Capitolo 4. Linee di ricerca presenti e future

4.1 Il primo corso di formazione su questo tema

Il capitolo precedente si è concluso ribadendo l'importanza di corsi di formazione per insegnanti sul tema dell'infinito, per favorire un'evoluzione delle convinzioni verso una visione "avanzata" di questo argomento. Per questo, negli ultimi due anni abbiamo iniziato un "percorso" di formazione con 37 insegnanti di scuola primaria e 8 insegnanti di scuola secondaria inferiore di Milano che ha portato le nostre considerazioni verso nuove riflessioni. La scelta dei docenti è avvenuta come conseguenza di un seminario che si è tenuto nel 2001 al Convegno di Castel San Pietro Terme: "Incontri con la matematica n. 15", rivolto ad insegnanti della scuola di base dal titolo: *"Infiniti e infinitesimi nella scuola di base"*. Concluso il seminario, un folto numero di insegnanti incuriositi dall'argomento e riconoscendo nelle loro convinzioni gli stessi misconcetti descritti nel capitolo 3, si sono avvicinati manifestando immediatamente il bisogno di saperne di più di un argomento sul quale non avevano mai avuto modo di riflettere. Questa "scelta" è quindi partita dalla sincera motivazione di insegnanti che desideravano scoprire in profondità questo, fino ad allora, sconosciuto argomento. Si è quindi presentata per noi una situazione ideale per iniziare un "percorso" non solo di formazione, ma di vera e propria ricerca, che sta diventando di giorno in giorno sempre più ricco e pieno di stimoli. Prima di iniziare nel 2001 il corso di formazione abbiamo proposto lo stesso questionario presentato e commentato nel paragrafo 3.6.2 con la stessa metodologia descritta nel paragrafo 3.6, per valutare se le convinzioni di questi insegnanti rientravano in quelle già rilevate nel capitolo precedente. Possiamo affermare, senza andare nel dettaglio per non essere ripetitivi, che i risultati avuti sono in linea con quelli già evidenziati precedentemente; in più, abbiamo potuto rivelare come non vi sia sostanzialmente differenza tra le concezioni degli insegnanti di scuola primaria e quelle degli insegnanti di scuola secondaria inferiore, mettendo così in evidenza come risulti quasi scontato rimanere ancorati alle proprie ingenue intuizioni per argomenti così intrisi di ostacoli epistemologici, a meno che non avvenga una vera e propria formazione specifica sul tema. Di questi 8 insegnanti di scuola secondaria, 2 sono laureati in matematica e 6 in altre materie scientifiche; nessuno aveva mai seguito un corso su questo argomento all'Università, o successivamente, per questo non si è notata una differenza tra i diversi tipi di laurea, ma

ancora più sorprendentemente tra una laurea in matematica, che non ha permesso una riflessione profonda e specifica su questo argomento, e un "semplice" diploma di quattro anni di istituto magistrale che consentiva, fino a pochi anni fa in Italia, di insegnare alle scuole primarie. È veramente stupefacente come di fronte ad argomenti così epistemologicamente complessi si annullino completamente gli altri saperi, facendo sì che tutti abbiano sostanzialmente le stesse convinzioni.
I risultati di questa esperienza sono a disposizione presso l'Autrice di chiunque voglia consultarli, ma possono comunque essere sostanzialmente riletti nelle riflessioni riportate nel capitolo 3.

L'unica differenza che si è potuta percepire è basata sul diverso tipo di espressioni usate durante la discussione avvenuta tra quattro insegnanti alla volta di scuola secondaria; queste vertevano spesso sull'esplicitazione di quelle che rappresentano per loro "definizioni" che ritrovano nei libri di testo adottati e che vengono di conseguenza proposte ai propri allievi; definizioni che risultano però molte volte improprie, mal poste e mal gestite.
Tanto per fare alcuni esempi, analizziamo una risposta di un insegnante di scuola secondaria inferiore alla domanda 4 del questionario contenuto nel paragrafo 3.6.2, basata sulla richiesta se ci sono più punti in un segmento più lungo o in uno più corto:
S.: «Dunque… dato che ***un punto è un ente geometrico fondamentale della geometria privo di dimensione****, direi che non si può dire se ce ne sono di più in AB o in CD. Però è anche vero che* ***una retta è formata da infiniti punti****, ma questi sono segmenti. Be', la diversa lunghezza dei segmenti in qualche modo inciderà, quindi direi che ci sono più punti in CD. Sì, sì, ce ne devono essere di più in CD».*
Abbiamo evidenziato in neretto le espressioni che comunemente vengono considerate dagli insegnanti, a detta loro, come "definizioni" non solo nella scuola secondaria inferiore ma, come vedremo nel paragrafo 4.3, anche nella scuola secondaria superiore.
Come si nota già da questo esempio, la gestione di questi "saperi" nozionistici a volte impropri, non capiti e interiorizzati nel loro vero significato, non porta in realtà a risultati diversi da quelli manifestati più semplicemente dagli insegnanti di scuola primaria: *«Il sapere non è nei libri, è la comprensione del libro. Se si considerano i risultati scientifici, si ammette generalmente che chi li sa enunciare senza rendersene ragione non li sa (…). Il sapere non è né una sostanza né un oggetto, è un'attività intellettuale umana, fatta da soggetti che si sforzano di rendere ragione di quel che fanno e dicono (attraverso la dimostrazione, il ragionamento)»* (Cornu e Vergnioux, 1992). L'insegnante F. di scuola secondaria, seppure

non sostiene come la collega di scuola primaria riportata nel paragrafo 3.7.2 che: «*Anche se si fanno piccoli piccoli i punti, più di tanti non ce ne stanno*», alla fine ribadisce che vi sono più punti in un segmento più lungo piuttosto che in uno più corto, manifestando così una visione del punto che non può essere a-dimensionale, se deve dipendere dalla misura, come invece sosteneva inizialmente ripetendo mnemonicamente un sapere.
Si nota quindi una mancanza di consapevolezza su ciò che si pensa di conoscere, soprattutto quando si parla di argomenti delicati come possono essere gli enti primitivi della geometria. Da queste considerazioni è iniziato un filone di ricerca tuttora in corso che verte proprio sul tema degli enti primitivi della geometria, argomento fortemente collegato al concetto di infinito matematico e che sarà descritto nel paragrafo 4.3.
Queste carenze cognitive incidono in modo decisivo sulla *trasposizione didattica* (vedi paragrafo 2.4), le cui scelte possono essere il frutto di misconcetti, o addirittura di modelli erronei, che sono la base di esperienze didattiche mal poste dagli insegnanti e presentate sempre nello stesso modo, anno dopo anno. Come abbiamo già rilevato nel paragrafo 3.8 per molti insegnanti, e di conseguenza per molti allievi, la densità appare già riempitiva della retta e risulta quindi incomprensibile la differenza tra r_Q ed r, anche quando viene presentato l'insieme R e la definizione di continuità. La distinzione tra densità e continuità non è certo favorita dall'acritico uso del supporto retta, che inizia fin dalla scuola primaria per N, con vari problemi didattici (Gagatsis e Panaoura, 2000) e prosegue poi nei livelli scolastici successivi (Arrigo e D'Amore, 2002).
Ancora, del tutto negativa è l'insistenza in tutti i livelli scolastici sul modello "naturale" dell'ordine di Z che, proprio per la sua estrema semplicità e immediatezza, non solo concettuale ma soprattutto grafica, si rivela poi univoco e insuperabile anche quando si presenta la corrispondenza biunivoca tra l'insieme Z e l'insieme N che richiede un ordine diverso degli elementi di Z rispetto a quello "naturale" (Arrigo e D'Amore, 2002) (vedi paragrafo 1.2.5).

Altro esempio di riflessione effettuato da un insegnante di scuola secondaria inferiore come risposta alla domanda n. 7 dello stesso questionario: *Quanti sono i numeri naturali: 0, 1, 2, 3…?*:

F.: «I numeri naturali sono infiniti, perché ***un insieme è infinito se è formato da infiniti elementi*** *e 0, 1, 2, 3, … sono infiniti».*

Lo stesso insegnante dovendo rispondere alla domanda n. 10: *Sono di più i numeri pari o i numeri naturali?*, afferma:

F.: «Sono di più i numeri naturali dei pari, per forza sono il doppio».

È importante mettere in evidenza ancora una volta come risultano improprie le "definizioni" che spesso vengono fornite nei libri di testo; solo per darne un esempio nella parte di Aritmetica di un testo per le scuole secondarie inferiori, sotto il titolo: ***insiemi finiti, insiemi infiniti***, si riporta il seguente breve paragrafo:

"Gli insiemi di cui abbiamo parlato sono costituiti da un numero ben preciso, ***finito****, di elementi",* (alludendo così che un insieme infinito, come l'insieme dei numeri naturali, non è formato da un numero ben preciso di elementi, come invece è in realtà: infinito numerabile. Queste considerazioni portano inevitabilmente ad associare l'infinito con l'indeterminato).

E continua nel seguente modo:

"In matematica però puoi incontrare insiemi costituiti da un numero ***infinito*** *di elementi"* (il termine infinito era evidenziato nel testo). Si introducono così gli insiemi infiniti come insiemi costituiti da un numero infinito di elementi, affermazione che si trova in numerosi libri di scuola secondaria inferiore e che viene percepita dagli insegnanti come "definizione" (F.: *«C'è scritto nel libro di testo»*), mentre in alcuni libri di scuola superiore la stessa affermazione viene proposta tra le "idee primitive".

Questo breve paragrafo sugli insiemi finiti e infiniti, continua e si conclude così: *"Costituiscono, ad esempio, un insieme infinito, i numeri interi: infatti, comunque tu consideri un insieme finito di numeri interi, puoi sempre trovare un numero intero diverso da quelli considerati"* (idea che rientra in una visione esclusivamente potenziale di infinito e che ricorda l'impostazione euclidea degli "Elementi"). Questa stessa visione potenziale si ritrova in numerosi testi come in un libro molto adottato per le scuole secondarie inferiori in Italia, che inizia il capitolo relativo ai numeri con questa affermazione: *"un ultimo numero non si raggiungerà mai anche continuando ad aggiungere 1 e 1 e 1…"* e continua con: *"l'insieme dei numeri naturali è* ***infinito****"* (idea che può portare ai misconcetti presentati nel paragrafo 3.7.1 del tipo: infinito come indefinito o infinito come numero finito grande). In effetti, fornendo esclusivamente questa visione potenziale dell'infinito si trasmetterà all'insegnante e all'allievo l'idea che l'infinito non possa mai essere concepito come un oggetto in sé, come una qualcosa di definito che si possa afferrare, "raggiungere" e dominare.

Nei libri di testo si parte in alcuni casi dagli insiemi finiti per poi passare a definire quelli infiniti, in altri casi si usa il procedimento contrario, definendo successivamente un *"insieme finito come un insieme che non è infinito"*. La critica non è qui rivolta alla definizione al negativo, in quanto ci uniamo al pensiero di Bolzano (1781-1848), riportato nel testo in bibliografia del 1985, che verte sul fatto che se esistono concetti cosiddetti "positivi", nulla

vieta che ne esistano di “negativi” e che per questi nulla impedisce una definizione al negativo. In effetti la definizione di insieme infinito viene data di solito a carattere positivo mentre quella di insieme finito in modo negativo, anche se spesso nei testi filosofici si legge che “finito” sarebbe il concetto “positivo”, mentre “infinito” (nel senso di non-finito) quello “negativo”. [Su questa questione, e sulle difficoltà di definire il concetto di “finito” si veda Marchini, 1992].
Il punto cruciale sta invece su quale definizione di insieme infinito si sceglie e sui circoli viziosi che molto spesso si creano non partendo da una definizione che rispecchi il concetto; queste false definizioni non fanno altro che amplificare i misconcetti degli allievi e quelli degli insegnanti.

A questo punto occorre chiarire le finalità di un libro di testo, che è il risultato di una trasposizione didattica scelta dagli Autori e non va quindi interpretato dall’insegnante come un libro di matematica nel quale si possono apprendere concetti. Il sapere dovrebbe già essere dominato dall’insegnante nel momento in cui adotta un libro di testo e queste conoscenze dovrebbero essere semplicemente rilette e reinterpretate nella trasposizione didattica scelta dall’Autore del libro di testo, per poi riadattarle personalmente nel particolare contesto-classe. Invece, per quanto concerne l’infinito matematico, capita spesso che l’insegnante non conosca questo sapere, quindi non fa altro che associare alla trasposizione didattica dei libri di testo, la funzione di trasmettitore di contenuti matematici, e questo si può percepire dal frequente tentativo di giustificare le proprie risposte riguardanti contenuti matematici con frasi del tipo: *«C’è scritto nel libro che adottiamo»*. Eppure domini del sapere, concetti, dal momento in cui entrano in un libro di testo, subiscono una trasformazione massiccia, sono snaturati per trovare un altro statuto, un’altra logica, un’altra razionalità, influenzata dai requisiti richiesti da una pedagogia scolastica che impone a loro una forma diversa.

Tornando alla “definizione” di insieme infinito, dire che un insieme è infinito se è formato da infiniti elementi, non può certamente essere considerata una definizione attendibile e non può portare a far cogliere che due insiemi infiniti, come ad esempio quello dei numeri naturali e dei pari, sono formati dallo stesso numero di elementi. Invece una definizione di insieme infinito corretta, che all’apparenza però può apparire contorta, è quella detta di Galileo-Dedekind (vedi paragrafo 1.2.2): *“Un insieme è infinito quando si può mettere in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria”*; che permette di afferrare l’idea che gli insiemi dei numeri naturali e dei pari potrebbero essere formati dallo stesso numero di

elementi, se solo si riuscisse a trovare una corrispondenza biunivoca opportuna tra loro (riportata nel paragrafo 3.6.2).
È quindi lampante il problema della trattazione di questi argomenti nei libri di testo, dove gli Autori tendono a diffondere questioni assai delicate senza la necessaria cautela critica, che è invece un'accortezza da pretendere da parte di chi produce materiali destinati all'àmbito didattico. Purtroppo un atteggiamento tipico dei lettori, sia degli studenti che degli insegnanti, è, come abbiamo potuto osservare, di non avere sufficiente capacità critica su ciò che viene scritto a stampa, per questo tutto quello che si trova su un qualsiasi libro è considerato degno di fede. La nostra intenzione futura sarà anche quella di analizzare, per quanto riguarda questo tema, i libri di testo adottati generalmente dagli insegnanti, valutandone le imprecisioni e le manchevolezze e cercando di cogliere, con apposite metodologie, la fiducia cieca che viene riposta dagli insegnanti su questo strumento didattico.

Nel 2001, dopo la proposta del questionario iniziale, si è impostato il corso di formazione su questo tema seguito inizialmente da 45 insegnanti che, avendo gli stessi misconcetti iniziali, provavano la sensazione ben espressa da un insegnante di scuola secondaria inferiore: *«In questo caso, siamo davvero tutti nella stessa barca!»*. Il corso strutturato in diversi incontri, che continua ancora oggi con un ristretto gruppo di insegnanti, è stato pensato inizialmente partendo dalla storia della matematica relativa a questo tema (vedi cap. 1).
Questa scelta deriva dalla consapevolezza di dover sradicare convinzioni influenzate da forti ostacoli epistemologici. Eravamo certi di questo, dato che si presentavano entrambe le caratteristiche messe a punto nell'àmbito del gruppo di ricerca di Bordeaux, e riportate in D'Amore (1999), per poter individuare un ostacolo epistemologico:
• nell'analisi storica di un'idea, si deve riconoscere una frattura, un passaggio brusco, una non-continuità nell'evoluzione storico-critica dell'idea stessa (di questo, la storia dell'infinito è testimonianza);
• uno stesso errore si deve verificare come ricorrente più o meno negli stessi termini. (Questi stessi errori che coincidono con le fratture storiche si sono rintracciate tra le considerazioni espresse dagli insegnanti coinvolti).
Partendo da questa consapevolezza, abbiamo ritenuto fondamentale instaurare durante il corso uno stretto legame tra la storia della matematica e l'aspetto didattico, coniugando un àmbito con l'altro tramite la discussione e il confronto che partiva dalle idee intuitive primarie degli insegnanti per poi evolvere in nuove, più evolute, convinzioni. Questo veicolo è risultato fondamentale, in quanto ha permesso una lettura critica da parte degli insegnanti delle proprie

idee che rintracciavano anche in affermazioni di alcuni personaggi storici; tale confronto ha permesso di sradicare i misconcetti che si erano manifestati nel questionario iniziale. Inoltre, per molti insegnanti, l'esplicitazione di queste fratture storiche, di queste discontinuità, che mostrano situazioni erronee nelle quali i matematici si sono venuti a trovare, ha permesso di capire il senso che ha l'errore in matematica (D'Amore e Speranza, 1989, 1992, 1995). Lo studio della storia è quindi risultato fondamentale per gli insegnanti come chiave critica di autoanalisi. In particolare, in questi anni, tre insegnanti di scuola primaria hanno deciso spontaneamente di tenere memoria del loro percorso, scrivendo di volta in volta come si sono evolute le loro convinzioni. L'intenzione è di poter pubblicare prossimamente i risultati di questo percorso di formazione visto con gli occhi di una o più insegnanti di matematica di scuola primaria (nel paragrafo 4.4.3 leggeremo alcuni stralci di questa autovalutazione realizzati da due di questi insegnanti).

L'efficacia del corso si può rileggere in alcune delle seguenti affermazioni di insegnanti di scuola primaria: *«Ho imparato di più da queste lezioni che non in tutta una vita di insegnamento di matematica e di corsi di aggiornamento. Mi sembra di capire che cos'è la matematica solo ora, a pensare che la insegno da 27 anni. Questa scoperta mi ha davvero sconvolto la vita»*; *«Ho capito che cos'è l'infinito attuale e l'ho accettato con disinvoltura da quando ho deciso di aver la forza di concepirlo come oggetto in sé, un tutt'uno. Ora mi sento più forte»*; *«Mi accorgo di essere molto più attenta con i miei bambini e allo stesso tempo molto più aperta alla discussione. Soprattutto cerco di lavorare sulle loro intuizioni così come hai fatto tu con noi. Ne sono felici»* e di scuola secondaria inferiore: *«Mi hai illuminata! Finalmente ho capito cose che ho sempre ripetuto e insegnato ma alle quali non avevo in realtà mai pensato. Te ne sono molto grata»*; *«Ormai non riesco più ad accontentarmi di insegnare come facevo prima… non posso più tornare indietro»*; *«Quello che mi ha stupita di più è stato scoprire di non sapere neanche quello che insegno. Vuoi che ti dica che cosa in particolare? Non mi ha fatto dormire tutta una notte sapere che $3,\overline{9}$ è proprio uguale a 4 e non gli manca proprio niente. Non è che lo approssima, è proprio uguale. A pensare che la "regola dei periodi" l'ho sempre fatta vedere, ma mai per questi casi così particolari. Li evitavo perfino apposta per non creare confusione, quindi non l'avevo mai visto»*. Degli 8 insegnanti di scuola secondaria inferiore solo uno, laureto in matematica, sapeva che $3,\overline{9}=4$ anche se inizialmente, con estrema onestà, ammetteva che a parer suo rappresentava una forzatura che accettava come un dato di fatto, mentre tutti gli altri durante il corso sostenevano inizialmente tesi del tipo: «*Laggiù* (indicando con il dito un punto all'"infinito"), *gli mancherà pure qualcosa!*». Successivamente accettando un po' alla volta la visione dell'infinito in senso attuale, sono riusciti a concepire e ad accettare questa nuova scoperta. La verifica dei risultati raggiunti dagli insegnanti nell'evoluzione delle loro concezioni è stata quindi una lenta, sofferta, ma costante, evoluzione che si è percepita, e si continua ancora oggi a percepire, durante la discussione negli incontri di formazione. Questa esperienza è risultata molto ricca e significativa dal punto di vista scientifico: la scoperta della tendenza di noi docenti durante i corsi di formazione rivolti agli insegnanti a dare per scontato dei saperi fondamentali che in realtà risultano invece mal interpretati; la scoperta che addirittura alcuni temi risultano per gli insegnanti del tutto sconosciuti, creando così delle fratture e delle incoerenze nell'insegnamento e la base per ostacoli didattici; la scoperta effettiva dell'importanza che ha assunto in questo àmbito indirizzare la ricerca prima sulle convinzioni degli insegnanti, per poi passare a quelle degli allievi; la scoperta che si apre attorno all'infinito, da un punto di vista didattico, un mondo nuovo ancora tutto da scoprire.

Con questi 45 insegnanti abbiamo ancora stretti rapporti, ma in particolare si è creato un ristretto gruppo di lavoro formato da 5 insegnanti di scuola primaria con il quale si è scelto di lavorare più in profondità da diversi punti di vista.

Con questi insegnanti si è deciso finalmente di passare dagli insegnanti agli allievi, ossia di ritornare da dove eravamo partiti con le prime osservazioni nel 1996. In quell'anno, come abbiamo rilevato nel cap. 3, abbiamo indagato sulle convinzioni dei bambini di scuola primaria[39] che non facevano altro che riportare per questo tema i saperi appresi dai loro insegnanti. [In questo senso, cioè volto al collegamento tra concezioni che hanno gli allievi, in relazione a concezioni che hanno gli insegnanti, celebre è l'esempio di El Bouazzaoni (1988) che tratta della nozione di continuità di una funzione]. Indagando con gli allievi, ci eravamo potuti rendere conto delle grandi potenzialità che si hanno quando si ha a che fare con bambini di scuola primaria, non solo quando si fa uso del mondo "concreto", ma anche quando si ha il coraggio di permettere all'allievo di passare in un mondo ultrasensibile, come può essere quello dell'infinito, staccandosi così dal mondo sensibile.

Non andremo nello specifico di questa trattazione, dato che questa tesi riguarda le convinzioni degli insegnanti, piuttosto che quelle degli allievi, comunque vogliamo fare solo qualche piccolo accenno per far cogliere ciò che si era rilevato.

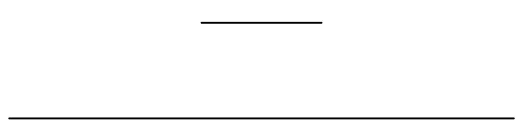
---

[39] Per quanto riguarda ricerche specifiche relative al tema dell'infinito rivolte a bambini di scuola primaria rimandiamo il lettore ai seguenti riferimenti bibliografici: Bartolini Bussi (1987, 1989) rivolte a bambini di scuola primaria e addirittura di scuola dell'infanzia; Gimenez (1990) che focalizza la sua attenzione sulle difficoltà del concetto di densità proprio nella scuola primaria; Tall (2001b) che si occupa della evoluzione del concetto di infinito a partire dalla scuola dell'infanzia, riferito ad un particolare caso di un bambino di nome Nic.

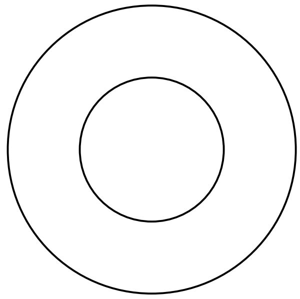
4.2 Breve racconto della ricerca eseguita con bambini di scuola primaria nel 1996

Questa ricerca è stata indirizzata su due classi di quinta primaria di Forlì, per un totale di 38 bambini che venivano chiamati a coppie fuori dall'aula in presenza del ricercatore. Gli accordi espliciti concordati fin dall'inizio con i bambini erano che tutto ciò che avrebbero detto fuori dall'aula non sarebbe mai stato fonte di valutazione e non sarebbe stato esplicitato ai loro insegnanti, per evitare così che clausole del contratto didattico, nate da una situazione di classe, influenzassero il contratto sperimentale (Schubauer Leoni, 1988, 1989; Schubauer Leoni e Ntamakiliro, 1994) che si stava instaurando con il ricercatore. La scelta di somministrare la proposta a coppie, invece che individualmente, è derivata sia dall'intento di fornire maggiore coraggio ai bambini di sottoporsi alle nostre richieste, ma soprattutto è nata dell'esigenza di instaurare discussioni che ci consentissero di percepire in profondità le reali convinzioni degli intervistati. La metodologia seguita consisteva nell'introdurre i bambini in un'aula e nel farli sedere uno a fianco all'altro dalla parte opposta di un tavolo rispetto al ricercatore che disponeva, all'insaputa dei bambini, di un registratore. In nessuna delle due classi sottoposte alla ricerca, gli insegnanti avevano precedentemente proposto attività specifiche riguardanti l'infinito.

Inizialmente il ricercatore consegnava un foglietto dove erano rappresentati i seguenti due segmenti di lunghezze diverse e chiedeva: «*Che cosa rappresentano per voi?*»



Conclusa la risposta e chiarendo che si trattava di due segmenti, si continuava con questa domanda: *«Secondo voi ci sono più punti in questo segmento o in questo segmento* (indicando con il dito i due segmenti)» (domanda che ricalca sostanzialmente la n. 4 del questionario presentato nel paragrafo 3.6.2). Dopo che i bambini avevano risposto e discusso tra loro, si mostrava la dimostrazione di Cantor che mette in evidenza come vi siano lo stesso numero di punti in due segmenti di lunghezze diverse (vedi paragrafo 3.6.2). Successivamente si consegnava un altro foglietto dove erano



rappresentate due circonferenze concentriche di lunghezze diverse e si chiedeva. *«Ci sono più punti in questa circonferenza o in questa?* (indicando con un dito le due circonferenze)».
All'interno delle discussioni poteva avvenire che il ricercatore facesse altre domande o considerazioni mirate al solo scopo di incentivare il confronto, ma stando sempre attento a non influenzare le opinioni degli intervistati.
Successivamente si chiedeva: *«Che cos'è per voi l'infinito matematico?»* e si lasciavano discutere i bambini fino a quando non si concludeva l'eventuale confronto.

Facciamo quindi un breve accenno ad alcuni risultati riscontrati. In neretto si sono indicati gli interventi effettuati dal ricercatore durante la discussione, per sollecitare la conversazione e per indagare più in profondità sulle convinzioni dei bambini.
• Molti bambini alla prima domanda: «*Che cosa rappresentano per voi?*» (mostrando i due segmenti di lunghezze diverse) non hanno risposto due segmenti, ma spesso affermavano genericamente: *«Linee»* o *«Retta»*, altri ancora notavano saperi da noi non previsti come:
S.: «Sono le basi, le abbiamo ripassate venerdì»
R.: «Di che cosa?»
S.: «Di un rombo, anzi di un romboide»
R.: «Me lo vuoi disegnare?»
S. disegna un trapezio.

Un altro bambino risponde in questo modo:
F.: «Sono linee parallele. Le linee parallele non sono come le linee concorrenti, che si incontrano in un unico punto. Queste sono infinite (nel senso che non si incontrano)» (qui si rileva l'uso del "matematichese"[40]).

• Dopo aver precisato agli intervistati che la loro attenzione si doveva concentrare sui due segmenti, si è rivolta la domanda: *«Secondo voi ci sono più punti in questo segmento o in questo?»*.
Le risposte a questa domanda sono state nella maggioranza dei casi del tipo: nel segmento più lungo. Solo un bambino sosteneva che ve ne erano di più in quello più corto, perché G.:

[40] Questa idea risale a D'Amore (1993a) e rappresenta una specie di "dialetto matematico" che si usa in classe. Una lingua speciale adoperata dallo studente in quanto considerata quella corretta, giusta, doverosa, da usare per obbligo "contrattuale" nelle ore di matematica. Ma spesso l'allievo dovendo sopportare il "peso" di questa nuova lingua, rinuncia al senso della richiesta o al senso del suo discorso.

«Basta allungarlo e farlo diventare più grande dell'altro». Invece 16 bambini hanno risposto: *«Uguali»*; 2 lo hanno affermato senza alcuna motivazione e senza dire che vi sono infiniti punti in entrambi i segmenti, mentre in ben 14 casi, tutti relativi alla stessa classe, i bambini hanno sostenuto che vi è lo stesso numero di punti in due segmenti di lunghezze diverse, e precisamente due in ciascuno, che rappresentano gli estremi dei segmenti. Questo mette in evidenza come spesso l'attenzione didattica dell'insegnante, e di conseguenza quella dell'allievo, si concentri maggiormente su piccoli dettagli, convenzioni, formalismi poco significativi nell'esplicitazione di un concetto. (Sulla visione di matematica che possiedono gli insegnanti, si rimanda a: D'Amore, 1987; Speranza 1992; Furinghetti, 2002).

Vediamo uno stralcio di conversazione avvenuto tra due bambini, di cui uno aveva dato l'interpretazione sopra menzionata.

R.: «Secondo voi ci sono più punti in questo segmento o in questo segmento»

M.: «In questo (indicando il segmento più lungo)»

I.: «No, sono uguali. Ci sono i due punti»

R.: «Che cosa intendi?»

I.: «Ci sono in tutti e due i due punti che delimitano il segmento. Ce lo ha detto la nostra maestra».

R.: «Quindi, secondo te quanti punti ci sono in un segmento?»

I.: «Uguali, sono sempre due».

Un caso significativo è quello di un bambino che pur rispondendo alla prima domanda: *«Sono due segmenti. La maestra ci ha fatto scrivere che un segmento è un insieme di infiniti punti geometrici»*, successivamente sostiene che vi sono più punti nel segmento più lungo, mostrando così di non aver colto il significato della sua affermazione precedente. Questo dimostra che occorre fare molta attenzione prima di proporre definizioni e soprattutto prima di considerare le risposte dello studente soddisfacenti, solo perché coincidenti con la definizione data o sperata: ripetere una definizione non significa averne capito il significato.

• Dalle conversazioni dei bambini emergono diversi misconcetti relativi agli enti primitivi della geometria; false credenze che influenzano negativamente l'apprendimento successivo e che saranno analizzate più in dettaglio nel paragrafo seguente. A nostro parere, questi risultati mettono in evidenza come sia importante non lasciare i concetti semplicemente ad un atto di intuizione, mentre risulta fondamentale lavorare su questi saperi, pensando a specifiche e strutturate attività come quelle proposte nei paragrafi 4.4.3 e 4.5.3.

• Dopo aver mostrato la corrispondenza biunivoca di Cantor tra i due segmenti di lunghezze diverse (vedi paragrafo 3.6.2), la maggior parte dei bambini ha intuito immediatamente che i due segmenti sono formati dallo stesso numero di punti. In altri casi, invece, questa scoperta è risultata più lenta ma è comunque avvenuta:

G.: «Ecco un triangolo. Vuoi il perimetro?» (G. aveva individuato un triangolo dopo che il ricercatore aveva disegnato partendo dal punto di proiezione O due semirette che intersecano i due segmenti; il tentativo era di spendere un sapere appreso in classe, sottovalutando ciò che gli era stato realmente richiesto).

R.: «No, niente perimetro».

G.: «Quindi i punti sono 2 in ciascuno»

R.: «Guarda» (si mostrano altri due punti che corrispondono tramite la corrispondenza biunivoca)

G.: «Allora sono 3»

R.: «Ma ci sono anche questi» (se ne mostrano altri due)

G.: «Allora sono 4»

R.: «Ma ci sono anche questi» (se ne mostrano altri due)

G.: «Ah, ho capito: sono infiniti»

R.: «Ci sono più punti in questo segmento o in questo?»

G.: «Uguali»

R.: «Siete convinti?»

Entrambi: «Sì, sì»

Tramite la dimostrazione, alcuni bambini hanno capito che i due segmenti sono formati dallo stesso numero di punti, ma non sapevano dire quanti, quindi rispondevano con frasi del tipo:

F.: «Sono uguali. Sono tanti, ma non so di preciso quanti».

Tranne 4 bambini, tutti si sono detti convinti della nuova scoperta, ossia che due segmenti di lunghezze diverse sono formati dallo stesso numero di punti e una parte di questi sosteneva che in entrambi ve ne sono infiniti, anche se poi rispondendo alla domanda su che cos'è l'infinito, non mostravano di conoscere l'idea avanzata del concetto. Un aspetto interessante da rilevare è che la corrispondenza biunivoca proposta non ha stupito i bambini, come invece è avvenuto, alcuni anni dopo, quando si è presentata la stessa costruzione agli insegnanti.

Solo 4 bambini sono rimasti perplessi e hanno affermato di non essere convinti della dimostrazione e questo è dipeso dai forti misconcetti che possedevano relativi al punto matematico:

A.: «Per me dipende sempre, perché se i puntini qui li fai più piccoli e qui li fai più grandi. Non si sa quanti ce ne sono» (da questa risposta, si nota come sia fondamentale l'idea che hanno i bambini di punto matematico, per questo rimandiamo al paragrafo 4.4).

• Dopo aver mostrato le due circonferenze concentriche, quasi tutti i bambini hanno intuito immediatamente che il numero dei punti che le formano sono uguali e la maggior parte è riuscito a costruire personalmente e con facilità la corrispondenza biunivoca partendo dal punto centrale, trasferendo così un sapere appreso precedentemente.

R.: «Ora guardate questo (si è mostrato il foglietto con le due circonferenze concentriche di lunghezze diverse)»

M.: «È una corona circolare, ma non l'abbiamo ancora fatta» (manifestando così una clausola del contratto didattico (vedi paragrafo 2.1) del tipo: "È lecito fare domande solo sugli argomenti già affrontati in classe")

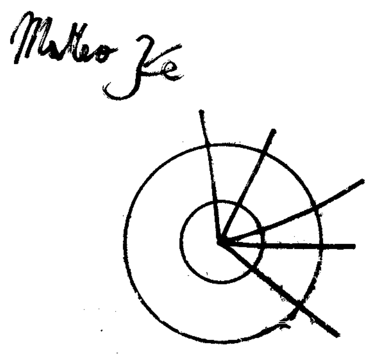
R.: «Ci sono più punti in questa circonferenza o in questa?»

M.: «Uguali come prima, perché non conta se una è piccola o una è grande»

S.: «Anche per me»

R.: «Perché secondo voi?»

M.: «È come prima che fa: tu… tu… tu» (disegna la corrispondenza biunivoca tra le due circonferenze concentriche partendo dal centro)



R.: «Che cosa mi hai fatto vedere?»

M.: «Che a questo puntino corrisponde questo, a questo… questo. Quindi sono uguali perfettamente. Se uno capisce quello là, capisce anche questo»

S.: «Basta capirne uno per capirli tutti»

R.: «Quale vi piace di più?»

M.: «La ruota, perché l'ho inventata io» (da questa risposta risulta lampante come un sapere acquisito personalmente risulti molto più motivante e significativo per l'allievo rispetto ad uno proposto direttamente dall'insegnante).

In alcuni casi la ricerca della dimostrazione è risultata più sofferta:

R.: «Ci sono più punti in questa circonferenza o in questa?»

F.: «Per me in questa più grande»

M.: «No, tutte due (indica con il dito la corrispondenza biunivoca, ma poi la copre con la mano). *Voglio solo vedere una cosa. Provo»*

F.: «Sì, ma se i puntini qui li fai più piccoli e qui più grandi»

M.: «Qui è diverso perché è un cerchio, questo è chiuso»

F.: «Basta farli più stretti qui»

M.: «Io volevo vedere, come avevo fatto prima. La cosa così (mostra la corrispondenza biunivoca tra i due segmenti). *Se ora facciamo la stessa cosa. Volevo vedere se può farla, solo che qui ci deve essere qualcosa, perché se anche provi… Per me sono uguali e basta»*

R.: «Se vuoi, puoi disegnare»

M.: «Questa volta è diverso perché il cerchio è chiuso. Io volevo vedere come prima avevo fatto la cosa così, se ora facciamo la stessa cosa, volevo vedere se si può fare. Solo che qui ci deve essere qualcosa, perché se anche provi. Mentre in quello là erano uno più piccolo e uno più grande, qui anche se sono uno più piccolo e uno più grande, forse è un po' difficile che sia lo stesso numero di punti, secondo me» (M. considerava un punto esterno alle due circonferenze e non riuscendo a trovare la corrispondenza biunivoca cambia idea rispetto alla convinzione che aveva inizialmente).

R.: «Perché sei partito da questo punto? Non vi viene in mente un altro punto da cui conviene partire?»

L.: «E se facciamo una linea retta?»

M.: «Ah, aspetta basta farlo in mezzo. No?»

L.: «Ma che cosa fai una croce in mezzo?»

M. costruisce la corrispondenza biunivoca, scoprendo così che ci sono lo stesso numero di punti in due circonferenze di lunghezze diverse.

Solo 4 bambini, gli stessi che dicevano che vi sono più punti nel segmento più lungo, hanno continuato a sostenere che la circonferenza più lunga è formata da un maggior numero di punti e la motivazione di questa scelta, è sempre derivata dall'idea erronea di punto matematico.

• 8 bambini spontaneamente hanno trasferito i saperi appresi in altri contesti:

M.: «È anche così e poi dal punto bisogna sempre sorpassare tutte e due, quindi hanno lo stesso numero di punti (disegna due quadrati concentrici di perimetro diverso e costruisce la corrispondenza biunivoca)»

R.: «Quindi secondo te, ci sono tanti punti in un quadratino quanti in un quadratone»

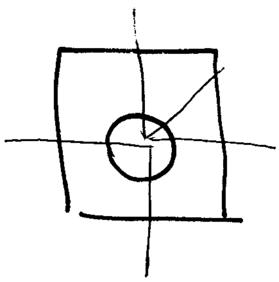
M.: «Sì, non lo sapevi? No, perché sembrava che non lo sapessi»

R.: «È che non me lo aspettavo, non pensavo che tu potessi avere una tale intuizione»

M.: «Io ne ho tante di intuizioni, è per questo che prima ho inventato la ruota» (intendendo la dimostrazione relativa alle due circonferenze concentriche)

R.: «Allora vi domando: ci sono più punti in un "cerchietto" o in un "quadratone"?»

M. disegna un "cerchietto" e un "quadratone" uno dentro l'altro, costruisce la corrispondenza biunivoca e risponde:



M.: «Sono uguali anche questi, perché sempre devono passare anche da qua, qua, qua. Sono facili però!»

• Solo con due bambini, particolarmente coinvolti e disposti al dialogo, si è continuato a domandare:

R.: «Secondo voi ci sono più punti in questo segmento o in una retta?» (dopo aver disegnato su un foglio un segmento e una retta disposti parallelamente)

D.: «Adesso la cosa si fa diversa! Non lo so. Proviamo»

F.: «È meglio se lo fai con il righello. Però è impossibile farlo come prima perché ci sono degli spazi vuoti qui» (indica con il dito, il fatto che il segmento è limitato da entrambe le parti)

D.: «Aiuto, come dobbiamo fare»

F.: «Per me sono uguali»

D.: «È la stessa cosa, basta collegare i punti»

F.: «Ma la retta non finisce mai, ce ne sono di più nella retta»

R.: «Quanti punti ci sono in una retta?»

D.: «Tantissimi»

F.: «Infiniti»

R.: «E nel segmento?»

D.: «Tantissimi, ma per me ce ne sono sempre di più in una retta, perché la retta continua fino all'infinito, mentre il segmento si ferma» (risulta fortissimo il misconcetto di infinito come illimitato, vedi paragrafo 3.7.1)

R.: «E se vi dicessi che ce ne sono in entrambi infiniti?»

F.: «Non ci crederei. Qua non ce ne sono infiniti (indica il segmento), *prima o poi finiscono»*

R.: «Ma prima mi avevi detto che nel segmento ci sono infiniti punti»

F.: «Per dire tantissimi»

R.: «Tantissimi? Quanti?»

F.: «Eh, cosa li devo contare?»

D.: «Lei crede di riuscirli a contare, ma non si contano perché il punto può anche essere piccolissimo, così ·» (tutto sembra sempre ricadere nel misconcetto di punto).

Il ricercatore mostra la corrispondenza biunivoca proposta da Cantor (vedi paragrafo 1.2.3).

D.: «Allora ce ne sono infiniti, qua e qua»

F.: «Allora questa retta ha gli stessi punti del segmento, perché tutte e due hanno gli stessi numeri di punti»

D.: «Quindi per ogni linea ci sono uno stesso numero di punti, perché sono tutte e due infiniti. Quindi non si possono contare»

F.: «Basta dire che il numero dei punti è sempre uguale, anche senza guardare la lunghezza, può essere uno così e uno così (indicando con le mani distanze diverse) *e si dice infinito»*.

Si nota come sia presente l'uso della parola infinito, ma indagando sulle convinzioni dei bambini relative a questo argomento si rintracciano gli stessi misconcetti manifestati dagli insegnanti di scuola primaria nel paragrafo 3.7.1.

Riportiamo solo alcune risposte a mo' di esempio:

G.: «Qualcosa che non finisce mai, me l'ha detto la mia maestra. Come una pista che ha l'inizio e la fine però si può fare quante volte vuoi».

S.: «Sono le linee, le rette, le curve, le spezzate»

F.: «Tantissimi come i punti di prima»

M.: «Per me sono i numeri normali 1, 2, 3, 4… che non finiscono mai. La nostra maestra ce lo dice sempre»

I.: «È una sfera che si allarga sempre di più» (idea di infinito potenziale)

S.: «Il buio e i punti di prima»

A.: «Qualcosa che ha l'inizio, ma la maestra dice che non può avere la fine»

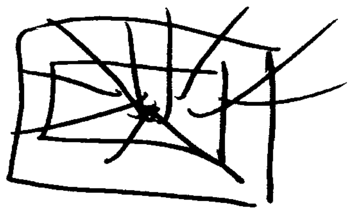
R.: «Ad esempio?»

A.: «I numeri, che non ce l'hanno la fine»

R.: «Non c'è un ultimo numero?»

A.: «L'infinito è il più lungo».

Un caso significativo. In una delle prime esperienze per testare le reazioni dei bambini prima di effettuare questa ricerca, ci siamo imbattuti in Marco, un bambino di quinta primaria di una classe diversa rispetto a quelle coinvolte nella ricerca. Dopo avergli mostrato la corrispondenza biunivoca tra due segmenti di lunghezza diversa, Marco, spontaneamente, senza neppure aver visto le due circonferenze concentriche di lunghezze diverse, realizza il seguente disegno ed afferma:
«Allora, funziona anche questo»



Certo Marco è un caso isolato, che non può essere considerato come prototipo di ciò che si verifica comunemente, ma va comunque ricordato perché ha fornito a noi ricercatori la fiducia e l'entusiasmo per affrontare questa ricerca. Da allora di Marco non ne abbiamo più incontrati, soprattutto da quando la nostra attenzione si è rivolta verso le convinzioni degli insegnanti, dove risulta assai più complicato tentare di rompere i modelli erronei che si sono creati. Nei bambini abbiamo riscontrato una grande apertura, disponibilità, elasticità, voglia di conoscere; atteggiamenti che venivano però sovente influenzati negativamente dall'insegnamento ricevuto. Frequentemente i bambini, dopo aver affermato frasi che rilevavano misconcetti, precisavano: «*Me lo ha detto la mia maestra*» e dalle interviste successive alle maestre ne abbiamo avuta la conferma, per questo ci siamo spostati sulle convinzioni degli insegnanti assai più stereotipate e rigide.

4.3 Gli enti primitivi della geometria

Uno dei filoni di ricerca che stiamo indagando riguarda le convinzioni degli allievi e degli insegnanti relative non solo all'infinito, ma anche agli enti primitivi della geometria. Questa esigenza nasce dall'aver rivelato in diverse occasioni, come trattando l'infinito si ricada spesso in misconcetti relativi al punto, alla retta …

Per raggiungere questo scopo, abbiamo scelto di sfruttare come metodologia i TEPs.: «*Intendiamo con TEPs [letteralmente: produzioni testuali autonome degli allievi]*»[41] (D'Amore e Maier, 2002); si tratta quindi di testi scritti elaborati in modo autonomo dagli studenti ed aventi come soggetto questioni matematiche. I TEPs non devono essere confusi con produzioni scritte in modo non autonomo (compiti in classe, appunti, descrizioni di procedimenti …), in quanto queste produzioni sono sottoposte a vincoli più o meno esplicitamente stabiliti, come quelli delle valutazioni dirette o indirette. Diciamo che si considerano TEPs quelle produzioni nelle quali lo studente, è messo nella condizione di volersi esprimere in modo comprensibile e con un linguaggio personale, accettando così di liberarsi da condizionamenti linguistici e di far uso invece di espressioni spontanee.

Nell'articolo di D'Amore e Maier (2002) sono elencati alcuni effetti dei TEPs, fra i quali i più interessanti risultano:

• La produzione di TEPs stimola lo studente ad analizzare e a riflettere su concetti matematici, relazioni, operazioni e procedure, ricerche e processi di problem solving con cui ha a che fare. Così ciascun allievo può raggiungere una maggiore consapevolezza ed una più profonda comprensione matematica di essi;

• I TEPs danno allo studente l'opportunità di tenere continuamente sotto controllo la propria comprensione di questioni matematiche, grazie ad un ragionato e riflessivo riscontro con l'insegnate ed i compagni di classe (autovalutazione);

• I TEPs consentono all'insegnante di valutare in modo effettivo la conoscenza personalmente costruita e la comprensione di idee matematiche, in maniera più dettagliata e profonda di

[41] La denominazione originale tedesca viene da Selter (1994).

quanto sia possibile sulla base di comuni testi scritti normalmente eseguiti come protocolli di attività di problem solving non commentati.

Per ottenere la produzione dei TEPs è necessario che lo studente dia una visione profonda, dettagliata ed esplicita del proprio modo di pensare e di comprendere la matematica, per questo bisogna fare in modo che l'allievo indirizzi i propri TEPs a qualcuno che ha bisogno di tutte le informazioni relative alla questione di cui si scrive; questo destinatario non deve ovviamente coincidere con il vuoto o con l'insegnante stesso.

I TEPs che si sono prodotti in questa ricerca sono produzioni di studenti a partire dalla scuola dell'infanzia (3 anni) fino alla scuola secondaria superiore (19 anni). Si è partiti dalla scuola dell'infanzia perché si voleva indagare se nei bambini di 3-5 anni vi fossero già idee primitive ingenue relative a questi concetti. La nostra intenzione era inoltre di osservare l'evoluzione nel tempo di queste idee; a questo scopo si sono prodotti un totale di circa 350 TEPs, distribuiti nei diversi anni. Partendo da questi TEPs, volevamo inoltre perseguire l'obiettivo di ricerca, per noi più interessante, che consiste nell'indagare le reali convinzioni degli insegnanti nei confronti di questi oggetti matematici, come conseguenza delle interpretazioni dei testi prodotti dai propri allievi. Ossia dopo aver consegnato agli insegnanti i TEPs prodotti dai propri allievi, trascritti al PC in modo che l'insegnante non potesse riconoscere le grafie, si chiedeva loro di leggerli, interpretarli e analizzarli attentamente per conto proprio. Partendo da questa analisi effettuata dagli insegnanti, iniziava l'indagine da parte dei ricercatori per valutare le convinzioni dei docenti relative agli oggetti matematici da noi proposti; questa ricerca avveniva tramite interviste, in quanto si temeva che l'uso esclusivo di risposte scritte potesse essere influenzato da fattori già riscontrati nella letteratura, quali: fretta di terminare, superficialità nella risposta, paura di una valutazione… Il TEP e l'intervista insieme, invece, specie se fatti con estrema pacatezza e senza fretta, possono mettere il soggetto a suo agio; consentendo di analizzare a fondo le competenze reali, profonde, nascoste, dei soggetti.

Allo stesso tempo era nostro scopo valutare più in generale come gli insegnanti interpretano e analizzano un TEP e qual è il loro punto di vista e la loro efficienza e competenza nelle interpretazioni.

Per ottenere i TEPs, dopo aver spiegato ai bambini che si trattava di un lavoro che non sarebbe stato base di valutazione da parte dell'insegnante, si chiedeva agli studenti, a partire dalla scuola primaria, di rispondere per iscritto alle seguenti domande:

• *Immagina di dover spiegare ad un tuo compagno che cos'è l'infinito matematico. Tu che cosa gli diresti?*

• *Come lo spiegheresti ad un compagno di tot anni?* (ai bambini di scuola primaria si chiedeva di prendere come riferimento bambini di due anni più grandi, mentre a studenti della scuola secondaria si chiedeva di prendere come riferimento bambini più piccoli)
• *Immagina di spiegare ad un tuo compagno che cos'è un punto in matematica. Tu che cosa gli diresti?*
• *Ora spiegalo ad un bambino di tot anni*
• *Immagina di spiegare ad un tuo compagno che cos'è la retta in matematica. Tu che cosa gli diresti?*
• *Ora spiegalo ad un bambino di tot anni*
• *Immagina infine di dover spiegare ad un tuo compagno che cos'è la linea in matematica. Tu che cosa gli diresti?*
• *Ora spiegalo ad un bambino di tot anni*
Nella scuola dell'infanzia si è scelto invece di fare le seguenti domande esplicite: Che cos'è per te l'infinito in matematica? Che cos'è per te un punto in matematica? Che cos'è per te la retta in matematica? Che cos'è per te la linea in matematica? Inoltre per ciascuna domanda si chiedeva ai bambini se volevano disegnare.

Non riporteremo qui i risultati di ricerca, che devono essere ancora analizzati in dettaglio, ma presenteremo solo alcune considerazioni generali. Vogliamo precisare che i protocolli originali dei bambini contengono errori grammaticali che nella traduzione potrebbero non comparire. Questi protocolli sono comunque a disposizione presso l'Autrice di chiunque voglia consultarli.

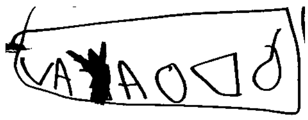
♦ I risultati avuti nella scuola dell'infanzia rivelano che bambini di 4-5 anni possiedono già le prime idee intuitive relative a questi concetti, convinzioni che possono rappresentare anche la base di futuri misconcetti. Tanto per fare un esempio la maggior parte dei bambini associa al punto matematico il segno grafico che si ottiene con la penna e risponde con frasi del tipo:
«Sono le macchìne» (Loris, 4 anni)
«Sono dei puntini piccoli e grossi» (Andrea, 5 anni)

Riportiamo alcuni esempi di risposte relative all'infinito matematico:

«È infinita linea. Che non finisce mai. L'universo è infinito. I numeri sono all'infinito» (Federico, 5 anni)
«Quando uno non smette più di fare matematica» (Riccardo, 5 anni)

Risposte relative alla retta:
« È una riga retta» (Marco, 5 anni)
«Quando io ho fame e chiedo ai nonni da mangiare e loro non me lo danno, io devo aspettare che è cucinato (Riccardo, 5 anni)

Risposte relative alla linea:
«È una riga che divide i numeri» (Anna, 4 anni)
«La linea matematica è un metro» (Riccardo, 5 anni)



♦ A partire dalla scuola secondaria inferiore la maggior parte delle produzioni prodotte dagli studenti non ha assunto la forma di veri e propri TEPs, anche se si era scelta come motivazione quella di spiegare i diversi concetti ad un loro compagno. Gli studenti tendono infatti a rispondere in modo diretto e sintetico spesso con presunte definizioni, anche quando dovevano rivolgersi a studenti più piccoli di loro. Solo in alcuni casi, gli allievi hanno deciso di utilizzare per studenti più piccoli il disegno come forma privilegiata per capirsi, manifestando così forti misconcetti.
Questa constatazione può dipendere dal tipo di argomenti trattati, così mirati e specifici, o dalla scelta della motivazione. Per scoprirlo abbiamo intenzione di provare a cambiare la motivazione per gli studenti utilizzando la strategia che si è spesso rivelata incredibilmente coinvolgente: "Fai finta di essere un insegnante, una mamma, un bambino di tot anni…" (D'Amore e Sandri, 1996; D'Amore e Giovannoni, 1997) per vedere se cambia così l'atteggiamento e quindi le produzioni di chi scrive.

♦ Si sono rilevati forti misconcetti posseduti dagli allievi e dagli insegnanti relativi a questi oggetti matematici derivanti dalle immagini visive e dall'uso di questi termini in contesti diversi da quello matematico (da questo punto di vista rimandiamo la lettura del paragrafo 4.4). Un atteggiamento interessante che ha notevolmente sorpreso noi ricercatori è stato il rilevare che l'aver posto le domande fissando l'àmbito matematico e non quello più specifico geometrico, ha ingannato sia gli allievi che alcuni insegnanti. Cerchiamo di capire di che cosa

si tratta. In Italia nella scuola di base vi è un atteggiamento assai diffuso che consiste nel creare almeno due discipline diverse all'interno della matematica: la geometria e la cosiddetta "matematica", intendendo l'aritmetica. Quando si propongono attività nella scuola primaria uno degli atteggiamenti più diffusi da parte dei bambini è quello di chiedere: *«Facciamo matematica o geometria?»*, *«Tiriamo fuori il quaderno di matematica o di geometria?»*.
Esistono quindi per gli allievi e per gli insegnanti due mondi separati; a seconda del mondo che si sceglie, si hanno comportamenti e atteggiamenti diversi: si è pronti ad effettuare calcoli se l'àmbito è quello "matematico", ci si aspetta di dover realizzare un disegno se l'àmbito è quello geometrico. Per questo alla domanda:
Immagina di spiegare ad un tuo compagno che cos'è un punto in matematica. Tu che cosa gli diresti?
I bambini forniscono risposte del tipo:
«Il punto in matematica secondo me è una cosa importante. Ma per me può significare tre cose:
a) il punto in un numero grande tipo 143.965.270.890 in un numero così i punti servono per riuscire a leggere il numero;
b) c'è qualcuno che al posto del × usa il punto esempio 144 · 5 = 620 in questa moltiplicazione il punto serve per abbreviare;
c) qualcun altro invece usa il punto come virgola, esempio 194,6 o 194.6
Secondo me il modo più utile è il numero 1» (Quinta primaria)

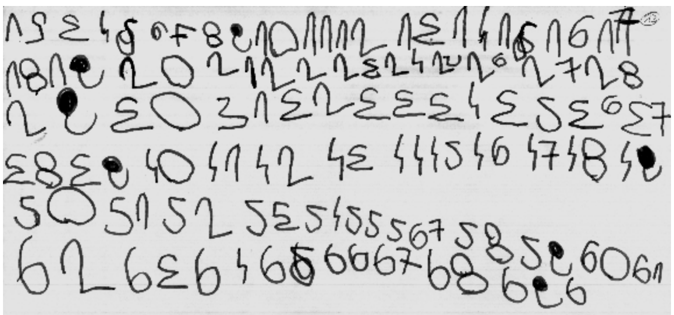
La maggior parte dei bambini degli ultimi anni di scuola primaria non parla di punto in senso geometrico, non ritenendolo parte della matematica, ma ricerca nell'àmbito aritmetico l'uso del punto. Invece nella scuola dell'infanzia e nei primi anni di scuola primaria, la scelta cade principalmente sull'àmbito geometrico, non essendo ancora avvenuta la distinzione tra: "matematica" e geometria come conseguenza dell'insegnamento ricevuto.
Commento dell'insegnante: *«Questo* (intendendo il bambino che ha scritto il TEP sopra riportato) *ha individuato bene il punto in matematica. Se si chiedeva in geometria era un'altra cosa, ma in matematica ha ragione lui: è questo il punto».*
Ecco un tentativo di un bambino di unire i due àmbiti, geometrico e "matematico": *«Il punto in matematica è una piccolissima macchia che può diventare un numero molto alto»* (Quinta primaria).

Tra i pochi bambini degli ultimi anni di scuola primaria che scelgono l'àmbito geometrico, si rintracciano i soliti misconcetti più volte evidenziati: *«Gli direi che il punto è un'elemento piccolo, rotondo, d'inizio e fine a una retta»* (Quinta primaria).
Commento dell'insegnante: *«Se intende il punto della geometria, allora va bene quello che dice, l'ha spiegato nei dettagli, ma la domanda riguardava il punto in matematica»*, rivelando così misconcezioni relative al punto e distorte idee relative alla matematica.
E così la retta dovendo rientrare in àmbito aritmetico diventa: *«La linea dei numeri»* e la linea diventa: *«Un simbolo che si usa nelle operazioni o nelle frazioni»*.
Queste considerazioni rendono a nostro parere fondamentale, dal punto di vista didattico, l'importanza del contesto che sarà trattato nel paragrafo 4.4.

♦ Nei TEPs prodotti dagli studenti non si nota un'evoluzione negli anni di ciò che si intende per infinito matematico: le misconcezioni rimangono sempre le stesse individuate per gli insegnanti nel paragrafo 3.7.1. Diamone solo alcuni esempi:

«Sono gli angiolini che vivono per sempre» (Prima primaria)

«Mi è venuto in mente i numeri» (Prima primaria)



«I lavori difficili come fare 60 schede in un giorno» (Seconda primaria)

«Per me l'infinito matematico e un'infinito di numeri e problemi da risolvere. io non sono molto bravo cuindi per me non finisce mai» (Terza primaria).

«Per me l'infinito in matematica non c'è, perché i numeri in matematica non iniziano e non finiscono mai» (Quarta primaria)

«Secondo me l'infinito matematico è come lo spazio, che non finisce mai, i numeri non possono finire, le combinazioni dei numeri non possono finire. Però secondo me le caratteristiche dell'infinito matematico non sono solo numeri, possono essere anche forme, noi conosciamo alcune delle tantissime forme geometriche. L'infinità della matematica è difficile da spiegare perché la matematica c'è dappertutto anche solamente per calcolare la profondità di un quadro bisogna usare la matematica, per vedere quanto è grande un'aula bisogna calcolare il perimetro o l'area.
Una cosa che mi sono sempre chiesta è: ma chi è che ha le prove che la matematica è infinita? Io lo so bene che è infinita ma si hanno delle prove?» (Quinta primaria)

«Una cosa che continua sempre, arriva lontanissimo» (Prima media)

«Mi dispiace ma nessuno mi ha mai insegnato cos'è l'infinito, penso però che sia un qualcosa di cui non si sa la quantità ben definita» (Seconda media)

«L'infinito è qualcosa che non ha fine, ad es. i numeri, dopo quello che tu pensi sia l'ultimo ce ne sempre un altro e puoi arrivare a contare senza fine (ossia all'infinito)» (Terza media)

«Direi che è il nulla ma allo stesso tempo è tutto. Per questo non è possibile immaginarlo» (Prima liceo)

«L'infinito in matematica è un insieme indeterminato, come quello dei numeri naturali o dei punti di una lettera» (Seconda Liceo)

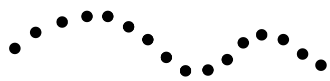
«È un insieme i cui elementi non sono numerabili» (Terza liceo)

«Infinito, ampio concetto nell'ambito matematico che costituisce un limite concettuale» (Quarta liceo)

«Pensa il numero più grande che tu possa pensare. Immagina di superarlo e farlo crescere finché puoi: quel numero tende all'infinito» (Quinta liceo)

♦ I TEPs prodotti al liceo per gli enti primitivi sono basati principalmente sull'uso di presunte "definizioni" proposte o accettate dall'insegnante, che spesso però non hanno un vero e proprio significato dal punto di vista matematico oppure, pur avendolo, non sono realmente interiorizzate ed accettate dagli allievi.
Ecco qualche esempio:
«Il punto è un ente geometrico appartenente ad un insieme definito come spazio. Si indica con le lettere maiuscole» (Seconda Liceo Scientifico)
Non vi è una vera esplicitazione delle caratteristiche specifiche del punto matematico; nella prima parte di questa affermazione potrebbero rientrare la retta, il piano…; eppure l'insegnante commenta in questo modo: *«Questa mi sembra una definizione accettabile di punto, per me si capisce che ha inteso che cos'è».*

Un altro esempio:
«La linea è un insieme infinito di punti» (Seconda Liceo Scientifico)
Commento dell'insegnante: *«Questa non va bene, io non la accetterei perché non dice come sono messi i punti»*, ritenendola quindi un'affermazione incompleta.
Invece per questa: *«Direi che è un insieme infinito di punti non necessariamente allineati»* (Seconda Liceo Scientifico) l'insegnante commenta in questo modo: *«Questa va bene, è quella che c'è scritta nel libro e che ho fatto scrivere nel quaderno. Io accetto questa, perché fa capire che i punti possono non essere messi allineati»*. Eppure questo modo di concepire la linea, può far pensare addirittura ad un piano o a punti disposti in questo modo:



Ancora: *«La retta è un insieme di punti uniti l'uno con l'altro in modo da stare diritti»* (Seconda Liceo Scientifico)

Commento dell'insegnante: *«Questa per me va bene, la accetterei perché si vede che ha capito che cosa si intende per retta, anche se usa termini un po' impropri»*. Da questo modo di concepire la retta, risulta lampante il cosiddetto "modello della collana" già più volte citato.

Terminiamo qui le considerazioni che potrebbero in realtà continuare ancora a lungo; il nostro scopo in questa tesi era semplicemente di sottolineare come i TEPs stanno rappresentando per noi ricercatori uno strumento importante per ottenere informazioni dettagliate sulle conoscenze e sulla comprensione dei concetti matematici da parte degli allievi e degli insegnanti. Sarà nostra intenzione pubblicare prima possibile i risultati di questa ricerca.

4.4. La scoperta dell'importanza del contesto: il punto nei diversi àmbiti

4.4.1 Da dove nasce l'idea del punto nei diversi àmbiti

In seguito al corso di formazione realizzato con gli insegnanti di Milano e alla ricerca in corso sugli enti primitivi della geometria, sono nati forti spunti di riflessione che hanno spinto l'analisi in varie direzioni: una di queste riguarda il punto nei diversi àmbiti. Partendo dal misconcetto di *dipendenza* (vedi paragrafo 3.3), che inizialmente gli insegnanti coinvolti avevano manifestato di possedere, in base al quale vi sono più punti in un segmento più lungo rispetto ad uno più corto, si è potuto mettere in evidenza come vi sia una grande influenza del modello figurale che in questo caso condiziona negativamente la risposta del tipo: a maggior lunghezza deve corrispondere un maggior numero di punti. Questo fenomeno è legato all'idea di retta vista secondo il "modello della collana" (Arrigo e D'Amore, 1999; 2002), che viene proposto dagli insegnanti come modello adatto per rappresentare mentalmente i punti sulla retta.

È proprio in questo modello che si possono rileggere diverse convinzioni degli allievi e degli insegnanti legate all'idea di punto come ente avente una certa dimensione, anche se molto piccola; convinzione derivante dalla rappresentazione che viene comunemente fornita del punto (su questo specifico argomento rimandiamo alla lettura del paragrafo 4.5) e che condiziona l'immagine che si ha di questo oggetto matematico.

Come abbiamo potuto mostrare dai TEPs raccolti durante il lavoro di ricerca relativo agli enti primitivi della geometria, riportati nel paragrafo precedente, le idee che manifestano gli allievi di punto a qualsiasi età sono spesso legate ad un segno grafico lasciato dalla matita o all'idea di punto che ritrovano in contesti diversi, a volte lontani dal mondo della matematica, che tendono a trasferire direttamente anche in questo àmbito:

«Un punto in matematica è un punto con dentro dei numeri» (Prima primaria)
«Io penso che il punto matematico sia un punto che fa finire una frase matematica anche per fare finire i numeri» (Terza primaria)

«Non si sa ancora bene che cos'è un punto però per me è solo un punto su un foglio che può essere di diverse dimensioni» (Quarta primaria)

«Il punto in matematica è un segnetto così · oppure è la questione da risolvere.
Il punto in matematica è anche quello che si mette sopra certi numeri es 1˙000.
Nelle calcolatrici il punto viene considerato una virgola.
Il punto può essere anche per le equazioni es 100 × …= 200» (Quinta primaria)

«Un punto in matematica è importante per poter prendere un voto per essere felici» (Prima media)

«Il punto in geometria è il punto di riferimento di una figura» (Seconda media)

«È un punto rotondo che forma le linee» (Terza media)

«Il punto è una parte di piano indeterminato, perché può avere varie dimensioni, che costituisce l'inizio, la fine o entrambi di un segmento, una retta etc» (Terza media)

«Un punto è un piccolo segno ed è un ente geometrico fondamentale» (Prima liceo scientifico)

«Un punto è l'elemento più piccolo preso in considerazione» (Seconda liceo scientifico)

«Un punto è un elemento geometrico, il più piccolo immaginabile tendente a 0. tra due punti ce n'è sempre un terzo» (Terza liceo scientifico)

«Un punto minimo · *»* (Quarta liceo scientifico)

« • ⟵ questo è un punto» (Quinta liceo scientifico)

«Un luogo geometrico infinitamente piccolo che, collocato in un piano cartesiano, possiede 2 coordinate (x, y)» (Quinta liceo scientifico)

Come abbiamo rilevato nel paragrafo 4.3, queste idee in alcuni casi sono accettate e addirittura condivise dagli insegnanti dei diversi ordini scolastici. (Per quanto riguarda l'idea di punto manifestata dagli insegnanti di scuola primaria rimandiamo anche alla lettura del paragrafo 3.7.2).

Perché queste convinzioni non siano la base di modelli scorretti posseduti da insegnanti e da allievi, occorre aiutare il soggetto a staccarsi dal modello del segmento come "collana" e da visioni distorte degli enti primitivi della geometria, creando immagini più opportune che consentano ad esempio di concepire punti senza spessore. Per far questo, bisogna far sì che il soggetto varchi il confine della propria conoscenza precedente, per costruire una nuova conoscenza. Le domande che ci siamo posti sono state le seguenti: Quando deve essere proposta questa nuova conoscenza e in che modo? Quale direzione occorre seguire nel proporla? Dove si annidano maggiormente le difficoltà per l'apprendimento di questi "delicati" oggetti matematici?

4.4.2 Il quadro teorico di riferimento

Le affermazioni degli insegnanti e degli allievi ci hanno indotto a mettere in evidenza l'importanza del contesto, seguendo un approccio situazionista e socio-culturale del costruttivismo sociale. In quest'ottica il sapere, in particolare il sapere matematico, deve:

- essere il prodotto della costruzione attiva dell'allievo (Brousseau, 1986);
- avere le caratteristiche di essere situato, cioè riferito ad un preciso contesto sociale e culturale, pur restando sempre in relazione ad altri contesti;
- essere il frutto di particolari forme di collaborazione e negoziazione sociale (Brousseau, 1986);
- essere usato e ulteriormente ridefinito in altri contesti sociali e culturali (Jonnasen, 1994).

Facendo queste considerazioni ci siamo inseriti all'interno di una visione "antropologica" che punta tutta l'attenzione sul soggetto che apprende (D'Amore, 2001a; D'Amore e Fandiño Pinilla, 2001; D'Amore, 2003), anziché sulla disciplina, privilegiando il "rapporto e l'uso del sapere", piuttosto che il "sapere"; impostazione che contempla la scelta di una filosofia a monte di stampo pragmatica (D'Amore, 2003). È in effetti l'"uso" che condiziona la significatività e quindi il valore di un dato contenuto che in questo caso abbiamo scelto che coinvolga il punto nei diversi àmbiti, ma che ovviamente può essere generalizzato per tutti gli enti primitivi della geometria, e non solo. In quest'ottica, abbiamo sentito con forza l'importanza che dovrebbe avere nell'insegnamento un'attenzione specifica ai diversi contesti e alle diverse forme di "usi" di un sapere che determinano il significato degli oggetti.
In effetti, all'interno della teoria pragmatica da noi scelta come quadro di analisi possibile, le espressioni linguistiche, i singoli termini, i concetti, le strategie per risolvere un problema… hanno significati diversi a seconda del contesto in cui si usano, per questo vanno opportunamente decodificate, interpretate, selezionate e gestite dall'allievo. Come riferisce D'Amore (2003) risulta impossibile all'interno di questa teoria ogni osservazione scientifica in quanto l'unica analisi possibile è "personale" o soggettiva, comunque circostanziata e non generalizzabile. Non si può quindi far altro che esaminare i diversi "usi": l'insieme degli "usi" determina infatti il significato degli oggetti. Questo però, a nostro parere, non deve voler dire che l'insegnante possa lasciare l'apprendimento solamente ad un atto di intuizione o ad una semplice interpretazione personale dell'allievo, soprattutto in àmbito matematico dove si rischia che l'immagine intuitiva dell'allievo si trasformi in modello parassita (D'Amore, 1999), come abbiamo potuto percepire nell'intera trattazione di questa tesi. Come riferisce D'Amore (2003): *«Una delle difficoltà è che all'idea di "concetto" partecipano tanti fattori e tante cause; per dirla in breve, e dunque in modo incompleto, non pare corretto affermare per esempio che "il concetto di retta" (supposto che esista)* (l'esempio è generalizzabile ovviamente anche per il punto) *è quello che risiede nella mente degli scienziati che a questo argomento hanno dedicato la loro vita di studio e riflessione; sembra più corretto affermare invece che vi sia una forte componente per così dire "antropologica" che mette in evidenza l'importanza delle relazioni tra $R_I(X,O)$ [rapporto istituzionale a quell'oggetto del sapere] e $R(X,O)$ [rapporto personale a quell'oggetto del sapere]* (in questo caso D'Amore fa esplicito riferimento a simboli e termini tratti da Chevallard, 1992)*… Dunque, nella direzione che ho voluto prendere, alla "costruzione" di un "concetto" parteciperebbe tanto la parte istituzionale (il Sapere) quanto la parte personale (di chiunque abbia accesso a tale Sapere, quindi anche l'allievo non solo lo scienziato)».*

Ma che cosa succede tradizionalmente per gli enti primitivi della geometria? In particolare per il punto e per la retta? La sensazione è che per questi oggetti matematici tutto venga lasciato semplicemente all'aspetto "personale", affidandoli solitamente ad un semplice atto di intuizione.[42]

Questo atteggiamento però rischia di radicare nella mente degli allievi modelli parassiti come il cosiddetto "modello della collana" che vincola l'apprendimento matematico successivo, facendo prevalere l'aspetto figurale su quello concettuale (Fischbein, 1993) e facendo nascere idee intuitive distorte che continuano a scontrarsi durante l'intera carriera scolastica, e non solo, con gli altri saperi. Riteniamo invece didatticamente importante seguire un approccio pragmatico, con una costante mediazione da parte dell'insegnante per far sì che gli oggetti matematici ed il significato di tali oggetti non rimangano solo "personali" ma diventino "istituzionali" (Chevallard, 1992; D'Amore 2001a, 2003; Godino e Batanero, 1994). Per raggiungere questo fine però, l'insegnante deve essere a conoscenza dell'aspetto "istituzionale" del sapere ma questo, come abbiamo potuto rilevare nel paragrafo precedente, non avviene nel caso degli enti primitivi della geometria. Ancora una volta si nota come la scelta di lasciare gli enti primitivi solamente all'aspetto "personale", non è una scelta didattica consapevole, mirata ad aggirare questioni assai delicate legate al tentativo di "definire" tali oggetti, ma deriva dall'accettazione passiva di misconcetti consolidati che si sono trasformati in modelli erronei posseduti dagli insegnanti stessi. G.: «*Sono trent'anni che dico ai miei bambini che il punto è quello che si disegna con la matita, non potrò cambiare adesso. E poi ritengo che sia proprio questo il vero significato di punto. Perché, non è più così?*» (Insegnante di scuola primaria). Curiosa è la domanda posta dell'insegnante G.: «*Perché, non è più così?*», che mette in evidenza non solo false convinzioni legate all'idea di punto, ma anche personali credenze relative all'idea di matematica [sulla visione personale degli insegnanti e sulle loro "filosofie implicite" si veda Speranza (1992), sui credi ideologici invece rimandiamo a Porlán et al., 1996)]. Pare che l'idea che l'insegnante possiede di

---

[42] In Borga et al. (1985) viene messo in evidenza come già Pasch nel 1882, espresse chiaramente l'opportunità di evitare ogni appello al significato dei concetti geometrici per fare riferimento solo alle mutue relazioni fra di essi esplicitamente formulate tramite assiomi. All'opera di Pasch si ricollegano, non solo idealmente, i contributi di Peano dedicati ai fondamenti della geometria elementare. Si arriva a concepire un sistema ipotetico-deduttivo in cui i concetti primitivi, in linea di principio privi di significato, si ritengono definiti implicitamente dagli assiomi. Proprio a questo si riferisce Bertrand Russel quando afferma la seguente definizione paradossale: «*Le matematiche sono quella scienza,in cui non si sa di che cosa si parla e in cui non si sa se quello che si dice sia vero*» (Enriques, 1971).

matematica coincide esattamente con la *trasposizione didattica* del sapere matematico che solitamente viene proposta dalla *noosfera* (vedi paragrafo 2.4). Non vi è quindi distinzione per l'insegnante G. tra un concetto matematico e la sua trasposizione scaturita da una particolare scelta didattica: i due aspetti rappresentano per lui un tutt'uno.

La direzione che auspichiamo che gli insegnanti adottino, per sé e per i propri allievi, segue quindi un'impostazione "pragmatica" dove non ha più molto interesse la nozione di significato di un oggetto (di conoscenza, in generale, matematico, in particolare) quanto piuttosto quella di rapporto, "relazione all'oggetto", che deve rimanere però coerente con le basi della disciplina di riferimento. È da oltre 2000 anni che i matematici hanno fatto la proposta linguistica di far usare semplicemente parole come "punto", "linea", "retta", "superficie", "piano", "spazio" senza definirle esplicitamente, ipotizzando che più o meno tutti coloro che le usano (bambini compresi) abbiano un'idea di che cosa significano: si apprenderà semplicemente che cosa sono, appunto, usandole. Ma si può ritenere vincente questa scelta, dopo aver analizzato le affermazioni degli allievi e soprattutto quelle degli insegnanti? Per non creare forti fraintendimenti come quelli rivelati in questi capitoli, occorre innanzitutto che l'insegnante sia a conoscenza del significato "istituzionale" dell'oggetto matematico che intende definire implicitamente, in secondo luogo deve indirizzare l'uso di questi oggetti in modo consapevole e critico per far sì che questo uso rimanga coerente rispetto alla disciplina di riferimento.

In questa direzione rientrano anche le considerazioni riportate in Fischbein (1993): «*Uno studente di scuola superiore dovrebbe essere reso consapevole del conflitto e della sua origine, per dare rilievo nella sua mente alla necessità di basarsi nei ragionamenti matematici soprattutto sui limiti formali. Tutto ciò porta alla conclusione che il processo di costruzione dei concetti figurali nella mente dello studente non deve essere considerato un effetto spontaneo degli usuali corsi di geometria. L'integrazione delle proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie, con la predominanza dei limiti concettuali rispetto a quelli figurali, non è un processo naturale. Ciò dovrebbe costituire una continua, sistematica e principale preoccupazione dell'insegnante*». Queste considerazioni di Fischbein riferite ad allievi di scuola superiore dovrebbero a nostro parere essere trasferite ad ogni livello scolastico, anzi riteniamo indispensabile che gli insegnanti possiedano questa attenzione didattica fin dalla scuola primaria.

In una quarta primaria di Rescaldina (MI) dopo aver chiesto ai bambini: «*Quanto è grande un punto matematico?*», si sono avute le seguenti risposte: «*Un punto può essere grande dal tipo*

di pennarello perché è di tante misure»; «Per me il punto può essere una cosa grandissima o microscopico perché è come un cerchio di diverse misure»; «Dipende da come lo costruisci»; «Secondo me il punto è grande in base a cosa lo riferisci. Se lo riferisci a un atomo è grandissimo. Se lo riferisci ad un armadio è piccolissimo».
Inoltre, dalla domanda: *«Quanti punti ci sono in un piano?»* si sono avute le seguenti risposte: *«Dipende se i puntini sono vicini ce ne possono essere 100, anche di più»; «Dipende da quanti ne vogliamo fare noi, possiamo farli vicinissimi e diventano tantissimi. Se li vogliamo fare distanti sono pochi»; «Per me dipende dal piano, più grande è e più punti ci possono stare»; «Secondo me possono essere infiniti, in questo piano ce ne possono stare infiniti, perché un puntino trova sempre uno spazio»; «Nessun piano è fatto da punti, questo foglio è stato stampato intero, non da puntini»; «Secondo me questi puntini possono essere di più se il piano è grande, dipende anche da come li disegniamo. Può essere solo uno grande e tantissimi piccoli».*

Da tutte queste riflessioni, è scaturita la consapevolezza della necessità di non dare per scontate le idee che possono avere, sia gli insegnanti che gli allievi, di infinito e degli enti primitivi della geometria, e soprattutto, che è didatticamente necessario indirizzarle verso l'aspetto "istituzionale", mostrando le proprietà che li caratterizzano e i rapporti che li mettono in relazione tra loro.
Inoltre riteniamo fondamentale mettere in risalto durante l'insegnamento a partire dalla scuola primaria diversi aspetti tra i quali: l'importanza dei diversi contesti che è legata ai diversi "usi" del sapere da parte dell'allievo. È quindi emersa l'esigenza per gli insegnanti che avevano affrontato il corso di formazione, di strutturare insieme ai ricercatori attività da mettere in pratica con i propri allievi. Sono così nate interessanti proposte, tutte legate a questo tema, finalizzate ai bambini di scuola primaria e scuola secondaria inferiore. Si è partiti da questi livelli scolastici in quanto, dai risultati riportati, emerge chiaramente come siano già presenti in bambini di scuola primaria misconcetti sui diversi enti geometrici; idee ingenue che risultano molto spesso legate a contesti diversi, ma che vengono trasferiti con disinvoltura anche in àmbito matematico soprattutto a causa di una analogia linguistica.
Le finalità educative e didattiche che ci siamo posti nello strutturare con gli insegnanti le attività, non si riducono all'acquisizione di conoscenze, abilità e competenze da parte degli studenti, bensì mirano all'"uso" del sapere da parte di ciascuno. Si tratta quindi non solo di far imparare, ma anche di far saper gestire il proprio sapere da parte degli allievi e di consentire di fare le scelte opportune di fronte ad una complessità di informazioni o ad un evento

problematico. Tutto ciò, in linea con le parole di Gardner (1993): *«Uno degli obiettivi base dell'educare al comprendere o insegnare al comprendere è: formare la capacità del bambino a trasferire ed applicare la conoscenza acquisita a più situazioni e a più contesti».*

A proposito dei diversi contesti, già messi in evidenza dai TEPs degli allievi, per quanto riguarda in particolare il punto, basta cercare in un qualsiasi dizionario, come ad esempio il "Grande dizionario della lingua italiana" edito dalla UTET, per trovare per la parola "punto" circa 40 significati diversi; inoltre se si guardano le locuzioni, le espressioni d'uso corrente, è possibile rintracciare per questo termine per lo meno 200 contesti d'uso diversi. Ovviamente tra questi significati vi è anche quello di punto matematico, ma questo didatticamente di solito viene lasciato all'intuizione o viene affrontato tardi e con poca attenzione rispetto agli altri usi, provocando così una sedimentazione esclusiva degli altri significati.

In effetti, nella scuola di base, di solito non si mette in evidenza la differenza che c'è tra il punto matematico e il punto negli altri contesti (come quello figurale); questo fa sì che, quando finalmente il punto alle scuole superiori viene affrontato in un senso matematico più sofisticato, per gli allievi risulta troppo tardi: gli altri significati hanno preso il sopravvento, diventando così inaccettabile l'idea di un nuovo significato che contraddice quelli fino ad allora sedimentati (richiamiamo la distinzione tra immagine e modello riportata nel paragrafo 2.2).

4.4.3 Una provocazione

Nell'articolo: *"La scoperta dell'importanza del contesto: il punto nei diversi àmbiti"* (Sbaragli, 2003b) abbiamo iniziato la trattazione con una provocazione che è risultata per noi molto significativa. Si chiede inizialmente al lettore di osservare le due figure qui sotto rappresentate e di rispondere alle seguenti domande tratte dal fondamentale lavoro sui concetti figurali di Fischbein (1993):

3a 3b

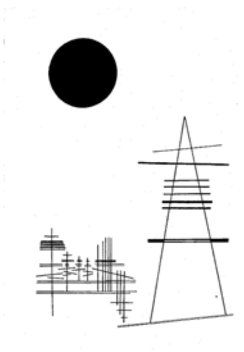
«In 3a ci sono quattro linee che si intersecano (punto 1). In 3b, ci sono due linee che si intersecano (punto 2). Confronta i due punti 1 e 2. Questi due punti sono diversi? Uno di loro è più grande? Se sì, quale? Uno di loro è più pesante? Se sì, quale? I due punti hanno la stessa forma?»

Si continua poi, con diverse riflessioni e provocazioni del tipo:

- nel rispondere alle domande precedenti, chissà a quale contesto avrà pensato il nostro lettore.

- che cosa avrebbe risposto a queste sollecitazioni Seurat, pittore “puntinista”? Per Seurat il punto sarà stato concepito come un concetto astratto oppure avrà assunto grande importanza la dimensione del punto? Possiamo affermare che Seurat non è riuscito a “concettualizzare”[43] nel senso inteso da Fischbein? Riflettiamo sull’effetto che farebbe il seguente quadro di Seurat se fosse “rappresentato” concependo il punto solo come posizione, privo di dimensione.

- che cosa potrebbe pensare Kandinsky (1989) delle domande poste da Fischbein, dato che ha intitolato un suo quadro: *“Le linee sottili tengono testa alla pesantezza del punto”*?



- che cosa penseranno gli aborigeni australiani del punto dato che lo usano come base per rappresentare ogni immagine?

---

[43] Siamo consapevoli che stiamo usando in modo molto semplicistico un termine: *concettualizzazione*, assai complesso e delicato: «*Addentrarsi in questa avventura, conduce a rendersi conto almeno di una cosa: che la domanda: Che cos’è o come avviene la concettualizzazione? Resta fondamentalmente un mistero…*» (D’Amore, 2003). Questa scelta consapevole, nasce dall’uso di questo termine da parte di Fischbein (1993) nell’esempio del punto individuato dall’intersezione di più segmenti, che noi abbiamo trasferito nelle nostre considerazioni.

- inoltre si riporta la risposta fornita da un agrimensore di "vecchio stampo" con oltre 40 anni di professione alle domande poste da Fischbein: *«È ovvio che un punto è… un punto, ma nel disegno cambia a seconda di quale pennino usi e così un punto può diventare più grosso o meno grosso. Se usi pennini diversi o se ripassi con un numero sempre maggiore di linee il punto visivamente diventa più grosso»*. E ci si chiede se l'agrimensore non ha ancora concettualizzato o se la concettualizzazione dipende invece dal contesto.

Queste provocazioni consentono di riflettere sull'importanza del contesto, che risulta ancora più lampante grazie all'attenta analisi dell'articolo sopra citato di Fischbein (1993), dove viene presentata la situazione sperimentale dei due punti: uno individuato dall'intersezione di quattro segmenti e l'altro di due segmenti. Questa ricerca è stata rivolta a soggetti di età compresa tra i 6 e gli 11 anni, ai quali erano state poste le domande, volutamente ambigue, che abbiamo presentato. Fischbein stesso afferma che queste domande potevano essere considerate o da un punto di vista geometrico o da un punto di vista materiale (grafico). L'intenzione della ricerca era di scoprire l'evoluzione con l'età dell'interpretazione dei soggetti e la possibile apparizione dei concetti figurali (punto, linea).
Come riferisce Fischbein, i risultati mostrano un'evoluzione relativamente sistematica delle risposte da una rappresentazione concreta ad una concettuale-astratta. Ma siamo certi che l'interpretazione concettuale sia esclusivamente quella astratta, o questo dipende dal contesto? È certo che in àmbito matematico la concettualizzazione del punto si ha quando si è in grado di astrarre e di concepire un punto come privo di dimensioni, ma nella domanda non si è parlato di punto matematico, quindi l'attenzione poteva concentrarsi su un qualsiasi tipo di punto: per l'agrimensore, per il pittore, per l'aborigeno, per il disegnatore, per il musicista, per il geografo... A nostro parere un agrimensore di "vecchio stampo" abituato a disegnare con i pennini che non sia in grado di distinguere la diversa grossezza di un punto, fatto ad esempio con un pennino 0,2 o 0,8, non è riuscito a concettualizzare nel suo àmbito. La concettualizzazione quindi dipende dal contesto, per questo riteniamo che nella esplicitazione della domanda posta da Fischbein risultava fondamentale chiarire l'àmbito di riferimento.
Viene lecito domandarsi: è sempre vero che la percezione grafica sia meno concettuale di quella astratta o questo dipende dal contesto di riferimento? In particolari àmbiti, come quello grafico, l'aspetto figurale può essere ritenuto più concettuale di quello astratto? A nostro parere, notare la diversa dimensione di due punti, richiede una sensibilità, una finezza e un grado di "concettualizzazione" fondamentale in certi àmbiti. Emerge quindi la necessità che l'insegnante sia consapevole del contesto al quale sta facendo riferimento quando pone le

domande e quando propone un particolare contesto all'allievo, per essere certi che le risposte inattese ed insperate degli studenti, non siano il risultato derivante dal fatto che l'intervistato si sia collocato in un àmbito diverso rispetto a quello immaginato dall'intervistatore. In un certo senso sarebbe come auspicare che vengano fornite le soluzione di un'equazione in un particolare insieme, senza però avere esplicitato l'insieme di appartenenza delle soluzioni.
Da questo punto di vista potrebbe risultare pericoloso, se generalizzato ad ogni àmbito, ciò che auspica Fischbein (1993), ossia che il punto stia per diventare staccato dal contesto, così da preparare il concetto geometrico di punto. In effetti riteniamo importante che l'allievo sia consapevole del contesto nel quale si sta muovendo e che concepisca un concetto coerentemente rispetto al particolare àmbito, allo stesso tempo auspichiamo che l'allievo sappia variarne l'"uso" all'interno dello stesso contesto e in contesti diversi.

Ritornando all'infinito. Quando il ricercatore, seppur conosciuto come esperto di matematica, ha rivolto agli insegnanti di matematica la seguente domanda priva di contesto: ***R.: «Che cos'è per te l'infinito?»*** ha riscontrato risposte del tipo seguente, tutte rivolte ad àmbiti diversi da quelli della matematica:
A.: «L'infinito di Leopardi» (insegnante di scuola primaria)
F.: «Lo spazio, anzi l'universo che ci circonda» (insegnante di scuola primaria)
C.: «Il tuo indirizzo di posta elettronica» (insegnante di scuola primaria)
G.: «L'infinito amore che provo per mia figlia» (insegnante di scuola secondaria inferiore)
A.: «La fede in Dio che mi porto dentro» (insegnante di scuola secondaria inferiore)
È certamente vero che per l'infinito, anche quando si esplicita agli insegnanti il contesto al quale ci si riferisce, ossia quello matematico, non si hanno risposte coerenti rispetto all'àmbito considerato (vedi paragrafo 3.7.1), ma almeno si escludono, nella maggior parte dei casi, risposte generiche e lontane dalle aspettative come quelle qui sopra evidenziate.
Le considerazioni riferite al punto nei diversi àmbiti si potrebbero trasferire durante l'iter scolastico degli allievi anche all'infinito, esplicitando le diverse caratteristiche di questo termine nei diversi contesti: filosofico, religioso, mistico, linguistico, matematico…

Di nuovo al punto. Come conseguenza di queste considerazioni si sono strutturate diverse attività relative al punto nei diversi àmbiti che gli insegnanti di Milano stanno sperimentando con bambini di scuola primaria. La sperimentazione che si sta realizzando, sfocerà in seguito in una vera e propria ricerca, in quanto l'intenzione futura è di raccogliere i risultati di anni di lavoro in questo campo, osservando la ricaduta didattica derivante da questa "nuova" trasposizione didattica. Cercheremo quindi di analizzare come si sono trasformati i misconcetti degli insegnanti e dei bambini, quali immagini avranno dei diversi concetti matematici, in particolare dell'infinito matematico e degli enti fondamentali della geometria, quale sarà a quel "punto" la loro idea di matematica. Non ci dilungheremo nella trattazione specifica di queste attività, in quanto non è questa la sede giusta, vogliamo solo mettere in evidenza la linea scelta che si basa sull'"uso" della parola punto in diversi contesti: nella musica, nella lingua, nella geografia, nell'arte, nel disegno, nella matematica, analizzando in dettaglio ciò che caratterizza ogni contesto. Per esempio se parliamo della pittura facciamo notare che si tratta di un punto con caratteristiche particolari come la grandezza, la forma, la pesantezza, il colore… che dipendono dagli strumenti con cui si è disegnato; si tratta di un punto che assume significato diverso a seconda di ciò che l'artista vuole esprimere. Entrando nel mondo della matematica, invece, si può riflettere e discutere sulla scelta di Euclide relativa al punto privo di dimensione, che è stata assunta da questo matematico come "punto" di partenza, "regola iniziale" del grande gioco della matematica al quale si invitano i bambini a partecipare. Ma come in ogni gioco che si rispetti, per partecipare è necessario accettarne e rispettarne "le regole", che condurranno in questo caso a saper "vedere con gli occhi della mente". La capacità di saper accettare, rispettare e condividere le scelte degli altri e l'esplicitazione delle caratteristiche dei diversi àmbiti, rappresentano per questa trattazione elementi fondamentali per poter consentire ai bambini di staccarsi dalla fisicità dei punti che solitamente disegnano, per accettare un mondo diverso, quello della matematica, dove esistono "regole" differenti da quelle della loro quotidianità.

Entrare nel mondo della matematica, accettandone le "regole" del gioco, rappresenta uno dei primi obiettivi che perseguiamo anche nei corsi di formazione di matematica per insegnanti di ogni livello scolastico, allo scopo di far sì che sia possibile poi accettare la problematica dell'infinito, assai distante rispetto a quella del finito. Abbiamo in effetti rivelato in questi anni come sia necessario effettuare un discorso più ampio, che ricada più in generale sull'idea che hanno gli insegnanti di matematica, prima di giungere a lavorare sui loro misconcetti relativi all'infinito.

G.:«Adesso ho capito che cos'è la matematica, ormai non mi sorprende più niente» (insegnante di scuola primaria).

Dato che questa tesi è rivolta agli insegnanti, vogliamo mettere in evidenza l'importanza che ha avuto per loro strutturare insieme a noi le attività, riflettendo sul ruolo fondamentale di queste considerazioni sul loro insegnamento. Solo come esempio riportiamo due stralci del "diario di bordo", contenente le sensazioni di due insegnanti di scuola primaria:

L.: «Noi insegnanti elementari siamo abili costruttori di tecniche e di materiali didattici che destano anche ammirazione per la loro ingegnosità. Ma qualche volta ci innamoriamo troppo dei nostri "marchingegni" e ci abbandoniamo al loro uso in modo troppo fiducioso. È vero, abbiamo bisogno di modelli per parlare di matematica, abbiamo alunni piccoli, per i quali pensiamo sia sempre necessario una materializzazione dei concetti. Così non ci accorgiamo dell'inganno (non voluto) nel quale avvolgiamo i nostri alunni che attraverso la nostra didattica materiale si fanno l'idea che gli oggetti matematici siano oggetti reali e come tali debbano essere trattati. Anch'io nella mia storia di insegnante elementare ho attraversato la stagione della didattica materiale e ho speso tempo ed energia per renderla sempre più efficiente. Ma ad un certo momento nella mia vita di maestra, mi sono accorta che il manipolare, il fare, il costruire, non portavano necessariamente al sapere matematico. (…). Finalmente ho capito che se il concetto non c'è nella mente, se non c'è capacità di immaginazione, le mani che manipolano non servono al fine di costruire concetti matematici. (…). Ero soddisfatta e mi pareva che tutto funzionasse al meglio. Era solo un'impressione, dovuta alla mia ignoranza matematica: non mi colpevolizzo, faccio una constatazione.
Due anni fa al convegno di Castel San Pietro ho sentito Silvia Sbaragli parlare di infinito matematico: infinito potenziale e attuale: mi si è aperto un mondo. Silvia Sbaragli parlava e io rivedevo me stessa insegnante di matematica: quante cose date per scontate e quante confusioni.
Avevo arato bene il mio terreno didattico ed ero in grado di cogliere immediatamente il messaggio che contenevano le parole della relatrice: un pensiero ricco e fertile al momento giusto.
Si è creato un incontro assolutamente importante per la mia pratica di insegnante: da lì è nata una collaborazione che ha illuminato e illumina il mio lavoro (…) favorendo in modo potente una organizzazione delle mie idee ancora frammentate, confuse e incomplete.
Ho capito una volta per tutte qual è l'approccio giusto per fare matematica. Ho cercato di illuminare i miei bambini nello stesso modo in cui sono stata illuminata io: credo di esserci riuscita. Sono felice di questa trasformazione che mi ha consentito di affacciarmi al mondo della matematica con uno sguardo che non cancella in un colpo la mia ignoranza, ma che non mi farà commettere gravi sbagli e omissioni nei confronti dei miei alunni, che permetterà ai miei alunni e a me di godere di un sapere così ricco nel quale e con il quale la mente umana può giocare e divertirsi».

C.: «Riconosco che molte volte pensando di facilitare l'apprendimento e di rispondere alla richiesta di chiarezza concreta da parte degli alunni, agevoliamo invece il nostro bisogno di sicurezza cercando un contatto, una testimonianza con il reale. Tutto ciò ci tranquillizza, riusciamo a controllare meglio, è lì, è visibile, non si può sbagliare. Fa paura affrontare il mondo del non sensibile e cerchiamo in ogni modo di trasferire gli oggetti e le regole della Matematica nel mondo del reale come se anche i concetti matematici avessero bisogno di una giustificazione reale per esistere. Mi ha molto stimolato lavorare sulle rappresentazioni, capire che sono utili, per dare corpo a qualcosa che non è concreto, ma che possono essere deboli perché non sempre, presentare modelli concreti in matematica, assicura un corretto apprendimento ma anzi lo condizionano e lo ostacolano. Ricordo Elena che dopo aver ragionato, parlato e ancora ragionato sul punto in matematica mi disse "Sì non lo vedo, ma lo capisco"».

Come commentare queste due significative riflessioni, se non con un breve, ma efficace, proverbio giapponese: *"Insegnare è imparare"* che vale anche per noi ricercatori ogni volta che entriamo in contatto con il ricco mondo della didattica.
Sembra che il nostro obiettivo è in parte stato raggiunto: incidere notevolmente sulle convinzioni degli insegnanti per poi incidere indirettamente su quelle degli allievi.

Viene spontaneo domandarsi come mai questa tesi relativa alle convinzioni degli insegnanti di scuola primaria sull'infinito matematico si sia indirizzata in questo capitolo quasi esclusivamente sul punto e sulla sua trasposizione didattica; va quindi precisato che questo è stato il percorso che è si è prospettato davanti a noi in questi anni pur avendo sempre in mente come problematica principale quella dell'infinito. Si è in effetti rilevato come risulti impossibile trattare l'aspetto dell'infinito matematico in àmbito geometrico senza far riferimento agli enti primitivi della geometria. È proprio da misconcetti riguardanti questi oggetti matematici che derivano molte delle false credenze relative all'infinito, inoltre riteniamo che queste proposte rappresentano un modo nuovo di lavorare in classe, più elastico, più vicino alla "nostra" idea di matematica, in grado di favorire un avvicinamento da parte degli insegnanti e degli allievi al concetto di infinito.

4.5 Un altro importante aspetto: le diverse rappresentazioni del punto in matematica

Un altro fondamentale e delicato aspetto legato alla trattazione precedente riguarda le diverse rappresentazioni del punto in matematica. Ancora una volta si è scelto di trattare il punto, ma ovviamente queste riflessioni possono essere trasferite a tutti gli altri enti primitivi della geometria, e non solo. Da dove nascono le seguenti considerazioni? Più volte nel corso di questi capitoli abbiamo esplicitato come le difficoltà e i misconcetti dipendano spesso, per quanto riguarda l'infinito matematico, dalla rappresentazione visiva che si fornisce degli enti primitivi della geometria. Ma di che tipo è questa rappresentazione che viene fornita dall'insegnante e accettata dalla *noosfera*? Per gli enti primitivi della geometria si tende a dare un'unica rappresentazione o diverse rappresentazioni addirittura in registri semiotici[44] diversi? Quanto incide sulle convinzioni degli allievi la rappresentazione fornita dall'insegnante?
Prima di rispondere a queste domande, procediamo per gradi e analizziamo in dettaglio il quadro teorico di riferimento.

4.5.1 Il quadro teorico di riferimento

Per questa trattazione non possiamo che fare riferimento a Duval che in questi anni ha messo in evidenza come in Matematica l'acquisizione concettuale di un oggetto passa necessariamente attraverso l'acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche. Questa problematica dei registri è stata presentata nei celebri articoli del 1988 (a, b, c); e nel successivo lavoro del 1993. Dunque prendendo a prestito da Duval l'affermazione: non c'è **noetica** (acquisizione concettuale di un oggetto) senza **semiotica** (rappresentazione realizzata per mezzo di segni), passiamo alle seguenti considerazioni.

Come riferisce D'Amore nel suo libro del 2003:

- ogni concetto matematico ha rinvii a "non-oggetti"; dunque la concettualizzazione non è e non può essere basata su significati che poggiano sulla realtà concreta; in altre parole in Matematica non sono possibili rinvii estensivi;

[44] Partendo dall'impostazione di Duval che andremo ad esplicitare, quando si parla di "registro di rappresentazione semiotica" ci si riferisce ad un sistema di segni che permette di riempire le funzioni di comunicazione, trattamento, conversione e di oggettivazione.

• ogni concetto matematico è costretto a servirsi di rappresentazioni, dato che non vi sono “oggetti” da esibire in loro vece o a loro evocazione; dunque la concettualizzazione deve necessariamente passare attraverso registri rappresentativi che, per vari motivi, soprattutto se sono a carattere linguistico, non possono essere univoci;

• si parla più spesso in Matematica di “oggetti matematici” che non di “concetti matematici” in quanto in Matematica si studiano preferibilmente oggetti piuttosto che concetti; *«la nozione di oggetto è una nozione che non si può non utilizzare dal momento in cui ci si interroga sulla natura, sulle condizioni di validità o sul valore della conoscenza»* (Duval, 1998).

Come si percepisce da quest’ultimo punto, per Duval la nozione di concetto diventa secondaria, mentre ciò che assume carattere di priorità per l’Autore è la coppia (segno, oggetto). Dell’importanza del segno parla anche Vygotskij in un passo del 1962, citato in Duval (1996), nel quale si dichiara che non c’è concetto senza segno. Assumendo tutto questo come vero, ne consegue che occorre didatticamente fare molta attenzione alla scelta del segno, anzi sarebbe meglio dire del sistema di segni, che rappresentano l’oggetto matematico che si vuole far apprendere ai propri allievi; un’attenzione che è spesso sottovalutata o data per scontata. In D’Amore (2003) si riporta il pensiero di Duval che sostiene come, presso alcuni studiosi di didattica, si scorge una riduzione del *segno* ai *simboli convenzionali* che connotano direttamente e isolatamente degli oggetti, ma che possono portare a misconcetti dato che diventano rappresentanti unici di un dato registro e questo a nostro parere è ciò che avviene per gli enti primitivi della geometria. Il punto è percepito e riferito all’unica rappresentazione che viene comunemente fornita dalla *noosfera*: un pallino sulla lavagna; la retta ad una linea continua, di spessore variabile, diritta, formata da tre puntini iniziali e tre finali; nessuno ha il coraggio di osare uscendo da queste rappresentazioni, che vengono così percepite dagli insegnanti, e indirettamente dagli allievi, come le uniche plausibili e possibili. Come conseguenza di queste scelte univoche, si ha che il punto viene associato all’unica immagine che si fornisce: il segno “tondeggiante” lasciato su un foglio, di diametro variabile, avente una certa dimensione.

A.: «Non credo che ci siano altri modi per rappresentare un punto se non quello di toccare leggermente un foglio con una penna» (insegnante di scuola primaria)

R.: «Non ti viene in mente nient’altro? Con i tuoi allievi come fai?»

A.: «Se mi chiedi come lo rappresento, per forza per farlo faccio un piccolo segnetto sulla lavagna, ma se intendi anche che cosa dico quando ne parlo, di solito dico di considerare un granello di sabbia o un granello di sale».

Tra i modelli scelti dagli insegnanti per rappresentare il punto rientrano sempre immagini "tondeggianti", perché tra i misconcetti che possiedono si ritrova anche l'idea che la forma di un punto sia "sferica":

R.: «Secondo te, rappresentare un punto con una stella è lecito?»

A.: «Con una stella? Certamente no, che domanda è? Un punto non è mica una stella!»

R.: «Perché il punto è questo: •?»

A.: «Sì, il punto è sferico, non è certamente a forma di stella».

4.5.2 Un caso particolare del paradosso di Duval: gli enti primitivi

Analizziamo il famoso paradosso di Duval (1993) (citato in D'Amore 1999 e 2003): *«(…) da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l'apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile».* Questa confusione si amplifica per gli enti primitivi della geometria, dato che vengono spesso lasciati semplicemente ad un atto di intuizione. Inoltre, a complicare l'apprendimento di questi oggetti matematici, si aggiunge la scelta di fornire all'allievo solo sterili e univoche rappresentazioni convenzionali che vengono così accettate ciecamente a causa del *contratto didattico* instaurato in classe (vedi paragrafo 2.1) e del fenomeno *di scolarizzazione* (vedi paragrafo 2.4).

Il paradosso prosegue così: *«E, al contrario, come possono essi* (i soggetti) *acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati? Questo paradosso è ancora più forte se si identifica attività matematica ed attività concettuale e se si considera le rappresentazioni semiotiche come secondarie o estrinseche»* (Duval, 1993).

Rileggiamo il paradosso nel caso del punto matematico: noi auspichiamo come insegnanti che lo studente concepisca il punto matematico in modo concettuale, pensandolo come oggetto privo di dimensione, ma è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Sicuramente i soggetti in fase di apprendimento tenderanno a confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche, ma questo avviene a maggior ragione quando le rappresentazioni fornite risultano quasi esclusivamente univoche e convenzionali, come nel caso del punto e della retta, e quando non avviene da parte dell'insegnante un lavoro di mediazione tra l'"oggetto personale" e l'"oggetto istituzionale" (Godino e Batanero, 1994, Chevallard, 1991). Come fare allora con dei bambini di scuola primaria a parlare di punto senza disegnarlo in un unico modo sulla lavagna? Come è possibile svincolarsi da questa rappresentazione che rimane fissa e stabile trasformandosi in modello erroneo per gli insegnanti e per gli allievi? Come possono gli studenti acquisire padronanza nei *trattamenti*[45] matematici e nelle *conversioni*[46] legate alle rappresentazioni semiotiche se viene fornita sostanzialmente un'unica rappresentazione convenzionale per gli enti geometrici?

Le difficoltà sono sì legate al fatto che gli studenti non possono avere inizialmente un apprendimento concettuale degli oggetti matematici, ma sono amplificate dalla rivelazione che spesso questo apprendimento concettuale non è posseduto neanche dagli insegnanti che tendono a confondere la rappresentazione con l'oggetto matematico che intendono spiegare ai propri allievi (vedi cap. 3).

In questi anni di lavoro continuato con gli insegnanti è capitato diverse volte di rilevare come alcuni di loro attribuiscano l'esistenza di un concetto matematico alla possibilità di rappresentarlo tramite immagini o oggetti concreti:

S.:«L'infinito per me non esiste, non lo puoi mica vedere» (insegnante di scuola primaria)

R.: «Perché il 3 lo puoi vedere?»

S.: «Certo, basta che mostri 3 dita, che scrivi 3, che mostri 3 oggetti. Ma per l'infinito come fai?»

R.: «Allora nel tuo ragionamento, basta che scrivi così: ∞»[47]

S.: «No, però è diverso non lo puoi mica toccare come con le dita. Per me il 3 esiste e l'infinito no».

---

[45] Per *trattamento* si intende un'attività cognitiva caratteristica della semiotica che consiste nel passaggio da una rappresentazione ad un'altra all'interno dello stesso registro semiotico.

[46] Per *conversione* si intende un'attività cognitiva caratteristica della semiotica che consiste nel passaggio da una rappresentazione ad un'altra in registri semiotici diversi.

[47] In Rucker (1991) viene proposta una curiosità: il simbolo ∞ appare per la prima volta nel 1656 in un trattato sulle sezioni coniche di John Wallis, *Arithmetica Infinitorum* (si veda: Scott, 1938). Subito si diffonde un po' dovunque per indicare l'infinito o l'eternità nei più svariati contesti. Per esempio nel 1700 il simbolo dell'infinito cominciò ad apparire sulla carta del Matto nei Tarocchi, dove il simbolo cabalistico associato a questa carta è la lettera ebraica aleph $\aleph$.

Queste affermazioni evidenziano, ancora una volta, le false convinzioni che possiedono gli insegnanti sugli oggetti della matematica e più in generale sulla matematica stessa.

Come sostiene Fischbein (1993) è importante evidenziare che: *«Nelle scienze empiriche il concetto tende ad approssimare la corrispondente realtà esistente, mentre in matematica è il concetto, attraverso la sua definizione, che detta le proprietà delle figure corrispondenti. Questo porta ad una conseguenza fondamentale. L'intero processo investigativo del matematico può essere compiuto mentalmente, in accordo con un certo sistema assiomatico, mentre lo scienziato empirico deve, prima o dopo, tornare alle fonti empiriche. Per un matematico, la realtà può essere una fonte di ispirazione, ma mai oggetto di ricerca che porti a verità matematiche, e certamente non un esempio definitivo per provare una verità matematica. Il matematico, come il fisico o il biologo, usa osservazioni, esperimenti, induzioni, confronti, generalizzazioni, ma gli oggetti della sua indagine sono puramente mentali. Il suo laboratorio è, in linea di massima, confinato nella sua mente. Le sue prove non sono mai di natura empirica, ma solo di natura logica».*

Il paradosso di Duval risulta quindi ancora più accentuato se l'insegnante fa coincidere il concetto con la sua rappresentazione e se non ha mai riflettuto e strutturato la trasposizione didattica tenendo conto del senso e dell'importanza delle rappresentazione semiotiche.

Le considerazioni fin qui riportate, sono ancora una volta intimamente collegate con la problematica dei *concetti figurali* presentata da Fischbein (1993): *«Un quadrato non è un'immagine disegnata su un foglio di carta; è una forma controllata dalle sue definizioni (anche se può essere ispirata da un oggetto reale) (…) Una figura geometrica può allora essere descritta come avente intrinsecamente proprietà concettuali. Tuttavia una figura geometrica non è un puro concetto. È un'immagine, un'immagine visiva. Possiede una proprietà che i concetti usuali non possiedono, cioè include la rappresentazione mentale di proprietà spaziali. (…) Tutte le figure geometriche rappresentano costruzioni mentali che possiedono, simultaneamente, proprietà concettuali e figurali. (…) Gli oggetti di studio e di manipolazione nel ragionamento geometrico sono allora entità mentali, da noi chiamate concetti figurali, che riflettono proprietà spaziali (forma, posizione, grandezza) e, allo stesso tempo possiedono qualità concettuali – come idealità, astrattezza, generalità, perfezione. (…) Abbiamo bisogno di uno sforzo intellettuale per capire che le operazioni logico-matematiche manipolano soltanto una versione purificata dell'immagine, il contenuto spaziale-figurale dell'immagine. (…) Idealmente, è il sistema concettuale che dovrebbe controllare completamente i significati, le relazioni e le proprietà delle figure. (…) Ma l'evoluzione di un concetto figurale generalmente non è un processo naturale. Di conseguenza, uno dei compiti* *principali della didattica della matematica (nel campo della geometria) è di creare situazioni didattiche che richiedano sistematicamente una stretta cooperazione tra i due aspetti, fino alla loro fusione in oggetti mentali unitari*» ed è su tutte queste considerazioni che stiamo strutturando attività con le insegnanti di Milano. Queste esperienze puntano a valorizzare e a mettere in evidenza per gli enti primitivi della geometria varie rappresentazioni semiotiche in registri diversi, lasciando sbizzarrire la fantasia degli allievi e permettendo così di farli allontanare da falsi stereotipi ormai assunti come convenzionali; raggiungendo così *l'istituzionalizzazione della conoscenza* che porta alla conoscenza istituzionalizzata dei vari oggetti matematici. È proprio consentendo agli insegnanti e agli allievi di svincolarsi da rappresentazioni fisse e stabili che rappresentano "modelli erronei" (vedi cap. 3), che è possibile formare un'idea più vicina all'oggetto matematico che si vuole far apprendere. In questo modo cercheremo di far percepire, prima agli insegnanti e poi agli allievi, l'idea che la natura di un concetto non dipende dal tipo di rappresentazione che si è scelta per rappresentarlo, di modo che sia più semplice poi accettare la problematica dell'infinito.

4.5.3 Alcune proposte di attività

Le attività strutturate con le insegnanti di scuola primaria di Milano mirano a far percepire all'allievo la "debolezza" che hanno le rappresentazioni in matematica, per far sì che lo studente riesca a cogliere ciò che sta al di là dello specifico modello concreto (non solo figurale), dando un senso concettuale, dal punto di vista matematico, alle diverse immagini. L'allievo giungerà così a saper vedere con gli "occhi della mente", trovando così una giusta connessione tra i diversi aspetti tramite l'uso di vari linguaggi: verbale, gestuale, figurale, mentale.... In particolare riteniamo necessario strutturare attività che abbiano come fine ultimo la formazione di concetti figurali nel senso inteso da Fischbein (1993).

Allo stesso tempo, il nostro scopo è di far sì che l'allievo sia in grado di "osare" inventando rappresentazioni diverse per lo stesso concetto; questo consentirà allo studente di effettuare *trattamenti* ossia di passare da una rappresentazione ad un'altra all'interno dello stesso registro semiotico per lo stesso oggetto matematico e di effettuare *conversioni* tra una rappresentazione ed un'altra in registri semiotici diversi. «*Si può dire di più: che la conoscenza "è" l'intervento e l'uso dei segni. Dunque, Il meccanismo di produzione e d'uso, soggettivo ed intersoggettivo, di questi segni e di rappresentazione degli "oggetti" dell'acquisizione concettuale, è cruciale per la conoscenza*» (D'Amore, 2003).

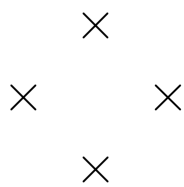
Per fare questo, però, l'allievo deve essere capace di validare[48] e socializzare le sue scelte difendendo le proprie opinioni con giuste argomentazioni e sapendo accettare le motivazioni degli altri, in modo da creare rappresentazioni condivise e convenzionali all'interno della classe che saranno in seguito confrontate con quelle scelte dalla noosfera. Come sostiene D'Amore (2003): *«Durante l'apprendimento della Matematica, gli allievi vengono introdotti in un nuovo mondo concettuale e simbolico (soprattutto rappresentativo). Questo mondo non è frutto di una costruzione solitaria, ma il frutto di una vera e complessa interazione con i membri della microsocietà di cui il soggetto apprendente è parte: i propri compagni e gli insegnanti (e la noosfera, a volte sfumata, a volte presente)* (Chevallard, 1992). *È grazie ad un continuo dibattito sociale che il soggetto apprendente prende coscienza del conflitto tra "concetti spontanei" e "concetti scientifici", insegnare non consiste solo nel tentativo di generalizzare, amplificare, rendere più critico il "senso comune" degli studenti, si tratta di un'azione ben più complessa... Apprendere sembra dunque una costruzione sottoposta al bisogno di "socializzare", il che avviene grazie ad un mezzo comunicativo (che può essere il linguaggio) e che nella Matematica sarà condizionato dalla scelta del mediatore simbolico, cioè del registro di rappresentazione prescelto (o imposto, a vario titolo, anche solo dalle circostanze)».*

Perché il punto in matematica è rappresentato solo come un segno "tondeggiante"? La "rotondità", costituisce una sua proprietà matematica specifica?
Un punto in matematica dovrebbe essere un ente a-dimensionale, quindi la sua rappresentazione, necessaria per potersi capire, potrebbe essere di qualsiasi tipo, dato che non deve rispecchiare nessuna caratteristica particolare, se non quella di non poter essere eseguita. A nostro parere, la varietà di rappresentazioni permette agli allievi di purificare l'oggetto dalle proprietà che non gli sono proprie come: la grossezza, la pesantezza, il colore, la dimensione del diametro… Didatticamente è sufficiente stabilire una posizione nello spazio per caratterizzare un punto, mentre alla rappresentazione di questa posizione ci penseranno i

[48] La *validazione* è quel processo che si adotta e si segue per raggiungere la convinzione che un certo risultato ottenuto (o un'idea costruita) risponda davvero ai requisiti esplicitamente messi in campo; questo può avvenire quando un allievo propone una propria costruzione concettuale agli altri, mettendosi in situazione esplicitamente comunicativa, dirigendo così la sua attenzione alla trasformazione di un suo sapere personale privato in un prodotto di comunicazione e difendendo la propria opinione (o la propria risoluzione) contro gli "scettici" (validando appunto la propria costruzione).

bambini con la loro fantasia, la loro volontà, il loro gusto, rappresentando il punto matematico come l'estremo di una freccia, o l'incrocio di una crocetta, o il centro di una stellina.
La creazione del modello sbagliato derivante dalla rappresentazione univoca fornita per il punto è una situazione analoga a quella che si verifica nella scuola dell'infanzia quando l'insegnante tende a voler far apprendere al bambino il riconoscimento della forma quadrata consegnando sempre lo stesso modello concreto: rosso, di legno, di una determinata estensione, di un certo spessore. Il bambino crederà che le caratteristiche del quadrato siano proprio quelle di essere: rosso, di legno, di quella determinata grossezza; per riuscire a purificare il concetto di quadrato dalle proprietà che non lo caratterizzano, l'allievo dovrà avere l'opportunità di "vedere" diverse immagini in contesti diversi che gli consentiranno di raggiungere le caratteristiche di idealità, astrattezza, generalità, universalità, perfezione:[49] *«Il punto esiste solo nella mia mente, è come un fantasmino. Un fantasmino può essere attraversato da infiniti fantasmini»* (Luca, terza primaria).

Un giorno entrando in una classe terza dove le insegnanti stavano seguendo questo approccio i bambini hanno rivolto al ricercatore la seguente domanda:
«Prova a capire che cos'è questo». E hanno rappresentato alla lavagna la seguente immagine:



La risposta era: *«Quadrato»*.[50]

Successivamente hanno posto la seguente domanda:

[49] A questo proposito Locke (1690) affermava: *«Per quanto concerne le parole generali (cioè i nomi comuni), è chiaro che… il generale e l'universale non appartengono all'esistenza reale delle cose, ma sono invenzioni e creature dell'intelletto, fatte per il suo uso, e riguardano solamente i segni, siano parole o idee»*.

[50] A tal proposito Speranza (1996) afferma: *«Risaliamo ora all'antica Grecia. Dice Platone, nella Repubblica: «Quelli che si occupano di geometria… si valgono… di figure visibili, e ragionano su di esse, ma non ad esse pensando, ma a quelle di cui esse sono le immagini, ragionando sul quadrato in se stesso e sulla diagonale, anziché su quello o quella che disegnano…». (…). Platone parla di "quadrato in sé", del quale i quadrati disegnati sono "immagini". Ritroviamo qui il "mito della caverna": la vera realtà sono le idee generali, che hanno un'esistenza in sé: le cose sensibili sono solo "immagini", che noi vediamo come ombre, sul fondo di una caverna, delle vere entità che si trovano fuori»*.

«Che cos'è questo?»

e alla risposta del ricercatore: ***«Due punti»,***

i bambini hanno ribattuto così: *«No, riprova»*

R.: «Il segmento che ha come estremi quei due punti?»

B.: «No, riprova ancora. Dai che ce la fai!»

R.: «La retta che passa per quei due punti»

B.: «Brava Silvia, ora la possiamo disegnare»

I bambini hanno così mostrato di scegliere un modo alternativo anche per rappresentare la retta. In queste proposte rientra il "rischio personale" da parte dell'allievo, il suo impegno, la sua *implicazione* diretta nell'apprendimento, che si manifesta con la rottura del contratto didattico (vedi paragrafo 2.1). *«La necessità di questa rottura potrebbe essere riassunta dal seguente aforisma: Credimi, dice il maestro all'allievo, osa utilizzare il tuo proprio sapere e imparerai»* (Sarrazy, 1995).

Se è vero come sostiene Duval (1993), che la creazione e lo sviluppo di sistemi semiotici nuovi è simbolo (storico) di progresso della conoscenza, con queste attività noi vogliamo attivare questo progresso all'interno della classe tenendo ben presenti tutte e tre le attività cognitive "caratteristiche della semiotica": *rappresentazione, trattamento, conversione*. In particolare, alla conversione attribuiamo una posizione di rilievo, seguendo le motivazioni descritte in D'Amore (2003) e ancora prima in Duval (1993), tra le quali consideriamo prioritario il fatto che questa specifica attività cognitiva consenta di definire delle variabili indipendenti sia per l'osservazione che per l'insegnamento, permettendo la "concettualizzazione" che ha inizio realmente solo quando si mette in moto, anche solo abbozzandola, la coordinazione di due distinti registri di rappresentazione.

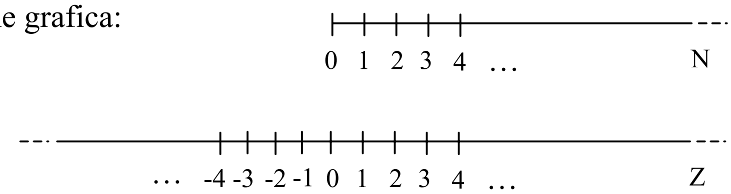
Altre attività strutturate dagli insegnanti vertono sulle principali differenze che vi sono tra l'àmbito finito e quello infinito, per far sì che il concetto di infinito non sia ridotto banalmente ad un'estensione del finito. La trattazione delle problematiche concernenti l'infinito, infatti, richiede lo sviluppo di modelli intuitivi diversi e a volte addirittura opposti rispetto a quelli che si usano nel finito. A nostro avviso, per aggirare la creazione di misconcetti su questo tema bisognerebbe iniziare fin dalla scuola primaria un'opportuna educazione alla trattazione di insiemi infiniti che permetta all'allievo di cominciare a notare le principali differenze tra i due àmbiti. Gli obiettivi che ci siamo posti nello strutturare queste attività, sono principalmente il permettere all'allievo di cogliere l'essenza e il fascino della matematica; di riuscire a staccarsi dalla quotidianità del finito; di saper trasferire le corrispondenze biunivoche dal finito all'infinito; di intuire il significato dell'infinito sia in àmbito geometrico che numerico.

Da questo punto di vista riportiamo alcune affermazioni effettuate da un insegnante di scuola secondaria inferiore come conseguenza dell'aver proposto ai propri allievi alcune corrispondenze biunivoche tra insiemi infiniti (in particolare, tra l'insieme dei numeri naturali e pari, naturali e dispari, naturali e interi) delle quali era venuta a conoscenza durante il corso di formazione:

C.: «Provo un senso di liberazione da quando ho scoperto di poter posizionare i numeri in diversi modi. Sapere di poter giocare con l'ordinamento dei numeri diverte me e i miei allievi. A scuola di solito si è molto rigidi, non si esce mai dagli schemi».

L'insegnante si riferisce alla possibilità di trovare un ordine diverso rispetto a quello "naturale" per gli insiemi infiniti, come l'insieme dei numeri interi; questo le ha consentito di mostrare e di far scoprire ai bambini le corrispondenze biunivoche tra gli insiemi infiniti.

C.: «Dopo aver proposto questo ordine: 0, + 1, -1, +2, -2, +3, -3… per l'insieme dei numeri interi, un bambino me lo ha spontaneamente modificato così: 0, -1, +1, -2, +2, -3, +3… Ai bambini ha aiutato l'esempio del gioco della tombola, dove i numeri sono messi dentro il sacchetto in ordine sparso. Non li ha stupiti tanto questa attività, come invece aveva stupito me al corso, quindi la corrispondenza biunivoca tra N e Z mi è sembrato che l'abbiano accettata e capita senza alcun problema. Ho anche cercato di insistere meno sulla solita rappresentazione grafica che inganna veramente». (L'insegnante sta parlando della seguente rappresentazione grafica:



che porta a far ritenere, sia gli insegnanti che gli allievi, che il numero degli interi sia il doppio dei naturali, a parte lo zero che è l'elemento neutro).

Le attività menzionate, ed altre ancora, sono state la base per questo anno scolastico di articoli rientranti in laboratori didattici all'interno della rivista, assai diffusa in Italia, dal titolo: *La Vita scolastica*, rivolta a docenti di scuola primaria. Questo rappresenta a nostro parere un grande risultato, in quanto la problematica degli enti primitivi della geometria e dell'infinito matematico avrà così una ricaduta didattica sempre più ampia, consentendo a molti insegnanti di avvicinarsi a queste tematiche e alle problematiche ad esse collegate. Inoltre è significativo il fatto che gli articoli siano strutturati sotto forma di laboratori,[51] dove gli allievi diventano protagonisti *costruendo,* anche nel senso concreto del termine, oggetti che tentano di sradicare diversi misconcetti. In questo modo si instaurano meccanismi relazionali (insegnanti-allievi) molto particolari e relazioni cognitive (allievo-matematica) di estremo interesse teorico (Caldelli e D'Amore, 1986; D'Amore, 1988, 1990-91, 2001b).

4.6 Il "senso dell'infinito"

L'ultimo aspetto che vogliamo mettere in evidenza riguarda un lavoro di ricerca attualmente in corso che vede coinvolti 9 ricercatori appartenenti ai seguenti organi: NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia), DSE (Dipartimento di Scienze dell'Educazione, Ministero dell'Educazione, Bellinzona, Svizzera), ASP (Alta Scuola Pedagogica del Canton Ticino, Locarno, Svizzera), Mescud (Matemáticas Escolares Universidad Distrital, Univ. Distrital "Francisco J. de Caldas", Bogotà, Colombia).
L'idea nata da D'Amore verte sulla proposta di indagare, in diverse realtà e su un ampio ventaglio di soggetti, se esiste un "senso dell'infinito". Per capire che cosa si intende bisogna soffermarsi sul concetto di "stima", che per Pellegrino (1999) rappresenta: *«il risultato di un procedimento (conscio o inconscio) che tende a individuare il valore incognito di una*

[51] Come sostiene D'Amore (2001b): *«Il "Laboratorio": è un ambiente dove si fanno oggetti, si lavora concretamente, si costruisce qualche cosa; soprattutto è caratteristica del laboratorio una certa qual pratica inventiva; nel Laboratorio deve essere viva una tensione verso l'ideazione, la progettazione, la realizzazione di qualche cosa di non ripetitivo né banale, altrimenti basterebbe … un'officina».*

quantità o di una grandezza»; si tratta quindi di cogliere l'essenza del cardinale di una raccolta. Le abilità necessarie per essere un "buon estimatore", evidenziate da Pellegrino (1999), vertono su diversi fattori: psicologici, metacognitivi, affettivi e matematici. Le domande che ci siamo posti sono principalmente le seguenti: Che cosa accade se tale *valore incognito* è infinito? Esiste un "senso dell'infinito", così come esiste un "senso del numero finito"? Se sì, come si configura? Se no, perché? Si riesce a dare un senso intuitivo alla differenza tra l'infinito numerabile e l'infinito continuo?

Nella ricerca condotta nel 1996 con bambini di scuola primaria ci siamo imbattuti in affermazioni, riportate con estrema naturalezza, dalle quali emerge una sorta di mescolanza tra numeri finiti ed infiniti. Tanto per fare un esempio si riporta una conversazione avvenuta tra il ricercatore e due bambini dopo aver mostrato due segmenti di lunghezze diverse e dopo aver rivolto la domanda: ***«Secondo voi ci sono più punti in questo segmento o in questo»*:**

M.: «Abbiamo studiato che una linea è un insieme di punti»

I.: «La linea, non il segmento»

R.: «Lo sapete che cos'è un segmento?»

I.: «Sì, è una linea che ha l'inizio e la fine con due punti e i punti hanno le lettere» (Si nota un'incoerenza nelle risposte di I.: la linea è formata da punti, il segmento, pur essendo una linea, non è formato da punti).

R.: «Mentre in una linea?»

I.: «Ci sono tanti punti»

R.: «Quanti?»

M.: «Infiniti punti»

R.: «Ma allora anche qui nel segmento ci sono infiniti punti»

I.: «No, perché è delimitata» (Emerge anche nei bambini l'idea di infinito come illimitato già rilevata negli insegnanti nel paragrafo 3.7.1)

M.: «Non ce ne saranno così tanti come in questo (indica il segmento più lungo)»

R.: «Quindi, secondo te ce ne sono di più qui (indicando il segmento più lungo) ***che qua*** (indicando il segmento più corto)»

M.: «Dipende quanto sono larghi, se uno è largo un km e uno è largo un mm, ce ne possono stare due o un milione» (questa affermazione ricorda quelle degli insegnanti riportate nel paragrafo 3.7.2 e mette in evidenza anche una mancanza di "senso della misura")

R.: «Mentre nella linea?»

M.: «Dei miliardi»

M., pur avendo sostenuto che il numero dei punti in una linea sono infiniti, afferma in seguito che in una linea ci staranno dei miliardi di punti. Da che cosa dipende questa incoerenza? Solo dai misconcetti relativi agli enti primitivi della geometria rilevati nei paragrafi precedenti o può dipendere, per caso, anche da una totale impossibilità di darsi un'immagine dell'infinito in senso attuale? Non sarà, per caso, anche la totale impossibilità di compiere *stime dell'infinito*?

Gli stessi tipi di risultati si sono riscontrati anche in ricerche effettuate da Arrigo e D'Amore (1999, 2002) con studenti di scuola superiore.

Ma passiamo all'aspetto a nostro parere più interessante: gli insegnanti. Già in questa tesi (paragrafo 3.7.1) ci siamo imbattuti in docenti che dichiaravano curiose stime relative all'infinito, riportiamone solo alcune a mo' di esempio.

Alla domanda: *«Che cosa pensi che significhi: infinito matematico?»*

Un'insegnante di scuola primaria risponde:

C.: «Qualcosa che non si riesce a dire»

S.: «In che senso?»

C.: «Che non si sa quanto sia»

Altre insegnanti di scuola primaria hanno affermato:

A.: «Per me è un numero grande, talmente grande che non si può dire esattamente il suo valore»

B.: «Dopo un po', quando ci si stanca di contare si dice infinito per dire che è un numero sempre più grande»

M.:« Ciò che quantitativamente non misuro»

D.: «Qualcosa di così grande che nonostante gli sforzi è impossibile da catalogare completamente. La matematica, con la sua disciplina, prova a studiarne una parte»

Mentre due insegnanti di scuola secondaria inferiore scrivono su un foglio:

L.: «L'infinito matematico è quando non finisce mai, è una convenzione. Quando non so indicare l'"oltre" uso questo termine: infinito e lo indico con questo segno: ∞»

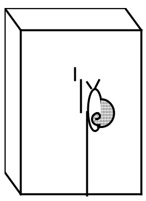
F: «L'infinito matematico è un mondo costituito da elementi che non si riesce a pensare in tutta la loro totalità».

Il fatto di concepire l'infinito come un numero finito grande, o come l'illimitato, o ancora come un procedimento così com'è stato rilevato nelle analisi riportate nel paragrafo 3.7.1, può dipendere dalla mancanza di capacità di *stima dell'infinito*?

Ci siamo dunque proposti di effettuare questa ricerca per giungere a dare risposta ad una serie di domande che, per spinta di D'Amore, abbiamo deciso di raccogliere in due grandi

categorie: una soprattutto di carattere intuitivo e linguistico e l'altra più raffinata e tecnica. Dunque la prima chiama in causa studenti non troppo evoluti o persone non esplicitamente cólte in matematica (studenti senza preparazioni raffinate, insegnanti di scuola primaria, persone senza relazione con il mondo della scuola o con il mondo accademico di livello culturale medio – alto); la seconda riguarda più da vicino studenti evoluti o persone cólte in matematica [come, per esempio, insegnanti di matematica della scuola secondaria, studenti del corso di laurea in matematica (III e IV anno), specializzandi delle Scuole di Specializzazione]. La metodologia seguita consiste ancora una volta di TEPs (D'Amore e Maier, 2002) e di interviste, le motivazioni di questa scelta sono già state presentate nel paragrafo 4.3.
Non riporteremo in modo esplicito le domande di ricerca, né entreremo nel dettaglio dei contenuti dei TEPs e dei temi delle interviste: essi iniziavano tutti più o meno nello stesso modo, ma si evolvevano anche in modi nettamente diversi, a seconda della competenza o della maturità dell'intervistato. Di conseguenza, non anticiperemo neppure i risultati di questa ricerca, che presto saranno pubblicati, ma dato che stiamo parlando delle convinzioni degli insegnanti sull'infinito matematico, vogliamo terminare questa tesi con due interviste.

Dopo aver mostrato il seguente TEP…



Una lumaca vuole scalare un muretto.
Nella prima ora riesce a salire fino a metà.
Nella seconda ora, essendo stanca, sale solo la metà dello spazio percorso prima.
Nella terza ora, sempre più stanca, compie la metà del percorso fatto nell'ora precedente.
E così via...

Per me non arriverà mai in cima

Sì che ci arriverà: se pensi che dopo due ore ha già compiuto i tre quarti del cammino…

Tu che cosa ne pensi?

Insegnante di scuola primaria:
K.: «C'è un limite di tempo?»

R.: «No, non ci sono limiti»

K.: «Allora perché non dovrebbe arrivarci, ci arriverà»

K.: «½ + ½ di ½ + … Quanto fa questa somma qui? Io non lo so proprio. Dovrebbe fare la lunghezza del muretto, ma il tempo che ci mette non importa»

K.: «Fammi pensare… il muro ha una fine, l’altezza non dipende dal fatto che ce la faccia o meno, incide sul numero delle ore. Sì, ce la fa secondo me»

R.: «Quanto fa secondo te la somma che mi hai detto: «½ + ½ di ½ + …»

K.: «Potrebbe fare l’altezza del muretto»

R.: «In che senso?»

K.: «Che ci arriverà»

R.: «E quanto fa questa somma esattamente? Me lo sapresti dire?»

K.: «Infinito? Non lo escludo, che possa fare infinito. Sì, penso di sì… ma anche di no, non so. Queste cose non le so proprio fare».

Insegnante di scuola secondaria inferiore:

L.: «La lumaca non arriverà, per i miei gusti. Non ne so niente delle serie, comunque proviamo.

Ogni ora ci mette il percorso che ha fatto più la metà e la cosa continua all’infinito, quindi non arriva».

Nel frattempo stava scrivendo su un foglio:

x =

1° ora= ½ x

2° ora= ½ x + ¼ x

3° ora=½ + ¼ x + ½(½x + ¼ x)

4° ora = ½ x + ¼ x + ½(½x + ¼ x) + ½…

L.: «Da qua viene sempre una frazione del percorso intero che è x e più passa il tempo più rimane una frazione. Dai calcoli sembrerebbe che non ci riesce: si sommano sempre frazioni più piccole del percorso ma senza mai arrivarci. I trattini diventano sempre più piccoli, ma si sommano. Non ci arriverà mai».

Esiste quindi un *senso dell’infinito*? Le nostre analisi continuano in questa direzione e presto pubblicheremo i risultati di questa curiosa ricerca.

Abbiamo presentato in questo capitolo diverse linee di ricerca che stiamo seguendo attualmente o che abbiamo l'intenzione di indagare nel prossimo futuro. Questa complessa panoramica mette in evidenza come ogni volta che si tratta la tematica dell'infinito, si apra un mondo nuovo, tutto da studiare, analizzare e indagare in profondità che fa provare la sensazione, anno dopo anno, di essere solo all'inizio di questo "infinito" percorso. *«L'infinito! Nessun altro problema ha mai scosso così profondamente lo spirito umano; nessuna altra idea ha stimolato così profondamente il suo intelletto; e tuttavia nessun altro concetto ha maggior bisogno di* ***chiarificazione*** *che quello di infinito»* (Hilbert).

Ringraziamenti

I miei più sinceri e calorosi ringraziamenti sono rivolti al Prof. Bruno D'Amore per essere un grande "maestro" profondo, critico, scrupoloso, creativo, costante, disponibile e sensibile. A lui devo l'amore che nutro per la ricerca.

Ringrazio il Prof. Filippo Spagnolo per l'attenzione, i consigli e il supporto prestatomi durante l'intero percorso di questa tesi e le Prof.sse Fulvia Furinghetti e Rosetta Zan per i preziosi suggerimenti forniti.

Ricordo inoltre con affetto e gratitudine le insegnanti di Milano che in questi anni mi hanno dato grandi spunti di riflessione; in particolare: Luigina Cottino, Claudia Gualandi, Carla Nobis, Adriana Ponti e Mirella Ricci.

Un grazie va anche alla traduttrice di questa tesi: Monica Ricco, che è "entrata" in questa complessa tematica, riuscendo nell'arduo compito di tradurre in inglese le misconcezioni degli insegnanti e degli allievi.

Infine, due ringraziamenti personali: il primo è rivolto ai miei genitori per l'amore e l'incoraggiamento che mi hanno costantemente dimostrato in questi anni, a loro devo tutto ciò che sono; il secondo è indirizzato alla mia cara amica Sandra, per essere da sempre il mio più sincero e sicuro rifugio.