Capitolo 3. Le convinzioni[35] degli insegnanti di scuola primaria sull'infinito matematico[36]

Le riflessioni che seguiranno si riferiscono ad un percorso di ricerca durato vari anni relativo all'infinito matematico; un argomento che, come abbiamo potuto percepire nel capitolo 1, ha rappresentato, e rappresenta tutt'ora, un tema affascinante che fornisce all'uomo profonde occasioni di riflessione.

Sorge spontaneo domandarsi perché questo tema così specifico e difficile sia rivolto in questa ricerca alla scuola primaria; ma è proprio a partire da questo livello scolastico che l'allievo viene a contatto con insiemi infiniti come la successione dei numeri naturali 0, 1, 2, 3, … che è forse il primo e il più spontaneo esempio di insieme di questo tipo.

Già dai primi anni di scuola primaria si sottolinea come questa successione non ha termine, non ha "fine", esiste sempre un numero "più grande" di quello considerato, basta aggiungere un'unità; e questo procedimento può continuare per sempre, all'"infinito", appunto. Si sottolinea quindi come, considerato un qualsiasi numero naturale n, si possa sempre trovare il numero naturale successivo $n + 1$; questo procedimento genera, passo per passo, la successione dei numeri naturali e costituisce anche la base di uno degli schemi fondamentali del ragionamento matematico, il principio di induzione matematica, che rappresenta un assioma del "delicato" sistema assiomatico di Peano (vedi paragrafo 1.2.7) (Borga et al., 1985).

È abbastanza frequente notare come i bambini di scuola primaria riferendosi ai numeri, citino e parlino di infinito; ad esempio, durante una sperimentazione in una scuola primaria di Mirano (VE), Marco di seconda scrive la seguente lettera ai compagni di prima in seguito alla proposta dell'insegnante di descrivere ciò che li aveva incuriositi di più:

[35] Abbiamo scelto di parlare di *convinzioni* invece che di *concezioni*, in quanto riteniamo che l'interpretazione che viene solitamente fornita del primo termine sia più consona alla nostra ricerca. Per *convinzione (belief) (o credenza)* si intende *«un'opinione, un insieme di giudizi/attese, quel che si pensa a proposito di qualcosa»* (D'Amore e Fandiño, 2004) mentre l'interpretazione di concezione che facciamo nostra, peraltro sempre più diffusa e condivisa, è la seguente: *«l'insieme delle convinzioni di qualcuno (A) su qualcosa (T) dà la concezione (K) di A relativamente a T; se A appartiene ad un gruppo sociale (S) e condivide con gli altri appartenenti ad S quell'insieme di convinzioni relativamente a T, allora K è la concezione di S relativamente a T»* (D'Amore e Fandiño, 2004).

[36] Questo capitolo è stato pubblicato in Sbaragli (2003a).

Cari bambini di prima, lo sapete che cosa vuol dire contare all'infinito? Vuol dire che se contate per 1000 anni di seguito c'è sempre un numero maggiore di quello dove siete arrivati! C'è sempre un numero in più e così per sempre. Provate a occhi chiusi a contare, diventerete nonni e starete ancora contando. E sarete vecchi con la barba, sarete troppo vecchi che i vostri genitori non vi riconosceranno più!

Questa parola, infinito, risulta quindi affascinante per i bambini fin dalla scuola primaria; sembra infatti che già da questa età si riesca a percepire quella sorta di mistero che accompagna questo termine. Spesso gli studenti, fin dai primi anni di scuola, si riempiono la bocca con questa parola ancora sconosciuta, intuendone la "potenza" ed il fascino, e questo termine li accompagnerà fino alle scuole secondarie o in alcuni casi fino all'Università, rimanendo però molte volte un concetto incompreso in senso matematico.

3.1 L'infinito matematico e la diversa natura degli "ostacoli"

Alla base delle seguenti considerazioni sull'infinito vi sono gli studi apportati in questo campo da diversi ricercatori in didattica della matematica che hanno analizzato la problematica dell'insegnamento e dell'apprendimento di questo argomento mettendo in evidenza i processi mentali degli studenti, le loro convinzioni e le loro accettazioni intuitive che sono il risultato di misconcetti assai diffusi sui diversi aspetti dell'infinito matematico [fra i molti esempi, si vedano i classici lavori di Tall (1980), di Waldegg (1993) e quelli più recenti di Fischbein, Jehiam e Cohen (1994, 1995), di Tsamir e Tirosh (1994, 1997), di D'Amore (1996, 1997), di Arrigo e D'Amore (1999, 2002), di Tsamir (2000)]. Queste ricerche coinvolgono diversi indirizzi tutti legati al tema dell'infinito e hanno come filo conduttore il mettersi "dalla parte degli allievi" per esaminare quali siano i motivi che fanno della problematica dell'infinito una tematica così difficile da essere appresa.

In quest'ottica è d'obbligo far riferimento all'importante campo di studio relativo alla didattica della matematica sui cosiddetti *ostacoli* che si frappongono alla costruzione della conoscenza: ostacoli ontogenetici, didattici, epistemologici (Brousseau, 1983; Perrin Glorian, 1994; D'Amore, 1999), (vedi paragrafo 2.5).

Per quanto riguarda la trattazione dell'infinito matematico nella scuola primaria, sicuramente saranno presenti *ostacoli ontogenetici* legati all'immaturità concettuale e critica causati

principalmente dall'età degli alunni (Spagnolo, 1998); ma non per questo si devono sottovalutare le prime intuizioni, le prime immagini, i primi modelli che si formano nella mente dei bambini fin dalla scuola primaria, come conseguenza anche delle sollecitazioni degli stessi insegnanti.
Inoltre, la letteratura internazionale partendo dallo sviluppo storico di questo controverso argomento (vedi cap. 1) ha saputo mettere in evidenza gli *ostacoli epistemologici* che si frappongono all'apprendimento dell'infinito matematico e che permettono di spiegare alcune difficoltà incontrate dagli studenti (si veda ad esempio Schneider, 1991).
In questa ricerca vogliamo vagliare se è possibile che si verifichino anche *ostacoli didattici*, forse ancora più influenti, dovuti a scelte didattiche degli insegnanti che condizionano e rafforzano le prime misconcezioni (vedi paragrafo 2.3) degli allievi. La presenza di ostacoli didattici nell'apprendimento dell'infinito matematico è già stata rilevata da Arrigo e D'Amore (1999 e, soprattutto, 2002).

Per chiarire lo scopo della presente ricerca, facciamo alcune considerazioni legate agli ostacoli epistemologici. Per quanto concerne lo sviluppo storico di un concetto, si può pensare che vi sia stato un passaggio nell'arco della storia da una fase "iniziale" intuitiva ad una fase "finale" del concetto stesso (forse sarebbe meglio chiamarla "attuale" o "avanzata"), matura (nel momento in cui se ne parla) e strutturale; è ovvio che questa è solo una schematizzazione, dato che tra queste due fasi considerate come il punto di partenza e il punto di arrivo (nel momento in cui se ne parla) vi sono tanti altri passaggi fondamentali che permettono di raggiungere la fase "attuale" del concetto (Sfard, 1991).
Ciò che è avvenuto nella storia della matematica si può rintracciare in àmbito didattico; in effetti alcune delle prime ingenue intuizioni che si sono avute storicamente sul tema dell'infinito, si possono rintracciare nuovamente nelle considerazioni e convinzioni manifestate intuitivamente dagli studenti in classe.
Ossia dal punto di vista didattico, si può rilevare una situazione analoga a quella che è avvenuta storicamente: in una prima fase gli allievi si accostano intuitivamente ad un concetto matematico, senza averne una comprensione completa e sviluppata,[37] solo successivamente l'apprendimento si fa più pieno e maturo (Sfard, 1991).

[37] Questo deriva anche dalla necessità della matematica di richiedere il coordinamento dei registri semiotici, che può essere acquisito solo con il tempo e che è la condizione per la padronanza della comprensione, in quanto rappresenta la condizione per una differenziazione reale tra gli oggetti matematici e le loro rappresentazioni (Duval, 1995, pag. 259).

Si possono quindi ipotizzare due percorsi in “parallelo”: il primo riferito allo sviluppo storico del sapere, il secondo riferito ad un analogo percorso di ciò che avviene in àmbito didattico (Sfard, 1991; Bagni, 2001).
Il passaggio in àmbito didattico dalla fase “iniziale” alla fase “avanzata” del sapere può far nascere, nella mente degli allievi, dubbi e reazioni che si possono rintracciare nel corrispondente passaggio nella formazione del sapere.
È importante sottolineare che la fase “intuitiva ingenua” risulta in opposizione a quella “avanzata” sia nella storia della matematica che nei processi di apprendimento e insegnamento, non solo nella scuola primaria ma anche oltre, dato che i modelli permangono nella scuola superiore (Arrigo e D’Amore 1999, 2002) e, in alcuni casi, anche in seguito.
Queste considerazioni possono risultare molto utili per la *trasposizione didattica* (vedi paragrafo 2.4) che dovrebbe partire da una prima conoscenza intuitiva degli studenti, per poi far sì che le convinzioni iniziali degli allievi si indirizzino verso la fase “avanzata” del concetto stesso.

3.2 Prime domande di ricerca e relative ipotesi

Dalle considerazioni precedenti sulla trasposizione didattica emergono le prime domande di ricerca e le relative ipotesi:
- Gli insegnanti di scuola primaria conoscono e hanno consapevolezza della fase “avanzata” del concetto di infinito matematico?
- Nella trasposizione didattica gli insegnanti si basano effettivamente sui risultati raggiunti nella fase “avanzata” dello sviluppo del sapere, oppure non fanno altro che rafforzare la fase “intuitiva ingenua” degli allievi?
- D’altra parte, gli insegnanti di scuola primaria accedono mai al sapere per quanto riguarda l’infinito matematico?

La nostra ipotesi è che gli insegnanti di scuola primaria non conoscono la fase “avanzata” del concetto di infinito matematico ed è per questo che restano ancorati alla fase “intuitiva ingenua” del sapere. In questo modo non fanno altro che rafforzare le convinzioni intuitive iniziali degli allievi, senza favorire il passaggio verso la fase “avanzata” del concetto. Ossia la trasposizione didattica invece di partire dalla fase “intuitiva ingenua” degli studenti per poi

indirizzarsi verso la fase “avanzata” del concetto (quindi tenendo conto della fase “avanzata” del sapere), non fa altro che rafforzare le convinzioni ingenue degli studenti, fossilizzando e radicando così la loro fase intuitiva iniziale.
Questo atteggiamento è a nostro avviso fonte di ostacoli didattici che impediscono la comprensione del concetto di infinito matematico.

La presente ricerca era inizialmente indirizzata agli allievi dell’ultimo anno della scuola primaria con l’intento di rintracciare le prime immagini, le prime intuizioni ed eventualmente le prime difficoltà che si presentano agli studenti nell’affrontare l’infinito matematico. Da queste esperienze, che saranno trattate in modo esplicito nel capitolo seguente, si è notato come già dagli ultimi anni di scuola primaria vi siano idee intuitive su questo argomento, quasi sempre false convinzioni che molte volte sono state esplicitate con frasi del tipo: *«La maestra mi ha detto che…», «In classe abbiamo visto che…»;* atteggiamenti che ricordano il celeberrimo caso di Gaël[38] (Brousseau e Péres, 1981) che sancì definitivamente l’entrata nel mondo della didattica della matematica dell’idea di contratto didattico (vedi paragrafo 2.1).
Alcune volte, poi, gli insegnanti incuriositi per ciò che volevamo proporre ai bambini si avvicinavano per sapere di che cosa ci stavamo occupando e con estrema sincerità e professionalità mettevano in evidenza le loro false credenze su questo argomento. Per questo il nostro interesse di ricerca si è spostato sulle convinzioni degli insegnanti che ci hanno permesso di riscontrare alcuni ostacoli didattici che si presentano nel proporre il concetto di infinito matematico.

3.3 Descrizione del quadro teorico di riferimento

In contesto internazionale, tra la vastissima letteratura, facciamo qui principalmente riferimento a D’Amore (1996, 1997) che fornisce, oltre ad una ricca e ragionata panoramica delle diverse “categorie” di ricerca, una vasta bibliografia di oltre 300 titoli.

[38] Il caso di Gaël nacque per studiare le cause del fallimento elettivo in matematica; la condizione nella quale i ricercatori trovarono Gaël è descritta come segue: invece di esprimere coscientemente la propria conoscenza, Gaël la esprimeva sempre e solo in termini che coinvolgevano l’insegnante. Ogni situazione didattica veniva vissuta dal bambino attraverso l’insegnante, finché i ricercatori ottennero da lui, grazie a situazioni a-didattiche, interventi più personali e, alla fine, assai più cognitivamente produttivi.

Più in dettaglio, il nostro quadro teorico di riferimento verte principalmente sulle considerazioni e conclusioni riportate in Arrigo e D'Amore (1999, 2002), che sono risultate fondamentali come chiave di lettura dell'attuale ricerca.
In particolare, nel primo lavoro sono descritti i seguenti due fenomeni che si basano sulla generalizzazione ai casi infiniti di ciò che si è appreso circa la corrispondenza biunivoca sui casi finiti (Shama e Movshovitz Hadar, 1994; Arrigo e D'Amore, 2002) e dei quali terremo conto nel presente lavoro:

• un fenomeno chiamato da Arrigo e D'Amore *"appiattimento"* che la letteratura aveva già evidenziato [Waldegg (1993), Tsamir e Tirosh (1994), Fischbein, Jehiam e Cohen (1994, 1995)] e che consiste nel ritenere tutti gli insiemi infiniti come aventi la stessa cardinalità, ossia nel ritenere che tutti gli insiemi infiniti possano essere messi in corrispondenza biunivoca tra loro. Più in dettaglio, in letteratura si è mostrato come, una volta accettato da parte degli studenti che due insiemi come N e Z debbano avere la stessa cardinalità (su spinta del ricercatore o del docente che mostra la corrispondenza biunivoca tra i due insiemi), risulta molto frequente la generalizzazione che tutti gli insiemi infiniti debbano avere necessariamente la stessa cardinalità. Questa misconcezione non dipende solo da un ostacolo epistemologico, già messo in evidenza dalla storia della matematica, ma anche da ostacoli di tipo didattico come è stato rilevato in Arrigo e D'Amore (1999 e, soprattutto, 2002);

• un fenomeno chiamato dai due Autori *"dipendenza"*, in base al quale vi sono più punti in un segmento lungo, rispetto ad uno più corto (Tall, 1980). Questo fenomeno è rintracciabile non solo in àmbito geometrico, ma si parla anche di *dipendenza* della cardinalità dalla "grandezza" di insiemi numerici; ad esempio dato che l'insieme dei numeri pari rappresenta un sottoinsieme dell'insieme dei numeri naturali, si pensa che il primo debba essere costituito da un numero minore di elementi.

Questi due atteggiamenti sono stati ripresi e rianalizzati in modo sempre più puntuale in Arrigo e D'Amore (2002), dove viene anche messo in evidenza come le difficoltà nella comprensione dell'infinito matematico siano legate al problema del modello intuitivo (Fischbein, 1985) (vedi paragrafo 2.2), che gli studenti hanno degli enti geometrici, in particolare del punto e del segmento (vedi cap. 4). Inoltre per questo lavoro di ricerca sono risultate significative le considerazioni riportate in Fischbein (1993) dove, tramite vari esempi (alcuni di questi relativi al punto), viene messa in evidenza la complessità delle relazioni tra gli aspetti figurali e concettuali nell'organizzazione dei *concetti figurali* e la fragilità di tale organizzazione nelle menti degli studenti. Per questo, dal punto di vista didattico, Fischbein sostiene che gli insegnanti dovrebbero mettere sistematicamente in evidenza agli studenti le varie situazioni conflittuali per mostrare l'importanza dominante della definizione sulla figura. Ossia, lo studente dovrebbe essere reso consapevole dei conflitti e delle loro origini, con lo scopo di enfatizzare nella sua mente la necessità per il ragionamento matematico di dipendere da vincoli formali. Inoltre sempre Fischbein (1993) sostiene che l'integrazione delle proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie, con la predominanza dei vincoli concettuali su quelli figurali, non è un processo spontaneo; anzi, dovrebbe costituire una continua, sistematica e principale preoccupazione dell'insegnante. Perché questo avvenga, in Arrigo e D'Amore (2002) si suggerisce un intervento a monte, cioè sulla preparazione in questo specifico campo degli insegnanti della scuola di base. Quest'ultimo aspetto rappresenta un punto chiave per la presente trattazione che si basa sulle convinzioni degli insegnanti di scuola primaria nei confronti dell'infinito matematico; convinzioni che influenzano il formarsi nella mente degli allievi di modelli intuitivi che producono situazioni di disagio cognitivo. Per modificare e raffinare queste convinzioni occorre un nuovo apprendimento che può avvenire solo tramite corsi di formazione che consentano di riflettere in modo specifico su questo tema (vedi paragrafo 4.1).

Un'altra problematica alla quale faremo riferimento riguarda il classico dibattito filosofico su infinito in senso attuale e in senso potenziale che ha ispirato diverse ricerche: Moreno e Waldegg (1991), Tsamir e Tirosh (1992), Shama e Movshovitz Hadar (1994), Bagni (1998, 2001), Tsamir (2000). Da queste si può rilevare come, sia dal punto di vista storico che per quanto concerne l'apprendimento del concetto di infinito matematico, l'evoluzione della concezione attuale sia molto lenta ed avvenga spesso in modo contraddittorio e solo grazie ad un processo di sistemazione e maturazione cognitiva degli apprendimenti [dal punto di vista storico basta ripercorrere le considerazioni riportate nel cap. 1].

3.4 Descrizione dei problemi

Descriviamo in modo esplicito i problemi che ci hanno spinto a questa ricerca.

P1. C'è consapevolezza tra gli insegnanti di scuola primaria su che cosa si intende per infinito matematico sia epistemologicamente che cognitivamente?

P2. Gli insegnanti forniscono modelli intuitivi ai propri allievi su questo argomento fin dai primi anni di scuola primaria? Se li forniscono, sono consapevoli che si tratta di misconcezioni che necessiteranno di sistemazione o sono convinti che si tratta dei modelli corretti che dovranno accompagnare gli studenti per tutta la loro vita scolastica futura?

P3. Le convinzioni degli insegnanti possono essere causa di ostacoli didattici che rafforzano gli ostacoli epistemologici già evidenziati dalla ricerca internazionale?

3.5 Ipotesi della ricerca

Riportiamo le ipotesi relative ai problemi descritti nel paragrafo 3.4:
I.1. A nostro avviso, per la maggior parte degli insegnanti di scuola primaria l'infinito matematico rappresenta un argomento sconosciuto, sia in senso epistemologico che cognitivo, di conseguenza pensavamo che gli insegnanti non fossero in grado di maneggiare l'infinito e non riuscissero a concepirlo come oggetto matematico. Per questo ipotizzavamo che gli insegnanti restassero ancorati a convinzioni ingenue del tipo che l'infinito non è altro che l'indefinito, o che l'infinito è sinonimo di illimitato, o ancora che l'infinito non è altro che un numero finito molto grande [convinzioni che possiamo ritrovare presenti per diversi secoli nella storia di questo argomento, vedi cap. 1; in particolare si possono rintracciare nelle affermazioni di Nicolò da Cues (1400 o 1401-1464)].

I.2. A nostro avviso, gli insegnanti di scuola primaria forniscono modelli intuitivi agli allievi sull'infinito matematico fin dai primi anni di scuola primaria.
Inoltre se le convinzioni ingenue degli insegnanti ipotizzate in I.1. si fossero rilevate, a nostro avviso queste convinzioni avrebbero condizionato i modelli che vengono forniti agli studenti. Ipotizzavamo che i modelli intuivi forniti, che rappresentano in realtà misconcezioni, fossero invece considerati dagli insegnanti come modelli corretti. Per verificare questa ipotesi, ritenevamo molto interessante esaminare attentamente le affermazioni e le modalità delle espressioni degli insegnanti.

I.3. A nostro avviso, se le nostre due prime ipotesi si fossero verificate, ipotizzavamo che, oltre agli ostacoli epistemologici che lo studio della storia e la critica dei fondamenti hanno evidenziato, saremmo riusciti a riscontrare anche ostacoli di natura didattica. Uno, che pensavamo di trovare, è legato all'idea ingenua di infinito come sinonimo di illimitato, convinzione che contrasta l'infinità dei punti in un segmento, dato che un segmento pur essendo limitato è costituito da infiniti punti; un altro è legato all'idea di infinito come numero naturale grande [vedi cap. 1; in particolare: Anassimandro di Mileto (¯610-¯547) e Nicolò da Cues (1400 o 1401-1464)] che porta di conseguenza a trasferire le stesse procedure degli insiemi finiti agli insiemi infiniti, considerati appunto come insiemi finiti molto grandi. Un altro ostacolo didattico, già più volte evidenziato da Arrigo e D'Amore (1999, 2002) e che eravamo sicuri di rintracciare, è quello chiamato dai due Autori "modello della collana" che viene indicato spesso dagli studenti come modello adatto per rappresentarsi mentalmente i punti sulla retta e che è stato a volte evidenziato dagli alunni come modello fornito dai loro insegnanti di scuola primaria, modello che resiste ad ogni attacco successivo (Arrigo e D'Amore, 1999; 2002). La nostra ipotesi dunque era che avremmo trovato ostacoli didattici derivanti da modelli tipici che vengono usualmente proposti dagli insegnanti di scuola primaria.
Se le ipotesi qui evidenziate si fossero verificate, ci saremmo spinti a prendere in esame la possibilità e la necessità di rivedere i contenuti a carattere disciplinare da proporre nei corsi di formazione degli insegnanti di scuola primaria; non tanto perché gli insegnanti modifichino i contenuti della loro azione didattica, quanto perché evitino il formarsi di quei modelli intuitivi che possono produrre situazioni di disagio cognitivo ai propri allievi.

3.6 Metodologia della ricerca

3.6.1 Insegnanti sui quali si è effettuata la ricerca e metodo di svolgimento

Dopo che l'attenzione di questa ricerca si è concentrata sulle convinzioni degli insegnanti di scuola primaria, si è pensato di proporre un questionario che servisse come base di partenza per far riflettere e per far nascere uno scambio di opinioni tra gli insegnanti sulle problematiche relative all'infinito matematico. In questo modo si è cercato di far emergere le loro convinzioni, i loro misconcetti ed i loro modelli intuitivi nei confronti di questo tema.

Per la messa a punto del questionario si sono realizzati diversi colloqui informali con vari insegnanti, necessari per la leggibilità e la comprensibilità del testo; le domande che venivano poste rientravano tra i concetti che vengono generalmente trattati alla scuola primaria e che creano nella mente degli allievi, talvolta senza consapevolezza degli insegnanti, le prime immagini che si trasformano in modelli intuitivi degli enti geometrici e più in generale della tematica dell'infinito.

Il questionario e il successivo scambio di opinioni si è proposto a 16 insegnanti italiani di scuola primaria, diversi da quelli interpellati nella parte iniziale (4 di Venezia, 8 di Forlì, 4 di Bologna).

La ricerca è stata realizzata con le seguenti modalità: si sono organizzati sei incontri dove nei primi quattro erano presenti per ciascuno due insegnanti, mentre per gli altri due incontri erano presenti quattro insegnanti ogni volta (per un totale di 16 insegnanti). Per ogni incontro inizialmente si è somministrato ad ogni insegnante il questionario da leggere e completare individualmente e, dopo che ciascuno lo aveva consegnato, si avviava la discussione che quindi avveniva a coppie o tra quattro persone. Durante il confronto, gli insegnanti esprimevano le proprie convinzioni, i dubbi e le perplessità in presenza del ricercatore che interveniva solo in determinati punti della conversazione per sollecitare alcuni aspetti rilevanti della tematica, tenendo sempre ben presente la necessità di non modificare le convinzioni ingenue degli insegnanti. I gruppi per la discussione venivano creati sempre in modo da mettere a confronto insegnanti ben affiatati, abituati al dialogo e ad uno scambio di opinioni.

In tutte le occasioni si era ampiamente chiarito che si trattava di un lavoro di ricerca nel quale non sarebbero apparsi i loro nomi.

Il questionario è stato riconosciuto come facilmente "comprensibile" dagli insegnanti. In effetti dopo una prima lettura delle domande, tutti hanno affermato che era di semplice interpretazione; eppure quando si trattava di rispondere alla prima domanda, 13 insegnanti hanno manifestato un forte disagio del tipo: *«Non so che cosa scrivere, non ho mai riflettuto su questo argomento»*. Solo dopo qualche affermazione di auto-rassicurazione del tipo: *«Io scrivo quello che mi viene in mente, anche se non sarà proprio detto bene»*, iniziavano a rispondere alla prima domanda.

Per lo svolgimento del questionario si è lasciata un'ora di tempo, per permettere agli insegnanti di leggere, riflettere, ripensare e decidere con calma che cosa rispondere. Nessun insegnante ha utilizzato tutto il tempo a disposizione.

Per la seconda parte, basata sul confronto e sul dialogo, non vi erano limiti di tempo; la tecnica utilizzata è stata quella della discussione attiva in gruppi di diversa consistenza

numerica, facendo uso del registratore e lasciando al ricercatore il compito di mettere in evidenza contraddizioni e modelli intuitivi radicati.
Quest'ultima fase di discussione è risultata determinante e più significativa; in effetti già dalle interviste iniziali si è notato come un test scritto non possa far emergere i veri modelli intuitivi degli insegnanti dato che una singola risposta, molto spesso sintetica, non permette di interpretare le reali convinzioni. Soprattutto per un argomento così complesso e sofisticato, si è reso necessario indagare in profondità sulle singole convinzioni degli insegnanti, sfruttando lo scambio di opinioni che ha permesso di ripercorrere le risposte date al questionario per saggiarne il senso reale, per verificarne la stabilità e per evidenziare eventuali contraddizioni.
La scelta di far nascere confronti tra gli insegnanti, più che tra un singolo insegnante e il ricercatore, verte sull'esigenza di far emergere le vere convinzioni. In effetti quando ad un insegnante viene richiesto di esprimere o difendere la propria opinione con un collega con il quale è abituato ad argomentare e che ha più o meno le stesse conoscenze sull'argomento proposto, ci si aspetta che si senta più libero di manifestare la propria opinione.
In questo modo si è cercato di ridurre alcuni atteggiamenti da parte degli insegnanti, del tipo: "fiducia nel ricercatore" o "fiducia in ciò che sostengono i matematici" [già più volte evidenziati dalla letteratura, si veda ad esempio: Perret Clermont, Schubauer Leoni e Trognon (1992)], che si manifestano non solo quando la ricerca viene rivolta agli studenti, ma anche quando si rivolge agli insegnanti.
In questa sede non daremo la documentazione completa di questi confronti ma ci serviremo solamente delle frasi più significative e ricorrenti enunciate dagli insegnanti. I questionari e le complete registrazioni sono comunque a disposizione presso l'autrice di chiunque voglia approfondire questa tematica di ricerca.

3.6.2 Contenuto del questionario

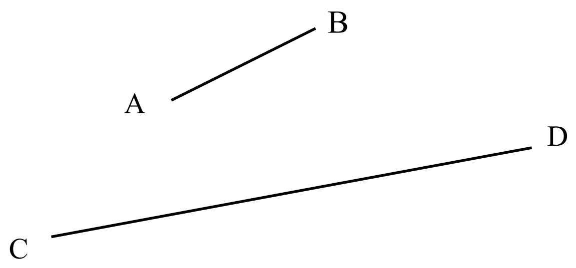
Il questionario era costituito da 15 fogli formato A4 in ognuno dei quali era presente una sola domanda (la rimanente parte bianca del foglio era lasciata vuota per consentire agli insegnanti di scrivere la risposta).
Qui di seguito riportiamo le 15 domande e la spiegazione della metodologia adottata per lo svolgimento del questionario:

1) Che cosa pensi che significhi infinito matematico?

2) Durante l'insegnamento nei cinque anni di scuola primaria ti è mai capitato di parlare di infinito? Quando? In che senso? In che modo? Sfruttando quali materiali?

3) Il termine "infinito" in matematica esiste sia come aggettivo che come sostantivo?

4) Ci sono più punti nel segmento AB o nel segmento CD? (Scrivi nel foglio tutto ciò che ti ha fatto venire in mente questa domanda).



5) Quanti sono i numeri pari: 0, 2, 4, 6, 8, …?

6) Quanti sono i numeri dispari: 1, 3, 5, 7…?

7) Quanti sono i numeri naturali: 0, 1, 2, 3…?

8) Quanti sono i multipli di 15?

9) Sono di più i numeri pari o i numeri dispari?

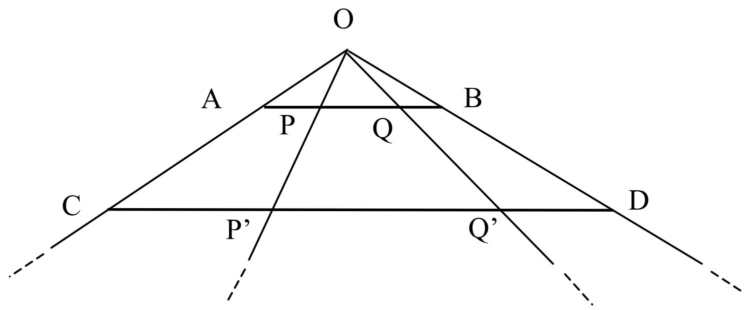
10) Sono di più i numeri pari o i numeri naturali?

11) Sono di più i numeri dispari o i numeri naturali?

12) Sono di più i multipli di 15 o i numeri naturali?

13) Ti è mai capitato durante l'insegnamento nella scuola primaria di confrontare le quantità di questi insiemi numerici (pari con dispari, pari con naturali, dispari con naturali)? In che modo? E in quale circostanza?

Dopo che era stato consegnato il plico con le prime 13 risposte, si proponeva la dimostrazione di Georg Cantor (1845-1918) (vedi paragrafo 1.2.3) relativa alla domanda n. 4 che mostra come vi sia lo stesso numero di punti in due segmenti di lunghezze diverse. Per realizzarla, si mostrava la corrispondenza biunivoca su un foglio di carta dove si erano già predisposti i segmenti AB e CD (spostati nel piano rispetto alla domanda n. 4, mediante isometrie, in modo da essere paralleli e "centrati" l'uno rispetto all'altro). Inizialmente si disegnava, aiutati da un righello, il punto O di intersezione delle rette AC e BD; successivamente da O si proiettavano i punti del segmento AB sul segmento CD e viceversa, mostrando così la corrispondenza biunivoca tra gli insiemi di punti dei segmenti AB e CD. Tramite questa costruzione, si faceva notare come vi sia lo stesso numero di punti in due segmenti di lunghezze diverse.



Successivamente si consegnava ad ogni insegnante un foglio nel quale era scritta la seguente domanda:

14) Con la massima sincerità rispondi alla seguente domanda: ti ha convinto la dimostrazione che ci sono tanti punti in AB quanti in CD?

Dopo che era stato consegnato il foglio con la risposta n. 14, si proponeva la dimostrazione, relativa alla domanda n. 10, che mette in evidenza come l'insieme dei numeri pari (P) sia formato dallo stesso numero di elementi dell'insieme dei numeri naturali (N), facendo vedere la relativa corrispondenza biunivoca (Tall, 2001a, pag. 213-216).
Illustriamo la corrispondenza biunivoca mostrata agli insegnanti:

N	0	1	2	3	4	5	…	n	…
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
P	0	2	4	6	8	10	…	2n	…

Questa idea ha come origine la considerazione che fece Galileo Galilei (1564-1642) (anche se Galilei parlava di numeri quadrati e non di numeri pari) (vedi paragrafo 1.1.2): ad ogni numero naturale corrisponde un ben preciso quadrato e, viceversa, ad ogni numero quadrato corrisponde un ben preciso naturale (la sua «radice aritmetica»); dunque ci sono tanti numeri naturali quanti quadrati.

Come per la domanda precedente, si era fornito ad ogni insegnante un foglio con la seguente domanda:

15) Con la massima sincerità rispondi alla seguente domanda: ti ha convinto la dimostrazione che ci sono tanti numeri nell'insieme dei pari quanti nell'insieme dei numeri naturali?

Solo dopo che ogni insegnante aveva consegnato tutti i fogli si iniziava il confronto e lo scambio di opinioni tra due o quattro insegnanti.

Vista la natura della ricerca e soprattutto le competenze dei soggetti esaminati su questo tema, non si è ritenuto necessario stabilire un ordine nelle domande che desse preliminarità al discreto rispetto al continuo; di fatto, solo la domanda numero 4 è decisamente inseribile nel filone "continuo".

3.7 Descrizione dei risultati del test e degli scambi di opinioni e verifica delle ipotesi formulate in 3.5

Dalle risposte alle domande del questionario, sono emerse affermazioni piuttosto generiche che sono state approfondite solo grazie agli scambi di opinioni tra gli insegnanti. Qui di seguito riportiamo alcune tra le risposte fornite ad ogni domanda del questionario, integrate con le affermazioni effettuate durante la discussione successiva. La scelta delle risposte ha come finalità quella di far percepire l'intera panoramica delle convinzioni degli insegnanti interpellati. In neretto si sono indicati gli interventi effettuati dal ricercatore durante la discussione, per sollecitare la conversazione e per indagare più in profondità sulle convinzioni degli insegnanti.

3.7.1 Descrizione dei risultati del test e dei relativi scambi di opinioni

1) Per quanto riguarda le risposte alla prima domanda del questionario, tutte rientrano tra le convinzioni riportate di seguito; si può notare come nessuno dei 16 insegnanti intervistati fosse a conoscenza della concezione "avanzata" dell'infinito matematico. Riteniamo importante precisare che la classificazione scelta, non è certamente definitiva; in effetti, come vedremo di seguito, alcune affermazioni degli insegnanti che inizialmente erano state inserite in una determinata categoria, sono poi rientrate anche in altre categorie come conseguenza della conversazione successiva.

• ***Infinito come indefinito.*** 7 insegnanti tendono a considerare l'infinito come indefinito, nel senso che non si sa quanto sia, che cosa sia, che cosa rappresenti.

.R.: «Per me vuol dire senza confini, senza margini come lo spazio»

R.: «Cioè nel senso di indefinito?»

R: «Sì, senza il contorno»

C.: «Qualcosa che non si riesce a dire»

R.: «In che senso?»

C.: «Che non si sa quanto sia»

A.: «Ciò che non si può tradurre per iscritto»

• ***Infinito come numero finito grande.*** Altri 3 insegnanti sostengono che l'infinito non è altro che un numero finito grande.

A.: «Per me è un numero grande, talmente grande che non si può dire esattamente il suo valore»

B.: «Dopo un po', quando ci si stanca di contare si dice infinito per dire che è un numero sempre più grande»

• ***Infinito come illimitato.*** 5 insegnanti confondono l'infinito con l'illimitato, ritenendo che il termine infinito sia attribuibile solamente alla retta, alla semiretta, al piano, ossia a tutto ciò che è illimitato, mentre non si può parlare di infinito ad esempio nei punti del segmento, essendo limitato. Interessante è notare che se il ricercatore interviene ponendo la domanda: *«Quanti punti ci sono in un segmento?»*, gli insegnanti mostrano di sapere che la risposta a questa domanda è: *«Infiniti»*, ma senza percepire il senso e il significato reale di questa affermazione. In effetti, indagando in profondità, 3 dei 5 insegnanti sostengono che nel caso del numero di punti in un segmento, l'infinito è considerato come un numero finito grande del quale non si conosce il valore preciso, mentre gli altri 2 insegnanti si ricollegano all'idea di infinito come indefinito: non si sa esattamente quanto sia; rientrando così tutte e 5 nelle altre categorie evidenziate per questa domanda. Per questi insegnanti, sembra che valga la seguente relazione: se si parla di linee, di piani e di spazio risultano sinonimi infinito e illimitato, mentre nel caso della quantità dei numeri o dei punti, si parla di infinito nel senso di numero finito molto grande o di indefinito.

A.: «Senza un limite»

M.: «Ciò che quantitativamente non misuro»

(Anche in questo caso l'insegnante M. associa il termine infinito all'illimitato, senza pensare ad esempio al segmento che pur essendo limitato e misurabile, nel senso inteso da M., contiene infiniti punti).

N.: «Qualcosa di illimitato»

R.: «Quindi nel segmento non useresti mai la parola infinito?»

N.: «No, perché ha un inizio e una fine»

R.: «Secondo te quanti punti ci sono in un segmento?»

N.: «Ah, è vero, sono infiniti. Ma per dire un numero grande, ma non grandissimo come nella retta. Anche se si fanno piccoli piccoli i punti, più di tanti non ce ne stanno»

[L'insegnante N. evidenzia già la convinzione che ritroveremo tra le risposte alla domanda n. 4, che vi sono più punti in una retta piuttosto che in un segmento, mettendo così in risalto l'idea che a maggior lunghezza corrisponde un maggior numero di punti; i punti, dunque, non sono concepiti come enti astratti, ma come oggetti che per poter essere rappresentati, devono avere una certa dimensione (vedi cap. 4). Queste misconcezioni derivano dai modelli che hanno gli insegnanti degli enti geometrici fondamentali come il punto, la retta e il segmento].

G.: «Illimitato»

R.: «Secondo te quanti punti ci sono in un segmento?»

G.: «In un segmento si dice che ci sono infiniti punti perché non si sa quanti sono esattamente».

- ***Infinito come procedimento.*** Solo un insegnante parla di infinito come risposta alla prima domanda, riferendosi ad un procedimento senza fine:

B.: «L'infinito lo conosco, significa continuare ad andare avanti come con i numeri… per sempre».

Questa convinzione si collega all'idea di infinito potenziale che sarà presentata nel paragrafo 3.7.3. Analizzando le risposte più in profondità si può osservare che anche nell'affermazione qui sopra riportata di B., che rientra nella categoria di infinito come numero finito grande o in altre risposte che ritroveremo successivamente, si rintraccia la convinzione degli insegnanti di infinito potenziale inteso come procedimento che continua per sempre.

2) Le risposte relative alla seconda domanda evidenziano come, per tutti gli insegnanti interpellati, si parli di infinito in diverse forme fin dai primi anni di scuola primaria, creando così immagini di ciò che si intende con questo termine. I 16 insegnanti hanno infatti affermato che nella scuola primaria citano e affrontano il concetto di infinito.

A.: «Riferito al numero, faccio vedere la linea dei numeri e dico che non finiscono mai. E parlando di infinito faccio vedere la differenza fra segmento, semiretta e retta».

Ancora una volta ritorna la convinzione di infinito come illimitato. In effetti era la stessa insegnante che sosteneva che infinito significa senza almeno un limite, per questo afferma esplicitamente che: *«Si può parlare di infinito solo nella semiretta e nella retta, ma non nel segmento»*, essendo il segmento limitato.

G.: «Ne parlo, quando facciamo i numeri. Dico sempre che sono infiniti»

A.: «Dico in terza elementare che la retta è infinita evocando immagini mentali che diano l'idea di infinito come il raggio laser»

M.: «Io lo uso anche per le parti che posso fare da una quantità, posso continuare a dividere sempre una stessa quantità».

Queste sono solo alcune delle affermazioni degli insegnanti interpellati, che mostrano come il termine infinito sia da loro citato e spiegato fin dai primi anni di scuola primaria, seppur senza correttezza e consapevolezza del significato dal punto di vista matematico.

3) La terza domanda è stata posta per indagare se tra gli insegnanti vi fosse la consapevolezza del fatto che l'infinito rappresenta un oggetto matematico (Moreno e Waldegg, 1991).

Per 13 insegnanti si parla di infinito in matematica solo come aggettivo, mentre per gli altri 3 insegnanti anche come sostantivo; ma di questi 3 insegnanti, 2 concepiscono l'infinito nel senso di indefinito, mentre l'altro insegnante sostiene che si può usare questa parola anche come sostantivo, ma nel senso di un numero finito veramente grande del quale non si conosce il valore.

N.: «Come aggettivo»

M.: «In matematica esiste solo come aggettivo, nella lingua italiana anche come sostantivo»

A.: «Come aggettivo si usa in matematica: numeri infiniti; spazio infinito.
Come sostantivo in italiano: "L'Infinito" di Leopardi; "Vedo l'infinito"; "Mi perdo nell'infinito"»

B.: «Anche come sostantivo, per dire un numero grande»

4) La quarta domanda verteva sulla presunta convinzione degli insegnanti che a diversa lunghezza dei segmenti debba corrispondere un diverso numero di punti; idea già emersa dalla risposta alla prima domanda effettuata da parte dell'insegnante N., riportata nel punto 1) di questo paragrafo.

Tutti e 16 gli insegnanti intervistati hanno affermato che in due segmenti di lunghezze diverse vi sono numeri differenti di punti, in particolare che a maggior lunghezza corrisponde un maggior numero di punti (Fischbein, 2001). È ovvio che, come immagine visiva, un segmento sembra essere incluso nell'altro, quindi vi è una grande influenza del modello figurale che in questo caso condiziona negativamente la risposta; in effetti per l'infinito non vale la nozione euclidea: *«Il tutto è maggiore della sua parte»* (vedi paragrafo 1.1.1).

Di seguito riportiamo alcune risposte che rientrano nella convinzione sopra menzionata:

N.: «Mi fa venire in mente che la lunghezza diversa di due segmenti pregiudica più o meno punti nel segmento»

B.: «Nel segmento CD; per forza, ha una lunghezza maggiore»

G.: «In AB ce ne saranno tanti, in CD tantissimi»

A.: «Non ne sono sicura. Dato che un segmento può essere considerato una serie di punti allineati, penso che CD contenga più punti di AB, anche se ho studiato che il punto è un ente geometrico che essendo astratto non è quantificabile, perché non misurabile. Comunque direi in CD»

[Si nota un'incoerenza tra ciò che l'insegnante A. afferma di aver studiato per preparare un esame di Analisi all'Università e ciò che pensa sia più ragionevole; ancora una volta il modello intuitivo dimostra la sua persistenza e predomina. In questa situazione è lampante come non vi sia coincidenza tra significato formale e significato intuitivo (Fischbein, 1985, 1992; D'Amore, 1999)].

Questa accettazione intuitiva, che rappresenta un misconcetto assai diffuso, è già stata menzionata nel paragrafo 3.3 ed è detta *dipendenza* dei cardinali transfiniti da fatti relativi a misure (l'insieme di misura maggiore, ha più elementi); l'insegnante è quindi convinto che: maggiore lunghezza implica maggiore cardinalità dell'insieme di punti. Ricerche accurate hanno ampiamente evidenziato che studenti maturi (ultimo anno delle superiori e primi anni

di Università) non riescono a diventare padroni del concetto di continuità proprio a causa del modello intuitivo persistente di segmento come "collana di perle" (Tall, 1980; Gimenez, 1990; Romero i Chesa e Azcárate Giménez, 1994; Arrigo e D'Amore, 1999, 2002).
Questo misconcetto riapparirà tra le risposte alle domande n. 10-11-12, dove la *dipendenza* viene intesa come *dipendenza* della cardinalità dalla "grandezza" di insiemi numerici.

La convinzione qui sopra evidenziata (che in un segmento più *lungo* vi siano più punti che non in un segmento più *corto*), come abbiamo rilevato nel cap. 1, nonostante varie ma sporadiche ricadute, è stata definitivamente debellata solo nel XIX secolo, dunque piuttosto recentemente. Ancora una volta la storia della matematica è testimone della presenza di un ostacolo epistemologico che, come è messo in evidenza in varie ricerche (Tall, 1980; Arrigo e D'Amore, 1999), rappresenta una misconcezione che comunque fa parte della mentalità comune al di fuori del mondo matematico, quindi si rintraccia anche tra le convinzioni degli insegnanti che non hanno avuto l'occasione di riflettere sulla concezione "avanzata" di questo argomento.
In effetti, l'ostacolo epistemologico inteso nel senso classico alla Brousseau (1983) (vedi paragrafo 2.5), sappiamo essere una conoscenza stabile che funziona bene in àmbiti precedenti, ma che crea problemi ed errori al momento in cui si cerca di adattarla a nuove situazioni (disconoscenza o *modello parassita*). Inoltre come affermano Arrigo e D'Amore (1999): «*… per superare tale ostacolo occorre un nuovo apprendimento*», che però in molti casi non è avvenuto durante il percorso scolastico e che non viene neppure favorito dalla formazione successiva.
Eppure, è difficile immaginare che un insegnante che non abbia mai avuto modo di riflettere su questi argomenti possa avere un'immagine della topologia dell'insieme dei punti della retta (quindi almeno della loro densità) che gli permetta di capire ad esempio il caso specifico dei due segmenti di lunghezza diversa. Perché queste convinzioni non siano la base di modelli scorretti che creino ostacoli didattici che amplificano l'ostacolo epistemologico già evidenziato, occorre aiutare il soggetto a staccarsi dal modello del segmento come "collana", per creare immagini più opportune che consentano di concepire punti senza spessore (vedi cap. 4). Per far questo, il soggetto deve poter varcare il confine della propria conoscenza precedente, per costruire una nuova conoscenza; ma questo è possibile solo facendogli studiare i relativi teoremi su questi argomenti.
5) – 6) – 7) – 8) Per le quattro domande successive, 15 insegnanti rispondono dicendo: «*Infiniti*», tranne un insegnante che dopo vari dubbi scrive: «*Un bel po'!*», spinto dal timore

di sbagliare. Risulta assai diffuso in matematica, l'atteggiamento di rispondere con frasi che si sono apprese mnemonicamente, seppur senza consapevolezza o senza un reale sentore di ciò che possano significare secondo la concezione "avanzata" del concetto (vedi paragrafo 4.1). Tutti ricordano che questi insiemi sono infiniti, ma non sanno che cosa significhi questa affermazione; quasi tutti ricordano di aver studiato che il punto ha dimensione zero, ma non sanno che cosa possa significare, dato che in molti predomina il modello intuitivo di punto come tratto lasciato dalla punta della matita.

9) A partire da questa domanda e per quattro domande consecutive si è chiesto di confrontare le cardinalità di alcuni insiemi infiniti che di solito vengono presentati nella scuola primaria. Le risposte a questa domanda rientrano nelle seguenti tre categorie:

• ***Vi sono tanti numeri pari quanti dispari.*** 12 insegnanti su 16 sostengono questa ipotesi.
C.: «Per me sono lo stesso numero»

• ***Non si può fare il confronto tra le cardinalità di insiemi infiniti.*** 3 insegnanti non riescono a concepire un confronto delle cardinalità di insiemi infiniti. In effetti nella logica di chi concepisce l'infinito o come indefinito o come un qualcosa di finito, molto grande, ma indeterminato come valore, risulta impossibile fare un confronto tra le cardinalità di insiemi infiniti.
R.: «Non si può rispondere, non si può fare un confronto per gli infiniti»

• ***Gli incerti.*** Un insegnante risponde con una domanda:
A.: «Direi che hanno la stessa quantità, i numeri pari e i numeri dispari; ma ho un grande dubbio: se sono infiniti come faccio a quantificarli?»
(Da questa risposta si percepisce l'infinito inteso come indefinito).

10) – 11) – 12) Le risposte date a queste tre domande rientrano nelle seguenti quattro categorie; i 16 insegnanti intervistati rimangono tutti coerenti, rispondendo sempre allo stesso modo a tutte e tre le domande:

• ***Sono di più i numeri naturali.*** 10 insegnanti rispondono che sono di più i numeri naturali, sostenendo così la nozione comune euclidea: *«Il tutto è maggiore della sua parte»*.

C.: «I numeri naturali»

• ***Non si può fare il confronto tra insiemi infiniti.*** Gli stessi 3 insegnanti che nella risposta n. 9 non concepivano un confronto tra le cardinalità di insiemi infiniti, continuano a pensare nello stesso modo; questo deriva dall'idea che si possa parlare di cardinalità solo al finito:
R.: «Non si può rispondere, non si può fare un confronto».

• ***Gli incerti.*** Lo stesso insegnante che alla domanda n. 9 risponde con una domanda, continua a rispondere nello stesso modo, mostrando così di essere coerente:
A.: «Direi i numeri naturali, ma come faccio a quantificarli? Dire infinito non vuol dire niente».

• ***Sono tutti insiemi infiniti.*** 2 insegnanti sostengono che tutti gli insiemi considerati sono infiniti e quindi che hanno tutti la stessa cardinalità.
B.: «Sono entrambi infiniti. Se due insiemi sono infiniti, sono infiniti e basta».
Dall'intervista a questi due insegnanti si evidenzia il misconcetto di *appiattimento* dei cardinali transfiniti, presentato nel paragrafo 3.3, che consiste nel ritenere che tutti gli insieme infiniti sono tra loro equipotenti. Ossia a questi insegnanti è venuto spontaneo pensare che essendo tutti gli insiemi citati infiniti, si possa concludere, in accordo con un passo di Galileo, che l'aggettivo "maggiore" non si possa utilizzare parlando di infinità (vedi paragrafo 1.1.2.); da ciò si trae la conseguenza che tutti gli insiemi di questo tipo sono null'altro che, banalmente, infinito.
R.: «Quindi per te, tutti gli insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità?»
B.: «Cioè? Lo stesso numero? Sì, se sono infiniti!».

13) Questa domanda era stata posta per riuscire ad evidenziare se qualche insegnante, durante l'attività didattica in classe, proponeva esperienze di confronto tra le cardinalità di insiemi infiniti. Tutti e 16 gli insegnanti rispondono che non hanno mai proposto attività specifiche su questo tema, ma 3 insegnanti nella discussione successiva affermano che è possibile che nel parlare di questi insiemi ai propri allievi possano aver detto in modo ingenuo che vi sono più numeri naturali che numeri pari. Affermazione che rappresenta di certo un ostacolo didattico al futuro apprendimento degli studenti.

14) Per testare il grado di convincimento relativo alle affermazioni fornite dagli insegnanti sull'idea di punto e di segmento, soprattutto riguardanti la domanda n. 4, si è proposta la costruzione descritta nel paragrafo 3.6.2 che mostra come vi sia lo stesso numero di punti in due segmenti di lunghezze diverse. Successivamente si è consegnata la domanda n. 14.
Le risposte a questa domanda rientrano tra i seguenti tipi:

• ***Non convinti della dimostrazione.*** Dei 16 insegnanti intervistati, 5 non sono convinti della dimostrazione:

R.: «Vi ha convinto questa dimostrazione?»

M.: «A me mica tanto; per me un punto è un punto, anche se lo faccio più piccolo è pur sempre un punto. Guarda! (e lo segna sul foglio). *Quindi se li faccio grandi uguali, come fanno ad essercene lo stesso numero?»*

R.: «Secondo te tra due punti ce n'è sempre un altro?»

M.: «No, se sono i due punti subito attaccati; se li disegno attaccati attaccati, al massimo dell'attaccato, vedrai che non ce ne sta un altro»

B.: «Mmmh! Ma nel segmento AB ripassi per lo stesso punto quando le linee diventano più fitte. Non mi convince».

Per gli insegnanti che hanno mostrato di percepire il punto non come un ente astratto privo di dimensione, ma come un segno della matita avente una data dimensione, risulta veramente difficile cogliere il senso di questa costruzione. In generale, chi la rifiuta lo fa principalmente perché immagina il segmento secondo il "modello della collana".

• ***Convinti della dimostrazione.*** 9 insegnanti affermano di essersi convinti grazie alla dimostrazione che per alcuni, come A. e C., sembra veramente efficace e lampante:

A.: «Che bella!, mi hai convinta»

C.: «A me hai convinto, è proprio così»

G.: «Sì, sono convinta».

A questi 9 insegnanti che si sono mostrati subito sicuri della correttezza della dimostrazione, abbiamo voluto far apparire qualche perplessità per mezzo di una domanda dubbiosa del tipo: *«Ma siete proprio certi?»*. L'intento era di osservare se gli insegnanti erano disposti a cambiare idea, rivelando così una non reale convinzione. In effetti, 3 di loro mostrano di non essere del tutto convinti, tornando alla affermazione di partenza, ossia che ci sono più punti in CD [si vedano sul cambio di opinione: Arrigo e D'Amore (1999, 2002)].

R.: «Ma siete proprio certi?»

G.: «No, no!, io rimango convinta che in CD ce ne sono di più, si vede»
R.: «Non sono proprio sicura».

• ***Fiducia nei matematici.*** Per un insegnante si percepisce una sorta di "fiducia nei matematici", ma non una vera convinzione della dimostrazione:
A.: «Se lo dite voi matematici, ci fidiamo. Io di certo non mi faccio questi problemi!».

• ***Incerti.*** Un insegnante mostra la necessità di avere qualche chiarimento, ma dopo un veloce confronto afferma di essere convinto:
M.: «È perché hai preso quel punto lì, ma se ne prendevi un altro non tornava… guarda!»
(L'insegnante disegna un punto diverso da quello di proiezione da noi individuato e manda delle linee che intersecano il segmento più lungo ma non il più corto. Da queste considerazioni emergono difficoltà di capire che cos'è e come funziona una dimostrazione in matematica).
R.: «Sì, ma se proprio vuoi che il punto di proiezione sia quel punto che hai segnato, puoi fare una traslazione dei due segmenti e proiettare proprio da quel punto (si è effettuata la traslazione sul disegno di M.)***, d'altronde la traslazione non altera il numero di punti dei due segmenti»***
M.: «Va beh, mi hai convinto».

15) Ai 16 insegnanti si è poi mostrata la corrispondenza biunivoca che permette di stabilire che la cardinalità dei numeri pari è la stessa dei numeri naturali e si è poi posta la domanda n. 15.
A questa sollecitazione gli insegnanti rispondono nei seguenti due modi:

• ***Rimangono dubbiosi.*** 6 insegnanti si mostrano poco convinti:
M.: «Mi sembra un po' una forzatura»
N.: «Che strano, nei pari mancano tutti i dispari per ottenere i naturali».

• ***Si dicono convinti.*** 10 insegnanti sostengono di essere convinti, ma in 2 appare soprattutto la fiducia del ricercatore come depositario del Sapere.
Inoltre, dai colloqui emerge che tutti questi insegnanti che hanno accettato che alcuni insiemi infiniti sono tra loro equipotenti (come i numeri pari e i naturali), pensano che ciò sia legato

all'infinità, generalizzando così che tutti gli insiemi infiniti lo siano. Questa misconcezione di *appiattimento*, appare come un "miglioramento" rispetto alla misconcezione di *dipendenza* della cardinalità dalla "grandezza" dell'insieme; questo cambiamento di atteggiamento sembra una lenta e graduale scalata verso un "modello corretto avanzato di infinito". La presenza del misconcetto *appiattimento* dei cardinali transfiniti, era comunque piuttosto prevedibile dato che gli insegnanti di scuola primaria non conoscono l'insieme dei numeri reali e quindi non possono far altro che generalizzare ciò che hanno appreso per gli insiemi che conoscono.

A questo proposito riportiamo la seguente conversazione:

A.: «Quindi tutti gli insiemi infiniti sono uguali»

R.: «In che senso? Anche gli interi hanno la stessa cardinalità dei naturali?»

A.: «Beh, sì».

R.: «E i razionali? Le frazioni»

A.: «Per me sì»

R.: «E i reali? Le radici»

A.: «Sì, tutti, tutti o sono tutti uguali, cioè infiniti, o non lo sono nessuno».

In generale con le dimostrazioni proposte, abbiamo mostrato agli insegnanti che la proprietà che già Euclide assunse come primitiva: «*Il tutto maggiore di ogni sua parte*» non vale per gli insiemi infiniti: né in àmbito geometrico [vedi le dimostrazioni di: Ruggero Bacone (1214-1292), Galileo Galilei (1564-1642), Evangelista Torricelli (1608-1647) e Georg Cantor (1845-1918)], né per insiemi numerici infiniti di cui uno è sottoinsieme proprio dell'altro [vedi le dimostrazioni di: Galileo Galilei (1564-1642) e Georg Cantor (1845-1918)].

Nelle accettazioni intuitive (misconcetti) degli insegnanti, balzano agli occhi diverse incoerenze come l'*appiattimento* e la *dipendenza* che convivono nella mente degli stessi insegnanti pur essendo in contraddizione tra loro. Si nota, in effetti, una generalizzata difficoltà degli insegnanti di rendersi conto della contraddizione di due affermazioni il che avviene a nostro avviso come conseguenza della non conoscenza e padronanza dell'infinito matematico.

Va inoltre notato che le discussioni tra insegnanti non hanno portato a modificare in qualcuno di loro l'opinione che avevano su una certa problematica dell'infinito. Solo in seguito alla proposta da parte del ricercatore delle due dimostrazioni, un certo numero di insegnanti ha cambiato opinione; mentre si è potuta notare una diffusa resistenza degli insegnanti a cambiare idea a causa delle sollecitazioni di un collega.

3.7.2 L'idea di punto

In molte affermazioni degli insegnanti, soprattutto tra le risposte alla domanda n. 4 del questionario (paragrafo 3.6.2) basata sul misconcetto che a diversa lunghezza dei segmenti debba corrispondere un diverso numero di punti, sono emerse convinzioni legate all'idea di punto come ente avente una certa dimensione, anche se molto piccola. Convinzione derivante dalla rappresentazione che viene comunemente fornita del punto e che condiziona l'immagine che si ha di questo oggetto matematico. In realtà, anche chi non esplicita direttamente questa misconcezione, ma risponde alla domanda n. 4 sostenendo che in un segmento più lungo vi sono più punti rispetto ad un segmento più corto, mette in evidenza una "ingenua" interpretazione di ciò che si intende per segmento e per punto.

Riportiamo di seguito alcune affermazioni relative alla domanda n. 4:

B.: «Nel segmento CD; per forza, ha una lunghezza maggiore»

S.: «Quanti in più?»

B.: «Dipende quanto li fai grandi»

M.: «Anche da come li fai larghi o attaccati; ma se li avvicini al massimo e li fai grandi uguali ce ne sono di più in CD»

G.: «In CD, è più lungo»

S.: «Ma tu li vedi raffigurati i punti qui sopra?»

G.: «Sì, è la geometria che facciamo che tende a farceli vedere i punti».

Di seguito riportiamo l'affermazione già menzionata nel paragrafo 3.7.1 relativa alla domanda n. 1:

N.: «Ah, è vero, sono infiniti. Ma per dire un numero grande, ma non grandissimo come nella retta. Anche se si fanno piccoli piccoli i punti, più di tanti non ce ne stanno».

Da queste affermazioni risulta molto presente il cosiddetto "modello della collana", già citato precedentemente in diversi contesti, in quanto fonte di ostacoli verso la comprensione del concetto di infinito matematico e della topologia della retta. In effetti, come conseguenza dell'aver accettato il modello intuitivo di segmento come filo formato da perline, si crea nella mente degli studenti un *modello parassita* (Fischbein, 1985) (vedi paragrafo 2.2). Ciò che sorprende è che dalle affermazioni fornite dagli insegnanti in questa ricerca, risulta che il "modello della collana" non rappresenta solo uno stratagemma didattico inventato in buona fede dagli insegnanti per fornire ai propri studenti un'idea di segmento, con la consapevolezza però che questa è solo un'approssimativa immagine assai distante dal reale concetto matematico di segmento, bensì appare come l'effettivo modello che gli insegnanti stessi hanno di segmento e di punto. Inoltre, dalle conversazioni risultano lampanti diverse manchevolezze nelle competenze degli insegnanti, legate soprattutto ai concetti di densità e di continuità della retta.

3.7.3 Infinito potenziale ed attuale

Durante lo scambio di opinioni, diversi insegnanti hanno fornito affermazioni che rientrano con forza in una visione potenziale dell'infinito; in effetti, anche quando alcuni insegnanti hanno proposto concezioni attribuibili all'infinito attuale, come: *«La retta è formata da infiniti punti»*, successivamente sono risultati incoerenti sostenendo che si dice retta solo per intendere un segmento che diventa sempre più lungo, rientrando così in una visione potenziale dell'infinito.

Qui di seguito abbiamo analizzato due dei tanti esempi che mettono in evidenza una visione potenziale dell'infinito:

R.: «Diciamo che i numeri naturali sono infiniti, ma sappiamo che questo non significa nulla, perché non si possono quantificare! È come dire un numero così grande che non si riesce a dire; nel senso che puoi sempre andare avanti. Dire retta è come non dire niente, mica esiste, è solo per dire che è una linea sempre più lunga».

Un aspetto che emerge dall'affermazione di R. è che la parola infinito viene citata, ma non rappresenta una quantità; affermare che i numeri naturali sono infiniti (frase molto usata che sembra a prima vista rientrare in una visione attuale dell'infinito), rappresenta solo un modo di dire un numero finito grande. Inoltre da questa affermazione sembrerebbe emergere la convinzione che tutto ciò che riguarda l'illimitato e l'infinito sia percepito come non esistente, essendo non rintracciabile nel mondo sensibile, mentre concetti come ad esempio: segmento, quadrato, rettangolo, dei quali è possibile ricercare attorno a noi approssimativi "modelli", siano colti come esistenti. Ma questa concezione fa perdere il significato della matematica e dei suoi concetti; in effetti, se non si percepisce l'astrattezza di tutti gli enti matematici, anzi ci si ostina a pensarli come esistenti nel mondo sensibile, si prova poi un forte disagio ad immaginare concetti come l'infinito matematico o la topologia della retta. Il problema che emerge è che alcuni insegnanti pensano che buona parte della matematica sia legata al mondo concreto e sensibile, mentre vi sono alcuni concetti come la retta o l'infinito che risultano lontani dal mondo delle cose e quindi non trattabili nella scuola primaria. Un insegnante in effetti ha affermato: *«Se una cosa non esiste come la retta, che senso ha insegnarla?»*. Le stesse considerazioni valgono anche per l'affermazione seguente:

N.: «Dico che i numeri sono infiniti, ma so che è solo immaginazione, che non si riesce ad ottenerli mai tutti, si dice per dire sempre più grande. L'infinito non lo puoi mica raggiungere».

Con concezioni di questo tipo è possibile fornire immagini agli allievi lontane dalla matematica che possono risultare di ostacolo nel momento in cui gli studenti si trovano a dover affrontare corsi di Analisi alle superiori, ma anche prima, quando nella scuola media vengono proposti concetti come: la densità di Q, i numeri irrazionali come π, il rapporto tra il lato e la diagonale di un quadrato ed altri esempi ancora.

Dalle affermazioni degli insegnanti intervistati emerge quasi esclusivamente la visione potenziale dell'infinito; a tal proposito, sono state molto interessanti le discussioni che si sono avute quando il ricercatore ha tentato di far cogliere la duplice natura dell'infinito: attuale e potenziale, così come si era rivelata allo stagirita Aristotele (vedi paragrafo 1.1.1).

• 10 insegnanti rimangono ancorati alla visione potenziale dell'infinito; a questo proposito riportiamo uno stralcio di conversazione:

M.: «Per me esiste solo l'infinito potenziale, l'altro non c'è, è pura fantasia, dimmi dov'è?»

S.: « Parlando di retta»

M.: «Ma la retta, dov'è? Non c'è, è un'invenzione quindi l'infinito attuale non c'è»

S.: «Che cosa pensi della retta?»

M.: «Secondo me queste cose non andrebbero insegnate, almeno alle elementari, come fanno quei poveri bambini! Sì, tu lo puoi anche dire la retta è formata da infiniti punti, ma loro che cosa capiscono (non ci credo neanche io!), se non la vedono a quell'età non possono capire. Le cose le devono poter toccare con mano»

N.: «Per me esistono cose veramente grandi, ma pur sempre finite, il resto non esiste».

• 6 insegnanti sembrano percepire il senso dell'infinito attuale. In particolare, di 3 insegnanti si nota lo sguardo illuminato dell'avvenuta scoperta della distinzione che c'è tra le due concezioni: potenziali ed attuali.

A.: «Non ci avevo mai pensato a questa distinzione, ma ora ho capito, riesco ad immaginarlo»

B.: «Non ci avevo neanche mai pensato, nessuno mi aveva fatto riflettere su questo problema, ma sinceramente io ho sempre pensato che fosse solo nel senso di procedere sempre di continuo. Però ora ho inteso la differenza».

Da quest'ultima affermazione si sente il disagio degli insegnanti di non aver avuto modo di riflettere su questioni così importanti che coinvolgono temi che dovrebbero in parte dominare per evitare misconcezioni nei loro allievi.

Il problema di fondo è che "nessuna grandezza sensibile è infinita", quindi questi argomenti risultano contrari all'intuizione e distaccati dall'esperienza quotidiana (Gilbert e Rouche, 2001). A tal proposito, varie ricerche [Moreno e Waldegg (1991), Tsamir e Tirosh (1992), Shama e Movshovitz Hadar (1994), D'Amore (1996, 1997), Bagni (1998, 2001)] hanno messo in evidenza che nell'acquisizione dell'*infinito attuale* si individuano ostacoli epistemologici derivanti dall'intuizione primaria e la storia della matematica ne è una testimonianza. In effetti, come abbiamo potuto osservare nel capitolo 1, nei 2200 anni trascorsi da Aristotele ad oggi, la critica sull'infinito si è evoluta molto lentamente ed in modo non omogeneo.

La concezione dell'infinito fino al XVIII secolo era potenziale, così com'è potenziale l'impostazione di chi è lasciato all'intuizione e non ha avuto modo di riflettere su questi concetti. Eppure la concezione attuale dell'infinito risulta necessaria negli studi di Analisi, anche se si tende per anni a far credere agli alunni che vi sia un unico modo di pensare a questo concetto: il potenziale. Così che, la nuova necessaria concezione attuale dell'infinito con la quale si "scontrano" gli studenti alle superiori, potrebbe risultare di difficoltà insormontabile, dato che negli anni precedenti potrebbe essersi formato un modello intuitivo di infinito ben radicato e inteso solo in senso potenziale, legato solamente alle proprie intuizioni e a quelle dei loro insegnanti, ma lontane dal mondo della matematica.

Ancora, Tsamir (2000) afferma: *«La teoria cantoriana degli insiemi e il concetto di infinito attuale sono considerati contrari all'intuizione a tali da generare perplessità, pertanto non sono facilmente acquisibili; per insegnarli è necessaria una speciale sensibilità didattica»*; ma per chi non ha affrontato alle scuole superiori questi argomenti e non è stato più costretto ad un ripensamento, rimane l'immagine ancorata all'intuizione precedente basata solo sull'infinito potenziale.

Ma allora, se ai maestri (e non solo) questo argomento non è mai stato insegnato, è ovvio che non potranno che essere legati esclusivamente alle loro intuizioni, che la storia della matematica evidenzia come contrarie alla teoria; di conseguenza la "sensibilità didattica" di cui parla Tsamir, non potrà essere presente e questo è fonte di ostacoli didattici collegati agli inevitabili ostacoli epistemologici.

Si evidenziano così ostacoli epistemologici rafforzati da ostacoli didattici. L'intuizione domina, ma è rafforzata anche dall'insegnamento ricevuto. Tutto appare come una catena che si autoalimenta: insegnanti che si fondano sulle loro intuizioni, che sono state a loro volta rafforzate dai loro insegnanti che si fondavano solo sulle loro intuizioni, che sono state a loro volta... Questa catena va interrotta mettendo in evidenza le carenze degli insegnanti e prevedendo di conseguenza una didattica specifica sull'infinito sia per insegnanti in formazione che per insegnanti in servizio, per ovviare così a quei disagi e a quelle difficoltà che tante ricerche hanno evidenziato in studenti di scuola superiore.

3.7.4 Il bisogno del "concreto"

Da diversi colloqui con gli insegnanti emerge un'opinione assai diffusa circa il bisogno che hanno i bambini di scuola primaria di modelli concreti per riuscire a capire i concetti matematici; tale opinione giustifica le scelte didattiche della collana di perline, come modello di segmento, o il segno lasciato dalla matita o il granello di sabbia, come modelli di punto matematico. Ma non tutto si presta ad essere modellizzato senza alcuna conseguenza, anzi molto spesso nella trasposizione didattica le scelte fatte derivanti da un eccessivo riferimento al mondo concreto, condizionano in modo negativo l'apprendimento futuro degli studenti. Inoltre, sperimentando con bambini di scuola primaria e con insegnanti disposti a cambiare impostazione nel loro insegnamento, si nota come per i bambini sia piacevole e semplice entrare in un mondo lontano dal mondo sensibile; allo stesso tempo si nota come, lavorando in questo modo, diventi più semplice per gli insegnanti affrontare i concetti matematici che sono per loro stessa natura lontani dal mondo concreto. A questo proposito viene spontaneo domandarsi se il bisogno del concreto sia un'esigenza dell'insegnante o dei bambini. In effetti, è ben evidente la difficoltà che mostrano la maggior parte degli insegnanti nel pensare a questioni distaccate dalla realtà del mondo che ci circonda e allo stesso tempo si nota la facilità ed il piacere che mostrano invece talvolta i bambini ad estraniarsi dal mondo sensibile.
A questo proposito, riportiamo due affermazioni degli insegnanti avvenute durante i colloqui e che risultano in opposizione l'una rispetto all'altra. La prima è già stata riportata e analizzata da un altro punto di vista nel paragrafo 3.7.3:

M.: «Secondo me queste cose non andrebbero insegnate, almeno alle elementari, come fanno quei poveri bambini! Sì, tu lo puoi anche dire la retta è formata da infiniti punti, ma loro che *cosa capiscono (non ci credo neanche io!), se non la vedono a quell'età non possono capire. Le cose le devono poter toccare con mano»*

A.: «Per me invece questi concetti si devono immaginare più che trovare; nella scuola elementare ci si riesce solo andando a pescare nell'immaginario che è ricchissimo: "Una retta è una linea che arriva fino nel più lontano spazio infinito", e loro se lo immaginano… Dico che il punto non si può misurare, pesare. C'è, ma non si vede, è come una magia. Così ci si riesce perché pescano in un mondo che non è più quello della concretezza. Bisogna andare in un mondo dell'immaginario, così ci riescono».

(Quest'ultima insegnante aveva sostenuto un esame di Analisi all'Università).

3.8 Risposte alle domande formulate in 3.4

Siamo ora in grado di rispondere alle domande di ricerca formulate in 3.4.

P1. La risposta ci pare ampiamente negativa. Non vi è alcuna conoscenza di ciò che si intende per infinito matematico sia epistemologicamente che cognitivamente e questo deriva sicuramente dal tipo di tematica, totalmente caratterizzata da ostacoli epistemologici e dalla mancanza di uno studio specifico su questo argomento. L'infinito è, per gli insegnanti di scuola primaria, un concetto sconosciuto gestito solo dall'intuizione e per questo ridotto banalmente ad un'estensione del finito; questo è causa di modelli intuitivi che costituiscono vere e proprie misconcezioni. Ossia gli insegnanti accettano la nozione euclidea: *«Il tutto è maggiore di ogni sua parte»* per il finito e tendono a considerarla vera anche per l'infinito cadendo nel misconcetto di *dipendenza*; ma l'"essere sottoinsieme proprio" e "avere meno elementi" sono espressioni che non vanno confuse se si parla di insiemi infiniti. Ma l'insegnante di scuola primaria, avendo avuto durante la sua formazione, solo continue conferme di quello che avviene nel finito, lo ha assunto come modello intuitivo assoluto e, come tale, proposto ai propri allievi. Ossia gli insegnanti tendono a generalizzare per l'infinito ogni concetto che vale nel finito: se un insieme A è sottoinsieme proprio di un insieme B, allora automaticamente la cardinalità di B è maggiore di quella di A. Alla costruzione di questo misconcetto collabora anche il modello intuitivo che possiedono gli insegnanti del segmento come filo formato da perline e che porta alla *dipendenza* da fatti relativi a misure. Molto presente è inoltre il misconcetto di *appiattimento* che però ha sicuramente una ricaduta didattica meno influente nella scuola primaria rispetto alla *dipendenza*. Quanto alla retta come figura illimitata ed il conteggio prolungato dei numeri naturali, sembrano fornire agli insegnanti la capacità di vedere l'infinito solo in potenza e non in atto, il che crea gravi ostacoli didattici (Tsamir e Tirosh, 1992; Shama e Movshovitz Hadar, 1994; Bagni, 1998, 2001; Tsamir, 2000).

P2. La risposta risulta affermativa. Le immagini intuitive degli allievi relative all'infinito vengono rafforzate dalle continue sollecitazioni degli insegnanti che tendono a trasferire ai propri allievi i loro modelli intuitivi che sono, a loro insaputa, vere e proprie misconcezioni (descritte in P1). Queste convinzioni permangono così nella mente degli studenti e si rafforzano, tanto da costituire un ostacolo difficile da superare al momento in cui l'infinito viene trattato in modo attuale alle superiori. In effetti modelli intuitivi, come ad esempio il modello del segmento come collana, rendono impossibile concepire e comprendere l'idea di densità che viene presentata a partire dalla scuola media o addirittura dalla scuola primaria. Per esempio quando si pongono i cosiddetti numeri frazionari sulla "retta razionale" r_Q, il modello della collana resiste e la densità resta un fatto puramente potenziale; inoltre a molti studenti la densità appare già riempitiva della retta e dunque non concepiscono che differenza vi sia tra r_Q ed r. Né li aiuta molto, qualche anno dopo, lo studio di R e la definizione di continuità; il modello intuitivo della collana continua a dominare.

P3. Risulta evidente da questa ricerca che, a parte gli ostacoli epistemologici (già evidenziati dalla letteratura internazionale), vi sono forti ostacoli didattici derivanti dai modelli intuitivi erronei degli insegnanti che vengono proposti ai propri allievi. Per aggirare tali ostacoli occorre una maggiore formazione su questo tema, in modo da allontanare l'idea di infinito da un'impostazione puramente ed esclusivamente intuitiva; risulta in effetti necessario rivedere la lista dei contenuti da proporre agli insegnanti in via di formazione iniziale a qualsiasi livello scolastico, in modo che gli studenti non arrivino ad affrontare lo studio dell'Analisi alle superiori già con forti misconcetti alle spalle. La trattazione delle problematiche concernenti l'infinito attuale richiede infatti lo sviluppo di modelli intuitivi diversi, a volte addirittura opposti, rispetto a quelli che si usano nel finito. A nostro avviso bisognerebbe iniziare fin dalla scuola primaria un'opportuna educazione alla trattazione di insiemi infiniti che permetta allo studente di cominciare a notare le principali differenze che vi sono tra l'àmbito finito e quello infinito, sia nel campo geometrico che numerico.

3.9 Conclusioni a questo capitolo

In molte ricerche sul tema dell'infinito matematico, era maturata la convinzione che gli ostacoli che impediscono la comprensione di questo concetto siano soprattutto di natura epistemologica.

In questa ricerca si sono messe in evidenza le false credenze degli insegnanti di scuola primaria nei confronti dell'infinito, sorrette da immagini mentali erronee che condizionano le loro convinzioni, di conseguenza il loro insegnamento. Molti insegnanti coinvolti in questo lavoro di ricerca, dopo aver richiesto chiarimenti, hanno con convinzione e grande professionalità riconosciuto che il loro insegnamento era ricco di modelli sbagliati; modelli che i bambini ritrovavano confermati anno dopo anno e che, a detta degli insegnanti stessi, potevano essere il punto di partenza di futuri ostacoli didattici. Per questa sincerità e professionalità, vogliamo ringraziarli.

A nostro avviso le grandi difficoltà rilevate nella comprensione dell'infinito matematico non sono dovute solamente ad ostacoli epistemologici, ma amplificate anche da ostacoli di tipo didattico creati dalle idee intuitive degli insegnanti; è anche molto probabile che le lacune su questo tema non siano un problema esclusivo della scuola primaria, ma che siano invece diffuse ad ogni livello scolastico tra tutti quegli insegnanti a cui non è stata data l'occasione di riflettere sull'infinito matematico.

In effetti questo tema è risultato fino ad ora troppo sottovalutato, soprattutto come argomento di formazione degli insegnanti, e sembrerebbe che proprio da questa mancanza derivino in parte le difficoltà degli studenti di scuola superiore che portano con sé forti convinzioni antecedenti non idonee ad affrontare le nuove situazioni cognitive. Bisogna quindi tentare di inibire e superare i modelli che provocano ostacoli nella mente degli insegnanti, e di conseguenza degli allievi, proponendo, come abbiamo già sostenuto in diversi punti di questo capitolo, corsi di formazione per insegnanti di scuola primaria che tengano conto degli aspetti intuitivi e delle peculiarità dell'infinito, oltre che dei risultati rilevati dai ricercatori in didattica della matematica. Corsi basati sulla discussione, sul confronto con gli aspetti storici, che permettano di partire dalle idee intuitive primarie per poi evolvere in nuove, più evolute, convinzioni.

Questa necessità è stata anche evidenziata ed esplicitata con forza, da parte di tutti gli insegnanti coinvolti in questo lavoro di ricerca. A questo proposito si riportano di seguito due interventi di insegnanti:

M.: «Sì, è la geometria che facciamo che tende a farceli vedere i punti. Ci vorrebbe qualcuno che ci faccia riflettere su queste cose e sull'importanza di trasferirli in modo corretto. Nella matematica che abbiamo fatto noi, non ci facevano riflettere su queste cose. Ci vorrebbe un po' di teoria a monte».

A.: «Noi pecchiamo di semplificazione, senza studiare la teoria. Siamo convinte di averla, ma non l'abbiamo la teoria. Ci preoccupiamo di trasferirla in modo concreto, senza approfondire come funziona».

Questa formazione farà sì che gli insegnanti della scuola primaria curino i concetti relativi agli insiemi infiniti, coinvolgendo gli alunni in esperienze significative e in attività che permettano di costruire immagini intuitive coerenti con la teoria degli insiemi infiniti.