Una nuova proposta didattica per l'analisi matematica

A. Drago e R. Vella

Gruppo di Storia della Fisica-Università di Napoli "Federico II"

Sommario

In questo lavoro si mostrerà che il problema sulla didattica dell'analisi è attuale, riportando succintamente un recente dibattito di alcuni studiosi americani. Di fatto lo studio dell'analisi matematica risulta complicato per uno studente delle scuole superiori perchè il concetto fondamentale, quello di limite che utilizza la tecnica dell'$\varepsilon - \delta$, pone lo studente di fronte a definizioni astratte e per nulla intuitive. Inoltre egli si trova di fronte al concetto di infinito introdotto dai quantificatori esistenziale e totale.
Riguardando la storia della matematica si osserva che Cavalieri e Torricelli possono ritenersi i veri fondatori dell'analisi matematica perchè completata anche col teorema inverso. Essi svilupparono questa disciplina matematica basandosi sull'intuizione geometrica; che la rendeva molto comprensibile e facile da apprendere. Allora è logico voler facilitare la comprensione di concetti fondamentali dell'Analisi facendo uso della intuizione geometrica di modo che, fornendo un approccio visivo, tali concetti diventano più semplici. Studiando gli scritti di Cavalieri e Torricelli, siamo riusciti ad evidenziare una equivalenza tra la loro matematica e quella recente di Weyl, la quale si basa sull'uso di un solo quantificatore su numeri decidibili; e che quindi rappresenta oggi un ambito formale ben definito.
Per capire al meglio la portata della nostra nuova proposta didattica, si darà un breve resoconto delle ricerche sulla recentissima "matematica all'inverso", la quale studia gli assiomi necessari per dimostrare un dato teorema, e, quindi, fornisce una gerarchia di assiomi sempre più potenti; cosicchè potremo capire dove viene collocata la matematica di Weyl o, in parallelo, il metodo di Cavalieri. Da ciò otteniamo che quasi tutti i teoremi del biennio universitario di Analisi possono essere dimostrati in queste matematiche. Per cui l'aiuto dato dall'intuizione geometrica può promuovere l'insegnamento delle scuole secondarie a livelli molto alti di conoscenza dell'Analisi.

Dans ce travail on montrera que le problème de la didactique de l'Analyse est actuel, en reportant succinctement un recent débat entre de professeurs américains. En effet, l'étude de l'Analise mathématique resulte compliquée à l'etudiant de l'école supérieure parceque le concept fondamental, celui de limite en utilisant la technique de l'$\varepsilon - \delta$, prèsente de définitions abstraites et pas intuitives. En plus il dort faire face an concept de infini, introduit par les quantificateurs esistentiel et total.
En revisit l'histoire de la mathématique, on observe que Cavalieri et Torricelli douvent *être* considerés les vrais fondateurs de l'Analyse mathématique parcequ'ils l'out completè du théorème inverse. Ils developpèrent cette discipline mathématique en se basant sur l'intuition géométrique;

la quelle rendait cette discipline plus compréhensible et facile à apprendre. Alors, c'est naturel vouloir faciliter la compréhension des concepts fondamentaux de l'Analyse en les basant sur l'intuition géométrique, de telle sorte que, en utilisant un approche visuel, ceux concepts la devient plus faciles. En étudiant les ecrits de Cavalieri et Torricelli, nous avons trouvé une équivalence entre la leur mathématique et celle recente de Weyl, qui se base sur l'emploi d'un seul quantificateur sur les nombres décidables; et qui alor répresent un systeme formal bien défini.
Pour comprendre mieux la portée du notre projet didatique, on donnera un resumé sur le très recente "mathématique au rebours", que etudie les axiomes nécessaires pour démontrer un donné théorème, et, ensuite, fournit une precise hiérarchie de ces axiomes, toujours plus puissants; de sorte que pouvons comprendre où se localise la mathèmatique de Weyl ou, en parallèle, la méthode de Cavalieri. Par celà nous verrons que presque touts les théorèmes de deux premiers ans universitairs d'Analyse peuvent *êntre* démontrés dans ces mathématiques. Ainsi, l'aide donné par l'intuition géométrique peut promouvoir l'enseignament de l'Analyse dans les écoles secendaires à des suveaux très hauts deconnaissance.

In this work we will show that the problem of Analysis' didactic is up-to-date, by reporting briefly a recent discussion among some American professors. Actually, the study of mathematical analysis results difficult for a secondary school student since the basic concept, that of limit, by using the technique of $\varepsilon - \delta$, exposes the student to abstract and not intuitive definitions. Moreover he meets the concept of infinity, introduced by the total and existential quantifiers.
By looking at the history of mathematics again, we observe that Cavalieri and Torricelli have to be considered the very founders of mathematical analysis since they completed et by the inverse theorem too. They developed this mathematical theory by relying upon geometric intuition, which clearly makes it much more comprehensible and easy to learn. It is natural to want make easy the comprehension of the basis concepts of Analysis by appealing to geometric intuition, so that through a visual approach such concepts become simpler. By studying Cavalieri's and Torricelli's works we put in evidence an equivalence between their mathematics and that one recently proposed by Weyl, which is based on the use of just one quantifier on decidable numbers.
Then, to get a sharp appraisal of the import of our didactic proposal, we will sketchy review the very recent "reverse mathematics", which studies the necessary axioms to prove a given theorem; and, which provides an axiom hierarchy; so that we will locate both Weyl's mathematics and, in parallel, Cavalieri's method. We obtain that these mathematics can show almost all Analysis theorems of the first two years University. Hence, the help given by geometrical intuition can promote Analysis teaching in secondary schools at high levels of kuowledge.

1 Il dibattito attuale

Una nuova didattica dell'analisi è in discussione in tutto il mondo, a incominciare dagli USA. Se limitare della didattica alle funzioni più immediate e pratiche è stata materia di discussione tra alcuni matematici americani (Jeff Knisley, Thomas W. Tucker, Howard Swann), sulla rivista "American Mathematical Monthly", vol. 104 [15]. Jeff Knisley osserva che in un normale corso di

laurea si studia la matematica da Leibniz e Newton, ma ignorando i 100 anni che hanno caratterizzato la Matematica moderna (a meno che non si scelga di seguire un corso di storia della matematica).
Infatti occorre ricordare che gran parte della matematica moderna deriva dall'analisi moderna: molte idee in geometria differenziale, statistica e analisi numerica derivano dall'analisi studiata nel secolo XX. D'altra parte l'analisi si è sviluppata maggiormente, rispetto agli altri settori della matematica, per il fatto che è stata molto applicata alla realtà; e proprio per tale vicinanza alla realtà essa interessa di più gli studenti. Il progresso tecnologico dovrebbe quindi essere utilizzato come motivazione allo studio della matematica moderna, e questo tipo di motivazione dovrebbe essere accolto con facilità dagli studenti che non possono dubitare della sua utilità. Per di più questa è forse l'unica via per far sì che i matematici abbiano un contatto con la società che li circonda.
Per Jeff Knisley sarebbe importante costruire un nuovo programma di analisi, introducendo del nuovo nel vecchio, ma senza distruggere la continuità e la coerenza della struttura tradizionale. Le sue idee base sono due: un nuovo concetto di limite e l'introduzione dell'intuizione quando la dimostrazione rigorosa dei teoremi è di difficile comprensione.
Egli innanzitutto osserva che un normale corso di calcolo utilizza diverse nozioni di limite, apparentemente senza legami tra loro: in ogni situazione particolare si usa la definizione di limite più opportuna, senza che in seguito si faccia un tentativo per collegare tutte queste idee di limite in un concetto coerente. La definizione $\epsilon - \delta$ è introdotta con la definizione di linea tangente. I limiti infiniti sono definiti usando ϵ e N sufficientemente grandi. La definizione di integrale usa la norma di una partizione che tende a zero. L'integrazione numerica introduce l'idea di errore limitato. I limiti di successioni sono definiti con il teorema di convergenza monotona. Inoltre l'idea della convergenza in serie di Taylor è sviluppata dalla formula del resto dei polinomi di Taylor. Secondo Jeff Knisley è necessario introdurre e definire il limite in modo tale che tutte le nostre applicazioni di approssimazione e convergenza derivino da un'unico concetto.
Sempre secondo il parere di Jeff Knisley, possiamo capire come si potrebbe usare l'intuizione considerando il caso del teorema del valore medio; il quale nell'analisi classica è conseguenza del teorema del valore estremo (o teorema di Weierstrass: una funzione f(x) continua nell'intervallo chiuso e limitato [a,b] è ivi dotata di minimo e di massimo), senza che tale teorema del valore estremo venga dimostrato autonomamente. Ma intuitivamente il teorema del valore estremo è chiaro: la dimostrazione del teorema del valore estremo segue da quella del teorema di Heine-Borel, e il teorema di Heine-Borel si basa sulla topologia delle linee reali.
Ma tutto ciò è complicato per lo studente. Da qui segue la necessità e la oppurtunità di un approccio intuitivo. Perciò la dimostrazione del teorema del valore medio potrebbe essere presentata con una dimostrazione non rigorosa: potremmo addirittura argomentare che essa è intuitivamente ovvia ed omettere la sua dimostrazione.
Knisley ha così gettato le basi per una riforma della didattica dell'analisi, tale da avvicinare la matematica il più possibile alle esigenze della società di avere molti conoscitori dell'Analisi [15].
Negli anni passati uno di noi (A. D.) ha notato che la tradizionale didattica dell'analisi ha cercato di seguire un progetto, nato coll'analisi rigorosa: trovare definizioni adatte alle operazioni del calcolo differenziale in modo da includere

tutte le funzioni e tutti i funzionali, per quanto eccezionali essi fossero. Ma questo progetto si è rivelato un sogno impossibile; troppe e troppo diverse sono le funzioni cosiddette patologiche. In *Scienza e Metodo* Poincaré dice: "La logica alle volte alimenta mostri. Per mezzo secolo è stata inventata una schiera di funzioni strambe, le quali sembrano fare di tutto per avere la minima somiglianza con le oneste funzioni che sono in uso. Niente continuità; oppure, continuità ma niente derivate, ecc... Prima, quando si inventava una funzione, lo si faceva in vista di qualche uso. Oggi esse sono inventate allo scopo di mostrare che i nostri predecessori erano in errore; ma da esse non ne ricaviamo niente di più" [7].
In tutti i casi l'insieme delle funzioni che si raggiunge con le definizioni anche le più ampie è limitato rispetto all'insieme totale; perché anche oggi, dopo più di cento anni di analisi rigorosa, non c'è definizione generale delle operazioni analitiche che valga per tutte le funzioni. Quindi il restringere il campo delle funzioni non è affatto rinunciatario concettualmente, né è deviante.
Perciò la didattica dell'analisi delle scuole superiori dovrebbe cambiare atteggiamento: non più inseguire, per quel che può, il sogno dell'analisi rigorosa; ma restringersi, dato che lo deve fare in tutti i casi, a studiare un insieme di funzioni delimitato e chiaro (ad es., le sole funzioni continue), lasciando ad un eventuale periodo successivo gli insiemi di funzioni più complicati e particolari (le funzioni discontinue e patologiche). Piuttosto, si tratta di qualificare al meglio la scelta della restrizione sia concettualmente che didatticamente.

2 Le diverse fondazioni del calcolo differenziale

2.1 La matematica costruttiva

Dalle prime decadi dell'800 Cauchy aveva iniziato ad introdurre il "rigore" nell'analisi, mediante la tecnica che poi sarà espressa con l'$\epsilon - \delta$ per definire il concetto di limite. Con essa produsse un formidabile avanzamento mediante molti teoremi sulla convergenza delle serie e delle serie di funzioni. La riforma del rigore come oggi la conosciamo fu completata da Weierstrass e Dedekind, che formalizzarono la teoria dei numeri irrazionali e quindi dei reali, sempre utilizzando la tecnica dell'$\epsilon - \delta$.
E' però importante sottolineare che sin dalla fine del 1800 Du Bois Raymond notò che, nell'usuale definizione di Cauchy del passaggio al limite, l'esperienza di calcolo, effettivamente compiuta con qualche valore di δ molto piccolo, viene estesa improvvisamente a tutti i suoi possibili valori, compreso il valore 0; il quale solamente, benché improprio, corrisponde all'individuare il punto limite. In altri termini, nell'usuale ragionamento proposto da Cauchy l'atto di pensiero che, dentro un intervallo, seleziona il punto limite desiderato (il quale così viene individuato perfettamente, escludendo tutti gli infiniti altri punti possibili attorno a lui) è non operativo, quindi è solo idealistico [14].
Già questa critica faceva pensare che si potessero dare più fondazioni dell'analisi; ma solo all'inizio del 1900 Brouwer ne propose una nuova. Egli volle eliminare l'infinito in atto per restringersi al solo infinito potenziale, essenzialmente al principio di induzione completa; allora il matematico può parlare di infinito, ma come illimitato, non come realtà già ottenuta. Con ciò tutta la matematica diventa molto più limitata di quella classica, a cominciare dall'insieme dei numeri

reali, il quale risulta essere solo numerabile e non della potenza del continuo. Più precisamente si impone la seguente restrizione: l'esistenza di un oggetto matematico è equivalente alla sua costruibilità mediante un algoritmo finitista. In altri termini, nella matematica tradizionale si accetta l'esistenza di un ente matematico senza assicurarne la costruibilità con un algoritmo; questa libertà viene esclusa dalla matematica che oggi si chiama costruttiva.
E' da notare che la matematica costruttiva introduce dei numeri con proprietà diverse da quelle della matematica classica: ad esempio, si consideri il numero $a = 0, a_1a_2a_3a_4...$, dove a_n è uguale a 0 se $2n$ è la somma di due numeri primi, oppure è uguale a 9 se $2n$ non lo è. Oggi non abbiamo un teorema che sappia dirci se quella proprietà vale per tutti i numeri pari o no (così come ha congetturato Goldbach nel Settecento); per tutti i numeri già sperimentati sui computers la proprietà vale, ma non sappiamo se valga per qualsiasi numero intero. Di conseguenza noi conosciamo moltissime cifre a_n, ma non tutte; quindi non conosciamo neanche dove si collochi con precisione il nostro numero sulla retta dei reali; benché di certo esso è molto vicino a zero. Questo tipo di numero è stato chiamato "sfuggente" proprio per questa mancanza di collocazione precisa.
Con ciò il concetto stesso di continuo viene a cambiare. Nella matematica classica i singoli punti si fondono tra loro, perché ognuno è un punto di accumulazione per infinite famiglie di infiniti altri punti; e pur tuttavia noi ci diamo la capacità, con la tecnica $\epsilon - \delta$, di estrarre da questo (fluido) continuo un singolo punto con precisione assoluta. Mentre in matematica costruttiva ogni punto è solo un intervallo, sia pure sempre più riducibile in lunghezza; ma non riducibile, in generale, ad un solo punto (solo in alcuni casi speciali abbiamo anche la possibilità di definire esattamente il numero limite; ad es., quando dimostriamo che esso è un numero intero). Così i numeri reali sono dati solamente come intervalli di approssimazione; quindi, dati due numeri reali qualsiasi a e b, non è decidibile in generale se l'uno, dato con un intervallo è maggiore, uguale o minore dell'altro dato anch'esso con un intervallo (ad esempio se il numero sfuggente precedente è uguale o maggiore di 0).
Questa nuova fondazione è capace di recuperare almeno buona parte della matematica che si usa nella pratica moderna. Ma, essenzialmente per la presenza inevitabile di numeri sfuggenti, la matematica costruttiva non può esprimere tutto ciò che riguarda la intuizione geometrica del continuo: non può decidere in generale, per due numeri dati x e y, se x è maggiore o minore di y, né se x è uguale a y, nè sa trovare i massimi esatti di una funzione, né gli esatti punti intermedi tra due valori dati, né la uniforme continuità di una funzione puntualmente continua su un intervallo chiuso e limitato, né la sua integrabilità [14]. Il che la rende fortemente limitata rispetto alle abitudini concettuali dei matematici (ma, si noti, non a quelle operative, che anzi sono fedelmente rappresentate).

2.2 La matematica di Weyl

Nel 1918 Weyl propose un programma di ricerca sui fondamenti della matematica. Egli voleva restringere i metodi classici che usano l'infinito in atto, ma ammettendo, al contrario di Brouwer, qualche elemento ideale che usasse l'infinito in atto in maniera limitata. Questo programma è stato formalizzato dal 1950 circa e la nuova matematica risulta caratterizzata dalle seguenti pro-

prietà:
1) dato un insieme di numeri razionali o decidibili, si può quantificare su di esso con $\forall$ o $\exists$, ma una sola volta sullo stesso insieme;
2) esiste il minimo estremo superiore solo quando si può dare una sequenza che lo ottiene (cioè una sequenza convergente);
3) vale la logica classica;
4) è rappresentabile matematicamente tutto ciò che l'intuizione geometrica suggerisce (cioè il punto esatto di un massimo, di un minimo o di un valore intermedio di una curva o di un incrocio di curve) [9].
Tutto ciò rende evidente che la problematica della Analisi, portandoci a considerare la sua possibile pluralità di fondazione, diventa una problematica generale di tutta la matematica; la quale ora trova più fondazioni, tra di loro incompatibili. Per uno sguardo più ampio sulle varie fondazioni dell'Analisi si veda l'Appendice.
Quindi la matematica di Weyl può essere utile per la didattica. Ma come caratterizzarla dettagliatamente?

2.3 L'analisi infinitesimale di Cavalieri e la matematica di Weyl

Vogliamo dimostrare che c'è un legame tra la matematica di Weyl e la antica matematica di Cavalieri. Iniziamo ad esporre questa seconda teoria matematica.
Cavalieri aveva ottenuto già nel 1644 (quarant'anni prima di Leibniz e Newton) una teoria dell'analisi, basata solo sull'intuizione geometrica o dei singoli punti, o delle totalità degli elementi razionali; inoltre il suo seguace Torricelli era già riuscito a dare il teorema inverso [18].
Il Cavalieri è noto per il suo metodo: egli suddivideva una figura piana mediante linee parallele ottenendo tanti segmenti (gli indivisibili). Ognuna di tale linee è messa in proporzione con una linea di una figura di area già nota. Se, sulle due figure piane tale sistema di linee parallele intercetta corde uguali o proporzionali, allora egli ne concludeva che anche le totalità delle linee, e cioè le intere aree delle due figure sono uguali o proporzionali. Per figure solide gli indivisibili diventavano le figure piane nelle quali dei piani paralleli tagliavano i solidi in questione.
Per ricomporre l'interezza della figura ai fini del calcolo, Cavalieri indicava la totalità di questi indivisibili con la parola "tutte le linee" ("sicut unus ad unum sic omnes ad omnes"); per lui "tutte le linee" della prima figura sono nella medesima proporzione con "tutte le linee" della seconda. Con questa espressione egli intende designare una precisa grandezza matematica, anche se composta da infiniti elementi. Con questa corrispondenza tra figure omologhe, egli riuscì a dimostrare ad es. che il rapporto tra il volume di un prisma e quello di una piramide, entrambi a base quadrata, è uguale ad $\frac{1}{3}$.
Questa proposizione rappresenta un risultato molto importante nell'opera di Cavalieri: è l'equivalente esatto della formula del calcolo integrale:

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3}a^3 \qquad \left(\int_0^a x^n dx = \frac{1}{n+1}a^{n+1}\right).$$

Quindi Cavalieri pensava la sua figura costituita "in atto" da infiniti elementi semplici (il solido da superfici e la superficie da linee) con i quali operare più

facilmente. Questa idea ha introdotto l'infinito in atto, che è risultato essere il concetto più importante e pericoloso della matematica. Cavalieri è cosciente del passo cruciale che egli compie nella storia della matematica: dall'infinito solo potenziale degli antichi empirici, i quali vedevano l'infinito in atto come nostra incapacità e negatività, egli passa con decisione all'uso dell'infinito in atto ma attraverso la sola intuizione geometrica. Egli cioè lo dà attraverso solo alcune sue proprietà. Lo stesso Cavalieri per difendersi dalle obiezioni ricevute, fa notare che di infiniti (in atto) ce ne sono due, uno "assoluto" e uno "relativo"; quest'ultimo è per lui un infinito rispetto solamente ad alcune proprietà e quindi è maneggiabile secondo certe regole.
E' importante notare che in passato si è interpretato l'"omnes" di Cavalieri (anche nella frase latina precedente) con le operazioni matematiche $\sum$ o $\int$; studi moderni hanno concordato nell'escludere che Cavalieri potesse pensare in questi termini [11]. Invece secondo uno di noi [13] è coerente interpretare l'"omnes" in termini esattamente logici, così come dice quella parola; e cioè semplicemente col quantificatore totale $\forall$, applicato ad una sequenza di numeri razionali. Tutto il metodo di Cavalieri (riassunto dalla frase precedente) può essere tradotto con la formula seguente: la proposizione: $a_1 : b_1 = ... = a_n : b_n ...$ comporta l'espressione formale con quantificatori: $a_1 : b_1 = \forall a_i : \forall b_i$ [14].
Ciò è confermato dal fatto che Cavalieri distingue i due significati di $\forall$, "tutti" e "ogni". Infatti l'interpretazione vale anche per il secondo metodo dato da Cavalieri; dove, invece delle parola "omnes" egli usa la parola "qualsiasi", che noi sappiamo essere equivalente in logica matematica a $\forall$. Inoltre si consideri il celebre teorema di Cavalieri: "Data una corda di una curva, esiste un punto della curva la cui tangente è parallela alla corda data". Di nuovo c'è l'uso di un solo quantificatore, quello esistenziale, che si può ottenere da quello totale con una negazione: $\neg \forall x F(x) = \exists x \neg F(x)$.
Certamente l'uso di un quantificatore implica l'infinito in atto. Ma il considerare un solo quantificatore sui razionali ne limita l'uso; e ciò corrisponde a ciò che fa Cavalieri, un infinito in atto ad un minimo livello, il più intuitivo di tutti, perché appoggiato sull'intuizione suggerita da una teoria matematica, come la geometria, che fino ad allora si era basata solo su operazioni precise (riga e compasso).

2.4 Il teorema inverso del Torricelli

Gli sviluppi più avanzati del metodo degli indivisibili furono ottenuti da E. Torricelli. Con lui il metodo di Cavalieri, pur nelle imperfezioni del suo tempo, fu completato come tecnica e anche come teoria, avendo lui ottenuto il teorema inverso del calcolo differenziale (cioè: la derivata e l'integrale sono definizioni inverse l'una dell'altra). Torricelli diede una dimostrazione del teorema inverso non solo geometrica, ma anche fisica.
Rappresentiamo lo spazio s in funzione del tempo t con un diagramma: l'asse orizzontale è t, e quello verticale (diretto verso il basso) è s. Il diagramma di fig. 1. ci dà la traiettoria di un proiettile lanciato orizzontalmente dal punto $O = (0, 0)$, con velocità 1. Considerato un punto materiale che si muova sopra una retta con una legge qualsiasi, egli stabilì che lo spazio s descritto dal punto fra gli istanti t_1, t_2 è dato dall'area compresa fra la curva, l'asse t e le ordinate nei punti t_1, t_2. Questo perché egli dava come concetto basilare la velocità:

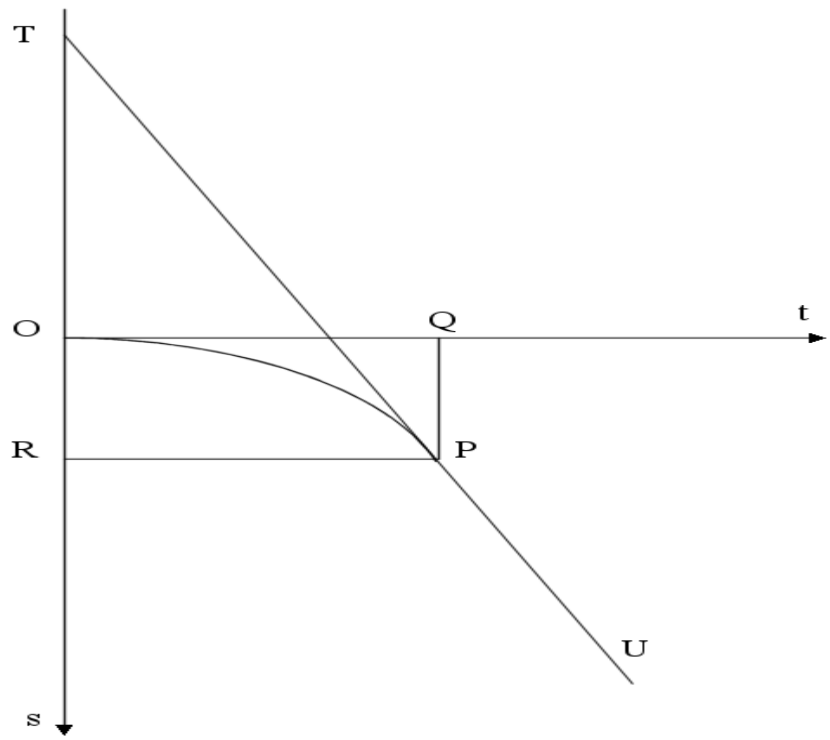

Figura 1: Traiettoria di un proiettile lanciato orizzontalmente dal punto $O = (0,0)$, con velocità 1.

quindi il problema era $s(t)$. Con la scrittura moderna è

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v dt.$$

Per determinare la velocità di un proiettile nel punto $P = (t, s)$ di una traiettoria $s(t)$ data (parabola), Torricelli suppose che nell'istante t cessa la forza che sollecita il punto mobile verso il basso; ed allora il punto descriverà la tangente PU di moto uniforme, con la velocità che ha acquistato in P; a Torricelli è chiaro che tale velocità è la risultante della velocità verticale in P, ancora incognita, e della velocità orizzontale uguale ad 1. Immaginiamo di invertire la velocità del punto mobile lungo la tangente: il punto descriverà il tratto PT (sottotangente in P) nel tempo t che il mobile ha impiegato a portarsi da O in P (perché la componente orizzontale della velocità ora è -1)[fig. 1.].
Dunque la velocità del punto mobile in P è $\frac{PT}{RP}$, mentre la componente verticale di essa è $\frac{RT}{RP}$, essendo $RP = t$. Ora , se riguardiamo di nuovo la curva come rappresentante lo spazio $s = QP$ in funzione del tempo $t = RP$, questa componente verticale è proprio la velocità v, nell'istante t, del mobile che percorre l'asse s con legge assegnata. Infine

$$v = \frac{RT}{RP}$$

ossia, con la moderna notazione,

$$v = \frac{ds}{dt} = \tan \widehat{RPT}[16].$$

Torricelli notò il carattere inverso delle due operazioni precedenti:
$-$*quadratura* (o integrazione) mediante la quale si calcola lo spazio quando sia nota la velocità;
$-$*costruzione della tangente* (o derivazione) mediante la quale si calcola la velocità quando sia noto lo spazio [18].
Non si è sicuri se Torricelli abbia apprezzato l'importanza di questo carattere reciproco perché è morto prima di poter rendere il suo lavoro organico. (Detto per inciso, questo passaggio esprime, nelle parole di Torricelli, una versione del principio di inerzia; che può essere dimostrato essere in corrispondenza alla matematica di Weyl: "E' chiaro che, senza l'attrazione di gravità, il mobile procederebbe di moto rettilineo ed equabile lungo la linea di direzione AB").
Comunque i tempi non furono maturi per cogliere i frutti che le due relazioni suddette hanno dato venti o trent'anni dopo. Ma tutto ciò è sufficiente per concludere che con Torricelli il calcolo differenziale non è un calcolo ad uno stadio infantile, così come dicono di solito gli storici perché essi lo vedono alla luce della successiva analisi infinitesimale di Leibniz e Newton. Invece esso era una teoria in sè completa; infatti la fondazione del calcolo differenziale viene di solito attribuita a Newton e Leibniz. Ma si è dimostrato che essa deve essere ricondotta a Cavalieri e Torricelli, che si basarono sulla intuizione geometrica; lo si conclude anche rinterpretandoli secondo la matematica di Weyl. Quindi l'analisi infinitesimale non è nata con la filosofia di Leibniz, né con la intuizione di Newton del movimento meccanico, ma con la logica dell'"omnes lineae" sostenuta dalla intuizione geometrica; essa ha permesso a Cavalieri di inventare un calcolo differenziale che introduceva per la prima volta l'infinito in atto nella matematica. Cioè essa rappresenta semplicemente una matematica meno potente di quella di Leibniz e Newton, così come ci farà vedere la reverse mathematics; ma del tutto adeguata ai contenuti essenziali dell'Analisi.

2.5 La matematica all'inverso

Per capire meglio quale sia la potenza della matematica di Weyl e precisare la sua differenza dalla matematica tradizionale si può introdurre la matematica all'inverso. Essa si è sviluppata in questi ultimi cinquant'anni in USA e affronta il problema principale della matematica, la sua fondazione, in modo del tutto diverso da come lo si è affrontato e lo si affronta tutt'oggi.
Fra le diverse posizioni sui fondamenti della matematica, alcune (ad es. quella dei moderni seguaci della teoria degli insiemi) forniscono assiomi sempre più potenti ma sempre meno intuitivi; mentre altre (vedi ad esempio i costruttivi) propongono di arroccarci in una piccola fortezza di assiomi "sicuri", che però sono troppo deboli per poter risolvere molti problemi matematici che sembrano naturali. Ma c'è un'altra posizione: se si abbandona la visione platonica (che ritiene che la verità matematica è catturata anche da un singolo sistema assiomatico) il matematico può accettare (senza chiedersi troppo) molti sistemi (come ad es. le varie geometrie non euclidee), come dati storicamente; e invece può porre l'attenzione sui singoli assiomi: ogni assioma è utile, e a volte necessario, per una certa dimostrazione, ma può essere superfluo per un altro risultato.

Abbiamo così un atteggiamento "relativistico": non ci basiamo più su verità assolute, ma ci limitiamo a stabilire le relazioni esatte tra ogni enunciato di una tesi e le ipotesi corrispondenti, cercando quindi di precisare la matematica più adatta per risolvere i problemi con cui abbiamo a che fare. Quindi il problema si sposta dalla "verità" degli assiomi alla valutazione, la più precisa possibile, degli assiomi necessari a trovare la dimostrazione di un certo teorema. Il programma che ha tale obbiettivo è noto col nome di "reverse mathematics" (matematica all'inverso). La sua domanda fondamentale è: "Dato un teorema τ della matematica (ordinaria), quale sottoinsieme di assiomi di esistenza in Z_2 è necessario e sufficiente per dimostrare τ?" Quindi la reverse mathematics è un programma di ricerca: cerca quali sono gli assiomi necessari minimi (dove per minimalità si riferisce alle assunzioni di esistenza degli insiemi) per dimostrare i teoremi di matematica ordinaria.
Essa ha scoperto che la risposta è molto semplice: la matematica usuale è ripetibile nella aritmetica del primo ordine, nella quale ci sono solo 5 sottosistemi di assiomi, che sono noti come RCA_0, WKL_0, ACA_0, ATR_0, $\Pi_1 - CA_0$. Ognuno di questi sottosistemi è strettamente più forte di quello che lo precede; e il più forte tra loro, $\Pi_1 - CA_0$, è molto più debole anche di Z_2 e ancor di più della teoria degli insiemi ZFC [14] [22]. Noi non riporteremo tutti i sottosistemi ma solo quelli che necessitano per la matematica di Weyl; infatti già Feferman [10] ha dimostrato che la matematica di Weyl si colloca in ACA_0, che è al terzo livello. Riportiamo quasi fedelmente da G. Lolli [20], A. Marcone [19], e F.R. Drake [21] le caratteristiche e i teoremi di questi sottosistemi fino al terzo:

$$Assioma\ di\ comprensione\ ricorsiva : RCA_0$$

(Detto intuitivamente $\exists$ l'insiems di tutti gli elementi della matematica ricorsiva che godono una certa proprietà. Quindi le formule ammesse sono del tipo Δ_1^0, cioè scrivibili con un solo quantificatore numerico, sia nella forma universale sia in quella esistenziale; vi si dimostra la esistenza degli insiemi ricorsivi). Dal punto di vista matematico, si possono svolgere i primi elementi della teoria delle funzioni reali di variabile reale (si dimostra il teorema del valore medio per le funzioni continue) e di quelle delle strutture algebriche numerabili.

$$Lemma\ debole\ di\ Konig : WKL_0$$

(Detto intuitivamente ogni albero binario, cioè di sequenze di 0 e di 1, infinito ma a diramazioni finite, ha un ramo infinito. Questo assioma è un principio che permette certe forme di ragionamento per induzione, che sono tipiche di alcune argomentazioni logiche). Vi si sviluppa una gran parte della teoria delle funzioni e anche la teoria degli ideali per le strutture algebriche. Con WKL_0 si dimostrano molti teoremi importanti che non erano dimostrabili in RCA_0, ad esempio il teorema di Heine-Borel (ogni ricoprimento dell'intervallo unitario chiuso, costituito da intervalli aperti, ha un sotto ricoprimento finito). Inoltre in WKL_0 si sviluppa agevolmente la teoria dell'integrazione di Riemann e la teoria dell'equazione differenziale di Peano. Dal punto di vista di una teoria dimostrativa tradizionale, ambedue, RCA_0 e WKL_0 sono tanto deboli quanto la "aritmetica primitiva ricorsiva" (che di solito è considerata un sistema formale adatto a rappresentare quello che Hilbert chiamava il "metodo finitista"). Se si usasse il KL non debole (per arbitrari alberi a ramificazione finita) si passerebbe al livello assiomatico successivo.

La teoria WKL_0 è equivalente a ciascuno dei seguenti enunciati e anche ad Heine-Borel, tra loro equivalenti, relativi a un intervallo unitario I:
(1) Ogni campo numerabile ha chiusura algebrica unica ;
(2) Ogni campo formalmente reale ha chiusura reale ;
(3) Ogni anello numerabile commutativo ha un ideale primo ;
(4) Ogni funzione continua sull'intervallo unitario chiuso è limitata;
(5) Ogni funzione continua sull'intervallo unitario chiuso è uniformemente continua;
(6) Ogni funzione continua sull'intervallo unitario chiuso è integrabile secondo Riemann;
(7) Ogni funzione continua sull'intervallo unitario chiuso ha un massimo;
(8) Il teorema (di Cauchy-Peano) sull'esistenza locale di soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie;

Assioma di comprensione aritmetico : ACA_0

(Detto intuitivamente:$\exists$ l'insieme dei numeri dell'aritmetica di Peano che godono una certa proprietà. O anche, il sistema ACA_0 consiste di RCA_0 più lo schema di comprensione aritmetico

$$\exists X \forall n(n \in X \longleftrightarrow \varphi(n))$$

dove $\varphi(n)$ è aritmetica e X non deve considerarsi indipendentemente da $\varphi(n)$). Qui si ammettono formule con un numero qualunque di quantificatori, purché tutti su numeri interi. Ogni esempio aritmetico di schema induttivo è dimostrabile in ACA_0, che è un'estensione conservativa dell'aritmetica del primo ordine di Peano, PA; che può essere pensata come PRA più lo schema di induzione per tutte le formule aritmetiche. In questa teoria si può trattare la nozione di convergenza sequenziale, e in pratica la cosiddetta analisi predicativa alla Weyl. Tra i teoremi che si collocano in tale assiomatica citiamo il teorema sequenziale di Bolzano-Weierstrass (ogni successione limitata di numeri reali ha una estratta convergente).
La teoria ACA_0 è equivalente a ciascuno dei seguenti enunciati:
(1) Ogni spazio vettoriale numerabile ammette una base;
(2) Ogni campo numerabile ha una base di trascendenza;
(3) Ogni gruppo abeliano numerabile ha un'unica chiusura divisibile;
(4) Ogni anello commutativo numerabile ha un ideale massimale.

3 La proposta didattica

Una didattica dell'analisi alla Cavalieri e Torricelli, ripensata con la matematica di Weyl, ha il grande vantaggio di dare un chiaro equilibrio tra intuizione e formalismo. Né si può obbiettare all'uso dell'intuizione. E' ormai chiaro che il formalismo non potrà mai includere tutta la nostra comprensione della matematica: il teorema di Goedel lo impedisce. Quindi ci dovrà essere sempre una componente intuitiva nella nostra comprensione, tanto più nello studente che si avvicina per la prima volta ad una teoria astratta come l'analisi.
Alla luce del dibattito sull'Analisi all'inizio e del contributo di S. Feferman che dirige l'attenzione sull'onnipresente impiego dell'intuizione matematica al livello quotidiano della ricerca, dell'insegnamento e dello sviluppo della matematica [7],

il programma che vorremmo introdurre risulta molto attuale. Inoltre vediamo le idee con le quali potrebbe essere proposto. Se si segue Cavalieri e ci si restringe ad es. alle funzioni continue, si rendono i problemi da affrontare più semplici e facilmente acquisibili dagli studenti; e concettualmente e per i fondamenti della matematica, si fa un passo in più del solito, perchè si chiarisce l'uso della logica matematica classica nel passaggio all'infinito in atto.
La definizione di numero reale è quella che dà Dedekind, (che ripete esattamente il metodo di Cavalieri), richiedendo l'esistenza di un elemento separatore tra numeri razionali. Inoltre possiamo rinterpretare alla Weyl l'operazione di derivata e di integrale, basandole sulla intuizione geometrica su numeri razionali. Inoltre nella matematica di Weyl è corretta l'intuizione del singolo punto; allora le operazioni di massimo e di minimo sulle curve sono assicurate dalla intuizione geometrica dei punti precisi che li rappresentano. Inoltre i rapporti incrementali danno degli intervalli il cui punto limite esiste, perché ciò è intuitivo geometricamente: e questo punto determina la derivata alla curva. Il concetto di integrale è quello più semplice in termini intuitivi: le "omnes lineae" di Cavalieri.
Il concetto di limite si può sempre definire con la tecnica dell' $\epsilon - \delta$. In matematica rigorosa la sequenza dei numeri non viene precisata; essa può essere composta anche da numeri reali non calcolabili; inoltre il δ può essere solo ipotizzato, senza essere calcolato. In matematica costruttiva occorre correggere costruttivamente questa definizione di limite chiedendo che la sequenza sia di numeri calcolabili e che il δ sia effettivamente calcolato. Ma allora questa tecnica non ottiene in generale un punto limite, ma solo un intervallo di approssimazione. Invece in matematica di Weyl si può affermare, in più della matematica costruttiva, che questo punto limite esiste, e quindi tutte le proprietà geometriche vengono rappresentate.
Infine l'elenco dei teoremi equivalenti ai sottosistemi WKL_0 e ACA_0 della matematica all'inverso ci fa notare tutti i teoremi che potrebbero essere espressi con questi assiomi pur di trovare una maniera chiara di esprimerli in $\epsilon - \delta$ e non con gli assiomi WKL_0 e ACA_0. Si nota che addirittura la didattica dell'Analisi I e Analisi II è quasi tutta inclusa; il che sovrabbonda largamente le necessità della didattica delle scuole superiori; e permette di rendere l'analisi una teoria matematica diffondibile a tutte le persone di cultura, e non più un linguaggio da specialisti raffinati.
Se poi si vuole, si può anche elencare RCA, WKL_0, ACA_0 e indicare la gradualità di idealizzazione che essi comportano; in modo che gli studenti si rendano conto di quali atti di idealizzazione essi sono invitati a fare quando studiano gli enti della matematica.

4 Il teorema del valore medio secondo la nuova didattica

Per essere più precisi, esaminiamo un particolare teorema.
Nella tradizionale didattica dell'analisi il teorema del valore medio ha un ruolo cruciale, perché impegna
1) l'insegnante, che qui deve decidere le sue tecniche dimostrative
2) il discente, che qui deve capire il rapporto tra tecniche di ragionamento e intuizione.

Si noti che questo è proprio il teorema altrimenti detto di Cavalieri (o di Lagrange).
Enunciamo il teorema del valor medio: "Se f(x) è una funzione continua nell'intervallo [a,b] e derivabile nei punti interni, esiste un punto ξ interno a tale intervallo per il quale si ha:

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)". \quad (1)$$

Osserviamo che se è f(b)=f(a), riesce $f'(\xi) = 0$; sussiste dunque il teorema di Rolle: "Se f(x) è una funzione continua nell'intervallo [a,b] e derivabile nei punti interni, che assume nei punti a e b lo stesso valore, esiste un punto ξ interno a tale intervallo nel quale la derivata prima di f(x) assume il valore zero" [3].
Possiamo avanzare varie proposte per studiare tale teorema in modo differente. Considerare che la (1) esprime semplicemente il parallelismo tra la corda AB (la "regula" di Cavalieri) e la tangente alla curva nel punto X di ascissa ξ. Cavalieri aveva enunciato questo teorema nella *Proposizione I del Libro I della "Geometria"*, ed aveva dato una dimostrazione di carattere geometrico di tipo intuitivo, come riportato da G. Cellini [5].
Senza rifarsi a Cavalieri, anche molti matematici moderni abbandonano le dimostrazioni rigorose "classiche" del teorema e preferiscono un approccio più semplice. Ciò è conseguenza delle sollecitazioni che provengono da una nuova pratica della matematica che si sta velocemente sviluppando: il calcolo mediante computer. Proprio perché il computer può compiere solo calcoli effettivi, esso ha bisogno di definizioni e teoremi più semplici di quelli rigorosi.
Ricordando che nella matematica all'inverso la matematica di Weyl si colloca poco sopra la matematica costruttiva, come sottosistema corrispondente a ACA_0, possiamo studiare in quest'ultimo il teorema del valore medio. Procedendo come nell'analisi classica, il teorema del valore medio ha bisogno del teorema di Weierstrass ("Se f è continua in un intervallo chiuso e limitato (compatto) [a,b] allora f è dotata di massimo e di minimo; si ha cioè $m \leq f(x) \leq M \;\; \forall x \in [a, b]$ e inoltre, esistono x'(punto di minimo assoluto), x" (punto di massimo assoluto) tali che f(x')=m, f(x")=M"). Notiamo che la dimostrazione di quest'ultimo richiede l'assioma ACA_0 che è il massimo assioma della teoria di Weyl. Ma la matematica di Weyl comporta solo l'uso di un quantificatore; il che può essere usato direttamente, dicendo che le proprietà del continuo permettono l'individuazione del punto cercato dal teorema; oppure indirettamente dopo aver compiuto dei calcoli approssimati (rapporti incrementali).
Nel libro di A. Alvino, G. Trombetti [23], "Elementi di matematica I" a pag. 356 si afferma che la loro dimostrazione di quest'ultimo teorema ha carattere "costruttivo" in quanto si fornisce un algoritmo utile per determinare il minimo (oltre che il massimo) di f. In realtà questo algoritmo presuppone l'esistenza di quel minimo, che in generale non può essere stabilito costruttivamente. Infatti si può notare che nella dimostrazione più semplice del teorema di Weierstrass (suddividendo l'intervallo a metà e poi scegliendo la metà con infiniti punti, e così via) viene sempre utilizzato il principio del tertium non datur per un insieme infinito: il che non vale in matematica costruttiva. Inoltre si può vedere anche con quanto dice il libro di Herbert Meschkowski (a pag. 79) [24], che il procedimento di inserzione degli intervalli non è per nulla costruttivo.
Chiamiamo un numero naturale, n, un "numero di Goldbach", se il numero pari 2n può essere scritto come somma di due numeri primi. Secondo la congettura di Goldbach tutti i numeri naturali hanno questa proprietà; ma questa congettura

non è stata ancora dimostrata né si è trovato un contro esempio. Consideriamo allora r_ν ($\nu \leq 1, 2, ...$), la successione dei numeri razionali compresi tra 0 e 1 ($0 \leq \frac{p}{q} < 1$) ordinati secondo denominatori crescenti in tal modo:

$$numero\ razionale\ \ 0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{4}...$$

$$"numero"\ \ 1\ 2\ 3\ 4\ 5...$$

Quindi $r_1 = 0$, $r_2 = \frac{1}{2}$ ecc. Definiamo allora una successione di numeri, a_n, mediante la regola seguente: $a_n = 2$ se tutti i numeri naturali ν, con $\nu \leq n$, sono numeri di Goldbach; $a_n = r_n$ nel caso opposto. Ora se la congettura di Goldbach fosse dimostrata vera, allora si avrebbe per tutti gli n: $a_n = 2$. Per questa successione non c'è difficoltà di assegnare un'appropriata intersezione per intervalli. Se però la congettura di Goldbach è falsa, e 2N è il più piccolo numero pari, che non è decomponibile additivamente in due numeri primi, allora, per la nostra definizione, sono uguali a 2 soltanto i termini a_n (in numero finito) della nostra successione per i quali $n < N$. Per gli altri si ha che $a_n = r_n$ per $n \geq N$. In questo ultimo caso ogni punto dell'intervallo [0,1] sarebbe punto di accumulazione della successione a_n, perché di tale proprietà gode r_n e a_n differisce da r_n solo per un numero finito di n. Si ha certamente che $0 < a_n \leq 2$. Adesso consideriamo l'affermazione che o nell'intervallo [0,1] o nell'intervallo [1,2] giacciono infiniti numeri della successione. Se la congettura è vera, dobbiamo scegliere l'intervallo di destra, altrimenti quello di sinistra; ciò però non può essere deciso effettivamente allo stato attuale delle cose. Quindi per la successione a_n non può essere assegnata effettivamente una intersezione di intervalli [24].
In generale ricordiamo che invece una delle proposizioni fondamentali della matematica di Weyl è che il minimo estremo superiore esiste purché si possa dare una sequenza che lo ottiene. E' questa sequenza (non effettiva) che viene ottenuta nella dimostrazione del libro di Alvino e Trombetti; quindi essa non è costruttiva, ma è ottenibile solo nella matematica di Weyl.

5 Una proposta didattica basata tutta sull'intuizione geometrica

A questo punto possiamo avanzare una prima proposta didattica, basata tutta sull'intuizione geometrica. Il che illumina una capacità che di fatto viene impiegata dagli studenti molto spesso, ma oscuramente. In questa proposta si dà per legittimo che tutto ciò che l'intuizione geometrica suggerisce (il punto esatto di un massimo, di un minimo o di un valore intermedio di una curva o di un incrocio di curve) è rappresentabile matematicamente. Così si può avere il concetto di derivata di una funzione affermando che i rapporti incrementali di una funzione, rappresentata da una curva continua, danno degli intervalli il cui punto limite esiste, perché intuitivo geometricamente: e questo punto determina la tangente, cioè la derivata della curva in quel punto. Anche il concetto di integrale si può ottenere intuitivamente; basta considerare la tecnica delle "omnes linee" di Cavalieri e il suo principio: "Come uno ad uno, così tutti a tutti". Quindi si può definire l'integrale ricorrendo alla sua origine storica, cioè al modo cavaleriano, così come è già stato spiegato nel paragrafo 2.3.
Con questo nuovo approccio i massimi e minimi su un'infinità di numeri sono

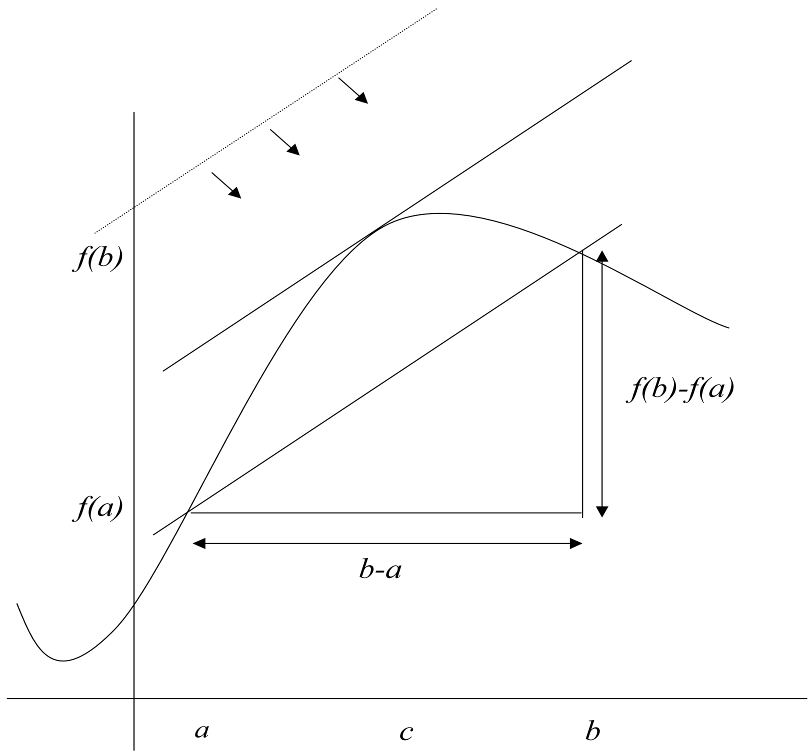

Figura 2: Illustrazione del metodo geometrico per il teorema di Lagrange.

immediati e molti teoremi di analisi possono essere dimostrati intuitivamente senza difficoltà. Ad esempio il teorema della media, già indicato nel paragrafo 4.
Come esempio di una dimostrazione dell'approccio intuitivo proponiamo il teorema del valore medio sviluppato da Howard Swann [1], il quale enuncia il teorema così: "Se f(x) è continua in [a,b] ed ha derivate in (a,b), allora esiste qualche punto c, $a < c < b$, tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = pendenza\ della\ linea\ per\ (a, f(a))\ e\ (b, f(b))$$

Dimostrazione.
Intuitivamente, l'ipotesi del teorema significa che il grafico di f(x) è regolare tra (a,f(a)) e (b,f(b)), e presumibilmente non ha cuspidi poiché f è derivabile. Se il grafico di f(x) non è una linea retta, alcuni dei grafici saranno al di sopra della linea tra (a,f(a)) e (b,f(b)) o al di sotto. Supponiamo che il grafico sia al di sopra della linea. Immaginiamo una linea che è parallela alla linea tra (a,f(a)) e (b,f(b)) ma al di sopra del grafico. Muoviamola in basso, tenendola parallela alla linea tra (a,f(a)) e (b,f(b)). Poiché non ci sono cuspidi nel grafico, quando la linea tocca per la prima volta il grafico nel punto (c,f(c)), allora sarà la tangente al grafico in tale punto. Così, se è valida la nostra definizione di derivata (come la pendenza di una linea che è tangente a un grafico in(c,f(c))), la pendenza di queste linea tangente sarà f'(c). Ma poiché la linea è parallela

alla linea tra (a,f(a)) e (b,f(b)), essa avrà la stessa pendenza di questa linea, cioè $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Un argomento simile vale se alcuni grafici sono al di sotto la linea.
E' interessante soffermarsi anche sul teorema fondamentale del calcolo integrale. Il concetto di integrale è basato in Torricelli sull'idea del grafico velocità tempo, nel quale la distanza totale percorsa (s) è rappresentata dall'area sotto la curva. Allora, come se l'area fosse concepita dalla somma degli indivisibili secondo ordinate. Per moti uniformemente accelerati il grafico è la linea retta ($v \propto t$) e $s = \frac{vt}{2}$, dove v è la velocità raggiunta dopo un intervallo di tempo t (nel grafico la linea retta è la diagonale del rettangolo di base v e altezza t)[2]. Oggigiorno in un qualsiasi corso di analisi matematica si elencano, normalmente, tre aspetti da far tenere ben presenti a chi impara questo teorema. Per una funzione f di una sola variabile si ha:
1) l'integrale di f su un intervallo [a,b] può essere valutato usando la primitiva F di f, che è: $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$;
2) con piccole restrizioni f ha ovunque una primitiva;
3) una particolare primitiva F di f può essere visualizzata come l'area variabile sotto il grafico di f. Altrimenti detto: f misura la velocità con cui cambia l'area F sotto questo grafico. In simboli: $\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)dx = f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$ [6].
Quindi quest'ultimo punto non è altro che l'idea di Torricelli.
Però si può obiettare a questa proposta che essa fa perdere quasi del tutto il tecnicismo dell'analisi, che viene così affidata alla sola intuizione geometrica, ora non più di gente esperta come Cavalieri e Torricelli, ma di semplici studenti, i quali facilmente potrebbero cadere in qui pro quo. Perciò avanziamo una seconda proposta.

6 Una proposta didattica basata sull'$\epsilon - \delta$

Ricordiamo la definizione di limite dell'analisi classica: ≪Sia f(x) una funzione reale definita nell'intervallo (a,b); detto x_0 un punto di tale intervallo, condizione necessaria e sufficiente affinché sia: $\lim_{x->x_0}(x) = l$ è che, comunque si prenda una quantità positiva ϵ, se ne possa trovare un'altra δ tale che per $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, riesca: $|f(x) - l| < \epsilon$ ≫ [3]. Si osservi che qui
1)la funzione non è precisata;
2)la sequenza dei numeri suoi valori può essere composta anche da reali non calcolabili;
3)il δ è solo ipotizzato, senza essere calcolato effettivamente;
4) il limite è ottenuto dalla serie di intervalli $|x - x_0|$, così determinati ma mai schiacciabili in un solo punto, estraendo un punto singolo senza spiegazione.
D'altra parte notiamo che nella matematica costruttiva la definizione di limite è diversa, perché esprime un processo di approssimazione effettiva; per cui
1) tutti i numeri della serie sono razionali o costruttivi (ottenuti con algoritmi effettivi);
2)la loro sequenza è generata effettivamente;
3) pure il δ deve essere calcolato effettivamente;
4) il risultato non necessariamente è un singolo numero, perché in matematica costruttiva con tale tecnica si ottiene, in generale, solamente un intervallo di approssimazione.
Nella matematica di Weyl, in cui ora ci poniamo, si può ripetere questa defi-

nizione costruttiva, ma in più si afferma che si può (passo 3) dare il δ senza calcolarlo, ma ciò è poco interessante, perchè ci lascia con intervalli finali e quindi senza le proprietà geometriche; o (passo 4) il risultato può ben essere un singolo numero, cioè il punto limite esiste, poiché si può utilizzare una delle proprietà caratteristiche di questa matematica: si ammette un solo quantificatore (qui quello esistenziale) su un insieme di elementi infinito [14].
Quindi con questa nuova definizione di "limite alla Weyl" si possono definire opportunamente i reali e le operazioni di derivata e di integrale, poiché tutti questi concetti si basano sul concetto di limite $\epsilon - \delta$.
Incominciamo con i *numeri reali*. Consideriamo la definizione di Dedekind; la quale effettua un taglio su un segmento di retta rappresentativa di numeri razionali in due insiemi A e B: in modo tale che ogni elemento a, appartenente ad A, sia minore di ogni elemento b, appartenente a B; dopo di che, si afferma l'esistenza dell'elemento di separazione, che è o un numero razionale, cioè un elemento noto, o irrazionale, cioè un elemento nuovo rispetto ai razionali [14]. Ebbene questa definizione è tipica della matematica di Weyl, perché i razionali sono numeri effettivi e la esistenza del "taglio" significa proprio l'uso di un quantificatore su un insieme di numeri effettivi.
Ovviamente possiamo definire i reali anche con la tecnica $\epsilon - \delta$ di Cauchy, pur di intenderla come detto sopra. C'è solo da tenere presente che non otteniamo più il campo dei reali classici, ma ci siamo ristretti al campo dei reali costruttivi più quelli ottenibili nella matematica di Weyl. Il che è riduttivo, ma è ampiamente sufficiente per la pratica, almeno quella dei primi anni dell'Università. E poiché per le scuole medie-superiori si studiano funzioni continue (o a tratti continue) tale piccola restrizione non è affatto limitativa.
Passiamo ora al concetto di *derivata*. Sia f(x) una funzione reale definita nell'intervallo (a,b). Se x e x_0 sono punti di (a,b) e se esiste ed è finito il $\lim_{x->x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, ad esso si da il nome di derivata della funzione f(x) nel punto x_0. Anche questo concetto è un limite $\epsilon - \delta$ che può ben essere ripetuto nella matematica di Weyl, con le restrizioni sui passi 1) e 2).
Come definiamo l'*integrale* in matematica di Weyl? Dato che la continuità implica la continuità uniforme della funzione, allora basta calcolare le s e le S e poi in un modo qualsiasi far tendere a zero il massimo in una maniera qualsiasi di fare la partizione purché i punti siano effettivi; questa partizione può essere fatta in un modo standard; ad esempio, dividere l'intervallo in 2, 4, 8, 16, 32, ... ecc. parti, in modo da avere tutti numeri razionali, e poi fare il limite per $n- > \infty$ usando un quantificatore per ottenere il risultato esatto. Si possono allora calcolare gli integrali dell'area sottesa dalle curve più semplici (diagonale, parabola, ecc.) e poi parlare dell'integrale in generale.
Risolvendo con semplicità i concetti di derivate e integrale, il loro uso viene grandemente facilitato e può diventare del tutto familiare allo studente. Tanto da potere insegniare le corrispondenze come già calcolate (così come si fa anche all'università) tra le funzioni più usuali, le loro derivate e i loro integrali.
Con queste corrispondenze possiamo allora avanzare ulteriormente: presentare e risolvere le equazioni differenziali più facili, del tipo f'(x)=f(x) e f"(x)=f(x), che sono molto usate e basilari per lo studio della fisica e della biologia.

$$f' - f = 0 \Rightarrow \int \frac{df}{f} = \int dx \Rightarrow \log f(x) = x + k \Rightarrow f(x) = c \exp^x$$

$$f' + f = 0 \Rightarrow \int \frac{df}{f} = -\int dx \Rightarrow \log f(x) = -x + k \Rightarrow f(x) = c\exp^{-x}$$

E qui ci sono tanti esempi di accrescimento esponenziale (ad esempio una popolazione che si riproduce) o di decadimento esponenziale(ad esempio il decadimento radioattivo). Inoltre possiamo introdurre la equazione differenziale di secondo ordine e risolverla tentativamente senza difficoltà:

$$f'' + f = 0 \Rightarrow f(x) = (c_1 + c_2)\cos x + i(c_1 - c_2)\sin x$$

$$f'' - f = 0 \Rightarrow f(x) = c_1 \exp^{x} + c_2 \exp^{-x} .$$

Esempi di queste equazioni differenziali si trovano in tutti i fenomeni oscillatori fisici.
Sempre col metodo della funzione di prova si possono risolvere anche le equazioni differenziali con addendi che rappresentano fenomeni di attrito o anche forze esterne sollecitanti, ottenendo sempre variazioni di funzioni trigonometriche-esponenziali.

Conclusioni

Abbiamo riportato l'attuale dibattito tra matematici americani rispetto alla didattica dell'analisi e abbiamo notato che essi ritengono inutile arrampicarsi ancora su definizioni e teoremi complicati, ma pensano necessario renderli più immediati e facili da gestire per ciò che occorre. In questo lavoro abbiamo osservato che Cavalieri e di Torricelli sono arrivati ai loro grandi risultati sull'analisi (formula del calcolo integrale, teorema inverso del calcolo integrale) con il solo aiuto della intuizione geometrica, il che può rendere più intuitivi i concetti di tale matematica.
Quindi abbiamo studiato l'analisi di Cavalieri storicamente soffermandoci sul suo metodo: gli indivisibili, osservando le proprietà di essi e illustrando vari esempi. Ciò che bisogna sottolineare è che Cavalieri si rese conto dell'importanza di introdurre l'infinito in atto nella matematica; e lo fece con l'aiuto dell'intuizione geometrica.
Sostenitore del metodo di Cavalieri fu Torricelli; trovò la formula del calcolo integrale per la funzione $y = x^n$ con gli n negativi (mentre Cavalieri l'aveva trovata per gli n positivi) e, con gli indivisibili curvi, dedusse proprietà di moltissime curve partendo da quelle note. Come abbiamo fatto notare, l'importanza di Torricelli sta nel fatto che era pervenuto al teorema inverso del calcolo integrale, con osservazioni sulla velocità e sullo spazio e con applicazioni numerose su iperboli, parabole e spirali.
Poi abbiamo inquadrato modernamente questi risultati antichi. Abbiamo ritenuto utile cominciare con una panoramica dei vari tipi di matematiche che si sono sviluppate dall'800 (cioè da Cauchy) ad oggi: una pluralità di fondazioni essenzialmente diverse.
Inoltre abbiamo confrontato tali risultati e concetti con una matematica moderna: quella di Weyl. Quest'ultima, considerando un solo quantificatore su insiemi di elementi decidibili, usa l'infinito in atto del quantificatore; ma, essendo questo uno solo, non usa l'infinito in atto alla massima potenza. Abbiamo allora visto che tale matematica è equivalente a quella di Cavalieri e quindi può essere basata sull'intuizione geometrica. Si è allora riportato il programma

della "matematica all'inverso" che, individua quali assiomi sono necessari per la dimostrazione di un dato teorema. Abbiamo esaminato i vari assiomi che risultano rilevanti, la gerarchia in sottosistemi di assiomi sempre più potenti e alcune sue applicazioni. Tutto ciò ci è servito per capire che la matematica di Weyl equivale al sistema di assiomi ACA_0 che ha la capacità di dimostrare un insieme ben definito di teoremi. Non solo: questa matematica si è posta in relazione con quella di Cavalieri, la quale si può ritenere la sua formulazione primitiva. Infatti l'"omnes" di Cavalieri va interpretato come il quantificatore totale $\forall$ applicato ad una sequenza di numeri razionali; proprio la matematica di Weyl. Con ciò sappiamo che la matematica di Cavalieri e Torricelli, equivalente alla matematica di Weyl, che a sua volta è equivalente al sistema ACA_0, può dimostrare un sistema di teoremi che ricopre quasi tutti quelli assegnati in Analisi I e II.
Ciò ha permesso di considerare una nuova via per introdurre un discorso sull'insegniamento dell'analisi, che faccia riferimento a queste nuove idee. Poi abbiamo esposto una nuova proposta. Abbiamo dato le definizioni di limite, derivata ed integrale usando l'approccio della sola intuizione geometrica. Abbiamo aggiunto un'altra proposta: ammettere un solo quantificatore (quello esistenziale) su un insieme di elementi infinito, in modo da affermare che il punto limite esiste (quindi superando la limitazione della matematica costruttiva di ottenere solo un intervallo di approssimazione).
Inoltre per illustrare le potenzialità di questa nuova didattica abbiamo introdotto il teorema del valore medio, o anche teorema del Cavalieri, di cui abbiamo indicato varie dimostrazioni: di carattere intuitivo geometrico, riprendendo Cavalieri; di tipo cinematico, sviluppata da un matematico americano; assiomatico, con la matematica all'inverso.
In definitiva tutto ciò dimostra che l'insegniamento dell'analisi è di per sè molto più semplice di come si vuole presentare tradizionalmente; e d'altra parte i tempi attuali richiedono che essa sia semplificata, per venir incontro al maggior numero di persone che la dovrebbero usare nella vita professionale.

Appendice

Le quattro principali fondazioni dell'analisi infinitesimale

Per quel che serve in questo articolo basta ricordare le seguenti quattro fondazioni, che l'analisi infinitesimale ha ricevuto nella storia della matematica passata. La tabella in Fig.3 ne elenca le caratteristiche definitorie che sono sufficienti per distinguerle tra loro.
Procedendo da sinistra a destra il loro ordine è storico; ma solo grossolanamente, perché nella prima colonna il calcolo numerico è nato dopo l'analisi infinitesimale, e la matematica costruttiva è stata definita con precisione nel 1967. Inoltre questo ordine è anche quello di maggiore potenza matematica, eccetto per l'analisi non standard, che dovrebbe essere posta all'estrema destra. Le // stanno per separare tecniche di calcolo diverse ma equivalenti.

Autori e date	Euclide (300 a.C.) Archimede (220 a.C.) Teylor (1715)	Cavalieri e Torricelli (ca. 1640)	Leibniz e Newton (1687)	Cauchy (1821) Weierstrass (1870)
Nome	Metodo di esaustione // Calcolo numerico	Metodo degli indivisibili	Metodo degli infinitesimi // Metodo delle prime ed ultime ragioni	Matematica rigorosa o ε-δ
Tecniche o concetti base	Approssimazioni finite + ragionamento per assurdo // Approssimazioni senza punto limite	Intuizione geometrica dei punti singoli e del punto all'infinito	Oltre la intuizione geometrica: Infinitesimo=1/∞ // Limite intuitivo di $\Delta f/\Delta x$	Tecnica di approssimazione ε-δ, ma con salto al singolo punto finale
Potenza filosofica	Infinito solo potenziale	Infinito in atto, ma al minimo grado	Infinito in atto liberamente	Infinito in atto in alcuni punti chiave
Nome moderno	**Matematica costruttiva**	**Matematica elementare di Weyl**	**Analisi non standard**	**Matematica rigorosa**

Figura 3: Tabella dei diversi fondamenti dell'Analisi matematica.

Riferimenti bibliografici

[1] H. Swann, *Commentary on Rethinking Rigor in Calculus: The Role of the Mean Value Theorem*, Amer. Math. Monthly, 104 (1997), 241-245.

[2] M. E. Baron, *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Pergamon 1969, 182-194.

[3] C. Miranda, *Lezioni di Analisi Matematica parte prima*, Liguori Editore, 219, 339-345.

[4] H. Meschkowski, *Mutamenti del pensiero matematico*, Boringhieri, 78-80.

[5] G. Cellini, *Le dimostrazioni di Cavalieri del suo metodo*, Periodico di Matematiche, vol. XLIV, 1966, 85-105.

[6] D. E. Betounes, *The kinematical aspect of the foundamental theorem of calculus*, Am. J. Phys., 51 (1983), 554-555.

[7] S. Feferman, *Mathematical Intuition vs. Mathematical Monsters*, Synthèse, 125, (2000), n.3, 317-332.

[8] A. Drago, *L'analisi infinitesimale in Lazare Carnot: dalla metafisica alla fondazione operativa*, in L. Curzio e G. Medolla (edd.): *Per una storia dell'analisi*, Quaderni Pristem, n.3, Milano, 1993, 75-83.

[9] H. Weyl, *Il continuo*, (1918), Bibliopolis, Napoli, 1980.

[10] S. Feferman, *Weyl vindicatus; Das Kontinuum sixty years after*, in C. Cellucci and G. Sabin (eds.): *Temi e prospettive della Logica e della Filosofia della Scienza contemporanea*, CLUEB, Bologna, 1988, 59-93 (also in Phil. Topics, 17, 1990).

[11] K. Andersen, *Cavalieri's Method of Indivisibles*, AHES, 31, 1985, 357.

[12] E. Giusti, *Cavalieri's Method of Indivisibles*, Zanichelli, Bologna, 1980.

[13] A. Drago, *Neuw interpretation of Cavalieri's and Torricelli's Method of Indivisibles*, in J. Folta (ed.): *Science and Technology of Rudolfinian Time*, Nat. Technical Museum, Praha, 1997, 150-167.

[14] A. Drago, *Storia dei fondamenti della matematica secondo le due opzioni fondamentali sull'infinito e sulla logica*, Corso monografico di storia della fisica sulla storia della matematica, A.A. 1997-98.

[15] J. Knisley, *Calculus: A Modern Perspective*, Amer. Math. Monthly, 104 (1997), 724-727.

[16] C.B. Boyer, *The History of the Calculus and its conception development*, Dover, 1949, 127, 132, 129.

[17] A. Drago, *La formulazione di Cavalieri dell'analisi matematica: una didattica all'italiana, basata sull'intuizione geometrica*, in L. Corso et al. (eds), *Matematica è/e cultura*, Pitagora, Bologna, 2000, 137-148.

[18] E. Bortolotti, *I progresi del metodo infinitesimale nell'Opera geometrica di Evangelista Torricelli*, Periodico di Matematica, 6, 1928, 17-59.

[19] A. Marcone, *Quali assiomi per la matematica? Dall'assioma delle parallele alla reverse mathematics*, pre-print.

[20] G. Lolli *I fondamenti della matematica dopo Godel*, Bollettino U.M.I. (7) 2-A (1988), 1-26.

[21] F.R. Drake, *On the Foundations of Mathematics in 1987*, in H. D. Ebbinghaus et al. (Editors), *Logic Colloquium '87*, Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland), 1989, 11-18.

[22] K. Tanaka, *Weak axioms of determinacy and subsystems of analysis II (Σ_2^0 games)*, Annals of Pure and Applied Logic 52, 1991, 181-193, North-Holland.

[23] A. Alvino, G. Trombetti, *Elementi di Matematica*, Liguori Editore, 353-359.

[24] H. Meschkowski, *Mutamenti del pensiero matematico*, Bolinghieri, 78-80.