Capitolo 1. Un approccio storico critico del tutto elementare al tema dell’infinito

Prima di introdurre l’aspetto didattico riteniamo utile delineare un breve iter storico-critico che richiama in modo del tutto elementare le fasi salienti del lungo e sofferto percorso compiuto dall’infinito matematico. Questo capitolo rappresenterà in seguito un’importante chiave di lettura per capire ciò che sta alla base degli ostacoli epistemologici relativi a questo argomento (vedi paragrafo 2.5); ostacoli che “giustificano” le convinzioni degli insegnanti e degli allievi che saranno messe in evidenza nei capitoli 3 e 4.

Per la trattazione di questo capitolo ci siamo serviti dei seguenti riferimenti bibliografici: Arrigo e D’Amore, 1993; Boyer, 1982; D’Amore, 1994; D’Amore e Matteuzzi, 1975, 1976; Geymonat, 1970; Lolli, 1977; Rucker, 1991; Zellini, 1993 e di altri che saranno citati nel testo. Come impostazione abbiamo scelto di seguire quella individuata da D’Amore (1994), nel suo singolare percorso dovuto ad interpretazioni personali che facciamo nostre.

1.1 La preistoria: dal $^{-}600$ al $^{+}1800$

«C’è un concetto che corrompe e altera tutti gli altri. Non parlo del Male, il cui limitato impero è l’Etica; parlo dell’infinito».

[Borges J.L., 1985]

1.1.1 Dall’Antichità al Medioevo

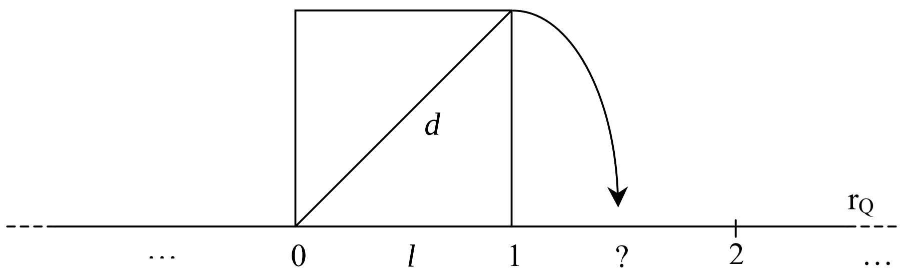
Talete di Mileto ($^{-}624$-$^{-}548$). Identifica l’*origine di tutte le cose* (*arché*) nell’acqua in quanto, per lui, tutto ha alla base della propria natura uno stato di umidità ed a questo stato tutte le cose ritornano.

Anassimandro di Mileto ($^{-}610$-$^{-}547$). Allievo di Talete definì l’*arché* come qualitativamente non definita (richiamando l’idea di indeterminato), divina, immortale, indistruttibile, senza limiti (richiamando l’idea di illimitato), ma non per questo caotica, chiamata: *ápeiron* (infinito). Come sostiene Marchini (2001), pare che ai tempi di Anassimandro fossero ritenuti sinonimi infinito, illimitato e indeterminato.

Anassimene (¯586-¯528). Propone che l'origine delle cose sia l'aria infinita, in quanto l'aria rappresenta meglio di ogni altra sostanza l'illimitatezza e la onnipresenza propria dei principi primordiali.

Si vengono a creare due correnti: quella di coloro che vedono l'infinito in senso negativo: incompleto, imperfetto, privo di confini, indeterminato, fonte di complicazione e confusione (come ad esempio i pitagorici e Aristotele) e quelli che lo vedono in senso positivo come ciò che comprende e riassume in sé tutte le qualità [**Epicuro (¯341 - ¯270)**]. [1]

Pitagora di Samo (¯580-¯504). La Matematica è alla base della spiegazione di tutto l'universo. Tutto è descrivibile attraverso i numeri naturali e tramite i loro rapporti, che sono aggregati di *monadi* le quali sono a loro volta corpuscoli unitari, dotati di grandezza, ma talmente piccoli da risultare non ulteriormente divisibili e, comunque, non nulli.
Dunque, ogni corpo è composto di monadi ma non disposte a caso, bensì secondo un ordine geometrico-aritmetico prestabilito. Pitagora è quindi finitista così come sarà finitista Platone. Nella sua scuola sorge il problema dell'incommensurabilità, originata dalla concezione di poter esprimere tutto come numero naturale di monadi o meglio, come rapporti tra numeri naturali.[2] Esistono casi in cui non è possibile esprimere con un numero razionale il rapporto fra le lunghezze di due segmenti:[3]



[1] Per Epicuro l'infinito è il principio positivo del divenire dei corpi, mentre il principio negativo è il vuoto. Questa affermazione sarà ripresa dalla religione e dalla mistica che attribuiranno un significato ontologico all'infinito.

[2] A questo proposito risulta molto significativa l'affermazione di Platone contenuta nel Teeteto: «*È vergognosa l'ignoranza di chi crede che tutte le coppie di grandezze siano tra loro commensurabili*».

[3] Sarà poi Archita (¯430-¯360) a dimostrare che il rapporto tra questi due segmenti non si può esprimere come rapporto tra due numeri naturali.

La scoperta dell'incommensurabilità della diagonale e del lato di un quadrato (Kuyk, 1982), sembra risalire ad Ippaso di Metaponto (V sec. a. C.) che paga questo affronto alla scuola pitagorica con la vita.

La crisi era tra intuizione e ragione ed è forse il primo caso in cui la seconda va in senso contrario alla prima. Gli enti della matematica non sono più sensibili, ma diventano puramente intelligibili, aprendo così la strada all'infinito. Questo rappresenta forse il primo avvio verso la concezione della matematica come appartenente al mondo delle idee che dominerà poi la filosofia greca.

Parmenide di Elea ($^-$504).[4] Nel suo Poema: *Perì Physeos (Sulla Natura)* pone in netta antitesi due modi diversi di interpretare la verità: una verità di origine sensibile (*doxa*) e una Verità contrapposta di carattere razionale (*Alétheia*). L'uomo può servirsi della *doxa*, ma solo per il fine supremo di raggiungere l'*Alétheia*. Nella *doxa* si esclude l'infinito per evitare paradossi (es.: lancio di una freccia a pochi passi dalla fine dell'Universo), mentre nell'*Alétheia* che rappresenta la vetta spirituale, la massima conoscenza, l'*essere* unico, immutabile, indivisibile, eterno, immobile si concepisce l'infinito come totalizzante (che comprende tutto), ma *limitato («L'universo è limitato perché se gli mancasse il limite tutto gli mancherebbe*»).

Zenone di Elea (nato circa nel $^-$489). Allievo di Parmenide, è riuscito a raccogliere l'eredità del suo maestro, fortificandone le posizioni contro le critiche che le ipotesi di immobilità ed unità dell'essere si erano attirate. Gli argomenti di Zenone sono celeberrimi paradossi che rappresentano confutazioni delle idee di pluralità e movimento (quelli detti: Dicotomia, Achille e la Tartaruga, la Freccia, lo Stadio). Come afferma Marchini (2001): *«Per Zenone il ritenere l'infinito un attributo dell'essere, per l'inesauribilità dell'infinito stesso, comporta irrazionalità ed impossibilità dell'essere. È questa la visione dell'infinito in atto contro cui argomenta*». Lo stato paradossale di affermazioni concernenti l'infinito ha generato a quei tempi talmente tanta confusione, da portare in seguito Aristotele a vietarne l'uso, per evitare questo «*Scandalo*». Fu quindi grazie alla posizione astratta di Parmenide e alle creazioni

[4] La vita di Parmenide ha datazioni un po' incerte, ma ricordiamo il $^-$504 che corrisponde alla LIX Olimpiade che secondo Diogene Laerzio rappresenta il periodo di massima fioritura dell'opera di Parmenide.

paradossali di Zenone, che i matematici greci sono stati costretti a fare i conti davvero con l'infinito, pur cercando disperatamente di evitarlo.[5]

Melisso di Samo (fine ˉVI sec. - inizio ˉV sec.). Nel tentativo di dimostrare le tesi parmenidee che partono dall'idea dell'*essere unico*, evolve in parte il pensiero del maestro negando che la determinatezza dell'essere implichi la sua finitudine. Concepisce perciò un essere spazialmente infinito, non dovendo ammettere nulla al di fuori di sé.

La ribellione a Parmenide iniziò con i Pluralisti dei quali vale la pena ricordare **Anassagora di Clazomene (ˉ500-ˉ428)**. Filosofo che dedicò la vita a riflessioni sulla materia e sui suoi componenti, ideando il termine *omeomerie* per indicare elementi infinitesimi, non ulteriormente divisibili, distinguibili tra loro per qualità diverse. Per i nostri scopi risultano significative le seguenti asserzioni contenute nella sua opera *Sulla Natura*: *«Tanto nel grande quanto nel piccolo vi è lo stesso numero di particelle (…) rispetto al piccolo non c'è un minimo, ma c'è sempre un più piccolo, perché l'esistente non può essere annullato (per divisioni successive). Così, rispetto al grande, c'è sempre un più grande, e il più grande è uguale al più piccolo come pluralità, e in se stessa, ogni cosa pensata come somma d'infinite parti infinitesime è insieme grande e piccola»* (in termini moderni, è ovvio che un segmento più corto è incluso in uno più lungo, ma se pensiamo entrambi questi enti come insiemi di punti, allora vedremo che tanto in un segmento più lungo quanto in uno più corto vi è lo stesso numero di punti). Concetto che riprenderemo diverse volte nel corso della storia, ma che sarà rigorosamente sistemato solo dai matematici tedeschi del XIX secolo. Nell'affermazione di Anassagora sono presenti le nozioni di infinito ed infinitesimo, poste a stretto contatto. In certi punti sembra che la suddivisione infinita sia intesa in senso potenziale, in altri punti invece sembra che Anassagora si riferisca ad un infinito attuale.

La ribellione a Parmenide proseguì poi con i Sofisti come: **Protagora di Abdera (ˉ485-ˉ410)** e **Gorgia di Leontini (ˉ483-ˉ375)** che affermarono la superiorità dell'esperienza sensibile rispetto alla verità razionale, provocando diversi influssi sulla matematica e sul nostro tema: basti pensare che in base all'esperienza sensibile una circonferenza ed una sua tangente non hanno in comune un solo punto di tangenza, ma un intero tratto.

[5] Dal punto di vista didattico, molte ricerche attuali vertono sul dibattito tra la verità di ragione e la verità sensibile: Hauchart e Rouche, 1987; Nuñez, 1994; Bernardi, 1992a,b.

Seguirono gli Atomisti tra cui: **Leucippo di Abdera ($^{-}$460 circa)** maestro di **Democrito di Abdera ($^{-}$460-$^{-}$360 circa)** secondo i quali il vuoto esiste ed in esso si muovono gli atomi. In particolare Democrito aveva ben distinto i due problemi della infinita divisibilità: da un punto di vista matematico astratto, ogni ente è infinitamente divisibile in parti (in particolare i segmenti ed i solidi), mentre da un punto di vista fisico, le cose cambiano: c'è un limite materiale alla divisibilità ed è un corpuscolo unitario, indivisibile, materiale che è detto atomo; anzi, sembrano esserci più tipi di atomi, di dimensioni diverse.

Aristotele di Stagira ($^{-}$384-$^{-}$322). Così come aveva fatto Platone, e ancora prima Socrate, accetta l'idea parmenidea di un universo limitato e questo è consono alla natura della filosofia greca che ha ribrezzo del disordine causato da una materia in stato caotico: i limiti che racchiudono l'universo, in un certo qual modo lo organizzano sul piano razionale e lo rendono accettabile ad una logica umana: *«… dal momento che nessuna grandezza sensibile è infinita, non è possibile che ci sia il superamento di ogni grandezza determinata, perché in tal caso ci sarebbe qualcosa di maggiore del cielo».*

Per quanto riguarda l'infinito, nella filosofia e nella matematica greca si percepiva un clima di profondo imbarazzo nei confronti di questo argomento, che portava a contraddizioni o, almeno, a paradossi, e questo segnò il pensiero del grande stagirita. Fu proprio Aristotele a rivelare una duplice natura dell'infinito: "in atto" e "in potenza". "In atto" significa che si presenta in un colpo unico, tutto in una volta, come un dato di fatto; "in potenza" invece, vuol dire che si dà una situazione che in quell'istante in cui se ne parla è finita, ma con la sicurezza che si può sempre andare al di là del limite posto (che quindi non è un limite definitivo): *«Una cosa viene da un'altra senza fine, e ciascuna di esse è finita, ma ve ne sono sempre di nuove».*

In sintesi: *«[l'infinito attuale è] quello al di là del quale non c'è più nulla; … [l'infinito potenziale è] quello al di fuori del quale c'è sempre qualcosa»* (*Fisica*).[6]

Aristotele bandì ai matematici di far uso dell'infinito *attuale*, consentendo un uso esclusivo dell'infinito *potenziale*: *«Sicché l'infinito è in potenza, ma non in atto»*. Così per Aristotele un segmento non è composto di infinite parti (in atto) ma è divisibile infinite volte (in potenza).

[6] Molte sono le ricerche "aristoteliche" sugli usi potenziali ed attuali del termine infinito, a volte considerato come aggettivo ed a volte come sostantivo: Moreno e Waldegg, 1991; Tsamir e Tirosh, 1992.

«Comunque questo nostro discorso non intende sopprimere per nulla le ricerche dei matematici per il fatto che esso esclude che l'infinito per accrescimento sia tale da non poter essere percorso in atto. In realtà, essi stessi, allo stato presente, non sentono il bisogno dell'infinito (e in realtà non se ne servono), ma soltanto di una quantità grande quanto essi vogliono, ma pur sempre finita (…) Sicché, ai fini delle loro dimostrazioni, a loro non importerà affatto la presenza dell'infinito nelle grandezze reali» (Fisica, III, cap. 7, 207b 27).

Questo divieto fu percepito per lungo tempo come un vero e proprio dogma: più di uno studioso nel Medioevo e nel Rinascimento, ma anche in tempi a noi assai più vicini, si trovò ad un passo dal potere "dominare" l'infinito con i suoi paradossi, ma la pesante eredità dello stagirita rimarrà sempre presente.
Aristotele mise in evidenza anche la distinzione tra infinito per addizione e infinito per divisione (*Fisica*) che è spiegato in Zellini (1993) in questo modo: *«Se si considera un'unità di lunghezza e la si addiziona a se stessa infinite volte si ottiene certamente una distanza illimitata non percorribile in un tempo finito. Ma se ci si prefigura l'illimitato secondo un procedimento in qualche modo opposto, cioè dividendo per dicotomia l'unità di lunghezza in infiniti intervalli, ecco che l'infinità può considerarsi in qualche modo esauribile entro un intervallo limitato di tempo».*

Euclide (¯300). Nella sua sistemazione della matematica contenuta nell'opera immortale e celebratissima: *Elementi*, accetta la scelta di Aristotele. Ossia, per Euclide il problema dell'infinito è ben presente e fa di tutto per evitarlo.
- Nella definizione XIV del I libro stabilisce che le figure sono tutte al finito.
- Nel postulato II del I libro non usa il termine *retta*, ma parla di un ente geometrico che chiama: *eutheia grammé* (*linea terminata*) per il quale richiede tramite un postulato che si possa *«prolungare continuamente per diritto».*
- Il V e più famoso postulato parla ancora di *eutheia grammé* e non di *retta*; in particolare richiede esplicitamente il prolungamento illimitato di due linee terminate e per questo verrà il più possibile "evitato" da Euclide nella trattazione successiva.
- Nella proposizione I del libro VII, applica il procedimento della discesa: *«Se si prendono due numeri disuguali e si procede a sottrazioni successive, togliendo di volta in volta il minore dal maggiore, la differenza dal minore e così via, se il numero che rimane non divide mai quello che immediatamente lo precede, finché rimanga soltanto l'unità, i numeri*

dati all'inizio saranno primi tra loro». Presi due numeri, questo procedimento termina sempre dopo una reiterazione finita di passi.

- Nella proposizione XX del IX libro non dimostra che «*Esistono infiniti numeri primi*», ma che «*I numeri primi sono di più che ogni proposto numero complessivo di numeri primi*», in sintonia con la posizione di Eudosso da Cnido ($^{-}$408-$^{-}$355)[7] di parlare di infinito senza mai nominarlo.
- Una delle più celebri nozioni comuni (*coinaì énnoiai*) scelte da Euclide è: «*Il tutto è maggiore della parte*» che contrasta l'intuizione avuta da Anassagora.
- Ma non sempre la presenza della problematica connessa con l'infinito si rivela per prolungamento o, come dice Aristotele, per accrescimento; in Euclide rientra anche l'infinitesimo con la dimostrazione del fatto che: l'*angolo di contingenza* è minore di qualsiasi *angolo rettilineo*; ciò nega il postulato posto da Eudosso da Cnido, chiamato oggi postulato di Eudosso-Archimede, per questo nel V libro degli Elementi, Euclide afferma: «*Due grandezze hanno rapporto tra loro quando ciascuna di esse, moltiplicata per un numero [naturale] opportuno, supera l'altra*», escludendo così, in un colpo solo, magistralmente, dall'insieme degli angoli rettilinei, i mistilinei (e il pericolo di dover parlare di "infinitesimi attuali") (D'Amore, 1985).

L'opera di Euclide, per quanto riguarda l'infinito, è quindi improntata su una scelta filosofico-aristotelica: egli rifiuta del tutto l'infinito attuale ed accetta e fa uso del solo infinito potenziale; in questa scelta è estremamente rigoroso e non si concede deroghe.

Archimede di Siracusa ($^{-}$287-$^{-}$212). Tratta il metodo di Esaustione, che si basa sulla divisione delle figure geometriche (piane o solide) in infinitesimi (attuali) e in infinite sezioni. Archimede affronta così con disinvoltura questioni assai delicate, dimostrandosi poco avvezzo alle remote filosofie, ma mettendo così in evidenza risultati assai arditi e significativi. A questo punto viene lecito chiedersi se Archimede fosse a conoscenza della problematica dell'infinito; di questo ne abbiamo la testimonianza nella sua opera *Arenario*. Proprio in questo testo, Archimede calcola quanti sono i granelli di sabbia contenuti in una sfera il cui raggio è dato dalla distanza della Terra dal Sole. La risposta è approssimabile con 10^{63} e per poterla dare Archimede si deve inventare un sistema numerico che vada al di là

[7] Eudosso da Cnido riesce ad elaborare una teoria delle proporzioni, mediante la quale si può operare anche sui rapporti senza aver bisogno dell'infinito in atto. Si deve poi sempre a Eudosso il metodo di esaustione, anch'esso volto ad eliminare l'infinito in atto. Entrambi questi metodi non eliminano completamente l'infinito, ma privilegiano l'infinito in senso potenziale.

delle *miriadi*.[8] Il numero più grande raggiunto da Archimede è *una miriade di miriadi di unità del miriardesimo ordine e del miriardesimo ciclo*, cioè $M^{(M^2)} = (10^8)^{(10^{16})}$, molto più grande dei "soli" 10^{63} granelli di sabbia che gli servivano. Questo dimostra la necessità di numeri sempre più grandi dei diecimila offerti dalla lingua greca antica, ma allo stesso tempo si nota la preoccupazione di non "esagerare" con il rischio di coinvolgere l'"infinito": risulta ancora molto presente il bisogno di porre un limite ben preciso.

Tito Lucrezio Caro (¯10-55). Ricordato per il *De Rerum Natura*: *«Supponi per un momento che lo spazio sia limitato e che qualcuno si porti all'estremo confine e lanci una freccia…»,* frase che racchiude l'idea di un Universo illimitato (L.I, 968-973).

Clemente Alessandrino (150 - 215). L'infinito viene visto come attributo divino. Esso viene applicato in senso positivo alla divinità ed in senso negativo alla nostra incapacità di cogliere la divinità nella sua ineffabilità.

Diofanto di Alessandria (250). Introduce le variabili numeriche con un simbolismo piuttosto raffinato tanto da essere molto studiato e lodato con stupore dal suo "allievo" Fermat nel XVII secolo. Nell'uso algebrico delle variabili numeriche è celato il concetto di infinito.

S. Basilio Magno (330-379). L'infinito diviene sinonimo di pienezza della divina perfezione. Da questo punto in poi l'infinito viene sempre citato in connessione con gli attributi divini e i filosofi si preoccupano di dimostrare per vie diverse tale qualità dell'Essere Supremo.

Agostino di Tagaste (345-430). Nella sua opera *De Civitate Dei* ammette l'infinità attuale dei numeri naturali: *«Dio conosce tutti i numeri in modo attuale. L'infinito attuale è in mente Dei»*.[9]

Proclo (410-485). L'infinito assume ancora un connotato potenziale laddove si espande per gradi a partire dagli intelligibili, in altri punti invece Proclo sembra propendere per l'infinito

---

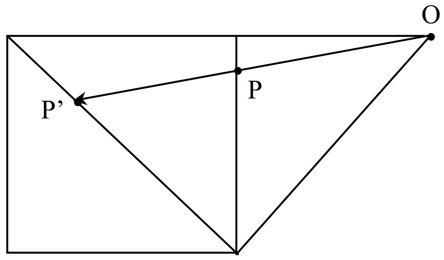
[8] Come riferisce Rucker (1991): *«I Greci non avevano la notazione di esponenziazione, ma solo di moltiplicazione, inoltre il numero massimo per cui avevano un nome era la miriade, pari a 10.000 ossia a 10^4»*.

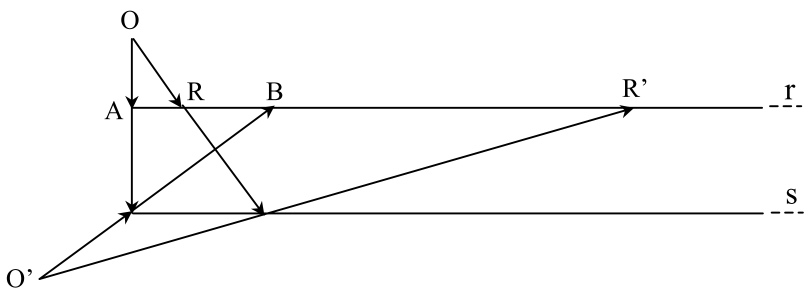
[9] Nella seconda metà del XIX secolo Cantor citerà Agostino tra i suoi ispiratori per dare fondamento alla teoria degli insiemi.

attuale soprattutto quando riconduce finito ed infinito all'Uno: *«Tutto ciò che esiste in qualche modo consta di finito e di infinito, per effetto del primo essere… [poiché] è chiaro che l'essere primo comunica a tutte le cose il limite assieme all'infinità, essendo esso stesso composto di questi»* (*Elementa teologica*).

Assume importanza la distinzione tra infinito filosofico e infinito matematico.

Ruggero Bacone (1214-1292). Nell'opera *Opus Maius* (1233) scrive che si può stabilire una corrispondenza biunivoca (come diciamo noi oggi) tra i punti di un lato di un quadrato ed i punti di una diagonale dello stesso, nonostante abbiano diversa lunghezza (idea ripresa successivamente da Galileo). E che una simile corrispondenza biunivoca si può avere (per traslazione o per proiezione doppia) tra due semirette (una di origine A ed una di origine B), situate sulla stessa retta *r*.





Ne conclude che l'infinito matematico in atto non è logicamente possibile: il tutto sarebbe non maggiore della parte, ma questo risulterebbe anti-Euclide, cioè anti-Aristotele, il che a qui tempi era ancora sentito come vietato.

Tommaso d'Aquino (1225-1274). In *Summa Theologiae* abbiamo la conferma dell'idea dell'infinito attuale in *mente Dei*. In questo testo, Tommaso ammette la possibilità di diversi livelli d'infinità nell'infinito, mentre in altri punti afferma che l'unico infinito attuale è Dio. Per le cose invece, egli riserva l'infinito in potenza e di conseguenza attribuisce all'infinito matematico solo l'aspetto potenziale: *«… resta provato chiaramente che Dio è infinito e perfetto… Quindi, come Dio, nonostante abbia una potenza infinita, tuttavia non può creare* *qualcosa di increato (il che sarebbe far coesistere cose contraddittorie), così non può creare cosa alcuna che sia assolutamente infinita».*

Guglielmo di Ockam (1290-1350). Scrive in *Questiones in quator libros sententiarum*: *«Non è incompatibile che la parte sia uguale o non minore del suo tutto; ciò accade ogni qualvolta una parte del tutto è Infinita. Ciò accade anche nella quantità discreta o in una qualunque molteplicità, una parte della quale abbia unità non minori di quelle contenute nel tutto. Così in tutto l'Universo non ci sono punti in numero maggiore che in una fava, perché in una fava ci sono infinite parti. Sicché il principio che il tutto è maggiore della parte vale soltanto per tutti i composti di parti integranti finite»*. Guglielmo è accusato di eresia nel 1324 e viene trattenuto in interrogatorio ad Avignone per 4 anni, poi fugge e si rifugia dapprima a Pisa e poi a Monaco di Baviera; risulta ancora assai pericoloso contrastare il pensiero di Aristotele.

Nicola d'Oresme (1323-1382). Intuì le coordinate che oggi sono dette cartesiane. Stabilisce quanto vale la seguente "somma" *s* coinvolgendo un uso dell'infinito assolutamente moderno:

$$s = \underbrace{1+\frac{1}{2}}_{>1}+\underbrace{\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>1/2}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{>1/2}}_{>1}+\underbrace{\ldots}_{\ldots}$$

Dato un qualsiasi numero naturale M (comunque grande), dopo un certo numero di addendi, s>M; dunque: s supera qualsiasi numero naturale per quanto grande.

Nicolò da Cues (1400 o 1401-1464). Considera la matematica come un ideale di perfezione, per questo ritiene necessario un cosmo ordinato secondo "peso, numero e misura". I suoi riferimenti all'infinito sono sempre a carattere matematico e riguardano l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo. Nicolò da Cues rappresenta l'ultimo dei medioevali di chiaro stampo neo-platonico; l'infinito è poco presente come cardinale, ma appare come ordinale o come non meglio precisata "vastità". Com'è nello spirito medievale, Nicolò confonde l'infinito con l'illimitato oppure talvolta con l'indefinito (questa confusione sarà presente fino al XIX secolo e non solo, si vedano le affermazioni degli insegnanti nel paragrafo 3.7.1).

Nella sua opera maggiore, *Dotta ignoranza*, si trova una delle analogie più famose e amate dall'Autore: *«L'intelletto sta alla verità come il poligono ad n lati sta al cerchio. Quando n* *tende all'infinito, il poligono tende al cerchio; così, la verità è limite dell'intelletto all'infinito»* (Cap. III, L.I). Sempre in quest'opera, appare un paradosso relativo all'infinito attuale simile a quelli trattati da Galilei e da Bolzano: *«Se una linea è costituita da un numero N infinito di segmenti lunghi un piede, ed un'altra linea è costituita da un numero M infinito di segmenti lunghi due piedi, le due linee sono lunghe nello stesso modo infinito; se ne può concludere che "nella linea infinita un piede non è più piccolo di due piedi"»* (L.I, Cap. XVI). Ancora, nell'opera *Le congetture*, si trova un'argomentazione di carattere zenoniano, mal condotta, tesa a dimostrare che due linee qualsiasi hanno lo stesso numero di punti (L.I, Cap. IV). Come abbiamo rilevato, questa questione era già stata discussa da millenni, ad esempio da Anassagora e da Ruggero Bacone e sarà risolta soltanto alla fine del XIX secolo grazie all'opera di Cantor. Circa poi l'idea di maggiore, Nicolò afferma: «*non si conosce nessun numero infinito e nessun massimo dato*» (*Le congetture*, L.I, cap. XI).

Pare di poter concludere che una vera e propria coscienza dell'infinito sia ancora da svilupparsi; solo nel Rinascimento, grazie alla ricerca degli Artisti sulla prospettiva ed alle acute riflessioni di Galilei, doveva accadere il miracolo: Bonaventura Cavalieri ed Evangelista Torricelli riuscirono a "vedere" con acutezza quel che i Medievali stentavano a "vedere".

1.1.2 L'infinito nel Rinascimento

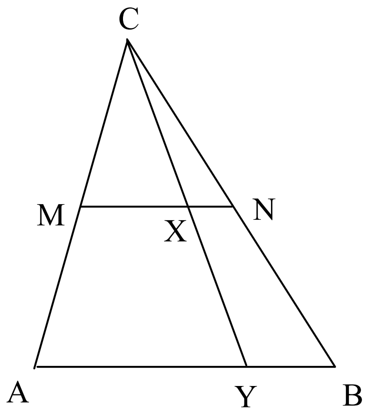
Nel Rinascimento l'infinito è estremamente presente, ma non nell'"Universo numerico", bensì nel mondo della geometria e dell'arte (che a quell'epoca coincidevano): **Piero della Francesca (1406-1492)** che regala al mondo il *De Prospectiva Pingendi*, opera matematico-pittorica di pregio inestimabile; **Girolamo Cardano (1501-1576)** che scrive il trattato *De Subtilitate* (1582) sulla sottigliezza, cioè su qualche cosa che potremmo anche chiamare "grandezze infinitesime", dove parla, in particolare, dell'angolo di contingenza.

Sempre nel Rinascimento risorge con piena consapevolezza il "metodo degli indivisibili" che fu già di Archimede; ci lavorano: **Leonardo da Vinci (1452-1519)**, **Luca Valerio (1552-1618)**, **Galileo Galilei (1564-1642), Paul Guldin (1577-1643)**, **Bonaventura Cavalieri (1598-1647)**, **Evangelista Torricelli (1608-1647)**.

Galileo Galilei (1564-1642). Riprende l'impostazione di Democrito, estesa però dalla geometria a classi più ampie di problemi analitici. L'ultima opera: *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1958) del 1638, comprende la maggior parte delle considerazioni del pisano sui paradossi dell'infinito.

L'infinito attuale è presente in diverse occasioni. Secondo Galileo le linee, ma anche gli oggetti concreti che si trovano in natura sono formati da un continuo (infinito attuale) di parti piccole a piacere ma misurabili (e quindi a loro volta divisibili). *«Ogni parte (se parte si può chiamare) dell'infinito è infinita; sì che se bene una linea di cento palmi è maggiore d'una di un palmo solo, non però i punti di quella sono più dei punti di questa, ma e questi e quelli sono infiniti».*

Le considerazioni di geometria lo portano così a cogliere che l'infinito può entrare in collisione con la VIII nozione comune di Euclide: «*Il tutto è maggiore della parte*». Basta disegnare un triangolo e vedere che tra il lato AB ed il segmento MN, che congiunge i punti medi degli altri due lati, deve esistere una corrispondenza biunivoca ottenuta congiungendo i punti di AB con C. Tutto ciò contro l'intuizione che porta a far credere che AB, dato che ha lunghezza doppia rispetto a MN, sia formato da un numero maggiore di punti.



> *«Queste sono di quelle difficoltà che derivano dal discorrere che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno agli infiniti, dandogli quelli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate; il che penso sia inconveniente, perché stimo che questi attributi di maggioranza, minorità ed equalità non convenghino a gl'infiniti, dei quali non si può dire, uno esser maggiore o minore o eguale all'altro»* (Galilei, 1958, pag. 43).

In àmbito non geometrico, siano:

0 1 2 3 4 … la successione dei numeri naturali (N)

0 1 4 9 16 … la successione dei quadrati perfetti (Q_N)

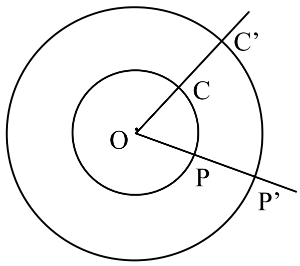
Q_N è strettamente contenuta in N, ciò porta a dire, seguendo il pensiero di Euclide, che N contiene più elementi di Q_N, ma per ogni numero naturale c'è un ben determinato suo quadrato, cioè c'è un ben determinato elemento di Q_N (e viceversa). Da questo si deduce, con ovvia intuizione, che ci sono tanti elementi in N quanti in Q_N (*paradosso di Galilei*).[10] Questa trattazione era presente anche nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi*, laddove si accennava alle leggi di caduta dei gravi.

> *«Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti esser tutti i numeri [naturali], infiniti i quadrati, infinite le loro radici, né la moltitudine dei quadrati esser minore di quella di tutti i numeri [naturali], né questa maggiore di quella, ed in ultima conclusione, gli attributi di uguale, maggiore e minore non aver luogo negli infiniti, ma solo nelle quantità terminate»* (Galilei, 1958, pag. 45).

In Galileo si prefigura la definizione di insieme infinito, quale sarà presentata in seguito da Dedekind.

Siamo di nuovo ad un punto delicato della storia dell'infinito: tutto il meccanismo creato da Aristotele per salvaguardare almeno uno dei possibili usi dell'infinito da parte dei matematici è stato demolito, ma i tempi non sono ancora maturi e occorrerà aspettare ancora qualche secolo prima che vi sia piena consapevolezza da parte dei matematici di poter "dominare" con mezzi tecnici, neppur troppo sofisticati, l'infinito.

Evangelista Torricelli (1608-1647). Allievo di Galileo, spinto dal maestro ad entrare in contatto con la Geometria degli Indivisibili di Cavalieri, arrivò a concezioni ardite circa l'infinito e gli infinitesimi (che trattò esplicitamente in senso attuale) giungendo perfino ad intuire i punti impropri delle iperboli e a pensare all'area finita non più legata, come sembrava necessario e invece non è, a figure limitate. Torricelli riconosce inoltre che due circonferenze concentriche (di lunghezze diverse) sono formate dallo stesso numero di punti, basta prendere il centro comune, come origine di una proiezione.



[10] Molte ricerche in campo didattico vertono sulle considerazioni di Galileo: Duval, 1983; Tsamir e Tirosh, 1994; Waldegg, 1993.

René Descartes (1596-1650) e **Pierre de Fermat (1601-1665).** Tutti e due hanno a che fare con gli “infinitesimi” per risolvere il problema della determinazione delle tangenti ad una curva.

Importante è il fatto che Descartes riuscì a vedere con occhi nuovi la geometria: tutti gli enti geometrici e le loro proprietà vennero espressi in linguaggio algebrico. Affrontò anche il discorso sull’infinito, ma…: *«… mai ci affaticheremo in discussioni intorno all’infinito. Infatti, dato che siamo finiti, sarebbe assurdo che noi stabilissimo alcunché su tale argomento e tentassimo in tal modo di renderlo finito ed impadronircene…»*. Con Descartes compare una distinzione tra *infinito*, attributo proprio di Dio, e *indefinito*, usato per indicare grandezze illimitate in quantità o in possibilità.

Fermat, invece a quanto risulta, non accenna neppure in un’occasione all’argomento.

Eppure lo sviluppo della geometria analitica ebbe molta influenza sulla problematica dell’infinito dato che obbligò ad equiparare l’infinità dei numeri con l’infinità degli enti geometrici, contribuendo enormemente al passaggio dalla preistoria alla storia di questo argomento, soprattutto per due motivi:

1. finalmente può nascere l’Analisi Matematica (e quindi trovare una sistemazione razionale l’infinito);
2. finalmente troveranno risposta le domande: Quanti sono i punti di un quadrato e di un suo lato?, Quante sono le rette del piano? …

Su quest’ultimo punto per secoli i matematici hanno fatto confusione; i fraintendimenti saranno definitivamente chiariti solo grazie a Cantor e a Dedekind.

Blaise Pascal (1623-1662). Sembra propendere per l’infinito in atto: *«L’unità aggiunta all’infinito non l’accresce di niente… Il finito si annienta di fronte all’infinito e diventa un puro niente… Noi sappiamo che c’è un infinito e ne ignoriamo la natura. Poiché sappiamo che è falso che i numeri sono finiti, è vero dunque che c’è un infinito del numero… Noi dunque conosciamo l’esistenza e la natura del finito perché siamo finiti ed estesi come lui. Conosciamo l’esistenza dell’infinito e ignoriamo la sua natura, perché ha estensione come noi ma non ha confini come noi. Ma non conosciamo né l’esistenza né la natura di Dio, perché non ha estensione né confini. Però mediante la fede conosciamo la sua esistenza…»* (*Infinito. Niente*).

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Propone tre specie di infinito: *infimo*, nella quantità; *medio*, come totalità di spazio e tempo; *massimo*, che rappresenta Dio soltanto, come fusione di ogni cosa in uno. Come riferisce Kuyk (1982): *«In Leibniz, ogni monade aveva un'infinità attuale di percezioni e ogni corpo era un'infinità attuale di monadi»*. Inoltre, Leibniz tratta gli infinitesimi con una certa naturalezza, raggiunta grazie agli sforzi dei matematici medioevali e rinascimentali, ma in lui si riscontra una sorta di preoccupazione e diffidenza nei confronti di queste grandezze, manifestata in una lettera a Fouchet: *«Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur»*.

Con **Isaac Newton (1642-1727)** nasce finalmente in modo esplicito l'Analisi Matematica, e viene diffusa e resa grande grazie agli sforzi di diversi matematici, tra i quali **Carl Friederich Gauss (1777-1855)** il quale però ancora asserisce: *«… protesto contro l'uso di una grandezza infinita come un tutto compiuto, ciò che in matematica non è mai stato…»*. L'infinito è presente, ma non viene esplicitamente sviscerato.
La preistoria di questo argomento è dura a morire e come vedremo nei capitoli 3 e 4 vive ancora nel profondo della maggioranza delle persone.

Immanuel Kant (1724-1804). Fu uno dei primi a "debellare" il pericolo derivante dal modo spregiudicato in cui i pensatori del diciassettesimo e diciottesimo secolo avevano affrontato le nozioni di infinità (attuale) e infinitesimo (attuale). Kant scoprì la presenza di antinomie nel senso *costitutivo*[11] di infinito (si veda la prima e seconda antinomia della ragion pura), che si riducevano alla seguente: quando il mondo, o qualsiasi cosa in esso contenuta, è considerato finito, la mente è capace di pensarne un'estensione; quando il mondo, o qualsiasi cosa in esso contenuta, è considerato attualmente infinito, la mente non può pensarlo affatto. In entrambi i casi, la mente è incoerente con il mondo: il finito è troppo piccolo per la ragione e l'infinito (attuale) è troppo grande (Kant, 1967). Come riferisce Kuyk (1982): *«La soluzione proposta da Kant consisteva nel considerare l'infinito non in senso costitutivo, ma in senso regolativo. (…) Con questo spostamento di significato, la nozione di infinito passa dall'ontologia all'epistemologia»*.

La polemica tra infinito attuale e potenziale continua ancora. Nel concorso bandito dall'Accademia di Berlino [sotto la presidenza di Lagrange (1736 - 1813)] per un lavoro che

[11] Per Newton e per Leibniz, l'infinito aveva un significato *costitutivo*.

chiarisse il concetto di infinito in matematica, il vincitore **S. L'Huilier (1750-1840)** propone un ritorno all'infinito classico, aristotelico, contro l'accettazione dell'infinito in atto che trovava il suo propugnatore in Leibniz.

1.2 Dalla preistoria alla storia del concetto di infinito matematico

L'infinito in atto ricompare ed acquista un ruolo estremamente importante a partire dalla seconda metà del XIX secolo ed attualmente invade tutta, o quasi, la matematica dei nostri giorni.

1.2.1 Bernard Bolzano (1781-1848)

Tra il 1842 e il 1848 scrive *I Paradossi dell'Infinito* che escono a stampa postumi nel 1851 (Bolzano, 1965). Si tratta di una raccolta di 70 brevi paragrafi dei quali ne riportiamo il contenuto di alcuni:

§13: L'insieme delle proposizioni e "verità in sé", è infinito.

Wissenschaftslehre (proposizione in sé): *«Per W. io intendo un qualunque enunciato asserente che qualche cosa è o non è; senza tener conto se questo enunciato sia vero o falso, se esso sia stato espresso o non espresso a parole da qualcuno».* Se una W. è vera, si chiama Wahrheit an sich (verità in sé).

Sia A_0 una Wahrheit an sich; sia A_1 la nuova W. an sich: «A_0 è vera»; sia A_2 la nuova W. an sich: «A_1 è vera»; …

Sia $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$. $\mathcal{A}$ è "più grande" di ogni insieme finito ed è dunque infinito. Inoltre si possono mettere in corrispondenza biunivoca gli elementi di $\mathcal{A}$ con quelli dell'insieme dei numeri naturali N (basta porre la corrispondenza tra A_i ed i).

(Notiamo che l'insieme infinito $\mathcal{A}$ è costruito nella lingua o, meglio, sui vari livelli metalinguistici).

§20: Una notevole relazione tra due insiemi infiniti, consiste nella possibilità di accoppiare ciascun oggetto appartenente a un insieme con un oggetto appartenente all'altro, con il risultato che nessuno degli oggetti di entrambi gli insiemi rimanga senza corrispondente, e neppure compaia in due o più coppie (mette così in evidenza la corrispondenza biunivoca tra due insiemi infiniti).

§21: Nonostante la loro equinumerosità in membri, due insiemi infiniti possono tuttavia stare in una relazione di disuguaglianza per quel che riguarda le loro moltitudini, così che l'uno possa risultare una parte propria dell'altro. (Con abuso di linguaggio moderno: un insieme è infinito se e solo se può essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria. Tutto questo, prima di Dedekind; ma questa non è una definizione e, forse, non c'è neanche piena consapevolezza).

Eppure non si possono solo elogiare i risultati di Bolzano, nella sua opera sono annidati errori ed incertezze che hanno fatto storia. Eccone alcuni esempi:

§18: Se A è un insieme e se ne tolgono alcuni elementi, A contiene meno elementi di prima.

§19: Ci sono insiemi infiniti che sono più grandi o più piccoli di altri insiemi infiniti. La semiretta br è maggiore della semiretta ar, da cui si deduce che esistono infiniti di grandezza diversa

§29: C'è una certa confusione tra la cardinalità dell'insieme {1, 2, 3, …, n, …} e il valore 1 + 2 + 3 + … + n + …

§32: Guido Grandi (1671 - 1742) aveva posto il problema di calcolare la "somma" di infiniti addendi: s = a – a + a – a + a – a + … ed aveva avuto varie risposte:

$s = (a - a) + (a - a) + (a - a) + ... = 0 + 0 + 0 + ... = 0$

$s = a - [(a - a) + (a - a) + (a - a) + ...] = a - [0 + 0 + 0 + \ldots] = a - 0 = a$[12]

$s = a - (a - a + a - a + a - a + \ldots) = a - s = \Rightarrow 2s = a \Rightarrow s = a/2$ (questa soluzione proposta ancora dallo stesso Grandi,[13] piaceva molto anche a Leibniz, tanto che la difese).

La questione era ancora dibattuta ai tempi di Bolzano, tant'è che in questo paradosso, lui stesso scrive che nel 1830, uno scrittore che si firmava M.R.S., tentò di dimostrare la terza soluzione tra le precedenti sugli *Annales de Mathématique de Gergonne*, 20, 12; soluzione contro la quale si scaglia Bolzano con le seguenti parole: *«La serie racchiusa tra parentesi non ha evidentemente più lo stesso insieme di termini che aveva quella*

---

[12] Nel 1703, lo stesso Grandi scrive: *«Mettendo in modo diverso le parentesi nell'espressione 1 – 1 + 1 – 1 + 1 … io posso, volendo, ottenere 0 o 1. Ma allora l'idea della creazione ex nihilo è perfettamente plausibile».*

[13] Scrive D.J. Struik (1948): *«Egli* (Grandi) *otteneva il valore ½ sulla base dell'aneddoto del padre che lascia in eredità ai propri due figli una pietra preziosa, che ciascuno alternativamente deve conservare presso di sé per un anno. Così la pietra finisce per appartenere per metà a ciascuno dei figli».*

originariamente posta uguale a x (in questo caso è s) *bensì ad essa manca il primo termine a».*

§ 33: Precauzioni che devono essere osservate nel calcolo con l'infinito per non incorrere in "errori":

Sia S_1 la successione dei numeri 1, 2, 3, …

Sia S_2 la successione dei loro quadrati $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$

Ora: poiché tutti i termini di S_2 appaiono anche in S_1 e ci sono termini di S_1 che non appaiono in S_2, ciò parrebbe comportare che la somma dei termini di S_1 è maggiore della somma dei termini di S_2, invece la somma dei termini di S_2 è maggiore di quella dei termini di S_1, dato che S_1 ed S_2 si possono mettere in corrispondenza biunivoca e ciascun termine di S_2 è maggiore (con l'eccezione del primo termine) del suo corrispondente di S_1.

§ 40: Paradossi nel concetto di spazio: due segmenti di lunghezze diverse sono formati da un diverso numero di punti.

§ 48: Un volume contiene più punti della sua superficie laterale e questa più punti della curva che la racchiude.

Secondo ciò che afferma Cantor (1932, pag. 180), i problemi di Bolzano sono dovuti al fatto che manca ancora l'idea di cardinale di un insieme.[14] Vi è ancora molta strada da percorrere: la storia è appena cominciata.

Non possiamo non citare **Karl Weierstrass (1815-1897)**, considerato da molti colui che sistema l'Analisi Matematica da un punto di vista rigoroso. Lo ricordiamo in quanto studia con estrema serietà e consapevolezza l'infinito matematico. Alcuni leggono l'opera di sistemazione dell'Analisi partita da Cauchy (1789-1857) con la moderna definizione di limite e di funzione continua (la cosiddetta ε-δ definizione di Weierstrass), come un definitivo abbandono dell'infinito in atto nella matematica in favore dell'infinito potenziale (Marchini, 2001). Altri sostengono che l'opera di Weierstrass contribuì, anche dal punto di vista formale, all'evoluzione dell'infinitesimo potenziale verso l'infinitesimo attuale (Arrigo e D'Amore,

[14] Dal punto di vista didattico, numerose ricerche si sono indirizzate in questi anni ad analizzare le analogie tra le risposte "ingenue" degli studenti ed alcune affermazioni di Bolzano, come ad esempio il lavoro di Moreno e Waldegg del 1991.

1993; D'Amore, 1996; Bagni, 2001), evoluzione che proseguirà idealmente, nel XX secolo, con l'analisi non-standard (Robinson, 1974).[15]

1.2.2 Richard Dedekind (1831–1916)

Nel suo scritto *Continuità e numeri irrazionali* del 1872, il §4 ha un titolo affascinante e significativo: *Creazione dei numeri irrazionali*. Creazione, infatti, con il suo celebre metodo dei "tagli" o "sezioni", egli crea, a partire da Q, l'insieme R, aggiungendo appunto a Q i numeri irrazionali.[16]

I numeri reali sono le classi di sezioni definite in Q. (Q, <) è denso ma non continuo (dimostrazione dovuta sostanzialmente ai Pitagorici); (R, <) è denso e continuo[17] (Bottazzini, 1981).

Assai interessanti sono i rapporti epistolari di Dedekind con Cantor che saranno messi in evidenza nel paragrafo 1.2.4; qui ricordiamo che in quel periodo si sviluppava la necessità di definire il continuo e che proprio questi due matematici tedeschi fornirono forse i due più famosi assiomi di continuità (Bottazzini, 1981; Kuyk, 1982).

Come riferisce Rucker (1991), nel 1887 Dedekind pubblicò in uno dei suoi scritti più famosi: *Che cosa sono e a che cosa servono i numeri,* una dimostrazione dell'infinità del *Mondo dei pensieri* che egli chiamava *Gedankenwelt*. La dimostrazione è la seguente:

se *s* un pensiero: "*s* è un pensiero" è un pensiero;

""*s* è un pensiero" è un pensiero" è un pensiero;

"""*s* è un pensiero" è un pensiero" è un pensiero" è un pensiero;

…

Ecco che cosa dirà Cantor su questa "dimostrazione" in una sua lettera del 1905:

> *«Una molteplicità* [insieme] *può essere tale che l'assunzione che tutti i suoi elementi "siano insieme" conduce a contraddizione, in modo tale che sia impossibile concepire la molteplicità come un'unità, come una "cosa finita".*

---

[15] Negli anni '60 del XX secolo, Abraham Robinson (1918 - 1974) basandosi su importanti teoremi di Logica Matematica ed idee di Skolem (1887 - 1963) riesce a dare una teoria coerente in cui trattare infinitesimi ed infiniti attuali mediante l'analisi non-standard.

[16] Tra le ricerche che rivelano la grande difficoltà dell'idea di numero irrazionale ricordiamo: Fischbein, Jehiam e Cohen, 1994, 1995.

[17] Sulla difficoltà del concetto di densità nella scuola primaria si veda: Gimenez, 1990. Mentre a proposito del continuo presso studenti di 16-17 anni, si veda: Romero i Chesa e Azcarate Gimenez, 1994.

Chiamo queste molteplicità assolutamente infinite o molteplicità incoerenti. Come si può facilmente vedere, la "totalità delle cose pensabili", per esempio, è una molteplicità di questo tipo…».

(La ragione che porta ad escludere che l'insieme di tutti i pensieri sia un pensiero è che altrimenti tale insieme sarebbe elemento di sé stesso).

Risale a Dedekind la definizione di insieme infinito già intravista da Galileo: *"Un insieme è infinito quando si può mettere in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria".*

1.2.3 Georg Cantor (1845-1918)

Giovane matematico brillante, segue l'ortodossia della ricerca studiando problemi di matematica ben visti dalla nobiltà baronale accademica: il problema dell'unicità della scomposizione di una funzione reale in una serie trigonometrica. Ciò lo porta, e siamo nel 1872 (Cantor ha già 27 anni), a studiare un insieme infinito di punti giacenti su un intervallo ma non coincidente con l'intervallo stesso; così analizza come sono disposti i punti di una retta; le reciproche posizioni tra segmenti distinti; segmenti e rette… tutto ciò in modo attuale, senza più alcun imbarazzo di tipo filosofico.

Inizia così l'avventura di Cantor: dimentica la seriosa matematica accademica ed indaga l'infinito in sé.

Di seguito riportiamo alcuni brani tratti da *Gesammelte Abhandlungen* (1932, da pag. 374 a 404):

«L'infinito potenziale ha solo una realtà presa a prestito dato che un concetto di infinito potenziale rimanda sempre ad un concetto di infinito attuale che lo precede logicamente e ne garantisce l'esistenza.

L'infinito attuale si presenta in tre contesti: il primo è quello in cui si presenta nella forma più completa, in un essere completamente indipendente trascendente questo mondo, in Deo, ed è questo che io chiamo l'Infinito Assoluto; il secondo è quando si presenta nel mondo contingente, nel creato; il terzo è quando la mente lo afferra in abstracto, come grandezza matematica, numero o tipo d'ordine.

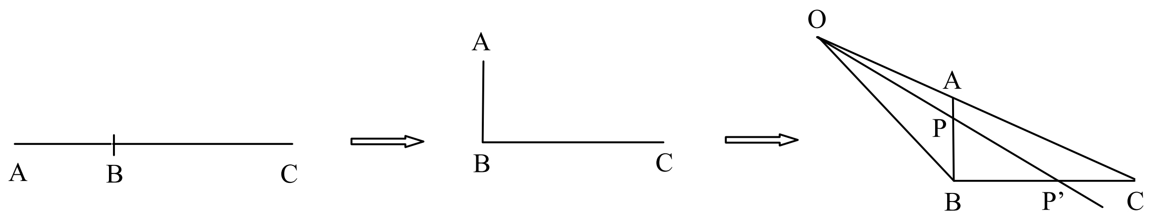
Voglio sottolineare chiaramente la differenza tra l'Assoluto e quello che io chiamo il Transfinito, cioè l'infinito attuale degli ultimi due tipi, poiché si tratta di oggetti evidentemente limitati, suscettibili di accrescimento, e quindi collegati al finito».

«La paura dell'infinito è una forma di miopia che distrugge la possibilità di vedere l'infinito attuale, anche se questo nella sua forma più alta ci ha creati e ci mantiene, e nelle sue forme secondarie di transfinito è presente intorno a noi e popola persino le nostre menti».

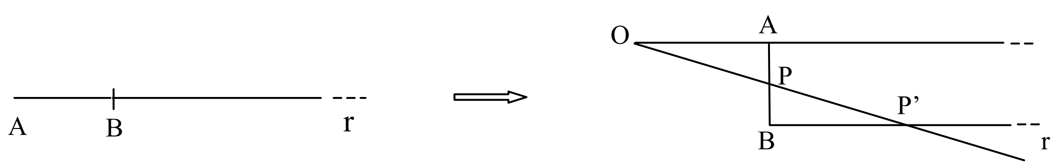
«È così diventata inevitabile l'esigenza di costruire il concetto di numero infinito attuale attraverso un'astrazione naturale opportuna, allo stesso modo che il concetto di numero naturale risulta dagli insiemi finiti con processo di astrazione».

Riportiamo alcuni risultati di Cantor espressi in termini moderni.

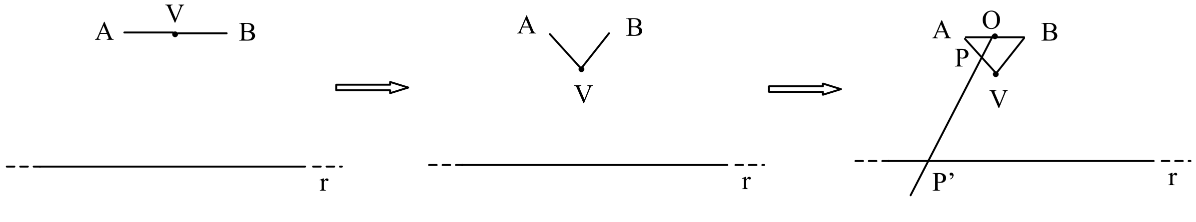
- Due insiemi si dicono equipotenti o equinumerosi se esiste tra di essi una corrispondenza biunivoca (si deve notare come non sussista nessuna distinzione tra insiemi finiti e infiniti).
- I segmenti AB e AC (pensati come insiemi di punti) sono equipotenti al di là della loro lunghezza, che non incide (qui e nel seguito le figure sostituiscono le dimostrazioni):



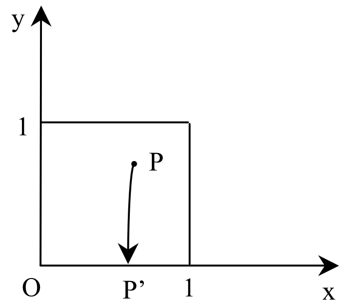
- L'insieme dei punti di un segmento è equinumeroso all'insieme dei punti di una semiretta:



- L'insieme dei punti di un segmento è equinumeroso all'insieme dei punti di una retta:



- L’insieme dei punti di un quadrato è equinumeroso all’insieme dei punti di un suo lato.
Prendiamo il quadrato unitario inserito in un sistema di coordinate cartesiane e quindi avente il lato in coordinate ascisse:



Nel dualismo di rappresentazione possibile dello stesso numero, per esempio: 0,40000000… 0,399999999…, scegliamo una delle due ed eliminiamo l’altra (per esempio scartiamo il caso del periodo 9).
Ogni punto interno al quadrato ha coordinate del tipo:
$P\ (0{,}a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots;\ 0{,}b_1b_2b_3\ldots b_n\ldots)$;
ad esso facciamo corrispondere sul lato (in coordinate ascisse) il punto ben preciso:
$P\ (0{,}a_1b_1a_2b_2\ldots a_n b_n\ldots)$
e viceversa.
Si è così individuata la corrispondenza biunivoca tra i punti di un quadrato e quelli di un suo lato.[18]
(All’inizio Cantor riteneva che la cardinalità **c** della retta fosse $\aleph_1$, la cardinalità del piano $\aleph_2$, dello spazio $\aleph_3$ e così via; invece con questa dimostrazione rivela che le cardinalità di tutti questi insiemi continui di punti, sono sempre uguali a **c**).

1.2.4 Corrispondenza Cantor-Dedekind

Brano di una lettera di Cantor a Dedekind del 2 dicembre 1873:

> *«A proposito delle questioni che mi hanno occupato in questi ultimi tempi, mi accorgo che, in questo ordine di idee, si presenta anche la seguente:*
> *una superficie (per esempio un quadrato compreso il suo contorno) può essere messa in relazione univoca* [noi oggi diremmo: in corrispondenza biunivoca] *con una curva (per esempio un segmento di retta, estremi compresi) in modo che ad*

[18] Sulle difficoltà che incontrano gli studenti liceali ad accettare questa dimostrazione si basa la ricerca di Arrigo e D’Amore del 1999.

ogni punto della superficie corrisponda un punto della curva, e reciprocamente ad ogni punto della curva un punto della superficie?

Mi sembra, in questo momento, che rispondere alla domanda presenti grosse difficoltà, sebbene, anche qui, si sta talmente inclini a dare una risposta negativa che quasi si considera superflua una dimostrazione».

Brano di una lettera di Dedekind a Cantor del 18 maggio 1874:

«… a Berlino, un mio amico, al quale ho esposto la stessa difficoltà, mi ha dichiarato che la cosa era per così dire assurda, perché si capisce benissimo che due variabili indipendenti non possono essere ricondotte ad una sola».

Brano di una lettera di Cantor a Dedekind del 20 giugno 1877:

«*Vorrei sapere se voi considerate aritmeticamente rigoroso un metodo di dimostrazione da me applicato. Si tratta di dimostrare che le superfici, i volumi ed anche le varietà continue a p dimensioni possono essere messi in corrispondenza univoca con curve continue, dunque con varietà a una sola dimensione, che le superfici, i volumi, le varietà a p dimensioni hanno dunque la stessa potenza delle curve; questa opinione appare opposta a quella generalmente diffusa, particolarmente tra i rappresentanti della nuova geometria, secondo la quale si parla di varietà semplicemente, doppiamente, triplamente, … p volte infinite; ci si presenta a volte addirittura le cose come se si ottenesse l'infinità dei punti di una superficie elevando in qualche modo al quadrato, quella di un cubo elevando al cubo, l'infinità di punti di una linea (…). Voglio parlare dell'ipotesi secondo la quale una molteplicità continua p volte estesa necessita, per la determinazione dei suoi elementi, p coordinate reali fra loro indipendenti, questo numero non potendo essere, per una stessa molteplicità, né aumentato né diminuito. Anch'io ero arrivato a credere a questa ipotesi, ero quasi persuaso della sua esattezza; il mio punto di vista differiva da tutti gli altri soltanto nel fatto che consideravo questa ipotesi come un teorema che necessitava, ad alto livello, una dimostrazione, e avevo precisato il mio punto di vista sotto forma di domanda sottomessa ad alcuni colleghi, in particolare anche all'occasione del giubileo di Gauss a Göttingen».*

«Una varietà continua a p dimensioni, con p > 1, può essere messa in relazione univoca con una varietà continua ad una dimensione, in modo tale che a un punto dell'una corrisponda un punto ed uno solo dell'altra?
La maggior parte di quelli ai quali ho posto la domanda si sono molto stupiti solo per il fatto che io la ponessi, perché consideravano ovvio che, per la determinazione di un punto in un'estensione a p dimensioni, bisognava usare p coordinate indipendenti. Chi malgrado tutto penetrava il senso della domanda, doveva riconoscere che bisognava almeno dimostrare perché la risposta era "ovviamente" no. Come detto, io facevo parte di quelli che ritenevano verosimile la risposta negativa – fino al momento recentissimo nel quale, grazie a una successione abbastanza complessa di pensieri, sono giunto alla convinzione che la risposta è affermativa, senza alcuna restrizione. Poco dopo ho trovato la dimostrazione che avete sotto gli occhi».

(E Cantor presenta a Dedekind la dimostrazione vista sopra dei punti del quadrato e del suo lato).

La lettera parte il 20 giugno 1877, ma l'impazienza di Cantor è talmente elevata che torna a scrivere lui stesso a Dedekind, sollecitando una risposta, il 25 giugno 1877:

«Fin tanto che voi non mi approvate, non posso che dire: lo vedo ma non lo credo».

Dedekind risponde subito il 29 giugno 1877:

«Ho esaminato ancora una volta la vostra dimostrazione e non vi ho trovato lacune; sono convinto che il vostro interessante teorema è esatto e mi felicito con voi».

La strada è definitivamente aperta verso l'infinito (in questo capitolo seguiremo solo quello numerico).

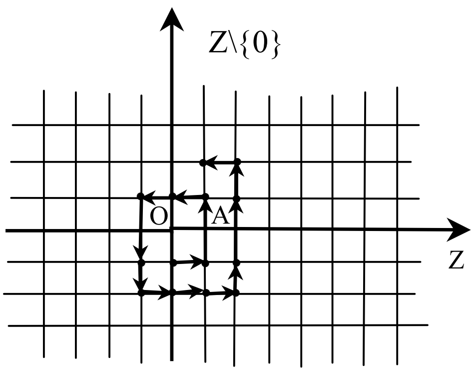
1.2.5 Cardinalità

Consideriamo l'insieme N dei numeri naturali e sia **n** la sua cardinalità o numerosità o potenza che diremo "del numerabile"; **n** è una cardinalità infinita nel senso che è maggiore di qualsiasi cardinalità finita data.

Siano N_Q l'insieme (di Galilei) dei quadrati perfetti, N_P dei numeri pari, N_D dei dispari, N_{Pr} dei primi, … Ciascuno di questi insiemi si può mettere in corrispondenza biunivoca con N ed ha quindi la cardinalità del numerabile **n**.
Se A è un sottoinsieme di N, infinito, allora la cardinalità di A è **n**.
Infatti, in base alle ipotesi, A = $\{a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots\}$ dove gli a_i sono elementi di N. Consideriamo la corrispondenza biunivoca $a_1 \leftrightarrow 0$, $a_2 \leftrightarrow 1$, …, $a_m \leftrightarrow m - 1$, …
Dunque: **n** è il cardinale infinito *più piccolo*.

Consideriamo l'insieme dei numeri interi Z; si crea una corrispondenza biunivoca con N:
$0 \leftrightarrow 0$, $1 \leftrightarrow {}^{+}1$, $2 \leftrightarrow {}^{-}1$, $3 \leftrightarrow {}^{+}2$, $4 \leftrightarrow {}^{-}2$, …
Dunque la cardinalità di Z è ancora **n**.

Nel tentativo di trovare quei diversi valori di infinito a cui faceva cenno Tommaso d'Aquino (vedi paragrafo 1.1.1), proviamo ora con Q, l'insieme dei numeri razionali. Ogni numero razionale $\frac{^{+}a}{^{-}b}$ lo possiamo pensare come un punto P di coordinate $({}^{+}a; {}^{-}b)$ disposto su un piano cartesiano.
Tutti i numeri razionali, allora, si possono disporre in questo modo con partenza nell'origine:



Solo alcuni di questi punti rappresentano numeri razionali (per esempio, il punto A (1 ; 0) non rappresenta alcun razionale). I punti che rappresentano razionali sono stati segnati nel disegno con insistenza. Nasce una successione di razionali che ha un primo elemento $(0 ; {}^{-}1)$, un secondo $(1 ; {}^{-}1)$, un terzo (1 ; 1) …; che rappresentano 0, $^{-}1$, 1 ... E dunque, abbiamo messo in corrispondenza biunivoca Q con N in quanto abbiamo "numerato" Q.
(C'è il problema dei "doppi", come per esempio $({}^{-}2 ; 3)$ e $(2 ; {}^{-}3)$ che sono punti diversi, ma che rappresentano lo stesso razionale: o si contano due volte, oppure si salta la seconda volta che si presenta).

Dunque la cardinalità di Q è ancora **n**.

Cantor dimostra inoltre che l'insieme dei numeri algebrici (soluzioni di equazioni) ha cardinalità **n**, contro ogni evidenza.

Quando sembra proprio che **n** non sia superabile, giunge alla dimostrazione chiave: l'insieme dei numeri reali compresi tra 0 e 1 (estremi esclusi) ha una cardinalità superiore ad **n**.
Siano, per assurdo:

$0, a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \dots$

$0, a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \dots$

$\dots$

$0, a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn} \dots$

$\dots$

tutti i numeri reali compresi tra 0 e 1 (vale a dire: supponiamo siano una quantità numerabile).
Consideriamo la scrittura:

$0, b_1\ b_2 \dots b_n \dots$

nella quale $b_1 \neq a_{11}$, $b_2 \neq a_{22}$, …, $b_n \neq a_{nn}$, …;
è allora ovvio che questa scrittura:

- *non* è compresa nell'elenco precedente di *tutti* i reali compresi tra 0 ed 1
- è un reale compreso tra 0 e 1

dunque abbiamo trovato una contraddizione, originata dall'aver supposto che i reali compresi tra 0 ed 1 avessero la cardinalità **n**.
(Valgono ancora una volta le considerazioni sulla doppia scrittura dei numeri razionali).

Dunque: i numeri reali compresi tra 0 e 1 sono infiniti, eppure non costituiscono un infinito numerabile.
n è il piccolo infinito, per cui i reali compresi tra 0 e 1 costituiscono un infinito *più grande*.
La data esatta di questa scoperta di Cantor è il 7 dicembre 1873, lo sappiamo perché egli comunicò la sua dimostrazione all'amico Dedekind con una lettera il giorno successivo.
La cardinalità dei reali compresi tra 0 ed 1 è la stessa di tutti i reali; la chiamiamo *cardinalità del continuo* e la indichiamo con **c**.
Con un piccolo abuso di linguaggio simbolico, scriveremo che:

$$\mathbf{n} < \mathbf{c}$$

Ma **c** è anche la cardinalità dei punti di una retta, dei punti di un piano, di qualsiasi varietà continua ad *m* dimensioni.

> *«Si può dire senz'altro che la teoria dei numeri transfiniti si mantiene o crolla insieme ai numeri irrazionali; la loro essenza è la stessa perché si tratta in ogni caso di esempi o variazioni dell'infinito attuale»* (Cantor, 1932, pag. 195-196).

Ora Cantor è a conoscenza che ci sono almeno due numeri infiniti: **n** e **c**. Egli si pone il problema seguente: trovare un insieme S di cardinalità **s**, tale che $\mathbf{n} < \mathbf{s} < \mathbf{c}$.
Su questa ricerca, lavora a lungo. Ma poi, una curiosa analogia lo attira…

1.2.6 Ipotesi del continuo

Consideriamo un insieme finito I ed il suo cosiddetto insieme-potenza: P(I). D'ora in poi, per indicare la cardinalità di un insieme, scriveremo: | I |.
Si può dimostrare che:
$| P(I) | = 2^{| I |}$

Estendiamo questo concetto agli insiemi infiniti.
Dal metodo di Dedekind dei tagli (o sezioni) per introdurre i numeri reali, si nota che R non è altro che una classe di classi di tagli in Q;
e dunque $| R | = | P(Q) |$
Ma allora:

$$\mathbf{c} = 2^{\mathbf{n}}$$

Questa scrittura permette tra l'altro una bella dimostrazione:

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = 2^{\mathbf{n}} \cdot 2^{\mathbf{n}} = 2^{\mathbf{n}+\mathbf{n}} = 2^{\mathbf{n}} = \mathbf{c}$$

(quindi il piano che è l'insieme di tutte le coppie ordinate di numeri reali, la cui cardinalità è $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$ ha cardinalità **c,** già dimostrato in precedenza mediante la corrispondenza biunivoca tra i punti di un quadrato e i punti di un suo lato).

Chiarito il senso dell'ordine tra numeri transfiniti, si può procedere con più facilità. Consideriamo l'insieme F delle funzioni da R in R. Chiamiamo **f** la cardinalità di F:

$$\mathbf{f} = 2^{\mathbf{c}}$$

così come i numeri naturali vanno in successione 0, 1, 2, 3, … aggiungendo sempre 1, così i numeri transfiniti vanno in successione **n**, **c**, **f**, **g**, … in questo modo:

$\mathbf{n}$, $\mathbf{c} = 2^{\mathbf{n}}$, $\mathbf{f} = 2^{\mathbf{c}}$, $\mathbf{g} = 2^{\mathbf{f}}$, …

in una scalata senza fine. Se ci fosse fine, infatti, troveremmo un paradosso: un ente della massima cardinalità possibile, diciamo H, che ammette però una maggiorazione che passa attraverso il suo insieme-potenza P(H).

L'obiettivo era però cercare un insieme S tale che: $\mathbf{n} < | S | < \mathbf{c}$:
Ora la cosa si generalizza:
possiamo cercare un insieme S_1 tale che $\mathbf{c} < | S_1 | < \mathbf{f}$; e poi un altro S_2 tale che $\mathbf{f} < | S_2 | < \mathbf{g}$; e così via.
Nel 1883 Cantor scrisse che sperava di poter dimostrare di lì a poco che la cardinalità del continuo è la stessa di quella della seconda classe numerica, che è come dire che un tale insieme S non esiste. Tale ricerca risultò però vana: non riuscì a provarlo; né a provare il contrario (esibire un tale S).
Egli fa allora una congettura:
Ipotesi di Cantor o *ipotesi del continuo* (IC):

c segue strettamente **n** cioè non esiste un cardinale **s** tale che $\mathbf{n} < \mathbf{s} < \mathbf{c}$.[19]

Ora, se si ipotizza che **c** segue strettamente **n**, allora perché non generalizzare?
Ipotesi di Cantor o *ipotesi generalizzata del continuo* (IGC):

c segue strettamente **n**, **f** segue strettamente **c**, **g** segue strettamente **f**, e così via.

Dunque sono elementi di una nuova successione che si possono ribattezzare come segue:

$$\mathbf{n} = \aleph_0, \qquad \mathbf{c} = \aleph_1, \qquad \mathbf{f} = \aleph_2, \qquad \mathbf{g} = \aleph_3, \qquad \ldots$$

Dunque $\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}$

[Tra il 1938 e il 1940 **Kurt Gödel** dimostrerà che, assumendo IC nella *teoria degli insiemi* (la chiameremo ZF dal nome degli ideatori: Zermelo (che ideò gli assiomi nel 1908) e Frankel (che li riprese nel 1922 e li trascrisse nel linguaggio del Calcolo dei Predicati), non si introducono contraddizioni (in altri termini, IC è compatibile con ZF); dunque: IC o è indipendente dagli assiomi di ZF o può essere dimostrato sulla loro base. In altri termini, ciò significa che Cantor non aveva torto, cioè che da ZF non si può dedurre che **c** sia diverso da

[19] Come riferisce Rucker (1991): *«Cantor credeva fermamente che valesse* $\mathbf{c} = \aleph_1$*. Gödel, in una certa fase del suo pensiero, riteneva che* **c** *fosse* $\aleph_2$ *e D. A. Martin ha scritto un articolo da cui si potrebbe ricavare che* **c** *è* $\aleph_3$*»*.

$\aleph_1$, ma allo stesso tempo non si può neanche provare che Cantor avesse ragione. Nel 1963 **Paul J. Cohen** ha dimostrato (con un metodo detto "forcing") che anche assumendo la negazione di IC non si introducono contraddizioni in ZF. Cioè: la negazione di IC è compatibile con ZF. Dunque, non si può dimostrare se Cantor avesse torto o ragione. Si ammette quindi che IC debba essere trattato come un nuovo assioma: se lo aggiungiamo a ZF abbiamo la "teoria *cantoriana* degli insiemi"; se aggiungiamo la sua negazione, abbiamo la "teoria *non-cantoriana* degli insiemi" (Gödel, 1940; Cohen, 1973)].

1.2.7 Giuseppe Peano (1858-1932)

Apriamo una piccola parentesi. Anche Peano ha a che fare con questioni aventi attinenza con l'infinito. La sua celebre sistemazione dei numeri naturali, ad un certo punto necessita di un assioma di induzione,[20] anzi si può dire che questo costituisce una proprietà fondamentale e fondante del concetto stesso di numero naturale (Borga et al., 1985). Il principio di induzione rappresenta oggi uno strumento essenziale nelle dimostrazioni aritmetiche e logiche che richiama l'infinito in senso potenziale.[21]

1.2.8 Cantor e gli ordinali

Torniamo a Cantor (questa parte è tratta da Rucker, 1991; D'Amore, 1994).

Definiamo ricorsivamente gli ordinali:

> 0 è un ordinale
>
> Principio 1:[22] di ogni numero ordinale a esiste il successivo $a + 1$
>
> Principio 2: data una successione crescente di ordinali a_n è definito il minimo ordinale [indicato con $\lim(a_n)$] che segue tutti gli ordinali della successione data.

Partendo da 0 applicando ripetutamente il Principio 1, otteniamo gli ordinali 0, 1, 2, 3, …

Ora, se vogliamo superare la successione infinita degli ordinali finiti, dobbiamo usare il Principio 2 per ottenere $\lim(n)$ che indichiamo con ω:

$$0 \qquad 1 \qquad 2 \qquad \ldots \qquad n \qquad n+1 \qquad \ldots \qquad \omega$$

[20] Sia P una proprietà applicabile ai numeri naturali. Supponiamo che 0 abbia tale proprietà P, supponiamo che, per ogni naturale x, se x ha la proprietà P allora anche x + 1 abbia la proprietà P, in queste condizioni possiamo asserire che: ogni numero naturale ha la proprietà P.

[21] Dal punto di vista didattico, sulle difficoltà che hanno gli studenti di scuola superiore ad accettare il principio di induzione hanno lavorato Fischbein e Engel (1989); Morschovitz Hadar (1991).

[22] In questo Principio si cela un fatto molto importante: *nessun ordinale è minore di se stesso.*

Questa è a sua volta una nuova successione di ordinali per cui, applicando ancora più volte di seguito il Principio 1, si ha:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots \quad n \quad n+1 \quad \ldots \quad \omega \quad \omega+1 \quad \omega+2 \quad \omega+3 \quad \ldots$$

Ecco la nuova successione crescente di ordinali ($\omega + n$) e dunque applicando ancora ad essa il Principio 2 si crea $\lim(\omega+n)$:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots \quad \omega \quad \omega+1 \quad \omega+2 \quad \omega+3 \quad \ldots \quad \omega+\omega$$

che possiamo scrivere come: $\omega+\omega$ o come $\omega \cdot 2$.

L'addizione e la moltiplicazione tra ordinali le definiamo così:

$a+b$:= contare a partire da $a + 1$ per b volte

$a \cdot b$:= giustapporre b copie di a

Finché si rimane nell'àmbito degli ordinali finiti, queste operazioni coincidono con la somma e prodotto usuali e sono commutative, ma quando consideriamo la loro estensione agli ordinali transfiniti la commutatività non si conserva.

Qualche esempio:

$1 + \omega = 1\ 0\ 1\ 2\ \ldots =$ (ricontando daccapo) $0\ 1\ 2\ 3 \ldots = \omega$

$\omega+1 = 0\ 1\ 2\ \ldots\ 1 = \omega+1$

e dunque: $1 + \omega = \omega \neq \omega+1$

$2 \cdot \omega = \quad 2 \quad 2 \quad 2 \ldots =$ (contando) $0\ 1\ 2\ \ldots = \omega$

$\omega \cdot 2 =$ (giustapposizione due volte di ω) =

$= 0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots = 0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots \quad \omega \quad \omega + 1 \quad \omega + 2 \quad \ldots = \omega + \omega$

e dunque: $2 \cdot \omega = \omega \neq \omega \cdot 2 = \omega + \omega$.

Eravamo arrivati a $\omega \cdot 2$; applicando il Principio 1 più volte otteniamo:

$0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots \quad \omega \quad \omega+1 \quad \omega+2 \quad \ldots \quad \omega\cdot2 \quad \omega\cdot2+1 \quad \omega\cdot2+2 \quad \ldots$

e di nuovo il Principio 2, ottenendo $\lim(\omega \cdot 2 + n) = \omega \cdot 2 + \omega$ che chiameremo anche $\omega \cdot 3$.

Così proseguendo possiamo arrivare a $\omega \cdot n$, per ogni n finito, e quindi potremmo usare il Principio 2 per ottenere $\lim(\omega \cdot n)$ cioè ω copie di ω, dunque $\omega\cdot\omega$ che chiameremo anche ω^2.

E ancora avanti si capisce come si arriva a ω^3 e pian piano a:

$$\omega^\omega$$

Si può pensare ad ω^2 come al primo ordinale a per cui vale: $\omega + a = a$.

Infatti: ω^2 è come $\omega + \omega + \omega + \omega + \omega + \ldots$ e quindi non cambia nulla se mettiamo un altro ω come addendo davanti.

Analogamente, il primo ordinale a per cui vale: $\omega \cdot a = a$ è ω^ω.
Infatti, ω^ω si può pensare come $\omega \cdot \omega \cdot \omega \cdot \omega\ldots$, ottenuto giustapponendo ω per ω volte; quindi nulla cambia se mettiamo un altro ω come fattore davanti: $\omega \cdot \omega^\omega = \omega^1 \cdot \omega^\omega = \omega^{1+\omega} = \omega^\omega$, dato che $1 + \omega = \omega$

Consideriamo il primo ordinale a per cui vale l'uguaglianza: $\omega^a = a$.
Questo numero è:

$$\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}} \quad \text{(l'elevamento a potenza avviene } \omega \text{ volte).}$$

Infatti, se si mette alla base di questa scrittura un altro ω non cambia nulla: tali esponenti saranno $1 + \omega$ che è sempre ω.
A questo numero è stato dato il nome ε_0 che da circa 200 anni è stato riservato a numeri reali "piccoli a piacere".

Introduciamo una nuova operazione:

${}^a b \cdot = b^{b^{\cdot^{\cdot^{b}}}}$ (cioè b elevato a sé stesso, per a volte, contando la base).
Un esempio solo per dare un'idea di come crescono i numeri con questa nuova operazione:
${}^3 3 = 3^{(3^3)} = 3^{27}$ quasi ottomila miliardi.

In base alla nuova operazione, ω^ω non è altro che ${}^2\omega$.
E quindi ${}^3\omega$ è $\omega^{(\omega^\omega)}$, un numero difficile da immaginare.
Torniamo a ε_0 che scritto nella nuova notazione è ${}^\omega\omega$.
ε_0 non è l'ultimo ordinale; ecco subito un altro ordinale più grande ancora:

$${}^{{}^{{}^{{}^{\cdots\omega}\omega}\omega}\omega}\omega$$

Ogni volta che si producono ordinali più grandi, si arriva ad una fermata momentanea, prima di intravedere come fare a produrne di ancora più grandi; questo rappresenta solo l'inizio (per un ampliamento di questo discorso si veda Rucker, 1991). [23]

1.2.9 Ordinali come cardinali

Riprendiamo il discorso, utilizzando gli aleph.

ω è proprio $\aleph_0$, il primo cardinale infinito.

Ma ω+1, ω+2, …, 2 · ω sono anche loro tutti $\aleph_0$.

n · ω, …, ω^ω sono sempre $\aleph_0$

ω^ω+1, …, ${}^\omega\omega$ sono sempre $\aleph_0$

Dunque: ω è il più piccolo ordinale uguale ad $\aleph_0$; ma finora non siamo cresciuti. Anche ε_0 non è altro che un "banale" $\aleph_0$. Ogni insieme ordinato con ordinalità ω, …, ${}^\omega\omega$ si può sempre mettere in corrispondenza biunivoca con N.

Ma così come possiamo trovare ordinali sempre più grandi, possiamo ora trovare cardinali sempre più grandi:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots, \aleph_{\aleph_1}, \ldots, \aleph_{\aleph_\omega}, \ldots$$

Possiamo perfino trovare un numero θ tale che $\theta = \aleph_\theta$

Questo θ è di questo tipo:

$$\theta = \aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_{\ddots}}}}}$$

θ chiude un ciclo.

Per ora, perché dopo $\aleph_\theta$ viene $\aleph_{\theta+1}, \ldots, \aleph_{\theta+\omega}, \ldots$

Non si arriva mai alla fine nella scoperta dei numeri transfiniti.

Proviamolo:

- Un insieme S è finito o numerabile se e solo se $|S| \leq \aleph_0$

[23] In Bachmann (1967) si trova la descrizione forse più esauriente dei sistemi di notazioni per ordinali numerabili. Invece in Cantor (1955) si trova la più chiara tra le descrizioni degli ordinali transfiniti date da Cantor.

- I Principi 1 e 2 danno luogo ad un più forte Principio 3: per ogni insieme di ordinali *A* esiste il minimo ordinale maggiore di ogni elemento di *A* che diremo *supA*.

Consideriamo la raccolta O*n* di tutti gli ordinali. Se O*n* fosse un insieme, allora esisterebbe per il Principio 3 un ordinale supO*n* (diciamolo Ω, l'Infinito Assoluto che si colloca alla fine della successione degli ordinali). Ma questo è impossibile, perché se Ω fosse un ordinale, allora Ω sarebbe un elemento della collezione O*n* di tutti gli ordinali e quindi sarebbe $\Omega <$ sup O*n* $= \Omega$, contraddicendo la proprietà fondamentale degli ordinali in base alla quale nessun ordinale può essere minore di se stesso.[24]

Quindi il Principio 3 stabilisce che nessun insieme di ordinali può raggiungere Ω.

Concludiamo con il passo seguente che è tratto da una lettera di Cantor a Dedekind del 28 agosto 1899:

> *«Ci si potrebbe chiedere se gli insiemi bene ordinati o le successioni che corrispondono ai numeri cardinali $\aleph_0$, $\aleph_1$, …, $\aleph_\omega$, … $\aleph_{\aleph_1}$, … siano realmente insiemi nel senso di essere "molteplicità coerenti". Non è possibile che queste molteplicità siano "incoerenti" e che la contraddizione derivante dall'assunzione che tali molteplicità esistano come insiemi unificati non sia stata ancora notata?*
> *La mia risposta è che la stessa domanda si potrebbe porre a proposito degli insiemi finiti e che se uno ci pensa con attenzione diventa chiaro che non è possibile dare nessuna dimostrazione di coerenza nemmeno per le molteplicità finite. In altre parole: il fatto costituito dalla coerenza delle molteplicità finite è una verità semplice e indimostrabile che potremmo chiamare "assioma dell'aritmetica" (nel vecchio senso della parola). Analogamente, la coerenza di quelle molteplicità che hanno gli alef come cardinalità costituisce "l'assioma dell'aritmetica estesa al transfinito"»* (Meschkowski, 1967).

Sembra che Cantor faccia riferimento a una percezione semplice e diretta della realtà dei numeri cardinali nel Regno dei Pensieri. Non solo, nel 1899 fece un'asserzione che rivelò il suo grande coraggio intellettuale: «*Un numero come $\aleph_2$ è molto più facile da percepire di un numero naturale casuale di dieci milioni di cifre*» (contenuta anche in Cantor, 1932). Questa azzardata affermazione di Cantor sarà difficile da condividere dopo aver rivelato le convinzioni degli insegnanti proposte nei capitoli 3 e 4.

[24] Questa situazione fu rivelata da Cesare Burali-Forti nel 1897 ed era già stata notata in precedenza da Cantor.