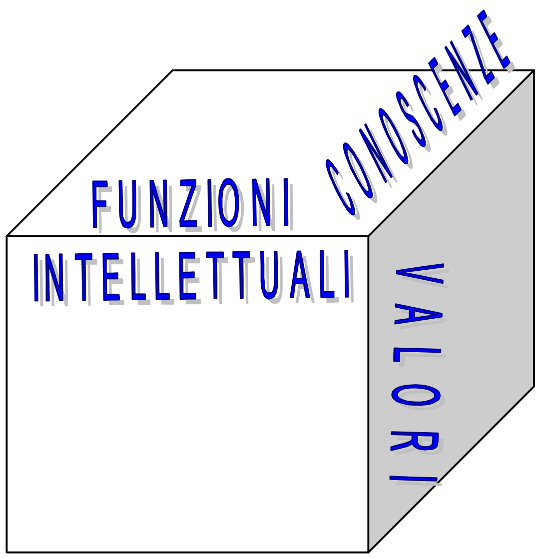
Le unità didattiche sono state strutturate cercando di adattare i metodi precedentemente esposti al contesto scolastico. Non è mai stato seguito in modo rigido un particolare metodo, in quanto sono fermamente convinta che esso debba essere il mezzo e non il fine di un intervento educativo di qualità.
Durante la programmazione degli interventi non sono mai state dimenticate le finalità ultime della scuola elementare:

- Alfabetizzazione culturale
- Educazione alla convivenza democratica
- Formazione dell'uomo e del cittadino

Lo stile di insegnamento messo in atto mira a conseguire le seguenti finalità

- Promuovere l'acquisizione di conoscenze dichiarative (contenuti), conoscenze procedurali (abilità mentali), conoscenze metacognitive.
- Promuovere esperienze di vita democratica: proponendo esperienze di apprendimento di tipo collaborativo, favorendo la gestione autonoma di conflitti interpersonali in un contesto il più possibile controllato e protetto, stabilendo regole condivise, rispettando in prima persona le regole.
- Proporre un metodo di studio
- Favorire l'armonizzazione di ogni alunno all'interno del gruppo classe.

Per scegliere gli obiettivi generali e specifici mi sono servita del S.O.F.E. (Sistema degli Obiettivi Fondamentali dell'Educazione), teorizzato negli anni '80 da Victor Garcìa Hoz. La novità di questo sistema sta nel fatto che ogni obiettivo educativo viene considerato dal punto di vista del contenuto disciplinare specifico che contiene, delle funzioni intellettuali che stimola, del valore che promuove e dell'azione pratica che produce. Garcìa Hoz ha rappresentato geometricamente il suo modello servendosi di un cubo: le tre dimensioni di questa figura simboleggiano le tre facce di ogni obiettivo educativo.



Nel seguente schema sono esposti gli obiettivi generali delle unità didattiche di seguito riportate, formulati adattando lo schema proposto nel testo "Dal fine agli obiettivi dell'educazione personalizzata"[17], ai presupposti teorici trattati all'inizio del capitolo.

OBIETTIVI GENERALI

1. CONOSCENZE

1.1. Conoscere le principali caratteristiche del triangolo

2. FUNZIONI

2.1. FASE PERCETTIVA
- 2.1.1. Si focalizza sugli stimoli pertinenti per il tempo necessario
- 2.1.2. Percepisce attraverso i canali sensoriali visivo, uditivo, cinestetico e discrimina le caratteristiche di un oggetto

2.2. FASE RIFLESSIVA
- 2.2.1. Analizza le caratteristiche di un oggetto, di un evento, di un'idea
- 2.2.2. Confronta quantitativamente e qualitativamente più oggetti, eventi, idee.
- 2.2.3. Classifica oggetti in base ad una caratteristica data o da scoprire
- 2.2.4. Da casi particolari ricava un'affermazione generale
- 2.2.5. Da un'affermazione generale ricava una conclusione particolare
- 2.2.6. Abbrevia il processo di inferenza con strategie di completamento quando non bastano gli elementi per attivare un processo logico induttivo o deduttivo
- 2.2.7. Elimina gli elementi inessenziali alla concettualizzazione dell'esperienza
- 2.2.8. Osserva la realtà e individua una situazione problematica
- 2.2.9. Formula ipotesi e strategie per risolvere una situazione-problema
- 2.2.10. Sceglie le strategie più adatte a risolvere la situazione problematica
- 2.2.11. Organizza le risorse disponibili per applicare le strategie formulate
- 2.2.12. Applica le strategie
- 2.2.13. Monitora le fasi di un strategia applicata
- 2.2.14. Valuta i risultati raggiunti
- 2.2.15. Confronta la situazione-problema in esame con una situazione-problema analoga di cui ha già sperimentato una soluzione efficace

2.3. FASE CREATIVA
- 2.3.1. Determina le implicazioni coerenti con l'informazione acquisita
- 2.3.2. Si pone domande capaci di produrre nuove conoscenze
- 2.3.3. Produce molte idee in breve tempo partendo da un determinato stimolo
- 2.3.4. Passa con facilità da uno schema categoriale all'altro, facendo variare l'impostazione del pensiero secondo esigenze contingenti
- 2.3.5. Scopre e coglie relazioni e implicazioni nuove

[17] Capitolo 9, "Un'esperienza operativa per programmare nella scuola", pp.251-261

2.4. FASE RITENTIVA
- 2.4.1. Trascrive lo stimolo in una codifica più facilmente accessibile e categorizzabile
- 2.4.2. Assimila il materiale della percezione elaborandolo in strutture organizzate per connessione logica, o per somiglianza o differenza
- 2.4.3. Fissa il ricordo utilizzando sia il canale semantico, che quello iconico, che quello gestuale
- 2.4.4. Richiama le conoscenze memorizzate utilizzando indizi di recupero
- 2.4.5. Rievoca, riconosce, ricostruisce le conoscenze memorizzate selezionandole con criteri non associativi ma organizzativi

2.5. FASE ESPRESSIVA
- 2.5.1. Comunica il proprio pensiero in forma orale o scritta
- 2.5.2. Argomenta il proprio pensiero

3. VALORI

3.1. Sa svolgere lavori in gruppo
3.2. E' motivato nello svolgere un compito
3.3. Ascolta e tiene conto delle idee altrui
3.4. Rispetta i ruoli
3.5. Chiede e da aiuto
3.6. Riconosce le proprie responsabilità quando commette un errore
3.7. Sa autogestirsi per creare un clima adatto all'apprendimento

4. CONOSCENZE E COMPETENZE METACOGNITIVE
4.1. Conosce ciò che facilita e ciò che ostacola la propria attenzione
4.2. Usa strategie per mantenere desta la propria attenzione
4.3. Conosce e usa i diversi canali sensoriali per apprendere
4.4. Conosce e usa diversi mezzi per rappresentare le conoscenze
4.5. Riflette sulla coerenza dei propri ragionamenti
4.6. Conosce e applica strategie per fissare gli apprendimenti
4.7. Conosce e applica strategie che favoriscano il lavoro di gruppo
4.8. Ricostruisce e monitora i percorsi fatti e le strategie applicate

2.2.0 U.D: Definire il triangolo

Obiettivi specifici

1. Definisce un triangolo qualsiasi
2. Percepisce attraverso i canali sensoriali visivo, uditivo e cinestetico, e discrimina le caratteristiche di un triangolo
3. Analizza le caratteristiche di un triangolo
4. Confronta i triangoli con altre figure geometriche
5. Elimina gli elementi non essenziali dalla definizione di triangolo
6. Formula, argomenta, sceglie e valuta ipotesi rispetto alla definizione di triangolo
7. Organizza le caratteristiche di un triangolo in una mappa concettuale
8. Rievoca e monitora i percorsi fatti e le strategie applicate
9. Collabora all'interno del suo gruppo
10. Rievoca e monitora i percorsi fatti e le strategie applicate

Tempi

2 giorni

Spazi

Aula scolastica, palestra, giardino

Strumenti

Cartoncino rigido, pennarelli, forbici

Attività

Riconoscimento della situazione problematica

L'insegnante proporrà ai bambini una serie di attività che permettano loro di manipolare e fare esperienza sulla figura geometrica in questione.

- Trovare forme triangolari in classe, in giardino, in palestra, nel proprio corpo
- Formare triangoli con il proprio corpo
- Disegnare e ritagliare triangoli

Consegna 1

L'insegnante suddivide la classe in quattro sottogruppi, all'interno dei quali stabilisce i ruoli non gerarchici, e pone loro la seguente domanda/problema:
"Quali proprietà deve avere una figura per chiamarsi triangolo?"
Ad ogni gruppo è assegnato un certo numero di triangoli di diversa forma e misura.

Dialettica dell'azione

I bambini interagiscono con la domanda problema e iniziano così a costruire un proprio modello implicito, cioè un insieme di relazioni e di regole in base alle quali prendere le proprie decisioni.

Situazione di formulazione
Ogni alunno propone ed argomenta le proprie ipotesi, prima all'interno del gruppo, poi all'intera classe.

Situazione di validazione
Le ipotesi accettate dal gruppo sono scritte sul quaderno e sulla lavagna in forma di mappa concettuale. Avremo così ottenuto una prima definizione di triangolo.
Tale definizione per essere validata sarà applicata ad ogni figura proposta all'inizio dell'unità didattica.

Consegna 2
La classe verrà invitata a riflettere su ogni figura chiedendosi perché alcune sono triangoli e altre no, facendo riferimento alla definizione data.

Dialettica dell'azione
I bambini si renderanno conto che esistono altre proprietà del triangolo di cui si deve tener conto per arrivare ad una definizione più completa ma ridondante in alcune sue parti.

Situazione di formulazione
Ogni alunno propone ed argomenta le proprie ipotesi.

Situazione di validazione
Le ipotesi accettate dal gruppo sono scritte sul quaderno e sulla lavagna in forma di mappa concettuale.

Consegna 3
L'insegnante pone la seguente domanda: nella nostra definizione quali sono le informazioni superflue o contenute nelle altre? Provate a considerare una proprietà alla volta e controllare se è contenuta in qualche altra.

Dialettica dell'azione
Dalle interazioni tra il gruppo e la domanda problema nascono le prime ipotesi.

Situazione di formulazione:
Ogni alunno propone ed argomenta le proprie ipotesi.

Situazione di validazione:
Le ipotesi accettate dal gruppo sono scritte sul quaderno e sulla lavagna in forma di mappa concettuale.
Si arriva così ad una definizione corretta di triangolo.

2.2.1 Analisi a priori dei comportamenti attesi da parte degli allievi

Consegna 1

Ipotesi attese in risposta alla domanda-problema:
"Quali proprietà deve avere una figura per chiamarsi triangolo?"

- IPOTESI 1a: deve essere un poligono
- IPOTESI 1b: deve avere tre lati
- IPOTESI 1c: deve avere tre angoli
- IPOTESI 1d: deve avere tre vertici
- IPOTESI 1e: deve essere una spezzata chiusa
- IPOTESI 1f: deve essere una figura piana
- IPOTESI 1g: deve avere tre lati consecutivi
- IPOTESI 1h: deve avere i lati uguali

Consegna 2

Ipotesi attese in risposta alla domanda-problema:
"Quali di queste figure sono triangoli? Perché?"

- <u>IPOTESI 2a:</u> il bambino riconosce come triangoli le figure che hanno tre lati
- <u>IPOTESI 2b</u>: il bambino riconosce come triangoli le figure che hanno tre angoli
- <u>IPOTESI 2c</u>: il bambino riconosce come triangoli le figure che somigliano al triangolo equilatero
- <u>IPOTESI 2d</u>: il bambino riconosce come triangoli le spezzate chiuse
- <u>IPOTESI 2e</u>: il bambino riconosce come triangoli le figure piane
- <u>IPOTESI 2f</u>: il bambino riconosce i triangoli come poligoni
- <u>IPOTESI 2g</u>: il bambino riconosce i triangoli come figure con tre vertici
- <u>IPOTESI 2h</u>: il bambino riconosce i triangoli come figure con tre lati consecutivi

Consegna 3

Ipotesi attese in risposta alla domanda-problema:
"Nella nostra definizione quali sono le informazioni superflue o contenute nelle altre?"

- IPOTESI 3a: se un triangolo ha tre lati deve avere tre angoli e tre vertici quindi basta considerare solo una delle tre proprietà.
- IPOTESI 3b: se dico che un triangolo è un poligono riassumo le proprietà: essere una spezzata chiusa, essere una figura piana
- IPOTESI 3c: la proprietà "avere tre angoli" non è contenuta in nessun'altra.
- IPOTESI 3d: la proprietà "avere tre lati" non è contenuta in nessun'altra.
- IPOTESI 3e: la proprietà "avere tre vertici" non è contenuta in nessun'altra
- IPOTESI 3f: la proprietà "essere una spezzata chiusa" è contenuta nella proprietà "essere un poligono"

- IPOTESI 3g: la proprietà “avere tre lati consecutivi” è contenuta in “essere una spezzata chiusa” e in “essere un poligono”
- IPOTESI 3h: la proprietà “essere una figura piana” è contenuta in “essere un poligono”
- IPOTESI 3i: i bambini non hanno chiaro il concetto di poligono
- IPOTESI 3l: i bambini non comprendono che alcune informazioni sono contenute nelle altre.

2.2.2 U.D: I lati del triangolo

Obiettivi specifici:

1. Scopre la relazione fra i lati di un triangolo
2. Classifica i triangoli in base alla congruenza dei lati
3. Confronta le lunghezze dei lati di un triangolo tra di loro
4. Confronta più triangoli in base alla congruenza dei lati
5. Da casi particolari ricava la relazione fra i lati di un triangolo
6. Formula, argomenta, sceglie e valuta ipotesi rispetto alla relazione fra i lati di un triangolo e alla classificazione dei triangoli in base alla congruenza dei lati
7. Fissa il ricordo utilizzando il linguaggio verbale, gestuale e iconico
8. Collabora all'interno del suo gruppo
9. Rievoca e monitora i percorsi fatti e le strategie applicate

Tempi

3 giorni

Spazi

Aula scolastica

Strumenti

Una grande cesta, listelli di vario colore e misura

Attività

Riconoscimento della situazione problematica

I bambini osservano i triangoli sui quali hanno lavorato durante la precedente attività.
L'insegnante pone una domanda: come sono questi triangoli tra loro?
Egli richiama l'attenzione degli alunni sulla diversa lunghezza dei lati dei triangoli con una serie di domande–guida:
I triangoli che vedete sono tutti uguali?
Che cosa hanno di diverso?

I bambini devono arrivare a formulare autonomamente la domanda-problema che guiderà tutto il percorso successivo.
La domanda-problema è:
"Come possono essere i lati di un triangolo tra loro?"

Consegna 1

L'insegnante, dopo aver fatto costruire ai bambini dei listelli di carta di vario colore e misura, suddivide la classe in 4 squadre e propone un gioco, che consiste nel pescare a turno dalla cesta gruppi di tre listelli e formare il maggior numero possibile di triangoli.
I gruppi di listelli scelti non potranno essere cambiati per nessun motivo.
I bambini devono costruire una tabella esemplificativa dei tentativi fatti per costruire i triangoli, inserendo le misure dei tre listelli scelti.

Dialettica dell'azione

Ogni gruppo costruisce i suoi triangoli: alcuni si potranno costruire, altri no, in questo modo i bambini lavorano su basi concrete per dare una risposta alla situazione-problema.
I bambini si renderanno presto conto che non sempre, scelti tre listelli, è possibile formare un triangolo. Si accorgeranno, quindi, che scegliere listelli a caso non porta alla vittoria, e inizieranno ad inventare e applicare strategie diverse
La formulazione di tali strategie, nate dalle interazioni tra gli allievi e la domanda-problema, costituisce la dialettica dell'azione.
Gli allievi iniziano, adesso, a costruire un modello implicito, cioè un insieme di relazioni e di regole in base alle quali prendere le proprie decisioni.

Situazione di formulazione

La seconda fase del gioco vede come concorrenti solo un membro per ogni gruppo. Le strategie usate dovranno essere, quindi, comunicate al capogruppo che le userà per vincere. L'insegnante inviterà gli alunni a scrivere su un foglio la strategia del gruppo.
A questo punto i bambini sono arrivati a due conclusioni:

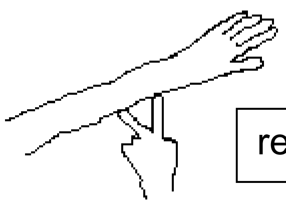
- non è sempre possibile, dati tre listelli, costruire un triangolo;
- esiste una strategia per scegliere sempre listelli giusti.

Situazione di validazione

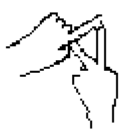
I bambini hanno intuito che i lati di un triangolo sono in relazione tra loro. Ora si tratta di portarli a ragionare, a formulare congetture su tali relazioni. In questa fase, estremamente delicata, è essenziale ruolo dell'insegnante che deve stimolare gli alunni a discutere e valutare le strategie usate, fino a scoprire la relazione fra i lati di un triangolo.
La discussione, deve continuare fino a quando i bambini non arrivano a formulare le seguenti ipotesi:

a) se c'è un lato maggiore della somma degli altri due il triangolo non si può costruire;
b) se ogni lato è minore della somma degli altri due il triangolo si può costruire;

Per far ricordare le regole si può fare ricorso alla memoria iconica:



regola a



regola b

Consegna 3

Guardiamo nella nostra tabella i triangoli che si possono costruire: quante combinazioni di listelli uguali o diversi tra loro si possono avere?

Dialettica dell'azione

La classe è divisa in gruppi.
Ogni gruppo formula le proprie ipotesi.

Situazione di formulazione

Ogni gruppo scrive le proprie ipotesi alla lavagna. Durante questa fase il gruppo deve spiegare alla classe le proprie ipotesi.
In questo modo gli alunni mettono alla prova la propria capacità argomentativi.

Situazione di validazione

Le congetture proposte da ogni gruppo, vengono validate dalla classe, se sono accettate da tutti divengono un teorema. I bambini, giocando, scoprono che i triangoli possono essere classificati, in base alla congruenza dei lati, in triangoli equilateri, triangoli isosceli, triangoli scaleni.
In questo percorso la definizione diviene un punto d'arrivo, una conquista della classe.

2.2.3 Analisi a priori dei comportamenti attesi da parte degli allievi

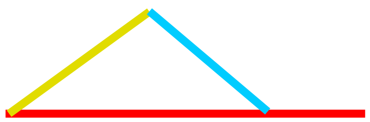
Riconoscimento della situazione problematica

- ❖ i bambini non riconoscono la similitudine di due triangoli se uno di essi è ruotato, cioè se la base maggiore non è orizzontale e in basso, come se si trattasse di un corpo pesante;
- ❖ i bambini affermano che i triangoli sono diversi perché hanno una forma diversa;
- ❖ i bambini confondono il concetto di forma con quello di dimensione.

Consegna 1

Strategia attese per la scelta dei listelli:

- ❖ IPOTESI 1a: bisogna scegliere listelli con misure vicine tra loro
- ❖ IPOTESI 1b: bisogna scegliere tre listelli uguali
- ❖ IPOTESI 1c: bisogna scegliere tre listelli diversi
- ❖ IPOTESI 1d: bisogna scegliere due listelli uguali e uno diverso
- ❖ IPOTESI 1e: si possono scegliere listelli qualsiasi
- ❖ IPOTESI 1f: i bambini non comprendono che ad ogni listello corrisponde un lato del triangolo;
- ❖ IPOTESI 1g:i bambini sovrappongono i listelli per costruire il triangolo poiché non hanno chiaro il concetto di poligono;
- ❖ IPOTESI 1h: i bambini costruiscono spezzate intrecciate e le considerano triangoli



- ❖ IPOTESI 1i: i bambini notano che il triangolo non si può formare quando chiudendo i 2 lati sul terzo essi non si uniscono;

- ❖ IPOTESI 1l: i bambini notano che il triangolo non si può formare quando chiudendo i 2 lati sul terzo essi si uniscono e si sovrappongono;

- ❖ IPOTESI 1m: accostando i listelli, i bambini notano/non notano che il triangolo non si può formare quando i due listelli uniti sono più corti del terzo listello;
- ❖ IPOTESI 1n: accostando i listelli, i bambini notano/non notano che il triangolo si può formare quando i due listelli uniti sono uguali o più lunghi del terzo listello;
- ❖ IPOTESI 1o: i bambini non confrontano l'insieme dei due listelli col terzo, ma confrontano, invece, la lunghezza di un lato col lato più lungo;

- ❖ IPOTESI 1p: i bambini non comprendono che due listelli qualsiasi possono essere confrontati con l'altro lato;
- ❖ IPOTESI 1q: i bambini hanno difficoltà nel formulare correttamente la regola;

Consegna 3

Ipotesi attese in risposta alla domanda problema: quante combinazioni di listelli uguali o diversi tra loro si possono avere nei triangoli costruiti?

- ❖ IPOTESI 3a: i bambini sostengono che vi siano tante combinazioni possibili, dato che i listelli sono di diversa lunghezza;
- ❖ IPOTESI 3b: i bambini sostengono che ci possono essere solamente 3 combinazioni possibili, poiché il triangolo ha:
    1. tutti i lati uguali
    2. tutti i lati diversi
    3. 2 lati uguali e 1 diverso;
- ❖ IPOTESI 3c: i bambini sostengono che ci possono essere solamente 2 possibili combinazioni:
  1. triangolo con tutti i lati uguali
  2. triangolo con tutti i lati diversi.

2.2.4 U.D: Gli angoli del triangolo

Obiettivi specifici

1. Scopre la relazione fra gli angoli del triangolo
2. Classificare i triangoli rispetto agli angoli
3. Confronta le ampiezze degli angoli di un triangolo tra di loro
4. Confronta più triangoli in base all'ampiezza degli angoli
5. Da casi particolari ricava la relazione fra gli angoli di un triangolo
6. Dalla regola generale trae conclusioni rispetto a casi particolari
7. Formula, argomenta, sceglie e valuta ipotesi rispetto alla relazione fra gli angoli di un triangolo e alla classificazione dei triangoli in base all'ampiezza degli angoli
8. Fissa il ricordo utilizzando il linguaggio verbale, gestuale e iconico
9. Collabora all'interno del suo gruppo
10. Rievoca e monitora i percorsi fatti e le strategie applicate

Tempi

3 giorni

Spazi

Aula scolastica

Strumenti

L'insegnante potrà facilmente costruire dei triangoli usando listelli di cartoncino rigido e fermacampioni per fissare le estremità.
Due estremità saranno lasciate libere per far scorrere un lato su un altro e variare così gli angoli del triangolo.

Attività

Riconoscimento della situazione problematica:
Mostrando uno dei modelli di triangolo alla classe, l'insegnante porrà la seguente domanda:
è possibile variare l'ampiezza di un angolo del triangolo senza che varino gli altri? Perché?

Consegna 1
I bambini divisi in sottogruppi sono invitati a rispondere alla domanda.

Dialettica dell'azione
All'interno di ogni gruppo, sono formulate le ipotesi che possono essere accettate o rifiutate dal gruppo stesso.

Situazione di formulazione
Ogni alunno propone ed argomenta ipotesi all'interno del proprio gruppo.

Situazione di validazione
Le ipotesi accettate dal gruppo vengono scritte sul quaderno; ogni gruppo argomenta le proprie ipotesi alla classe, le ipotesi accettate da tutti vengono scritte alla lavagna.

Consegna 2
La classe è divisa in sottogruppi. L'insegnante distribuisce un modello ad ognuno e invita gli alunni a variare un angolo del triangolo e descrivere cosa accade agli altri.
I bambini devono costruire una tabella dove appuntare i valori ottenuti e provare a formulare delle nuove ipotesi per rispondere alla domanda.

Dialettica dell'azione
All'interno di ogni gruppo, sono formulate nuove ipotesi in base alle scoperte fatte sperimentando sul modello.

Situazione di formulazione
Ogni alunno propone ed argomenta ipotesi all'interno del proprio gruppo.

Situazione di validazione
Le ipotesi accettate dal gruppo sono scritte sul quaderno; ogni gruppo argomenta le proprie ipotesi alla classe, le ipotesi accettate da tutti sono scritte alla lavagna.
Per i bambini sarà semplice giungere alla conclusione per cui se aumentiamo un lato diminuiranno gli altri e viceversa. Sarà l'insegnante, poi, a guidarli a comprendere che ciò accade perché la somma dei angoli interni di un triangolo non varia. Si potrà fare un esempio per meglio chiarire il problema: al posto del triangolo possiamo considerare una torta (che rappresenta un angolo giro) che deve essere divisa a tre bambini. Se diamo una fetta più grande ad uno rimarranno fette più piccole per gli altri e ciò, come nel caso del triangolo, accade perché la somma delle fette è sempre la stessa. Un'ulteriore prova sarà fatta sommando gli angoli dei triangoli nella tabella o praticamente, ritagliando i tre angoli di un triangolo e disponendoli in modo che i tre angoli risultino consecutivi.

Consegna 3
L'insegnante disegna alla lavagna diversi tipi di angolo (acuto, retto, ottuso) e formula la seguente domanda: quali combinazioni di angoli possiamo avere nell'insieme dei triangoli? È possibile avere due angoli retti? E due angoli ottusi? Perché?

Dialettica dell'azione
La classe è divisa in gruppi.
Ogni gruppo formula le proprie ipotesi.

Situazione di formulazione
Ogni gruppo scrive le proprie ipotesi alla lavagna. Durante questa fase il gruppo deve spiegare alla classe le proprie ipotesi.
In questo modo gli alunni mettono alla prova la propria capacità argomentativa.

Situazione di validazione

Le congetture proposte da ogni gruppo, vengono validate dalla classe, se sono accettate da tutti divengono un teorema. I bambini, giocando, scoprono che l'insieme dei triangoli può essere diviso rispetto agli angoli, in tre sottoinsiemi: triangoli acutangoli, triangoli retti, triangoli ottusangoli.
In questo percorso la definizione diviene un punto d'arrivo, una conquista della classe.

2.2.5 Analisi a priori dei comportamenti attesi da parte degli allievi

Consegna 1:

Ipotesi attese in risposta alla domanda problema:
"E' possibile variare l'ampiezza di un angolo del triangolo senza che varino gli altri? Perché?"

- IPOTESI 1a: si, ma non sanno spiegare il perché
- IPOTESI 1b: no, ma non sanno spiegare il perché
- IPOTESI 1c: no, cambia il secondo angolo ma il terzo rimane costante

Consegna 2:

Ipotesi attese in risposta alla domanda problema dopo aver sperimentato sul modello.

- IPOTESI 2a: no, se cambio un angolo cambiano gli altri perché il triangolo diventa più piccolo\più grande.
- IPOTESI 2b: no, se cambio un angolo cambiano gli altri perché il triangolo cambia forma
- IPOTESI 2c: no, se aumento un angolo gli altri diminuiscono e viceversa, perché cambiano i lati.
- IPOTESI 2d: no, se aumento un angolo gli altri diminuiscono e viceversa, perché se un angolo "si prende più gradi agli altri ne rimangono di meno"
- IPOTESI 2e: no, se aumento un angolo gli altri diminuiscono e viceversa, perché la quantità di gradi è sempre la stessa.
- IPOTESI 2f: no, se aumento un angolo gli altri diminuiscono e viceversa, perché stringo i lati.

Consegna 3:

Ipotesi attese in risposta alla domanda problema:
"Quali combinazioni di angoli possiamo avere nell'insieme dei triangoli? È possibile avere due angoli retti? E due angoli ottusi? Perché?"

- IPOTESI 3a: il bambino tiene conto del fatto che la somma degli angoli interni è 180° e individua le combinazioni:
  - Acuto,acuto, acuto
  - Ottuso, acuto, acuto
  - Retto, acuto, acuto
- IPOTESI 3b: il bambino non tiene conto del fatto che la somma degli angoli interni è 180° e individua anche combinazioni impossibili.
- IPOTESI 3c: il bambino afferma che non ci possono essere due angoli retti od ottusi perché la somma degli angoli interni è 180°.
- IPOTESI 3d: il bambino "vede" che non ci possono essere due angoli ottusi o retti ma non sa spiegare il perché.

2.2.6 U.D: Le altezze del triangolo

Obiettivi specifici

1. Individua le tre altezze di un triangolo
2. Definisce il concetto di altezza di un triangolo
3. Da casi particolari ricava la definizione generale di altezza di un triangolo
4. Formula, argomenta, sceglie e valuta ipotesi rispetto al concetto di altezza di un triangolo
5. Confronta la strategia per individuare l'altezza di un triangolo con la strategia usata per la statura di un bambino.
6. Riorganizza gli apprendimenti utilizzando il canale iconico, verbale, gestuale
7. Collabora all'interno del suo gruppo
8. Rievoca e monitora i percorsi fatti e le strategie applicate

Tempi

3 giorni

Spazi

Aula scolastica

Strumenti

Materiali di uso comune

Attività

Premessa

L'insegnante per far capire e ricordare che l'altezza è la distanza più breve tra il vertice e la base opposta, e quindi perpendicolare alla base stessa, può paragonarla al concetto di statura del bambino. Il modo più usato dai bambini per misurare la propria statura è quello di poggiarsi con le spalle al muro, segnare dove arriva la propria testa e misurare la distanza tra quel punto e il pavimento. Si potrà così partire dalla realtà concreta e ben conosciuta dal bambino per arrivare ad un concetto astratto.

Consegna 1:

L'insegnante suddivide la classe in sottogruppi e chiede ad ognuno di misurare un membro del gruppo, spiegare la strategia che ha usato e definire cos'è l'altezza di un bambino.

Dialettica dell'azione:

Ogni gruppo interagisce con la situazione problema.

Situazione di formulazione:

Ogni alunno propone le proprie strategie.

Situazione di validazione:
Le strategie accettate dal gruppo vengono scritte sul quaderno; ogni gruppo argomenta le proprie strategie alla classe, quelle accettate da tutti vengono scritte alla lavagna.
Durante la fase di validazione l'insegnante guida gli alunni con domande opportune ad una definizione del concetto di altezza partendo dalle strategie usate precedentemente dai gruppi.
I bambini dovranno rendersi conto del fatto che misurano la loro statura considerando la distanza più breve tra il punto dove arriva la loro testa e il pavimento, e che tale distanza è misurata sulla perpendicolare al pavimento stesso.

Consegna 2:
L'insegnante suddivide la classe in sottogruppi e distribuisce ad ognuno i triangoli ritagliati con la consegna di formulare delle ipotesi per rispondere alla domanda: è possibile che uno stesso triangolo abbia diverse altezze?

Dialettica dell'azione:
All'interno di ogni gruppo, sono formulate le prime ipotesi

Situazione di formulazione:
Ogni alunno propone ed argomenta le proprie ipotesi all'interno del gruppo.

Situazione di validazione:
Le ipotesi accettate dal gruppo vengono scritte sul quaderno; ogni gruppo argomenta le proprie ipotesi alla classe, le ipotesi accettate da tutti vengono scritte alla lavagna.
I bambini devono confrontarsi con il concetto di altezza relativa ad una base, per cui, in caso di eccessive difficoltà, hanno bisogno che l'insegnante li guidi con opportune domande:
Dove sono situati gli estremi dell'altezza?
Quale lato possiamo scegliere per disegnare l'altezza?
Quanti lati possiamo scegliere?
Quante sono le altezze?

Consegna 3:
Ad ogni gruppo è affidato un triangolo sul quale bisogna adattare e applicare la strategia usata precedentemente per disegnare l'altezza di un bambino.

Dialettica dell'azione:
All'interno di ogni gruppo, sono elaborate strategie per disegnare le tre altezze.

Situazione di formulazione:
Ogni alunno propone ed argomenta le proprie strategie all'interno del gruppo.

Situazione di validazione:
Le ipotesi accettate dal gruppo vengono scritte sul quaderno; ogni gruppo argomenta le proprie ipotesi alla classe, le ipotesi accettate da tutti vengono scritte alla lavagna.

L'insegnante dovrà guidare i gruppi ad adattare la strategia elaborata sui bambini ai triangoli.
A causa del misconcetto per cui l'altezza deve essere interna al triangolo, alcuni triangoli creeranno maggiori difficoltà. Anche in questi casi può essere utile la strategia che la classe ha elaborato per misurare l'altezza di un bambino: immaginiamo che ogni triangolo sia un compagno che vuole sapere qual è la sua altezza e per farlo usa il metodo descritto in precedenza. Il triangolo però è uno strano bambino, non si sa mai quale sia la sua testa.
Allora per prima cosa bisognerà decidere quale vertice scegliere come testa e quale base scegliere come piedi, poi potremo poggiare i piedi del triangolo su una linea disegnata sul quaderno, segnare con un punto dove arriva la testa e disegnare l'altezza.
Bisogna stare molto attenti a fare notare i misconcetti che questo metodo può portare con sé: l'altezza potrebbe essere concepita come assoluta (non relativa ad una base), verticale e unica.
A questo punto bisognerà sintetizzare le ipotesi e formulare correttamente la definizione di altezza del triangolo: ogni triangolo ha tre altezze ognuna relativa ad un lato che prende il nome di base. L'altezza è la distanza tra la base e il vertice opposto ad essa. L'altezza è perpendicolare alla base.

2.2.7 Analisi a priori dei comportamenti attesi da parte degli allievi

Consegna 1

Ipotesi attese in risposta alla domanda-problema:
"Elaborare una strategia per misurare l'altezza di un bambino"

- IPOTESI 1a: il bambino usa la strategia: poggiare il compagno al muro, segnare dove arriva la sua testa, misurare la distanza fra il segno e il pavimento.
- IPOTESI 1b: il bambino non sa usare il metro.
- IPOTESI 1c: il bambino afferma che il metro deve essere perpendicolare al muro, senza domande guida da parte dell'insegnante.
- IPOTESI 1d: il bambino afferma che il metro deve essere perpendicolare al muro aiutato da domande guida da parte dell'insegnante.
- IPOTESI 1e: il bambino usa varianti della strategia presa in considerazione.

Consegna 2

Ipotesi attese in risposta alla domanda problema:
è possibile che uno stesso triangolo abbia diverse altezze?

- IPOTESI 2a: no, perché l'altezza deve essere sempre verticale
- IPOTESI 2b: si, dipende da com'è ruotato il triangolo
- IPOTESI 2c: si, può avere tre altezze, una per ogni lato
- IPOTESI 2d: no, ma non sa spiegare il motivo.
- IPOTESI 2e: si, ma non sa spiegare il motivo.
- IPOTESI 2f: si, dipende da quale lato consideriamo come base.

Consegna 3:

Ipotesi attese in risposta alla domanda-problema:
"Disegnare le altezze del triangolo applicando la strategia scoperta"

- IPOTESI 3a: il bambino traccia correttamente le altezze senza la guida dell'insegnante.
- IPOTESI 3b: il bambino traccia correttamente le altezze con la guida dell'insegnante.
- IPOTESI 3c: il bambino traccia l'altezza congiungendo un vertice al punto medio del lato opposto
- IPOTESI 3d: il bambino traccia correttamente solo le altezze interne al triangolo.
- IPOTESI 3e: il bambino non sa applicare la strategia al triangolo.
- IPOTESI 3f: il bambino traccia l'altezza sempre verticale
- IPOTESI 3g: il bambino non sa come tracciare una linea perpendicolare alla base.

2.2.8 Verifica e valutazione

Per valutare gli apprendimenti degli alunni e la validità delle unità didattiche sarà riproposto il questionario iniziale.
Sarà, inoltre, condotta un'osservazione sistematica sulla base dell'analisi a priori dei comportamenti degli allievi.
Infine, sarà proposto un questionario di riflessione metacognitiva da discutere in classe sia alla fine di ogni unità didattica, sia durante la valutazione finale

Questionario di riflessione metacognitiva

1- Durante le attività, cosa ti ha aiutato a stare attento tra le cose fatte dalle insegnanti, dagli altri compagni, da te stesso?
2- Quali attività svolte in classe ti hanno aiutato ad imparare? (puoi segnare più di una risposta)
    - Le spiegazioni orali
    - Gli schemi, le mappe, i cartelloni, i disegni alla lavagna
    - I lavori in cui la maestra mi coinvolge direttamente per disegnare, ritagliare, fare giochi di movimento.
3- Quali linguaggi abbiamo usato per rappresentare le nostre ipotesi (linguaggio verbale, schemi, mappe)?
4- Sapresti riconoscere le fasi dell'attività fatta in classe? Cosa hai imparato? Ricordi gli obiettivi? Pensi di averli raggiunti? Quali sono stati i tuoi errori? Cosa potresti fare per risolverli?
5- Cosa ti ha fatto capire quale era la strada giusta?
6- Hai incontrato difficoltà? Quali? Quali domande faresti agli altri o all'insegnante per risolvere le tue difficoltà?
7- Il tempo che abbiamo stabilito era sufficiente
8- La disposizione dei banchi e delle persone ci ha aiutato a lavorare?
9- Cosa hai fatto per memorizzare ciò che avevamo imparato in classe?
10- Pensi che lavorare in gruppo sia utile? Perché?
11- Cosa ti ha aiutato nel modo di lavorare degli altri compagni del gruppo? Cosa ti ha ostacolato?
12- Cosa, secondo te, non ha funzionato nel lavoro di gruppo?
13- Cosa faresti per risolvere i problemi del tuo gruppo?
14- Potresti riutilizzare questo modo di lavorare in altre occasioni?

2.3 Conclusioni

Con questo secondo capitolo ho voluto mostrare l'utilità di una ricerca sperimentale per la programmazione di un intervento didattico.
Gli obiettivi, i contenuti, le attività, i metodi sono stati scelti tenendo conto delle variabili didattiche estrapolate dall'analisi sperimentale di dati raccolti nella realtà scolastica.
Per mettere in crisi i misconcetti elaborati dai bambini si è fatto ricorso agli strumenti dati dalla Didattica Metacognitiva e dalla Teoria delle Situazioni:

- Porre il bambino in una situazione problemica che renda necessaria, per la sua soluzione, la conoscenza che si vuole far apprendere. In questo modo sarà la situazione stessa a mettere in crisi le strategie e le ipotesi errate formulate dai bambini.
- Promuovere la consapevolezza dei propri processi di apprendimento al fine di elaborare strategie per controllarli e migliorarli.

Lo studio, il confronto, la problematizzazione delle preconoscenze degli alunni è stato un ottimo mezzo per tentare di dare risposta al loro reale bisogno formativo.

Conclusioni

La problematizzazione della realtà quotidiana ha permesso di formulare buone domande, indispensabili per iniziare un percorso conoscitivo su alcuni aspetti dell'apprendimento della geometria.
Il ritorno alla realtà, con uno strumento di indagine atto a esplicitare ed estendere la domanda iniziale, ha consentito di raccogliere dati che in seguito all'analisi quantitativa, hanno fornito informazioni utili a dare una risposta al quesito per quanto possibile, rigorosa e completa.
In seguito alle conoscenze acquisite sulle variabili didattiche che entrano in gioco nel processo di apprendimento del concetto triangolo, è stato possibile ipotizzare interventi didattico-educativi al fine di attivare situazioni di apprendimento significative, a partire dalle preconoscenze e dalle esperienze dei bambini.
Il paradigma utilizzato per elaborare questa tesi, mi ha permesso di confrontarmi con un modo nuovo di fare scuola. La dimensione della ricerca, infatti, permette di avvicinarsi al sapere in modo critico e di problematizzare la realtà al fine di comprenderla.
La ricerca e la sperimentazione educativa migliorano la qualità del sistema scolastico, in quanto permettono di trovare soluzioni pedagogiche e didattiche nuove alle problematiche emergenti.

Riferimenti bibliografici

AAVV (1997), *Dal fine agli obiettivi dell'educazione personalizzata*, Palermo, Palumbo

AJELLO M., "Analisi a-priori come strumento per la strutturazione di un percorso di insegnamento apprendimento per moduli",*Quaderni di ricerca in didattica*, G.R.I.M., Palermo (distribuzione via Crisafulli 4, 90128 Palermo), N° 9, pp.155-164.

BOSCOLO P. (1997), *Psicologia dell'apprendimento scolastico. Aspetti cognitivi e motivazionali*, Torino, UTET

G. BROUSSEAU (2000), "Elementi d'ingegneria didattica", *La matematica e la sua didattica*, Bologna, Pitagora, N° 1, pp. 6-27

G. BROUSSEAU (2001), "Insegnamento della matematica nella scuola dell'obbligo: micro e macro didattica", *La matematica e la sua didattica*, Bologna, Pitagora, N° 2, pp. 4-30

CALONGHI-COGGI (1993), *Didattica e sviluppo dell'intelligenza*, Torino, Tirrenia Stampatori

CORNOLDI C. (1995), *Matematica metacognizione*, Trento, Erickson.

CORNOLDI C. (1995), *Metacognizione ed apprendimento*, Bologna, Il Mulino.

CRISTANINI D. (1997), *Programmare e valutare nella scuola materna*, Milano, Fabbri

CUTRERA-LO VERDE, *Aritmetica. Manuale di didattica*, Paleremo, Sigma, pp.53-66

P. CUTUGNO, *Le concezioni degli allievi della scuola elementare sul triangolo*, Comunicazione al Convegno Nazionale "La ricerca nella didattica delle discipline scientifiche", Facoltà di Scienze della Formazione, SISSIS, GRIM, Palermo 10-11-12 gennaio 2001.

ENRIQUES F. (1925), *Gli elementi di Euclide e la critica antica e moderna*, Roma, Stock, pp.27-50, libro I.

LA MARCA A. (1999), *Didattica e sviluppo della competenza metacognitiva. Voler apprendere per imparare a pensare*, Palermo, Palombo

PETTER G. (1992), *Dall'infanzia alla preadolescenza. Aspetti e problemi fondamentali dello sviluppo psicologico*, Firenze, Giunti

GRAS R. (1997), "Metodologia di analisi d'indagine", *Quaderni di ricerca in didattica*, n.7, Palermo
La rivista è disponibile on-line al seguente indirizzo:
http://math.unipa.it/%grim/memquad.htm

SPAGNOLO F. (1999), *Insegnare la matematica nella scuola secondaria*, Firenze, La Nuova Italia.

SPAGNOLO F., *Semiotic and ermeneutic can help us to interpret teaching learning?* Palm Cove (Cairms Australia), 20-24 August 2001, International Conference on Mathematic Education in to 21st Century.

SPAGNOLO F., *Le competenze di lunga durata ed i saperi irrinunciabili nel I anno della scuola secondaria superiore*, Convegno Regionale CIDI, Palermo febbraio 2002.

R. ZAN (2001), "Metacognizione e difficoltà in matematica", *La matematica e la sua didattica*, Bologna, Pitagora, N° 2, pp. 174-212

CD Multimediale "La didattica delle Matematiche nei corsi di Formazione Primaria",
a cura di P. Cutugno C. Giacalone, in attesa di pubblicazione, progetto CNR, Pisa.