GEOMETRIA ALGEBRICA

Anno Accademico 2023-2024
Docente: V. Kanev

L'obiettivo della Geometria Algebrica è quello di studiare sistemi polinomiali e le loro soluzioni, sistemi polinomiali come

$$\text{I)} \quad \begin{cases} f_1(t_1, \dots, t_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(t_1, \dots, t_n) = 0 \end{cases} \subset \mathbb{A}^n$$

dove $f_1(t_1, \dots, t_n)$ sono polinomi in n variabili (1° parte), oppure sistemi omogenei

$$\text{II)} \quad \begin{cases} f_1(x_0, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_0, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \subset \mathbb{P}^n$$

dove $f_1(x_1, \dots, x_n)$ sono polinomi omogenei (2° parte). Uno degli ultimi risultati del corso sarà

Teorema 1. *Ogni sistema omogeneo (II tipo) su un campo* k *algebricamente chiuso ammette soluzioni non banali se* $m \leq n$.

e per dimostrarlo sono necessarie tecniche che verranno sviluppate lungo tutto il corso. Tale teorema risulta una generalizzazione del caso noto, dove affermiamo che su un campo qualsiasi, se un sistema lineare omogeneo ha un numero di equazioni minore di $n+1$, numero delle coordinate omogenee, allora esso ammette soluzioni.

Fra gli esempi noti ricordiamo il caso in cui $\mathrm{gr}(f_i) = 1$, in cui abbiamo i sistemi lineari omogenei. Se invece abbiamo una sola equazione

$$f(x_0, \dots, x_n) = 0 \quad \text{con} \quad \mathrm{gr}(f) = 2$$

allora trattiamo di quadriche proiettive, di cui è nota la classificazione. Se $n = 2$, allora l'equazione $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ definisce una curva proiettiva $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$. Se $f(t_1, t_2)$ è un polinomio arbitrario non nullo, allora $f(t_1, t_2) = 0$ definisce una curva affine $\mathcal{C} \subset \mathbb{A}^2$.

Oltre il problema di esistenza di soluzioni, bisogna studiare anche l'insieme delle soluzioni, qualora esse esistano, e come è strutturato, dunque studieremo le *varietà algebriche* e le classificheremo.

La Geometria Algebrica è differente dalla Geometria Affine e la Geometria Proiettiva per il tipo di trasformazioni rispetto a cui si classificano gli enti geometrici. In Geometria Proiettiva e Affine classifichiamo rispetto alle proiettività e alle affinità rispettivamente, trasformazioni comunque lineari, invece in Geometria Algebrica utilizziamo trasformazioni in coordinate ma di qualsiasi grado, non grado 1 come in Geometria Proiettiva o Affine.

Abbiamo due rami che possiamo seguire: considerare il campo di base, dove prendiamo i coefficienti dei polinomi, algebricamente chiuso, come $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ per esempio e considerare

- *Curve*: sono rappresentate da $F(x_0, x_1, x_2) = 0$, $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$, e sono di dimensione 1, uno degli invarianti delle varietà algebriche. Abbiamo una sola equazione per la varietà e le curve sono molto importanti per la risoluzione di integrali ellittici.
  Vennero studiate dalla scuola tedesca del 1800, che arrivò a classificarle, tuttavia, nonostante i molti risultati, ancora alcuni problemi sono aperti.

- *Superfici*: sono rappresentate da $F(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$, $X \subset \mathbb{P}^3$ e sono di dimensione 2. La maggior parte dei risultati sono stati forniti dalla scuola italiana (Castelnuovo, Enriques, Severi e altri) e molto si conosce a proposito.

- *dim* ≥ 3 : lo sviluppo di quest'ambito si colloca negli anni '90 e parecchi problemi sono aperti.

Se invece il campo NON è algebricamente chiuso, ad esempio $\mathsf{k} = \mathbb{Q}$, si parla di *geometria algebrica aritmetica*. Essa studia le equazioni polinomiali diofantee, cioè l'esistenza di punti delle varietà algebriche con coordinate appartenenti al campo K, ad esempio $\mathbb{Q}$, e la struttura dell'insieme di tali punti. La soluzione del problema di Fermat da parte di A. Wiles è stata raggiunta tramite i metodi della *geometria algebrica aritmetica*: il problema di Fermat risulta una consequenza di un'altro problema che riguarda le curve ellittiche e quel ultimo fu risolto da A. Wiles.

La prima parte del corso è dedicata allo studio dei sistemi polinomiali tramite i metodi dell'algebra commutativa. La seconda parte è dedicata allo studio delle varietà algebriche astratte, in particolare all'insieme delle soluzioni dei sistemi omogenei. Esso verrà affrontato attraverso la *Teoria dei Fasci*, importante per comprendere la Geometria Algebrica moderna.

Richiami di Algebra

Sia A un anello dotato di due operazioni $+$ addizione e $\cdot$ moltiplicazione, entrambe commutative e con unità. Un esempio che considereremo spesso è l'anello dei polinomi in n variabili $t_1, \ldots, t_n$ a coefficienti in un campo k, $A = \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$.

$I \subset A$ è detto *ideale* se è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per elementi di A: per ogni $x, y \in I$, allora $x \pm y \in I$ e per ogni $x \in I$, $a \in A$, allora $ax \in I$.

Sia $x \in A$, allora
$$(x) = \{ax : a \in A\}$$
è l'ideale principale generato da x. Se $A = \mathbb{Z}$, oppure $A = \mathsf{k}[x]$, allora ogni ideale è di questa forma.

Siano A, B anelli. $f : A \to B$ si dice *omomorfismo di anelli* se $f(a+b) = f(a) + f(b)$, $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ e $f(1_A) = 1_B$. Il nucleo
$$\ker(f) = \{x \in A : f(x) = 0\}$$
è un ideale di A perché se $x, y \in \ker(f)$ e $a \in A$, allora $f(x \pm y) = f(x) \pm f(y) = 0$ e $f(a \cdot x) = f(a) \cdot f(x) = 0$. Definiamo l'immagine di f come
$$\mathrm{Imm}(f) = \{b \in B : b = f(a) \text{ per qualche } a \in A\}$$
ed $\mathrm{Imm}(f)$ è un *sottoanello* di B, cioè è un sottoinsieme di B che contiene 1_B, chiuso rispetto alla somma e al prodotto definiti in B.

Sia I un ideale di A. Si costruisce un nuovo anello A/I, *quoziente* di A. Indichiamo con $\overline{a} = a + I$ una *classe laterale* e
$$A/I = \{\overline{a} : a \in A\}.$$
L'insieme A/I è un anello rispetto alle operazioni definite come $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$ e $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab}$. Tali operazioni sono ben poste, non dipendono dal rappresentante scelto per la classe. Possiamo definire in modo naturale un omomorfismo di anelli
$$\pi : A \longrightarrow A/I \quad \text{definito da} \quad \pi(a) = \overline{a} = a + I$$
e π è tale che $\ker(\pi) = I$ e $\mathrm{Imm}(\pi) = A/I$.

Un omomorfismo $f : B_1 \longrightarrow B_2$ si dice *isomorfismo* se esiste un omomorfismo $g : B_2 \longrightarrow B_1$ tale che $g \circ f = id_{B_1}$ e $f \circ g = id_{B_2}$. Inoltre f è un isomorfismo se, e solo se, f è surgettiva ($B_2 = \mathrm{Imm}(f)$) e $\ker(f) = (0)$. Questo costituisce un criterio semplice ma efficace per capire se f è un isomorfismo oppure no. In tal caso si scrive $B_1 \cong B_2$ (isomorfi).

Teorema 2 (Teorema d'omomorfismo). *Sia $f : A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli. Sia $I = \ker(f)$, allora $Imm(f) = f(A) \cong A/I$. Più precisamente il diagramma*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & f(A) \subset B \\ A/I \arrow[ur, "\exists! h"'] & \end{tikzcd}$$

commuta, dove $h : A/I \longrightarrow f(A)$ è un ben definito isomorfismo, $h(\overline{a}) = f(a)$.

Definizione 3. Sia $T \subset A$, T sottoinsieme. Si definisce l'ideale

$$I := (T) = \left\{ \sum_{\text{finite}} a_i x_i : a_i \in A,\, x_i \in T \right\}$$

e si dice che $I = (T)$ è generato da T.

Per esempio se $T = \{x, y\}$, allora elementi del tipo $ax, by, ax + by$ appartengono ad I, dove $a, b \in A$ sono elementi arbitrari. Se invece $T = \{x\}$, allora

$$(T) = (x) = \{ax : a \in A\},$$

cioè (T) è un ideale principale.

Definizione 4. Un ideale $I \subset A$ si dice *finitamente generato* se esistono $x_1, \dots, x_n \in A$ tali che $I = (x_1, \dots, x_n)$, cioè ogni elemento $x \in I$ è uguale a $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ per qualche $a_1, \dots, a_n \in A$.

La definizione introdotta è una generalizzazione del concetto di ideale principale e sarà importante il teorema della base di Hilbert che ci permetterà di affermare che ogni ideale di un anello di polinomi a coefficienti in un campo è finitamente generato.

Anelli noetheriani

Definizione 5. Sia S un insieme. Una *catena* di sottoinsiemi di S

$$S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \ldots \subset S_k \subset \ldots$$

si dice[1] *stazionaria* se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale[2] che $S_n = S_{n+1} = \ldots$.

Proposizione 6. *Un anello A si dice noetheriano se soddisfa una delle seguenti condizioni equivalenti*

1. *Ogni ideale di A è finitamente generato.*
2. *Ogni catena di ideali di A è stazionaria.*
3. *Sia Σ una famiglia[3] di ideali di A non vuota, allora Σ possiede almeno un elemento massimale.*

Dimostrazione: 1. $\Rightarrow$ 2. : Sia $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \ldots \subset I_k \subset \ldots$ una catena di ideali e sia

$$I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$

[1] Con il simbolo $\subset$ intendiamo anche $\subseteq$, altrimenti scriveremo $\subsetneq$.
[2] Si può dare una definizione analoga anche per $\supset$.
[3] Per famiglia intendiamo una collezione di insiemi

I è un ideale perché gli I_k fanno parte di una catena. Ogni ideale è finitamente generato per ipotesi, dunque $I = (x_1, \dots, x_m)$ per qualche $x_i \in A$. Siano $x_i \in I_{k_i}$ e sia $n = \max_i\{k_i\}$, allora $I \subset I_n$, quindi $I_n = I_{n+1} = \dots$, dunque la catena si stabilizza.

2. $\Rightarrow$ 3. : Sia $I \in \Sigma$. Se I è massimale (fra gli ideali della famiglia Σ) abbiamo finito. Se non lo è, poniamo $I_1 = I$ ed esiste $I_2 \in \Sigma$ tale che $I_1 \subsetneqq I_2$ e ripetiamo l'argomento per I_2. Se I_2 è massimale, abbiamo finito, altrimenti esiste $I_3 \in \Sigma$ tale che $I_1 \subsetneqq I_2 \subsetneqq I_3$.
Ripetendo la procedura ci sono due possibilità

(i) tra un numero finito di passi $I_1 \subsetneqq I_2 \subsetneqq \dots \subsetneqq I_n$ si ottiene un $I_n \in \Sigma$ dove I_n è massimale tra gli ideali di Σ;

(ii) $I_1 \subsetneqq I_2 \subsetneqq \dots \subsetneqq I_k \subsetneqq \dots$ non finisce mai;

ma la possibilità (ii) è impossibile perché si otterrebbe una catena non stazionaria.

3. $\Rightarrow$ 1. : Sia $I \subset A$ ideale. Consideriamo la famiglia

$$\Sigma = \{J : J \text{ è ideale finitamente generato e } J \subset I\}$$

e $\Sigma \neq \emptyset$ perché se $a \in I$ allora $J = (a) \in \Sigma$. Sia adesso J_{max} un elemento massimale di Σ, allora $J_{max} = (x_1, \dots, x_m)$ per ipotesi con $x_i \in A$. Vogliamo provare che $J_{max} = I$ e supponiamo per assurdo che non sia così, dunque $J_{max} \subsetneqq I$, allora esiste $y \in I \setminus J_{max}$ per cui se consideriamo $J' = (x_1, \dots, x_m, y)$ si ha $J_{max} \subsetneqq J' \subset I$.
Concludiamo che $J' \in \Sigma$, ma questa è una contraddizione perché $J_{\max}$ è elemento massimale di Σ. $\square$

Diamo adesso degli esempi:
1. Se $A = \mathsf{k}$ campo, allora gli unici ideali sono (0) e (1), dunque tutte e tre le condizioni sono soddisfatte a vista e k è noetheriano.
2. In $A = \mathbb{Z}$ oppure $A = \mathsf{k}[x]$ ogni ideale è del tipo $I = (a)$ per qualche $a \in A$, dunque ogni ideale è finitamente generato perché è principale, allora A è noetheriano.
Diamo adesso un esempio di un anello NON noetheriano: l'anello dei polinomi in un'infinità numerabile di variabili, $A = \mathsf{k}[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots]$,

$$A = \{f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}) : i_k \in \mathbb{N}\}.$$

A non è noetheriano perché possiamo costruire una catena non stazionaria di ideali:

$$I_1 = (x_1), \quad I_2 = (x_1, x_2), \; \dots \; , I_m = (x_1, x_2, \dots, x_m), \dots$$

e la catena che ne deriva è

$$I_1 \subsetneqq I_2 \subsetneq \dots \subsetneqq I_m \subsetneqq \dots$$

che non è stazionaria perché $I_{m-1} \subsetneqq I_m$ perché $x_m \notin I_{m-1}$, $x_m \neq f(x_1, \dots, x_{m-1})$.

Adesso dimostriamo una proposizione che ci permetterà di dedurre che se A è noetheriano, allora lo è un qualsiasi suo quoziente.

Proposizione 7. *Sia $\varphi : A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli surgettivo. Se A è noetheriano, allora B è noetheriano.*

Dimostrazione. Sia J un ideale di B, $J \subset B$. Sia $I = \varphi^{-1}(J) = \{a : \varphi(a) \in J\}$. Se A è noetheriano, allora $I = (a_1, \dots, a_m)$ per qualche $a_i \in A$. Affermiamo che, ponendo $b_i = \varphi(a_i)$, si ha $J = (b_1, \dots, b_m)$.

Sia $y \in J$, allora esiste $x \in A$ tale che $\varphi(x) = y$, perché φ è surgettivo. Poiché $I = \varphi^{-1}(J)$, $x \in I$, dunque

$$x = \sum_{i=1}^{m} s_i a_i \quad \text{con} \quad s_i \in A$$

da cui applicando φ otteniamo, sfruttando il fatto che φ è omomorfismo,

$$\varphi(x) = y = \sum \varphi(s_i)\varphi(a_i) = \sum_{i=1}^{m} \varphi(s_i) b_i \in (b_1, \dots, b_m).$$

dunque $J = (b_1, \dots, b_m)$. $\square$

Teorema 8 (Teorema di Hilbert della Base). *Sia A un anello noetheriano, allora l'anello dei polinomi in una variabile con coefficienti di A, $A[x]$, è pure noetheriano.*

Dimostrazione. Sia $I \subset A[x]$ ideale e sia $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_i x^i$ con $a_i \neq 0$ ed $f(x)$ polinomio non nullo. a_i si dice il *coefficiente direttivo di* $f(x)$. Per ogni $i = 0, 1, 2 \ldots$ consideriamo l'insieme

$$\mathfrak{A}_i = \{a_i : a_0 + a_1 x + \ldots + a_i x^i \in I\} \cup \{0\}$$

ed affermiamo che $\mathfrak{A}_i$ è un ideale di A, infatti se $a_i, b_i \in \mathfrak{A}_i$, allora

$$(a_0 + \ldots + a_i x^i) \pm (b_0 + \ldots + b_i x^i) = \ldots + (a_i \pm b_i) x^i \in I$$

perché i due polinomi a primo membro stanno entrambi in I. Concludiamo che $a_i \pm b_i \in \mathfrak{A}_i$ se $a_i \pm b_i \neq 0$ perché è un coefficiente direttivo, altrimenti sta in $\mathfrak{A}_i$ per come è definito.

Sia $a \in A$ e $a_i \in \mathfrak{A}_i$, allora si ha

$$a(a_0 + \ldots + a_i x^i) = \ldots + (a a_i) x^i \in I$$

perché il polinomio a primo membro sta in I. Con ragionamenti analoghi concludiamo che $a a_i \in \mathfrak{A}_i$: se $a a_i \neq 0$, allora è un coefficiente direttivo e sta in $\mathfrak{A}_i$, se $a a_i = 0$, allora sta in $\mathfrak{A}_i$ per definizione.

Si afferma che $\mathfrak{A}_i \subset \mathfrak{A}_{i+1}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Sia $a_i \in \mathfrak{A}_i$, allora esiste un polinomio $a_0 + \ldots + a_i x^i \in I$ di cui a_i è coefficiente direttivo. Se moltiplichiamo tale polinomio per x, il prodotto si troverà ancora in I perché I è ideale

$$x(a_0 + \ldots + a_i x^i) = a_0 x + \ldots + a_i x^{i+1} \in I$$

allora $a_i \in \mathfrak{A}_{i+1}$, perché $a_i \neq 0$. Se fosse $a_i = 0$, allora sarebbe banale.

Per quanto detto, otteniamo una catena di ideali in A

$$\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{A}_i \subset \mathfrak{A}_{i+1} \subset \ldots$$

ma A è noetheriano, dunque la catena è stazionaria

$$\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_{r+1} = \ldots$$

A è noetheriano, dunque gli ideali sono finitamente generati: siano

$$\begin{array}{lll} a_{01}, & \ldots \; a_{0n_0} & \text{generatori di } \mathfrak{A}_0 \\ a_{11}, & \ldots \; a_{1n_1} & \text{generatori di } \mathfrak{A}_1 \\ \vdots & & \\ a_{r1}, & \ldots \; a_{rn_r} & \text{generatori di } \mathfrak{A}_r \end{array}$$

e per definizione a_{ij} sono coefficienti direttivi di polinomi $f_{ij}(x) = \ldots + a_{ij} x^i$. Vogliamo fare vedere che i polinomi $f_{ij}(x)$ per $i = 0, \ldots, r$ e $j = 1, \ldots, n_i$ generano I.

Sia $I' = (f_{01}(x), \ldots, f_{rn_r}(x))$. $f_{ij}(x) \in I$ per definizione, dunque $I' \subset I$. Dimostriamo per induzione su

$d = \mathrm{gr}(f)$ che ogni $f(x) \in I$, $f(x) = b_0 + \ldots + b_d x^d$, appartiene a I'. Consideriamo $f(x) \neq 0$, altrimenti è ovvio.
Sia $d = 0$, allora $f(x) = b_0$. b_0 è coefficiente direttivo di $f(x) \in I$, dunque $b_0 \in \mathfrak{A}_0$ e

$$b_0 = c_1 a_{01} + \ldots + c_{n_0} a_{0n_0} = c_1 f_{01}(x) + \ldots + c_{n_0} f_{0n_0}(x) \in I'$$

perché $f_{0j}(x)$ sono costanti, dunque l'inizio dell'induzione va bene.
Supponiamo vera l'affermazione per ogni grado minore di d e distinguiamo due casi

- Caso $d > r$: $f(x) = \ldots + b_d x^d$ con $b_d \in \mathfrak{A}_d$. Si ha che $\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_{r+1} = \ldots = \mathfrak{A}_d$, dunque

$$b_d = c_1 a_{r1} + \ldots + c_{n_r} a_{rn_r}.$$

Moltiplichiamo adesso ogni $f_{rj}(x)$ per x^{d-r} ed otteniamo

$$x^{d-r} f_{rj}(x) = \ldots + a_{rj} x^d$$

e dunque si ha

$$f(x) - \sum_{j=1}^{n_r} c_j x^{d-r} f_{rj}(x) = \ldots + \left(b_d - \sum_{j=1}^{n_r} c_j a_{rj} \right) x^d$$

ma $b_d - \sum c_j a_{rj} = 0$, dunque $f(x) - \sum c_j x^{d-r} f_{rj}(x)$ è di grado minore di d e sta in I. Per l'ipotesi induttiva $f(x) - \sum c_j x^{d-r} f_{rj}(x)$ appartiene a I', dunque $f(x) \in I'$ perché $-\sum c_j x^{d-r} f_{rj}(x) \in I'$.

- Caso $d \leq r$: Sia $I \ni f(x) = b_0 + \cdots + b_d x^d$, allora $b_d \in \mathfrak{A}_d$ e sappiamo che i primi $r+1$ ideali $\mathfrak{A}_i$ sono finitamente generati dagli a_{ij} con $j = 1, \ldots, n_i$. Tali ideali servono per trovare i generatori candidati per I, gli $f_{ij}(x)$, dove I ideale di $A[x]$ con A noetheriano. Per quanto detto si ha

$$b_d = c_1 a_{d1} + \ldots + c_{n_d} a_{dn_d}$$

dove gli a_{dj} sono i generatori di $\mathfrak{A}_d$. Utilizzando argomenti simili al caso $d > r$ otteniamo

$$f(x) - \sum_{j=1}^{n_d} c_j f_{dj}(x) = \left(\ldots + b_d x^d \right) - \left(\ldots + (c_1 a_{d1} + \ldots + c_{n_d} a_{dn_d}) x^d \right)$$

che è un polinomio di grado minore di d e che sta in I. Per l'ipotesi induttiva si ha che $f(x) - \sum c_j f_{dj} \in I'$ e dunque $f(x) \in I'$ perché $\sum c_j f_{dj} \in I'$. $\square$

Adesso vediamo una generalizzazione del teorema di Hilbert della base all'anello dei polinomi in più variabili, corollario che corrisponde all'originale teorema di Hilbert della base, per come fu pensato da Hilbert.

Corollario 9. *Sia* k *un campo. Allora*

(i) L'anello dei polinomi $\mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$ *è noetheriano (Hilbert)*

(ii) Sia $I \subset \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$ *e sia* $B \cong \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]/I$*, allora* B *è noetheriano.*

Dimostrazione. (i) Procediamo per induzione su n: per $n = 0$, k è noetheriano e supponiamo adesso che $\mathsf{k}[t_1, \ldots, t_{n-1}]$ sia noetheriano. Possiamo vedere $\mathsf{k}[t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n]$ come

$$\mathsf{k}[t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n] \cong A[t_n] \quad \text{dove} \quad A = \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_{n-1}]$$

e sappiamo che A è noetheriano per ipotesi induttiva, dunque $\mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$ è noetheriano per il Teorema 8.

(ii) Sia $\pi : \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n] \longrightarrow \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]/I$ la proiezione canonica e $\psi : \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]/I \longrightarrow B$ l'isomorfismo, allora $\varphi = \psi \circ \pi$

$$\varphi : \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n] \xrightarrow{\pi} \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]/I \xrightarrow{\psi} B$$

è surgettivo. Poiché $\mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$ è noetheriano, lo è anche B per la Proposizione 7. $\square$

Ideali primi e ideali massimali

Definizione 10. Un ideale $\mathfrak{p} \subset A$ si dice *primo* se $\mathfrak{p} \neq (1)$ e se $xy \in \mathfrak{p}$ implica che o $x \in \mathfrak{p}$ o $y \in \mathfrak{p}$. Quest'ultima condizione è equivalente a: se $x \notin \mathfrak{p}$ e $y \notin \mathfrak{p}$, allora $xy \notin \mathfrak{p}$.

Si ha che $\mathfrak{p}$ è primo se, e solo se, $A/\mathfrak{p}$ è un dominio di integrità, perché la seconda condizione si traduce nel quoziente come $\overline{x} \neq \overline{0}$ e $\overline{y} \neq \overline{0}$ implicano $\overline{x} \cdot \overline{y} \neq \overline{0}$.

Definizione 11. Un ideale $\mathfrak{m} \subset A$ si dice *massimale* se è proprio ($\mathfrak{m} \neq (1) = A$) e non esiste nessun ideale proprio I tale che $\mathfrak{m} \subsetneqq I$.

Si ha che $\mathfrak{m}$ è massimale se, e solo se, $A/\mathfrak{m}$ è un campo. Qui si sfrutta il fatto che un anello B è un campo $\Leftrightarrow$ gli unici ideali di B sono (0) e B. La parte $\Rightarrow$ è ovvia. Per la parte $\Leftarrow$, sia $x \in B, x \neq 0$. Allora l'ideale $(x) \neq (0)$, quindi $(x) = B$ per ipotesi. Questo significa che $1 \in (x)$, cioè $\exists y$, tale che $yx = 1$.

Proposizione 12. *Sia A un anello noetheriano e sia $J \subset A$ un ideale proprio, allora esiste un ideale massimale $\mathfrak{m}$ che contiene J.*

Dimostrazione. Sia $\Sigma = \{I : I \subsetneqq A \text{ ideale e } J \subset I\}$, $\Sigma \neq \emptyset$ perché $J \in \Sigma$. Essendo A noetheriano, la famiglia di ideali Σ possiede un elemento massimale $\mathfrak{m}$. Questo ideale $\mathfrak{m}$ è quello cercato, $J \subset \mathfrak{m}$. □

Tale affermazione è vera per un qualsiasi anello, ma si dimostra attraverso il lemma di Zorn, invece in questo caso abbiamo sfruttato la proprietà di Noether.

Radicale di un ideale

Definizione 13. Sia $I \subset A$ un ideale. Si definisce *radicale di I* l'insieme

$$\sqrt{I} = \{x \in A : x^n \in I \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}\}.$$

Lemma 14. *$\sqrt{I}$ è un ideale.*

Dimostrazione. Sia $x \in \sqrt{I}$, allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x^n \in I$. Sia $a \in A$, allora si ha $(ax)^n = a^n x^n \in I$ perché I ideale e dunque $ax \in \sqrt{I}$.

Siano $x, y \in \sqrt{I}$, allora $x^n \in I$ e $y^m \in I$, per qualche $n, m \in \mathbb{N}$, allora si ha

$$(x+y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^{n+m-k} y^k.$$

Se $k \leq m$, allora si ha per ogni termine $x^{n+m-k}y^k = (\ldots) \cdot x^n \in I$, se invece $m+1 \leq k \leq m+n$ si ha $x^{n+m-k}y^k = (\ldots)y^m \in I$, da cui $(x+y)^{n+m} \in I$ perché ogni termine vi appartiene, dunque $x + y \in \sqrt{I}$. In modo analogo si dimostra che $x - y \in \sqrt{I}$. □

Insiemi algebrici affini
Sia $A = \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$ con k campo. Sia $F(t_1, \ldots, t_n) \in A$. Se $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathsf{k}^n$ soddisfa $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ si dice che $P = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ è *zero di F*. Per quel che faremo si avrà $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}} \equiv \mathsf{k}^n$.

Definizione 15. Sia S un insieme di polinomi di $\mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$. Denotiamo con $V(S)$ l'insieme degli zeri comuni di S. $V(S)$ è l'insieme delle soluzioni del sistema polinomiale (anche infinito)

$$\{F_s(t_1, \ldots, t_n) = 0\}_{s \in S}.$$

$V(S)$ si dice *insieme algebrico affine* e si ha $V(S) \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$.

Diamo adesso alcuni esempi:
1. Sia $n = 2$ e sia $S = \{F(x, y)\}$, allora $V(S) = \{F(x, y) = 0\} \subset \mathbb{A}^2_{\mathsf{k}}$ in questo caso abbiamo una sola equazione e osserviamo che se k è un campo finito, allora $V(S)$ è un numero finito di punti. Se in particolare $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ o $\mathsf{k} = \mathbb{C}$, allora $V(S)$ è una curva piana.
2. Sia $n = 2$ e sia $S = \{F, G\}$, allora $V(S) = \{F(x, y) = 0 \text{ e } G(x, y) = 0\} \subset \mathbb{A}^2_{\mathsf{k}}$ è l'intersezione di due curve piane.

I sistemi di equazioni polinomiali possono essere semplificati e i corrispondenti insiemi algebrici affini possono essere definiti in più modi. Denotiamo con $I(S) \subset \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$ l'ideale generato dall'insieme S, allora secondo il teorema della base di Hilbert esistono $G_1, \ldots, G_m \in \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$ tali che $I = (G_1, \ldots, G_m)$. Dimostriamo adesso che, pur avendo 3 insiemi di polinomi diversi, $S, I, \{G_1, \ldots, G_m\}$, applicando l'operazione V otteniamo lo stesso insieme algebrico affine.

Lemma 16. $V(S) = V(I) = V(\{G_1, \ldots, G_m\})$. *Denoteremo con* $V(G_1, \ldots, G_m)$ *l'insieme* $V(\{G_1, \ldots, G_m\})$.

Dimostrazione. Basta dimostrare che se S ed R sono due insiemi di polinomi che generano lo stesso ideale $(S) = (R)$, allora $V(S) = V(R)$. Sia $\{F_s\} = S$ e $\{G_r\} = R$. Per ogni G_r si ha

$$G_r = \sum_{\alpha=1}^{l} H_{s_\alpha}(t_1, \ldots, t_n) F_{s_\alpha}(t_1, \ldots, t_n)$$

Se $P \in V(S)$, allora $F_s(P) = 0$ per ogni $s \in S$ e dunque $G_r(P) = 0$. Questo vale per ogni $r \in R$, da cui $V(S) \subset V(R)$. Scambiando i ruoli di S ed R otteniamo $V(R) \subset V(S)$, allora $V(R) = V(S)$. $\square$

Questo lemma ci dice che ogni insieme algebrico affine è insieme di soluzioni di un sistema polinomiale finito, anche se a volte è conveniente considerare sistemi polinomiali infiniti. Adesso andiamo a vedere due proprietà degli insiemi algebrici affini, che ci permetteranno di definire una topologia su $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$.

Proposizione 17. *L'intersezione di una qualsiasi famiglia di insiemi algebrici affini è insieme algebrico affine.*

Proposizione 18. *L'unione di un numero finito di insiemi algebrici affini è insieme algebrico affine.*

Osserviamo che le due proprietà di queste due proposizioni sono verificate se consideriamo gli insiemi chiusi di una topologia.
Dimostrazione(prop. 17). $P \in V(S_\alpha)$ per $\forall \alpha \in J$ se e solo se P è zero comune dell'insieme di polinomi $\bigcup_{\alpha \in J} S_\alpha$, quindi si ha

$$\bigcap_{\alpha \in J} V(S_\alpha) = V\left(\bigcup_{\alpha \in J} S_\alpha\right) = V(S) \quad \text{dove} \quad S = \bigcup_{\alpha \in J} S_\alpha. \quad \square$$

Dimostrazione(prop. 18). Consideriamo prima il caso particolare di unione di due insiemi algebrici. Siano $V_1 \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ e $V_2 \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$, allora, ponendo $\underline{t} = (t_1, \ldots, t_n)$,

$$V_1 = \{F_1(\underline{t}) = 0, \ldots, F_m(\underline{t}) = 0\} \quad \text{e} \quad V_2 = \{G_1(\underline{t}) = 0, \ldots, G_r(\underline{t}) = 0\},$$

per quanto detto. Affermiamo che

$$V_1 \cup V_2 = \{F_i(\underline{t})G_j(\underline{t}) = 0\}_{i=1,\dots,m;\, j=1,\dots,r}.$$

In effetti se $P \in V_1 \cup V_2$, allora o $P \in V_1$ e dunque $F_i(P) = 0$ per ogni $i = 1, \dots, m$, oppure $P \in V_2$ e quindi $G_j(P) = 0$ per ogni $j = 1, \dots, r$, da cui $F_i(P)G_j(P) = 0$ per ogni i e j, dunque P è uno zero comune dell'insieme $\{F_iG_j\}$.
Viceversa, sia P uno zero comune di $\{F_i(\underline{t})G_j(\underline{t}) = 0\}_{i,j}$. Se $F_i(P) = 0$ per ogni i, allora $P \in V_1$. Se invece $F_i(P) \neq 0$ per qualche i, sappiamo che $F_i(P)G_j(P) = 0$ per ogni j, quindi deve essere $G_j(P) = 0$ per ogni j perché $F_i(P) \neq 0$ per qualche i, dunque $P \in V_2$. Ne concludiamo che $V_1 \cup V_2$ è un insieme algebrico ed abbiamo determinato esplicitamente anche il sistema polinomiale di definizione.
Nel caso generale $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_{l-1} \cup V_l$ si ragiona per induzione: sappiamo che $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_{l-1}$ è un insieme algebrico affine per induzione, dunque anche $(V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_{l-1}) \cup V_l$ lo è come unione di due insiemi algebrici affini. □

Topologia di Zariski
Su $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ si definisce una topologia, detta *topologia di Zariski* dove gli insiemi chiusi sono gli insiemi algebrici affini $V(S)$, per le proposizioni 17 e 18, e gli aperti sono dati da $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}} \setminus V(S)$. Se $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$, la topologia di Zariski su X è la topologia indotta in X, dunque i chiusi di X sono insiemi del tipo $X \cap V(S)$, dove S è un'opportuno insieme di polinomi.

Caso particolare: Supponiamo che $X = V(T)$ sia un insieme algebrico affine, allora $Z \subset X$ è un chiuso se, e solo se, $Z = X \cap V(S) = V(T) \cap V(S)$ per qualche S se, e solo se, $Z = V(T \cup S)$ per qualche S se, e solo se, Z è insieme algebrico di $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ contenuto in X. Gli insiemi algebrici affini di $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ vengono detti anche *chiusi affini.*

Consideriamo adesso, per esempio, $\mathbb{A}^1_{\mathsf{k}}$, allora un sistema qualsiasi sarà del tipo

$$V = V(S) = \begin{cases} f_1(t) = 0 \\ \vdots \\ f_m(t) = 0 \end{cases}.$$

Se S è vuoto, allora $V(\emptyset) = \mathbb{A}^1_{\mathsf{k}}$, altrimenti $V \subset V(f_1(t))$, ma $V(f_1(t))$ corrisponde alle soluzioni di un sistema polinomiale composto da un solo polinomio, allora o $V = \emptyset$ o $V \neq \emptyset$, ma ha un numero finito di punti.
Viceversa, $\emptyset$ è chiuso perché ad esempio $\emptyset = V(1) = \{1 = 0\}$. Se $P = (a)$, allora $P = V(t-a) = \{t-a = 0\}$. Se abbiamo $Z = \{P_1, \dots, P_l\} = \cup_i \{P_i\}$, esso è un chiuso come unione finita di chiusi.
Ne concludiamo dunque che la topologia di Zariski di $\mathbb{A}^1_{\mathsf{k}}$ consiste dei chiusi $\mathbb{A}^1_{\mathsf{k}}$, $\emptyset$ e $\{P_1, \dots, P_l\}$ insiemi finiti di punti.

Sia k campo infinito e siano U_1 e U_2 due aperti non vuoti di $\mathbb{A}^1_{\mathsf{k}}$, dunque $U_1 = \mathbb{A}^1_{\mathsf{k}} \setminus \Sigma_1$ e $U_2 = \mathbb{A}^1_{\mathsf{k}} \setminus \Sigma_2$ con $|\Sigma_i| < \infty$, allora $U_1 \cap U_2 = \mathbb{A}^1_{\mathsf{k}} \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \neq \emptyset$ perché $|\Sigma_1 \cup \Sigma_2| < \infty$ e il campo è infinito, dunque lo spazio non soddisfa la proprietà di Hausdorff perché due qualsiasi aperti non vuoti si intersecano.

Come $P = (a)$ è chiuso in $\mathbb{A}^1_{\mathsf{k}}$, $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ è chiuso in ogni spazio affine perché

$$P = \begin{cases} t_1 - a_1 = 0 \\ t_2 - a_2 = 0 \\ \vdots \\ t_n - a_n = 0 \end{cases}$$

dunque anche le unioni finite di punti sono dei chiusi in $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$: $Z = \{P_1, \dots, P_r\}$ è un chiuso in $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$.

Sappiamo che in $\mathbb{A}^2_{\mathsf{k}}$ con k campo infinito si ha

$$F(x, y) = cF_1^{l_1} \ldots F_r^{l_r}$$

dove F_i sono irriducibili in $\mathsf{k}[x,y]$, allora

$$V(F) = V(F_1) \cup V(F_2) \cup \ldots \cup V(F_r)$$

è chiuso in $\mathbb{A}^2_{\mathsf{k}}$ e le $V(F_i)$ sono curve piane irriducibili, dunque una qualsiasi unione finita di curve piane irriducibili è un chiuso di $\mathbb{A}^2_{\mathsf{k}}$ e qualsiasi unione finita di punti è chiusa in $\mathbb{A}^2_{\mathsf{k}}$. In realtà si dimostra che ogni insieme chiuso di $\mathbb{A}^2_{\mathsf{k}}$ diverso dagli insiemi $\emptyset$ e $\mathbb{A}^2_{\mathsf{k}}$ si rappresenta nel modo seguente[4]

$$Z = \bigcup_{i=1}^{r} V(F_i) \cup \{P_1, \ldots, P_l\}$$

con $\mathcal{C}_i = V(F_i) = \{F_i(x,y) = 0\}$ curve irriducibili.

Ideale di un chiuso affine
Sia $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ un sottoinsieme. Si definisce

$$I(V) = \{F \in \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n] : F(P) = 0 \; \forall P \in V\}$$

e si può anche scrivere come $I(V) = \{F \in \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n] : F|_V = 0\}$, dove con $F|_V$ si denota la restrizione di F si V, considerata come funzione con dominio V. $I(V)$ è un ideale perché la somma di due polinomi che si annullano in V si annulla in V e moltiplicando per qualsiasi polinomio otteniamo un polinomio che si annulla in V.

Abbiamo così definito due operazioni che agiscono in direzioni inverse: V che assegna ad un ideale di polinomi J l'insieme di punti $V(J)$ che annullano tutti i polinomi in J, I che assegna ad un insieme di punti X l'ideale dei polinomi che si annullano in tutti i punti di X

$$J \xrightarrow{V} V(J) \quad \text{e} \quad I(X) \xleftarrow{I} X$$

ma che relazione c'è fra le due operazioni V ed I?

Proposizione 19. *Sia $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$, allora si ha*

(i) $X \subset V(I(X))$;

(ii) X *è un chiuso affine se, e solo se,* $X = V(I(X))$.

Dimostrazione. (i) $F(\underline{t}) \in I(X)$ se, e solo se, $F(P) = 0$ per ogni $P \in X$. Quindi fissato un punto $P \in X$, esso è zero comune di tutti i polinomi di $I(X)$, cioè $P \in V(I(X))$, ma questo vale per qualsiasi $P \in X$, dunque $X \subset V(I(X))$.

(ii) L'implicazione $(\Leftarrow)$ è ovvia: se prendo $S = I(X)$ allora $X = V(S)$. Dimostriamo adesso $(\Rightarrow)$: sia $X = V(S)$ per qualche $S \subset \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$, X è chiuso. Abbiamo $S \subset I(X)$ per definizione di $I(X)$ e osserviamo che più grande è l'insieme dei polinomi, più piccolo è l'insieme degli zeri comuni, dunque

$$X \subset V(I(X)) \subset V(S) = X$$

per la (i) e per ipotesi, da cui concludiamo che $X = V(I(X))$. $\square$

Definizione 20.

(i) Un ideale $J \subset A$ si dice *radicale* se $\sqrt{J} = J$.

(ii) Un anello B si dice ridotto se per ogni $x \in B$ da $x^n = 0$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ segue che $x = 0$, in altre parole se B è privo di nilpotenti non nulli.

Si ha che l'ideale $J \subset A$ è radicale se e solo se l'anello $B = A/J$ è ridotto. In effetti, l'implicazione $x^n \in J \Rightarrow x \in J$ è equivalente all'implicazione $\overline{x}^n = \overline{0} \Rightarrow \overline{x} = \overline{0}$.

[4] Questo sarà uno degli esercizi che verranno svolti in aula.

Proprietà delle operazioni V ed I

1. Se $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ è insieme algebrico affine, allora $X = V(I(X))$.

2. Se $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ allora $I(X)$ è un ideale radicale.

   Dimostrazione. Supponiamo che $F^m \in I(X)$ per qualche m. Questo vuol dire che $F^m(P) = 0$ per ogni $P \in X$, ma $F^m(P) = (F(P))^m = 0$, dunque $F(P) = 0$ per ogni $P \in X$, da cui $F \in I(X)$. □

   Operando con I otteniamo solo ideali radicali.

3. Vi è un'applicazione iniettiva

$$\{X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}} \text{ chiusi affini}\} \xrightarrow{I} \{J \subset \mathsf{k}[t_1, \dots, t_n] \text{ ideali radicali}\}$$

   data da $J = I(X)$. Si ha che I inverte le inclusioni: se $X_1 \subset X_2$ allora $I(X_2) \subset I(X_1)$.

   Dimostrazione. Sia $J = I(X)$ e sappiamo già che J è radicale. Siano X_1 e X_2 due chiusi affini tali che $I(X_1) = I(X_2)$, allora applichiamo V ed otteniamo che $V(I(X_1)) = V(I(X_2))$, da cui per la 1. otteniamo che $X_1 = X_2$ perché chiusi affini, dunque I è iniettiva.
   Sia $X_1 \subset X_2$. Se $F \in I(X_2)$ vuol dire che $F(P) = 0$ per ogni $P \in X_2$, da cui $F(P) = 0$ per ogni $P \in X_1$ perché $X_1 \subset X_2$, allora $F \in I(X_1)$ e così $I(X_2) \subset I(X_1)$. □

4. Sia $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ un chiuso affine. Allora ogni catena discendente di insiemi chiusi (nella topologia di Zariski)

$$V \supset V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \cdots \supset V_m \supset \cdots \tag{1}$$

   è stazionaria, cioè da un numero in poi si ha che $V_s = V_{s+1} = \cdots$.

   Dimostrazione. Passiamo dalla catena di insiemi chiusi ad una catena di ideali in $\mathsf{k}[t_1 \dots, t_n]$ tramite l'operazione I:

$$I(V) \subset I(V_1) \subset I(V_2) \subset I(V_3) \subset \cdots \subset I(V_m) \subset \cdots$$

   Per il teorama della base questa catena è stazionaria. Applicando ad essa l'operazione V ed utilizzando la Proprietà 1 otteniamo che la catena (1) è stazionaria. □

Definizione 21. Uno spazio topologico X si dice *noetheriano* se ogni catena discendente di chiusi

$$X = X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_s \supset \ldots$$

è stazionaria, cioè esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $X_n = X_{n+1} = \ldots$.

Proposizione 22. *Ogni chiuso affine $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ dotato della topologia di Zariski è uno spazio noetheriano.*

Dimostrazione. Questo segue dalla Proprietà 4 dimostrata sopra. □

Osservazione. Se per esempio consideriamo $\mathbb{R}^n$ dotato della topologia standard data dalla norma euclidea $||x||$, allora questa proprietà non è soddisfatta, $\mathbb{R}^n$ non è noetheriano: se consideriamo i chiusi V_j

$$V_j = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq \frac{1}{2^j} \right\}$$

allora otteniamo $V_1 \supsetneqq V_2 \supsetneqq V_3 \supsetneqq \ldots \supsetneqq V_j \supsetneqq \ldots$, cioè $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea non è spazio noetheriano. In genere gli spazi noetheriani sono quegli spazi con topologie che posseggono pochi chiusi, altrimenti è possibile creare catene non stazionarie.

Sia $\mathcal{C} \subset \mathbb{A}^2_{\mathsf{k}}$, allora $\mathcal{C}$ corrisponderà ad un insieme $\{F(x, y) = 0\}$ ed F sarà tale che

$$F = cF_1^{l_1} \dots F_r^{l_r} \quad \text{con} \quad F_i \text{ irriducibili}$$

dunque $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_r$ con $\mathcal{C}_i$ curve irriducibili. Tale ragionamento si può generalizzare per insiemi algebrici affini e introdurre il concetto di insiemi algebrici affini irriducibili.

Definizione 23. Sia X uno spazio topologico

(i) X si dice *riducibile* se $X = X_1 \cup X_2$ con X_i chiusi propri di X.

(ii) X si dice *irriducibile* se X non è riducibile.

Diamo adesso degli esempi di spazi riducibili e non:
1. Consideriamo $\mathbb{A}^2_{\mathsf{k}}$ e sia $X = \{T_1T_2 = 0\} = \{T_1 = 0\} \cup \{T_2 = 0\}$, dunque X come unione di due chiusi propri è riducibile.

2. Sia k un campo infinito e sia $X = \mathbb{A}^1_{\mathsf{k}}$. Si afferma che X è irriducibile. Supponiamo per assurdo che $X = X_1 \cup X_2$, allora $X_i \subsetneqq \mathbb{A}^1_{\mathsf{k}} = X$ sono chiusi di X e dunque X_i sono insiemi finiti per $i = 1, 2$, da cui $X = X_1 \cup X_2$ è una contraddizione.

Lemma 24. *Sia $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m$ con $m \geq 2$ e X_i chiusi in X, $X_i \subsetneqq X$. Allora X è riducibile.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su m. Se $m = 2$, allora abbiamo la definizione. Supponiamo vera l'affermazione per i numeri naturali minori o uguali ad m. Sia $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m \cup X_{m+1}$, allora $X = Z \cup X_{m+1}$, dove $Z = X_1 \cup \ldots \cup X_m$. Abbiamo due possibilità:

1. Se $Z = X$ allora X è unione di m chiusi propri e dunque secondo l'ipotesi induttiva X è riducibile.

2. Se $Z \neq X$ allora Z è chiuso proprio, allora X è riducibile per definizione perché $X = Z \cup X_{m+1}$ è unione di due chiusi propri. □

Possiamo dare definizioni equivalenti per la riducibilità perché possiamo passare al corrispondente per aperti.

Lemma 25. *Sia X uno spazio topologico. Le seguenti proprietà sono equivalenti*

(i) X è irriducibile.

(ii) Comunque presi due aperti non vuoti U_1 e U_2 si ha[5] *$U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.*

(iii) Ogni aperto non vuoto è denso.

Dimostrazione. $(i) \Rightarrow (ii)$ Sia X irriducibile. $U_i = X \setminus X_i$ per $i = 1, 2$ dove X_i sono chiusi. $U_i \neq \emptyset$ se, e solo se, $X_i \subsetneqq X$. Se $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, allora

$$X_1 \cup X_2 = X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2 = X \setminus (U_1 \cap U_2) = X$$

da cui otteniamo $X = X_1 \cup X_2$, che è un assurdo perché abbiamo supposto X irriducibile.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Per definizione di densità: $\sigma \subset X$ è denso se $\sigma \cap U \neq \emptyset$ per ogni U aperto non vuoto.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Supponiamo per assurdo che $X = X_1 \cup X_2$ con X_i chiusi propri. Definiamo $U_i = X_i^C = X \setminus X_i$ per $i = 1, 2$, allora $U_i \neq \emptyset$. $U_1 \cap U_2 = X \setminus (X_1 \cup X_2) = \emptyset$, ma questo è assurdo perché altrimenti U_1 non sarebbe denso. □

Un altro esempio del legame tra i chiusi affini e gli ideali nell'anello di polinomi è il seguente teorema.

Teorema 26. *Un chiuso affine $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ è irriducibile se, e solo se, l'ideale $I(V)$ è primo nell'anello* $\mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$.

Dimostrazione. Dimostriamo l'affermazione equivalente: V è riducibile se, e solo se, $I(V)$ non è primo. Sia adesso V chiuso riducibile, allora $V = V_1 \cup V_2$ dove $V_i \subsetneqq V$ sono chiusi propri ($V_i \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ sono chiusi).
Per una delle proprietà di I si ha che $I(V_i) \supsetneqq I(V)$ per $i = 1, 2$, allora esistono $F_1, F_2 \in \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$ tali che $F_1|_{V_1} = 0$ e $F_1|_V \neq 0$ così come $F_2|_{V_2} = 0$ e $F_2|_V \neq 0$. Il prodotto F_1F_2 soddisfa $F_1F_2(P) = F_1(P)F_2(P)$

[5] All'altro estremo si trova la proprietà di Hausdorff.

e se $P \in V_1 \cup V_2 = V$ allora o $F_1(P) = 0$ oppure $F_2(P) = 0$, dunque $F_1F_2 \in I(V)$ mentre $F_i \notin I(V)$ per $i = 1, 2$, dunque $I(V)$ non è primo.

Supponiamo adesso che $I(V)$ non sia primo. Quindi esistono $F_1, F_2 \in \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$ con $F_i \notin I(V)$ per $i = 1, 2$ ma tali che $F_1F_2 \in I(V)$. Sia $S_1 = \{F_1\} \cup I(V)$ e sia $S_2 = \{F_2\} \cup I(V)$. Poniamo

$$V_i = V(S_i) = V(\{F_i\} \cup I(V)) = V(F_i) \cap V(I(V)) = V(F_i) \cap V = \{x \in V : F_i(x) = 0\}.$$

Concludiamo che $V_i \subset V$ è un chiuso come intersezione di chiusi e $V_i \subsetneqq V$ perché $F_i \notin I(V)$. Dimostriamo che $V = V_1 \cup V_2$: se $P \in V$, dal fatto che $F_1F_2 \in I(V)$, allora $F_1(P)F_2(P) = 0$, quindi o $P \in V_1$ $(F_1(P) = 0)$ oppure $P \in V_2$ $(F_2(P) = 0)$, allora V è riducibile. □

Esempio. Sia k un campo infinito. Consideriamo $V = \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$. L'ideale $I(V)$ soddisfa

$$I(V) = \{F(t_1, \ldots, t_n) : F(c_1, \ldots, c_n) = 0 \text{ per ogni } (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}\}$$

allora per il principio di identità dei polinomi si ha che $F = 0$, da cui $I(V) = 0$, ma $\mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$ è un dominio di integrità e dunque (0) è un ideale primo, da cui $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ è irriducibile per il Teorema 26. Notiamo che per $n = 1$ l'irriducibilità di $\mathbb{A}^1_{\mathsf{k}}$ è stata dimostrata con un argomento diverso.

Proprietà degli spazi topologici noetheriani

1. Sia X uno spazio noetheriano. Sia $Y \subset X$ un sottoinsieme dotato della topologia indotta (sottospazio). Allora Y è noetheriano.

   Dimostrazione. Sia $Y = Y_0 \supset Y_1 \supset \ldots \supset Y_n \supset \ldots$ una catena di chiusi di Y. Ogni Y_i è del tipo $Y_i = Y \cap X_i$ dove $X_i \subset X$ è un chiuso. Vogliamo far vedere che possiamo modificare $Y_i = Y \cap X_i'$ dove $X_0' \supset X_1' \supset \ldots$: prendiamo $Y_1 = Y \cap X_1 = Y \cap X_1'$ e $Y_2 = Y \cap X_2$, ma $Y_2 \subset Y_1$, dunque $Y_2 \subset X_1$, allora possiamo scrivere $Y_2 = Y \cap X_2 = Y \cap (X_1 \cap X_2)$ e prendere $X_1 \cap X_2 = X_2'$.

   Allo stesso modo $Y_3 = Y \cap X_3$ e $Y_3 \subset Y_2 \subset Y_1$, quindi Y_3 è contenuto in X_1 e X_2, pertanto $Y_3 = Y \cap X_3 = Y \cap (X_1 \cap X_2 \cap X_3) = Y \cap X_3'$, dove $X_3' = X_1 \cap X_2 \cap X_3$.

   Continuando nello stesso modo viene creata una catena discendente di chiusi $X_1' \supset X_2' \supset X_3' \supset \ldots$ in X, tale che $Y_i = Y \cap X_i'$, ma X è spazio noetheriano, dunque la catena è stazionaria, allora anche $Y \cap X_1' \supset Y \cap X_2' \supset \ldots$ è stazionaria e dunque Y è noetheriano. □

2. Se X è unione finita di sottospazi noetheriani, allora X è noetheriano.

   Dimostrazione. Sia $X = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m$ e ogni Y_i è noetheriano. Sia $X = X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_m \supset \ldots$ una catena di chiusi di X. Per ogni $r = 1, \ldots, m$ la catena $Y_r \cap X_1 \supset Y_r \cap X_2 \supset \ldots \supset Y_r \cap X_m \supset \ldots$ è stazionaria essendo una catena di chiusi in Y_r. Poniamo $Y_r \cap X_j = Y_{rj}$, allora per ogni $r = 1, \ldots, m$ esiste $s_r \in \mathbb{N}$ tale che $Y_{rs_r} = Y_{rs_r+1} = \ldots$.

   Sia $s = \max_{1 \le r \le m} \{s_r\}$, allora $Y_{rs} = Y_{rs+1} = \ldots$ per ogni $r = 1, \ldots, m$. Allora la catena di chiusi relativa ad X si stabilizza a partire da s, in effetti

   $$X_i = \bigcup_{r=1}^{m} (Y_r \cap X_i) = \bigcup_{r=1}^{m} Y_{ri}$$

   e dunque $X_s = X_{s+1} = \ldots$ perché per $i = s, s+1, \ldots$ gli Y_{ri} sono sempre gli stessi per $\forall r$. □

3. Ogni spazio noetheriano è quasi compatto[6].

   Dimostrazione. Sia $X = \cup_{i \in I} U_i$. Sia $i_1 \in I$ e se $U_{i_1} = X$ allora abbiamo finito, se $U_{i_1} \neq X$, esiste $i_2 \in I$ tale che $U_{i_1} \subsetneqq U_{i_1} \cup U_{i_2}$. Se $U_{i_1} \cup U_{i_2} = X$ abbiamo finito, altrimenti esiste $i_3 \in I$ tale che

[6] Per spazio compatto intendiamo uno spazio di Hausdorff per cui da ogni ricoprimento è possibile estrarre un sottoricoprimento finito. Per spazio quasi compatto intenderemo uno spazio che verifica la condizione sui ricoprimenti, ma non necessariamente la condizione sugli spazi di Hausdorff.

$U_{i_1} \subsetneqq U_{i_1} \cup U_{i_2} \subsetneqq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup U_{i_3}$.
Ripetendo otteniamo due possibilità: o tra un numero finito di passi $X = U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_r}$ e dunque otteniamo un sottoricoprimento finito, oppure si ottiene una catena di aperti

$$U_{i_1} \subsetneqq U_{i_1} \cup U_{i_2} \subsetneqq \ldots \subsetneqq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots \cup U_{i_r} \subsetneqq \ldots .$$

In questo caso passando ai complementari otteniamo

$$X_1 \supsetneqq X_2 \supsetneqq \ldots \supsetneqq X_r \supsetneqq \ldots$$

catena di chiusi non stazionaria, ma questo è un assurdo perché X è noetheriano. □

Teorema di scomposizione unica per spazi irriducibili

LEMMA 27. *Sia X uno spazio topologico noetheriano. Sia Σ una famiglia di chiusi e sia $\Sigma \neq \emptyset$, allora Σ possiede un elemento minimo rispetto all'inclusione*[7].

Dimostrazione. Sia $X_1 \in \Sigma$, se X_1 è minimo, abbiamo finito. Se non lo è allora esiste $X_2 \in \Sigma$ tale che $X_1 \supsetneqq X_2$. Se X_2 è minimo, allora va bene, se non lo è esisterà $X_3 \in \Sigma$ tale che $X_1 \supsetneqq X_2 \supsetneqq X_3$.
Iterando il ragionamento, abbiamo due possibilità: o $X_1 \supsetneqq X_2 \supsetneqq \ldots \supsetneqq X_r$ con X_r elemento minimo, oppure $X_1 \supsetneqq X_2 \supsetneqq \ldots \supsetneqq X_r \supsetneqq \ldots$, ma ciò è impossibile perché X è noetheriano. □

LEMMA 28. *Sia X uno spazio topologico. Una scomposizione $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m$ in insiemi chiusi irriducibili si dice non cancellabile se è soddisfatta una delle seguenti condizioni equivalenti*

1. *$\forall i$ si ha $X_i \not\subset \bigcup_{i \neq j} X_j$;*
2. *$\forall i \neq j$ si ha $X_i \not\subset X_j$.*

Dimostrazione. Se la 2. non è soddisfatta, allora esiste $i \neq j$ tale che $X_i \subset X_j \subset \bigcup_{l \neq i} X_l$, dunque non è soddisfatta la 1.
Se non è soddisfatta la 1., allora esiste i tale che $X_i \subset \bigcup_{i \neq j} X_j$. Possiamo scivere

$$X_i = \bigcup_{j \neq i} (X_i \cap X_j) = \bigcup_{j \neq i} Y_j \quad \text{con} \quad Y_j = X_i \cap X_j,$$

Y_j sono chiusi in X_i per $j \neq i$. Se tutti gli Y_j fossero diversi da X_i, allora X_i sarebbe riducibile per il lemma 24, quindi esisterebbe un $j \neq i$ tale che $Y_j = X_i$, cioè $X_i \subset X_j$ e dunque la 2. non è soddisfatta. □

TEOREMA 29. *Sia X uno spazio noetheriano, allora esiste una scomposizione non cancellabile in sottinsiemi chiusi irriducibili $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m$. La scomposizione è unica a meno di permutazione (riordinamento) dei componenti.*

Dimostrazione. Dimostreremo l'assunto per passi.
Passo 1 (esistenza di scomposizione in irriducibili): Sia Σ la famiglia dei chiusi in X per i quali non esiste scomposizione finita in chiusi irriducibili. Vogliamo far vedere che $\Sigma = \emptyset$, allora supponiamo per assurdo che $\Sigma \neq \emptyset$.
Secondo il lemma 27 Σ possiede un elemento Z minimo. Vi sono due possibilità:

1. Z è irriducibile, dunque $Z = Z$ e questa è una scomposizione finita in irriducibili, ma questo è un assurdo.

[7] Osserviamo che quest'affermazione è simile a quanto detto per gli anelli noetheriani.

2. $Z = Z_1 \cup Z_2$ dove $Z_i \subsetneq Z$ chiusi propri. $Z_i \notin \Sigma$ perché Z è minimo, allora $Z_1 = V_1 \cup \ldots \cup V_l$ e $Z_2 = W_1 \cup \ldots \cup W_s$ con V_i, W_j irriducibili. Da tutto ciò deduciamo che

$$Z = (V_1 \cup \ldots \cup V_l) \cup (W_1 \cup \ldots \cup W_s)$$

ma questo è assurdo perché $Z \in \Sigma$.

Passo 2 (esistenza di una scomposizione non cancellabile): Sia $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$ una scomposizione con un numero di componenti minimo, allora $X_i \not\subset \bigcup_{j \neq i} X_j$ per ogni i, altrimenti esisterebbe una scomposizione con un numero di termini inferiore.

Passo 3 (unicità): Dobbiamo dimostrare l'unicità della scomposizione non cancellabile in chiusi irriducibili. Supponiamo che esistano due scomposizioni non cancellabili in chiusi irriducibili di X, dunque che X si possa scrivere come

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_r = Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_l.$$

Il chiuso X_i è irriducibile e si ha

$$X_i = X_i \cap X = X_i \cap (Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_l) = \bigcup_{j=1}^{l} (X_i \cap Y_j)$$

dove $X_i \cap Y_j \subset X_i$ chiusi in X_i. Se tutti gli $X_i \cap Y_j$ fossero propri, secondo un lemma dimostrato (lemma 24) X_i sarebbe riducibile, quindi esiste $j = j(i)$ tale che $X_i \subset Y_{j(i)} = Y_j$.
Scambiando i posti X_s e Y_t e ripetendo l'argomento esiste $s = s(j)$ tale che $X_i \subset Y_j \subset X_s$. Essendo la scomposizione non cancellabile, deve essere $i = s$, allora per ogni i esiste $j(i)$ tale che $X_i = Y_{j(i)}$. Viceversa, per ogni $t = 1, \ldots, l$ esiste $i(t)$ tale che $Y_t = X_{i(t)}$.
Così otteniamo due applicazioni

$$\{1, \ldots, r\} \xrightarrow{j} \{1, \ldots, l\} \quad \text{e} \quad \{1, \ldots, r\} \xleftarrow{i} \{1, \ldots, l\}$$

e poiché le scomposizioni sono non cancellabili, le due applicazioni sono una l'inversa dell'altra

$$X_a = Y_{j(a)} = X_{i(j(a))} \quad \Rightarrow \quad a = i(j(a)).$$

Similmente $\forall b \in \{1, \ldots, l\}$ si ha $j(i(b)) = b$. Concludiamo che $r = l$ e $\{X_i\} = \{Y_j\}$ a meno di rinumerazione. $\square$

Teorema degli Zeri di Hilbert

Definizione 30. Sia $B \subset A$ un sottoanello.

1. Si dice che A *è finitamente generato su* B se esistono $x_1, \ldots, x_n \in A$ tale che $\forall a \in A$ ha una rappresentazione del seguente tipo

$$a = \sum_{i_\alpha \geq 0} b_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}.$$

   Non è richiesta l'unicità di tale rappresentazione. Osserviamo che a è il valore del polinomio a coefficienti in B nelle variabili t_i valutato negli x_i e se la scrittura fosse unica per ogni $a \in A$, l'anello A sarebbe isomorfo all'anello dei polinomi a coefficienti in B nelle variabili t_i.

2. A è *finito su* B se esistono $x_1, \ldots, x_n \in A$ tale che $\forall a \in A$ si ha $a = b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n$ per qualche $b_1, \ldots, b_n \in B$. Osserviamo che questa definizione è un caso particolare della precedente.

   La prima definizione che abbiamo dato si può anche formulare così: A è finitamente generato su B se l'omorfismo di anelli

$$B[t_1, \ldots, t_n] \longrightarrow A \quad \text{tale che} \quad t_i \mapsto x_i$$

   è surgettivo.

Per esempio, se $B = \mathsf{k}$ campo e consideriamo $A = \mathsf{k}[t_1, \dots, t_n]$, allora A è finitamente generato su k da $x_1 = t_1, \dots, x_n = t_n$, però non è finito su k. Infatti possiamo vedere la seconda parte della definizione 30 nel caso in cui $B = \mathsf{k}$ campo come A spazio vettoriale di dimensione finita su B, ma osserviamo che in questo caso A non può essere finito perché $\{T_1^{i_1}, \dots, T_n^{i_n}\}$ formano una base infinita di A su k, allora uno spazio vettoriale non può essere di dimensione finita se ha una base infinita.

Definizione 31. Dato un anello A, un campo k è un omomorfismo $\varepsilon : \mathsf{k} \to A$ ($\varepsilon(1) = 1$ ed ε è necessariamente iniettivo), allora si dice che A è una $\mathsf{k}-$algebra.

Per esempio, $A = \mathsf{k}[t_1, \dots, t_n]$ e $\varepsilon : \mathsf{k} \to A$ tale che $\varepsilon(c) =$ polinomio costante c, allora A è una $\mathsf{k}-$algebra, ma anche tutti i quozienti rispetto ad ideali propri lo sono, perché basta comporre ε con la proiezione canonica sul quoziente.

Osserviamo che se abbiamo un anello A con somma e prodotto e un suo sottoanello è un campo, possiamo dare una definizione analoga prendendo come campo proprio il sottoanello di A. Da questo momento considereremo spesso anelli A che sono $\mathsf{k}-$algebre.

Teorema 32 *[Lemma di Zariski] Sia k un campo e sia L una $\mathsf{k}-$algebra determinata da $\varepsilon : \mathsf{k} \to L$. Sia $k' = \varepsilon(\mathsf{k})$. Se L è finitamente generata su k' e se L è un campo, allora L è finita su k', cioè L è estensione finita del campo k'.*

Corollario 33 *Nell'ipotesi del teorema supponiamo che k sia algebricamente chiuso. Allora $\varepsilon : \mathsf{k} \to L$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. $\varepsilon : \mathsf{k} \to k'$ è un isomorfismo e L è estensione finita del campo algebricamente chiuso k'. Quindi $k' = L$. □

Teorema 34 (Teorema degli Zeri di Hilbert). *Sia k un campo algebricamente chiuso. Sia $A = \mathsf{k}[t_1, \dots, t_n]$, allora valgono le seguenti proprietà*

1. *Ogni ideale massimale $\mathfrak{m} \subset A$ ha la forma*

$$\mathfrak{m} = (t_1 - a_1, \dots, t_n - a_n) = I(P)$$

   per qualche punto $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$.

2. *Se J è un ideale di A, $J \neq (1)$, allora[8] $V(J) \neq \emptyset$.*

3. *Siano $F_1, \dots, F_m \in \mathsf{k}[t_1, \dots, t_n]$ e sia V il chiuso affine $\{F_1 = 0, \dots, F_m = 0\}$. Se $G(t_1, \dots, t_n)$ si annulla in ogni punto di V, allora $G^r \in (F_1, \dots, F_m)$ per qualche r.*

4. *Per ogni ideale $J \subset A$ vale l'uguaglianza $I(V(J)) = \sqrt{J}$.*

Prima della dimostrazione facciamo un'osservazione: l'ipotesi che k è algebricamente chiuso è essenziale. Sia k il campo dei reali e sia $f(T) = T^2 + 1$, allora $J = (T^2 + 1)$ e $V(J) = \{T^2 + 1 = 0\} = \emptyset$, ma $J \neq (1) = \mathbb{R}[T]$ perché esistono polinomi in $\mathbb{R}[T]$ non divisibii per $T^2 + 1$.

Dimostrazione. (1) Sia $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$. Dimostriamo che $I(P)$ è massimale. Si considera l'omomorfismo $\pi : \mathsf{k}[t_1, \dots, t_n] \longrightarrow \mathsf{k}$ definito da $\pi(f(t_1, \dots, t_n)) = f(a_1, \dots, a_n)$, $\ker \pi = I(P)$ e $\mathrm{Imm}(\pi) = \mathsf{k}$ perché $\pi(\text{polinomio costante}\, c) = c$, allora $A/I(P) \simeq \mathsf{k}$ e $I(P)$ è massimale.

Dimostriamo che $I(P) = (t_1 - a_1, \dots, t_n - a_n)$. Prima consideriamo il caso $P = (0, 0, \dots, 0)$, allora

$$I(P) = \{F : F(0, 0, \dots, 0) = 0\} = \left\{ F : \sum_{i_1 + \dots + i_n > 0} a_{i_1 \dots i_n} t_1^{i_1} \dots t_n^{i_n} \right\} = (t_1, \dots, t_n)$$

[8] Quest'affermazione è una sorta di teorema di esistenza di soluzioni per un sistema di polinomi, perché per avere soluzioni basta andare a studiare l'ideale generato da tali polinomi e capire se è proprio oppure no.

perché se il termine noto di un polinomio F è 0, almeno un t_i ci deve comparire in ogni monomio di F.

Sia $P = (a_1, \ldots, a_n)$. Sia $F \in I(P)$, cioè $F(a_1, \ldots, a_n) = 0$ e sia $G(s_1, \ldots, s_n) = F(a_1 + s_1, \ldots, a_n + s_n)$, se $s_i = 0$, allora

$$G(0, 0, \ldots, 0) = F(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

e dunque $G = G_1 s_1 + \ldots + G_n s_n$ per quanto abbiamo dimostrato. Se prendiamo $s_i = t_i - a_i$ otteniamo

$$F = G(t_1 - a_1, \ldots, t_n - a_n) = F_1 \cdot (t_1 - a_1) + \ldots + F_n \cdot (t_n - a_n) \in (t_1 - a_1, \ldots, t_n - a_n)$$

e dunque $I(P) \subset (t_1 - a_1, \ldots, t_n - a_n)$. L'inclusione inversa $(t_1 - a_1, \ldots, t_n - a_n) \subset I(P)$ è ovvia perché in $(t_1 - a_1, \ldots, t_n - a_n)$ ci sono combinazioni lineari di $t_i - a_i$, dunque sostituendo a_i in t_i si ottiene zero.

In conclusione abbiamo dimostrato che per ogni $P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ si ha $I(P) = (t_1 - a_1, \ldots, t_n - a_n)$ e questo è un ideale massimale. Dobbiamo dimostrare che ogni ideale massimale è di questa forma.

Sia $\mathfrak{m} \subset \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$ un ideale massimale e sia $L = A/\mathfrak{m}$. Poniamo $b_i = t_i + \mathfrak{m}$, $b_i \in L$ e consideriamo le applicazioni

$$\mathsf{k} \xrightarrow{\varepsilon} \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n] \xrightarrow{\pi} L = A/\mathfrak{m}$$

dove $\varepsilon(c) =$ polinomio costante c e π è la proiezione sul quoziente. Sia $\varphi = \pi \circ \varepsilon : \mathsf{k} \to L$. Sia $\mathsf{k}' = \varphi(\mathsf{k})$, $\mathsf{k}' \subset L$ sottocampo. L è finitamente generato dagli elementi $b_1, \ldots, b_n$ su k'. L è un campo e k è algebricamente chiuso, dunque secondo il Corollario 33 $\varphi : \mathsf{k} \to L$ è un isomorfismo, cioè $\mathsf{k}' = L$. Siano $a_i \in \mathsf{k}$ tali che $\varphi(a_i) = b_i$ e dunque poniamo $P = (a_1, \ldots, a_n)$ e adesso rimane da far vedere che $I(P) \subset \mathfrak{m}$. Sarebbe più preciso scrivere $t_i - \varepsilon(a_i)$ piuttosto che a_i perché con $\varepsilon(a_i)$ intendiamo a_i come polinomio costante. Verifichiamo che $\pi\left(t_i - \varepsilon(a_i)\right) = 0$ per ogni i, ricordando che $\mathfrak{m} = \ker \pi$

$$\pi\left(t_i - \varepsilon(a_i)\right) = b_i - \pi\left(\varepsilon(a_i)\right) = b_i - \varphi(a_i) = b_i - b_i = 0.$$

Dal fatto che $t_1 - a_1, \ldots, t_n - a_n \in \mathfrak{m}$ e $(t_1 - a_1, \ldots, t_n - a_n)$ è ideale massimale segue che

$$(t_1 - a_1, \ldots, t_n - a_n) = \mathfrak{m},$$

cioè $\mathfrak{m}$ è del tipo $I(P)$.

(2) Sia $J \neq (1)$ ideale proprio, allora esiste un ideale massimale $\mathfrak{m}$ tale che $J \subset \mathfrak{m}$ (lo abbiamo dimostrato per anelli noetheriani in genere, ma $A = \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$ è noetheriano). Secondo la prima parte si ha $\mathfrak{m} = I(P)$ per qualche P, allora $J \subset I(P)$ e adesso applichiamo V: $V(J) \supset V\left(I(P)\right) = \{P\}$ perché i punti sono chiusi, dunque $V(J) \neq \emptyset$.

(3) Siano $F_1, \ldots, F_m \in A = \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$ e sia $G \in A$ tale che G si annulli in $V(F_1, \ldots, F_m)$. Introduciamo una nuova variabile U e si consideri il sistema in $n+1$ variabili

$$\begin{cases} F_1(t_1, \ldots, t_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(t_1, \ldots, t_n) = 0 \\ U \cdot G(t_1, \ldots, t_n) - 1 = 0 \end{cases} .$$

Questo sistema non ha soluzioni in $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathsf{k}}$ perché se $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$ fosse una tale soluzione, allora si avrebbe $(a_1, \ldots, a_n) \in V(F_1, \ldots, F_m)$ e quindi $a_{n+1} G(a_1, \ldots, a_n) - 1 = 0$, cioè $-1 = 0$ perché G si annulla nei punti di $V(F_1, \ldots, F_m)$, zeri comuni agli F_i.

Secondo la seconda parte l'ideale generato da $F_1, \ldots, F_m, UG - 1$ non può essere proprio, altrimenti il sistema avrebbe soluzioni, quindi sussiste una relazione del tipo

$$(**) \quad h_1(t_1, \ldots, t_n, U) F_1(t_1, \ldots, t_n) + \ldots + h_m(t_1, \ldots, t_n, U) F_m(t_1, \ldots, t_n) + \\ + h_{m+1}(t_1, \ldots, t_n, U)\left(U \cdot G(t_1, \ldots, t_n) - 1\right) = 1.$$

Sia adesso R il campo dei quozienti di $\mathsf{k}[t_1,\dots,t_n]$ composto da tutte le funzioni razionali di elementi di $\mathsf{k}[t_1,\dots,t_n]$, e consideriamo l'omomorfismo

$$\psi : \mathsf{k}[t_1,\dots,t_n,U] \longrightarrow R$$

di $\mathsf{k}-$algebre, definito sulle indeterminate[9] da $\psi(t_i) = t_i$ per $i = 1,\dots,n$ e $\psi(U) = \frac{1}{G}$. Per questo motivo abbiamo preso il campo dei quozienti R, per poter definire l'immagine di U in questo modo.
Applichiamo l'omomorfismo ψ ad $(**)$ e si ottiene

$$h_1\left(t_1,\dots,t_n,\frac{1}{G}\right)F_1(t_1,\dots,t_n)+\dots+h_m\left(t_1,\dots,t_n,\frac{1}{G}\right)F_m(t_1,\dots,t_n)+$$
$$+h_{m+1}\left(t_1,\dots,t_n,\frac{1}{G}\right)\left(\frac{1}{G}\cdot G-1\right)=1.$$

e dunque l'omomorfismo ψ è servito ad annullare l'ultimo termine

$$h_1\left(t_1,\dots,t_n,\frac{1}{G}\right)F_1(t_1,\dots,t_n)+\dots+h_m\left(t_1,\dots,t_n,\frac{1}{G}\right)F_m(t_1,\dots,t_n)=1.$$

Faccendo il minimo comune multiplo in h_1 si ottiene una potenza di G, analogo per $h_2,\dots,h_n$, dunque esisterà un r per cui

$$\frac{p_1(t_1,\dots,t_n)F_1(t_1,\dots,t_n)+\dots+p_m(t_1,\dots,t_n)F_m(t_1,\dots,t_n)}{G^r}=1$$

da cui $G^r \in (F_1,\dots,F_m)$.

(4) Vogliamo dimostrare che $I(V(J)) = \sqrt{J}$. Per il teorema della base J è finitamente generato, dunque $J = (F_1,\dots,F_m)$ e vediamo perché $\sqrt{J} \subset I(V(J))$: se $G \in \sqrt{J}$, allora esiste un r per cui $G^r \in J = (F_1,\dots,F_m)$ e dunque

$$G^r = H_1F_1+\dots+H_mF_m.$$

Se $P \in V(F_1,\dots,F_m) = V(J)$, sostituendo si ha

$$G^r(P) = H_1(P)F_1(P)+\dots+H_m(P)F_m(P) = 0$$

da cui $G(P) = 0$ e dunque $G \in I(V(J))$. Viceversa se $G \in I(V(J))$, allora G si annulla su $V(F_1,\dots,F_m)$ e applicando la terza parte si ha che $G^r \in (F_1,\dots,F_m) = J$, dunque $G \in \sqrt{J}$. $\square$

Corollari del teorema degli zeri

Corollario 35. *Sia $A = \mathsf{k}[t_1,\dots,t_n]$ dove k è algebricamente chiuso. Vi sono le seguenti applicazioni*

$$\{\textit{ideali in } A\} \xrightarrow{V} \{\textit{chiusi affini in } \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}\} \quad e \quad \{\textit{ideali in } A\} \xleftarrow{I} \{\textit{chiusi affini in } \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}\}$$

che stabiliscono le biiezioni seguenti

(a) $\{\textit{ideali radicali in } A\} \overset{V}{\underset{I}{\longleftrightarrow}} \{\textit{chiusi affini in } \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}\}$

(b) Come specializzazione della (a) si ha $\{\textit{ideali primi in } A\} \overset{V}{\underset{I}{\longleftrightarrow}} \{\textit{chiusi irriducibili in } \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}\}$

(c) $\{\textit{ideali massimali in } A\} \overset{V}{\underset{I}{\longleftrightarrow}} \{\textit{punti di } \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}\}$

[9] Poiché trattasi di un omomorfismo di $\mathsf{k}-$algebre basta definirlo sulle indeterminate ed estenderlo prima sui monomi e poi per linearità.

Dimostrazione. (a) V ed I sono ben definite: ad ogni ideale radicale con V associamo un chiuso affine di $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ e ad ogni chiuso affine X associamo con I un ideale $I(X)$ radicale per ogni $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$.
Adesso bisogna fare vedere che le due composizioni sono l'identità: se $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ è chiuso affine allora $V(I(X)) = X$ (già dimostrato) e se $J \subset A$ è un ideale radicale, allora per il teorema degli zeri si ha $I(V(J)) = \sqrt{J} = J$ perché J è un ideale radicale.

(b) X è irriducibile se, e solo se, $I(X)$ è primo (già dimostrato), abbiamo così ristretto l'affermazione (a).

(c) è la prima parte del teorema degli zeri. $\square$

COROLLARIO 36. *Sia* k *un campo algebricamente chiuso. Consideriamo un sistema polinomiale*

$$(*) \qquad \begin{cases} F_1(\underline{t}) = 0 \\ \vdots \\ F_m(\underline{t}) = 0 \end{cases}$$

dove $\underline{t} = (t_1, \dots, t_n)$. *Il sistema possiede soluzioni in* k^n *se, e solo se, l'ideale* $(F_1, \dots, F_m) \neq (1)$.

Dimostrazione. $(\Leftarrow)$ è la parte seconda del teorema degli zeri.
$(\Rightarrow)$ Sia $P = (a_1, \dots, a_n)$ una soluzione del sistema $(*)$. Supponiamo per assurdo che $(F_1, \dots, F_m) = (1)$, allora $1 = G_1(\underline{t})F_1(\underline{t}) + \dots + G_m(\underline{t})F_m(\underline{t})$. Sostituendo $t_i = a_i$ per $i = 1, \dots, n$ si ha $1 = 0$, che è un assurdo. Quindi $(F_1, \dots, F_m) \neq (1)$. $\square$

Questo corollario si può riformulare così

COROLLARIO 37. *Sia* k *algebricamente chiuso. I polinomi* $F_1, \dots, F_m$ *non hanno zeri comuni se, e solo se, sussiste una relazione (partizione dell'unità)* $G_1F_1 + \dots + G_mF_m = 1$ *per qualche* $G_1, \dots, G_m$.

Abbiamo visto che sono presenti soluzioni se l'ideale generato è proprio, dunque se esistono G_i tale che $\sum_i G_iF_i = 1$, allora $1 \in (F_1, \dots, F_m)$.

Esempio. Siano $f, g \in \mathbb{C}[x]$. Allora f e g non hanno zeri comuni se, e solo se, sono primi fra loro, in quanto i polinomi irriducibili $\mathbb{C}[x]$ sono del tipo $x - \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{C}$, quindi se, e solo se, esistono $u(x)$ e $v(x)$ tali che $uf + vg = 1$, in quanto l'ideale (f, g) è l'ideale principale generato dal massimo comune divizore di f e g.

Fattorialità dell'anello $\mathsf{k}[t_1, \dots, t_n]$
Ricordiamo alcune nozioni di algebra:
1. un elemento c di un anello A è invertibile[10] se esiste $c' \in A$ tale che $cc' = 1$;
2. un elemento $p \in A$ si dice elemento primo (o irriducibile) se ogni divisore q di p: $p = qx$, è o invertibile, o $q = cp$ con c invertibile;
3. due elementi $a, b \in A$ si dicono associati[11] se $b = ca$ per $c \in A$ invertibile.

DEFINIZIONE 38. Un anello A si dice *fattoriale* se è dominio di integrità A, se ogni $a \in A$, $a \neq 0$, possiede una scomposizione $a = cp_1^{l_1} \dots p_m^{l_m}$ dove c è invertibile e p_i sono primi, p_i e p_j non associati per $i \neq j$ e se tale scomposizione è unica per ogni $a \neq 0$ nel senso che se $a = c_1q_1^{r_1} \dots q_l^{r_l}$, allora $m = l$ e a meno di riordine p_1 è associato a q_1 (differiscono per un elemento invertibile), $l_1 = r_1$, p_2 è associato a q_2 e $l_2 = r_2$, ..., p_m è associato a q_m e $l_m = r_m$.

In $\mathbb{Z}$ l'unicità della scomposizione è più diretta, perché basta scegliere i primi positivi, così come per $\mathsf{k}[t]$ basta prendere i coefficienti direttori uguali ad 1, ma in $\mathsf{k}[t_1, \dots, t_n]$ non ci sono scelte canoniche uniche.

[10] In $\mathbb{Z}$ gli invertibili sono ± 1, in $\mathsf{k}[t_1, \dots, t_n]$ sono i polinomi costanti non nulli.
[11] In $\mathsf{k}[t_1, \dots, t_n]$ per esempio sono i polinomi che si ottengono uno dall'altro a meno di una costante $c \neq 0$

Teorema 39. *Se A è fattoriale, allora $A[x]$ è fattoriale.*

Il teorema si dimostra con il lemma di Gauss e adesso vediamo quali sono gli elementi irriducibili di $A[x]$: abbiamo i polinomi costanti $f(x) = p$ dove $p \in A$ è irriducibile e i polinomi $f(x) = a_0x^n + \ldots + a_n$ con $n \geq 1$ e $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$ non hanno divisori primi comuni (sono primi fra di loro) e inoltre se K è il campo dei quozienti di A, $f(x) \in K[x]$ deve essere irriducibile.

Proposizione 40. *Sia k un campo, allora $\mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$ è fattoriale.*

Dimostrazione. Induzione su n: se $n = 1$ allora $\mathsf{k}[t_1]$ è fattoriale (teorema 39).
Sia $\mathsf{k}[t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n] \simeq A[t_n]$ dove $A = \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_{n-1}]$ in modo unico. Per l'ipotesi induttiva A è fattoriale, dunque $\mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$ è fattoriale. $\square$

Ipersuperfici
Sia k algebricamente chiuso[12]. Un sottoinsieme $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ si dice *ipersuperficie* se

$$X = V(F) = \{F(t_1, \ldots, t_n) = 0\}$$

per qualche $F \in \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$, dove F è un polinomio non costante. Per esempio le coniche o le quadriche sono di questo tipo.

Lemma 41. *Supponiamo che F sia irriducibile. Sia $X = V(F)$ ipersuperficie, allora*

(a) $I(X) = (F)$;

(b) $I(X)$ è ideale primo di $\mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$;

(c) X è un chiuso affine irriducibile.

Dimostrazione. (a) Sia $J = (F)$, allora $I(X) = I(V(J)) = \sqrt{J}$ per il teorema degli zeri. Sia $G \in \sqrt{J}$, cioè $F \mid G^r$ per qualche $r \in \mathbb{N}$. Essendo $\mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$ fattoriale, nella scomposizione di G in prodotto di polinomi irriducibili, uno dei fattori è associato ad F, quindi $F \mid G$ e $G \in (F)$, da cui otteniamo che $I(X) = \sqrt{(F)} = (F)$ perché l'altra inclusione è sempre verificata.

(b) Un fatto vero su ogni anello fattoriale è che se $p \in A$ è un elemento primo di un anello fattoriale, allora $\mathfrak{p} = (p)$ è ideale primo. In effetti se $xy \in \mathfrak{p}$, allora $p \mid xy$ e dunque p deve entrare nella scomposizione di x o di y, cioè p deve essere associato ad un fattore irriducibile di x o di y, da cui si ha che o $p \mid x$ oppure $p \mid y$.

La (c) segue da (a) e (b) perché essendo $I(X) = (F)$ ideale primo, sappiamo che X è irriducibile secondo il Teorema 27. $\square$

Adesso faremo vedere come la scomposizione di un'ipersuperficie corrisponde alla scomposizione in prodotto di polinomi irriducibili del polinomio a cui è associata

Proposizione 42. *Sia $F \in \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$ un polinomio non costante e sia $X = V(F)$. Sia $F = cF_1^{l_1} \ldots F_m^{l_m}$ dove F_i sono irriducibili, F_i e F_j non sono proporzionali per nessun i e j diversi, allora*

$$X = V(F) = V(F_1) \cup V(F_2) \cup \ldots \cup V(F_m)$$

è la scomposizione non cancellabile in chiusi irriducibili di X.

Dimostrazione. Un punto è zero di F, se e solo se è zero di almeno un F_i, dunque si ha

$$X = V(F) = V(F_1) \cup V(F_2) \cup \ldots \cup V(F_m).$$

[12]Da ora in poi assumeremo che k sia sempre algebricamente chiuso, altrimenti lo specificheremo.

I chiusi $V(F_i)$ sono irriducibili secondo il Lemma 41. Verifichiamo che la scomposizione non è cancellabile. Supponiamo per assurdo che $V(F_i) \subset V(F_j)$ per qualche $i \neq j$, allora applicando I si ha

$$I\left(V(F_i)\right) \supset I\left(V(F_j)\right)$$

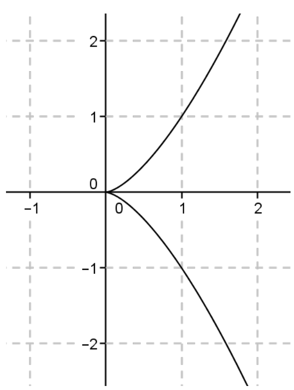
e dunque per il lemma 41 si ha $(F_i) \supset (F_j)$, da cui $F_j \in (F_i)$ e $F_i \mid F_j$, ma questo è un assurdo perché F_i e F_j sono irriducibili e non proporzionali tra di loro, F_i ed F_j non possono essere costanti. $\square$
A cosa è uguale $I(X)$, se X è una ipersuperficie?

$$I(X) = I\left(V(F)\right) = I\left(V(cF_1^{l_1} \dots F_m^{l_m})\right) = \sqrt{(cF_1^{l_1} \dots F_m^{l_m})} = (F_1F_2 \dots F_m).$$

Diamo adesso degli esempi di ipersuperfici irriducibili:
(a) Sia $F(x,y) = x^2y + x^5 + 1 \in \mathbb{C}[x,y]$, il polinomio è irriducibile? Osserviamo che in y ha grado 1, perché

$$F(x,y) = ay + b \quad \text{con} \quad a = x^2, b = x^5 + 1.$$

Per stabilire se è irriducibile dobbiamo rispondere a due domande: 1. è vero che a, b sono primi fra di loro? Si, x^2 e $x^5 + 1$ lo sono; 2. $ay + b \in \mathsf{k}[y]$, dove k èil campo dei quozienti di $\mathbb{C}[x]$, è irriducibile? Si, perché abbiamo un polinomio di primo grado, dunque $\{F(x,y) = 0\} = V(F)$ è una curva piana irriducibile.



(b) Sia $F(x,y) = y^2 - x^3 \in \mathbb{C}[x,y]$, polinomio che si può scrivere come $F(x,y) = ay^2 + b$ in $\mathbb{C}[x,y]$, dove $a = 1$ e $b = -x^3$ in $A = \mathbb{C}[x]$.
La curva in figura corrisponde ai punti reali di $V(F)$ e osserviamo che a e b sono primi fra di loro, perché a è costante. $y^2 + b \in \mathsf{k}[y]$ con k campo dei quozienti di $\mathbb{C}[x]$ e vogliamo fare vedere che $y^2 + b$ è irriducibile in $\mathsf{k}[y]$.
Trattandosi di un polinomio di grado minore o uguale a 3, decidere se è irriducibile oppure no è semplice perché è sufficiente fare vedere che non ammette radici in $\mathsf{k}[y]$.
Fatto: Un polinomio $g(y) \in \mathsf{k}[y]$ di grado minore o uguale a 3 è riducibile se, e solo se, possiede una radice, dunque se si scompone, almeno uno dei fattori ha grado 1.
Conviene utilizzare Ruffini: A è fattoriale, dunque secondo il criterio di Ruffini se $\alpha = \frac{p}{q}$ fosse una radice di un polinomio $g(y) = a_0y^m + \ldots + a_m$, assumendo p, q primi fra di loro, allora $q \mid a_0$ e $p \mid a_m$.
Applicando al caso specifico, se $\alpha = \frac{p}{q}$ con p, q primi fosse radice di $y^2 + b$, allora $q \mid 1$ e $p \mid b$, da cui $\alpha = cx^l$ con $l \leq 3$, ma $(cx^l)^2 - x^3 = 0$ è un'identità di polinomi impossibile.

(c) *L'ipersuperficie di Fermat*: $F(t_1, \ldots, t_n) = t_1^d + t_2^d + \ldots + t_n^d \in \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_n]$. Si assume che $n \geq 3$, se $d \geq 2$. Affermiamo che il polinomio F è irriducibile e quindi $X = V(F)$ è un chiuso irriducibile. Il caso $d = 1$ è banale e si può ragionare come nell'esempio del punto (a). Se $d \geq 2$ lo proveremo per induzione su $n \geq 3$, perché se $n = 2$ non è vero.
Per $n = 3$ abbiamo $t_1^d + t_2^d + t_3^d \in A[t_1]$ dove $A = \mathbb{C}[t_2, t_3]$, dunque possiamo scriverlo come $g(t_1) = t_1^d + a$, dove $a = t_2^d + t_3^d$ e si ha, ponendo $z = \frac{t_2}{t_3}$

$$\begin{aligned} t_2^d + t_3^d = t_3^d(z^d + 1) = t_3^d(z - w_1)(z - w_2) \ldots (z - w_d) = \\ = (t_2 - w_1t_3)(t_2 - w_2t_3) \ldots (t_2 - w_dt_3) \quad \text{dove} \quad w_i^d = -1 \end{aligned}$$

con le w_i sono tutte radici diverse, i polinomi $t_2 - w_it_3$ sono polinomi irriducibili non associati fra loro.
A questo punto applichiamo il criterio di Eisenstein: dobbiamo trovare un primo $p \in A$ che divide tutti i coefficienti di $g(t_1)$, tranne il coefficiente direttore, e tale che p^2 non divide il termine noto. In questo caso $p = t_2 - w_1t_3$ soddisfa questa condizione, quindi $t_1^d + a \in \mathsf{k}[t_1]$ è irriducibile, dove k è il campo dei quozienti di $A = \mathbb{C}[t_2, t_3]$. Poiché 1 ed a sono primi fra loro, $t_1^d + t_2^d + t_3^d$ è irriducibile in $A[t_1] = \mathbb{C}[t_1, t_2, t_3]$.
Per $n \geq 4$ si ha $t_1^d + (t_2^d + \ldots + t_n^d) = t_1^d + p$ con p irriducibile per ipotesi induttiva, allora applichiamo il Criterio di Eisenstein e concludiamo come prima.

Funzioni e applicazioni polinomiali
Ci chiediamo quando due chiusi affini sono *isomorfi*, quali siano gli isomorfismi e scopriamo che trasformare un problema geometrico in uno algebrico ne semplifica la risoluzione perché il problema algebrico è più semplice da risolvere di quello geometrico.

DEFINIZIONE 43 Sia $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ un chiuso affine. Una funzione $f : V \longrightarrow \mathsf{k}$ si dice *polinomiale* se esiste un polinomio $F(t_1, \dots, t_n) \in \mathsf{k}[t_1, \dots, t_n]$ tale che $\forall P \in V \ f(P) = F(P)$, cioè $f = F|_V$.

L'insieme delle funzioni polinomiali si denota con $A(V)$ oppure con $\mathsf{k}[V]$ e vediamone alcune proprietà: $A(V)$ è un'algebra sul campo k perché se $f = F|_V$ e $g = G|_V$, allora $f \pm g = (F \pm G)|_V$ e $fg = (FG)|_V$, dunque sono ancora funzioni polinomiali; le funzioni costanti $f(P) = c$ dove c è una costante formano un sottoanello di $A(V)$ che in realtà è un sottocampo isomorfo a k, dunque $A(V)$ è una $\mathsf{k}-$algebra.

Per quanto detto l'applicazione $\pi : \mathsf{k}[t_1, \dots, t_n] \to A(V)$ definita da $\pi(F) = F|_V$ è un omomorfismo con nucleo $I(V)$: è un omomorfismo perché valgono le formule ed è surgettivo per la definizione di funzione polinomiale, il nucleo è $I(V)$ perché in $I(V)$ prendiamo di fatto tutti i polinomi che si annullano in V, dunque ne concludiamo che
$$A(V) \simeq \mathsf{k}[t_1, \dots, t_n]/I(V).$$
Per esempio, troviamo $\mathsf{k}[\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}]$. Sappiamo che $I(\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}) = (0)$ per il principio di identità dei polinomi, perché k è algebricamente chiuso e dunque è infinito, allora $\mathsf{k}[\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}] \simeq \mathsf{k}[t_1, \dots, t_n]$.

Avendo introdotto $A(V)$, vogliamo generalizzare la corrispondenza fra chiusi di $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ e ideali di $\mathsf{k}[t_1, \dots, t_n]$ alle algebre $A(V)$ dove V è un chiuso particolare, ma prima qualche richiamo di algebra.

Richiami di algebra. Ricordiamo che un ideale J in A è radicale (primo, massimale) se e solo se A/J è rispettivamente anello ridotto (dominio d'integrità, campo).

LEMMA 44. *Sia $I \subset A$ un ideale. La corrispondenza biunivoca*
$$\{J \supset I : J \text{ ideale}\} \xleftrightarrow{1:1} \{J' \text{ ideale in } A/I\},$$
nota dal teorema degli omorfismi, $J \longrightarrow J' = J/I$ e $\pi^{-1}(J') \longleftarrow J'$, trasforma

1. *ideali radicali in ideali radicali;*
2. *ideali primi in ideali primi;*
3. *ideali massimali in ideali massimali.*

Dimostrazione. (1) Sia $J \supset I$ un ideale in A. J è radicale se, e solo se, A/J è anello ridotto. Sappiamo dal teorema di omomorfismo che $A/J \simeq (A/I)/(J/I)$. La proprietà di un anello di essere ridotto si conserva tramite isomorfismi, quindi l'anello a destra dell'isomorfismo è ridotto se, e solo se, l'annello a sinistra è ridotto. Risulta che J è radicale in A se e solo se J/I è radicale in A/I.

La (2) e la (3) si dimostrano in modo analogo sostituendo alla proprietà *ridotto* di A/J la proprietà *dominio d'integrità* nella (2) e la proprietà *campo* nella (3). □

Proprietà dell'algebra $A(V)$
Sia $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ un chiuso affine. Elenchiamo le proprietà di $A(V)$

* $A(V)$ è un anello ridotto.

  Dimostrazione. Se $f \in A(V)$ e $f^m = 0$, allora $f^m(P) = 0$ per ogni $P \in V$, ma $f^m(P) = (f(P))^m = 0$, dunque $f(P) = 0$ per ogni $P \in V$ e $f = 0$. □

* V è irriducibile se, e solo se, $A(V)$ è dominio di integrità.

  Dimostrazione. Sappiamo che $A(V) \simeq \mathsf{k}[t_1, \dots, t_n]/I(V)$. V è irriducibile se, e solo se, $I(V)$ è primo, quindi se, e solo se, $A(V)$ è dominio di integrità. □

* $A(V)$ è finitamente generato su k dalle funzioni coordinate[13] $x_i = t_i|_V$ per $i = 1, \ldots, n$.
  Dimostrazione. Risulta banale dall'omomorfismo surgettivo $\mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n] \to A(V)$. $\square$

* $A(V)$ è noetheriano perché $A(V) \simeq \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]/I(V)$.

Proposizione 45. *Sia k un campo algebricamente chiuso. Un'algebra B su k è isomorfa a $A(V)$ per qualche chiuso affine V se, e solo se, valgono le seguenti proprietà*

1. *B è finitamente generata su k;*
2. *B è ridotta.*

Dimostrazione. $(\Rightarrow)$ Se $B \simeq A(V)$ allora B possiede le proprietà 1 e 2, l'abbiamo già dimostrato.
$(\Leftarrow)$ Sia B finitamente generata su k e ridotta, vi è un omomorfismo surgettivo $\pi : \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n] \to B$ per qualche n e sia $I = \ker \pi$. B è anello ridotto, dunque I è ideale radicale, cioè $I = \sqrt{I}$. Poniamo $V = V(I) \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$, allora $I(V) = \sqrt{I} = I$ per il teorema degli zeri e quindi

$$A(V) \simeq \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]/I(V) = \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]/I \simeq B. \quad \square$$

Osserviamo che tale caratterizzazione proviene di fatto dal teorema degli zeri.

Molte delle cose viste per l'algebra dei polinomi $\mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$ si possono generalizzare ad un'algebra di funzioni polinomiali definite su un chiuso affine $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$, le algebre $A(V)$.

Definizione 46. Sia $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ un chiuso affine. Sia $W \subset V$ e si denota con $I_V(W)$ l'insieme

$$I_V(W) = \{f \in A(V) : f|_W = 0\}.$$

È chiaro che $I_V(W)$ è un ideale radicale in $A(V)$. Ricordiamo che

$$I(W) = \{F \in \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n] : F|_W = 0\}$$

Vediamo qual'è la relazione tra $I(W)$ e $I_V(W)$. Inanzitutto si ha che $I(W) \supset I(V)$ perché un polinomio che si annulla su V si annulla in particolare anche su W. Consideriamo adesso l'omomorfismo surgettivo

$$\pi : \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n] \to A(V) \quad \text{definito da} \quad \pi(F) = F|_V$$

il quale nucleo è $\ker \pi = I(V)$. Esso induce un isomorfismo

$$\overline{\pi} : \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]/I(V) \xrightarrow{\sim} A(V)$$

per cui si ha

$$(*) \qquad \overline{\pi}\,(I(W)/I(V)) = I_V(W).$$

Dimostriamo questa affermazione. Sia $F \in \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$ e sia $f = F|_V \in A(V)$. Allora $F \in I(W) \Leftrightarrow F|_W = 0$ $\Leftrightarrow$ $f|_W = 0$ (in quanto $W \subset V$) $\Leftrightarrow$ $f \in I_V(W)$. Questo si può riformulare nel modo seguente:

$$\pi\,(I(W)) = I_V(W) \quad \text{e} \quad I(W) = \pi^{-1}\,(I_V(W))$$

che dimostra l'affermazione $(*)$.

[13] Le n funzioni coordinate su V associano ad ogni punto $P \in V$ le sue n coordinate.

La seguente proposizione è una generalizzazione del Corollario 35.

Proposizione 47. *Sia* k *un campo algebricamente chiuso e sia* $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ *un chiuso affine. L'applicazione* $W \mapsto I_V(W)$ *stabilisce una corrispondenza biunivoca fra*

(a) Gli insiemi chiusi in V *e gli ideali radicali in* $A(V)$*;*

(b) Gli insiemi chiusi irriducibili in V *e gli ideali primi in* $A(V)$*;*

(c) I punti in V *e gli ideali massimali in* V*.*

Inoltre, la corrispondenza biunivoca inverte le inclusioni:

$$\begin{aligned} W_1 \subset W_2 \quad &\Leftrightarrow \quad I_V(W_1) \supset I_V(W_2), \\ W_1 \subsetneqq W_2 \quad &\Leftrightarrow \quad I_V(W_1) \supsetneqq I_V(W_2). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Vi sono le seguenti corrispondenze biunivuche:
$\{W : W$ è un chiuso in $V\} = \{W : W$ è un chiuso in $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}, W \subset V\}$
$\leftrightarrow$ {gli ideali radicali in $\mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$ che contengono $I(V)$}
$\leftrightarrow$ {gli ideali radicali in $\mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]/I(V)$} (secondo il Lemma 44)
$\leftrightarrow$ {gli ideali radicali in $A(V)$}.
Esplicitiamo queste corrispondenze biunivoche:

$$W \longleftrightarrow I(W) \subset \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n], I(W) \supset I(V) \longleftrightarrow I(W)/I(V) \longleftrightarrow \overline{\pi}\,(I(W)/I(W)) = I_V(W).$$

La composizione da sinistra a destra risulta l'applicazione della tesi: $W \mapsto I_V(W)$.
Per la (b) e la (c) basta sostituire 'radicale' con 'primo' e 'massimale' rispettivamente. □

Diamo adesso acuni esempi di algebre $A(X)$:
1. Sia $X \subset \mathbb{A}^2_{\mathsf{k}}$, $y = x^2$ una parabola e sia $F(x, y) = y - x^2$, polinomio irriducibile. Sia $X = V(F)$, con F irriducibile, allora $I(X) = (F) = (y - x^2)$ e $A(X) \simeq \mathsf{k}[x, y]/(y - x^2)$.

1. Sia $X \subset \mathbb{A}^2_{\mathsf{k}}$, $y^2 = x^3$ una cubica e sia $F(x, y) = y^2 - x^3$, polinomio irriducibile. Sia $X = V(F)$, con F irriducibile, allora $I(X) = (F) = (y^2 - x^3)$ e $A(X) \simeq \mathsf{k}[x, y]/(y^2 - x^3)$.

Applicazioni polinomiali

Definizione 48. Sia V un chiuso affine, sia $u : V \to \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}}$ un'applicazione data da

$$u(P) = (f_1(P), f_2(P), \ldots, f_m(P))\,,$$

dove f_i sono funzioni in V. L'applicazione si dice *polinomiale* se $f_i \in A(V)$.

Definizione 49. Siano $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ e $W \subset \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}}$ due chiusi affini. Sia $u : V \to \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}}$ un'applicazione polinomiale che trasforma V in W, cioè $\forall P \in V\ u(P) \in W$, allora $u : V \to W$ si dice *polinomiale*.

Diamo adesso una definizione equivalente alla definizione 49

Definizione 50. Un'applicazione $u : V \to W \subset \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}}$ è polinomiale se, e solo se, esistono m polinomi $F_1, \ldots, F_m \in \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$ tali che $u(P) = (F_1(P), F_2(P), \ldots, F_m(P))\ \forall P \in V$.

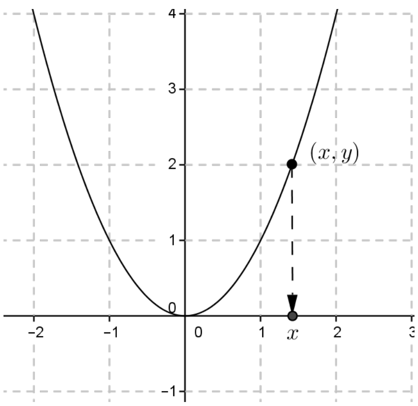
In effetti, ponendo $f_i = F_i|_V$, è chiaro che le due definizioni sono equivalenti.

Diamo adesso degli esempi:

1. $\varphi : \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}} \to \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}}$ definita da $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ dove $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ sono funzioni lineari

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i,$$

φ_i sono polinomi di primo grado. In geometria algebrica i gradi sono arbitrari, invece in geometria affine e proiettiva abbiamo funzioni lineari, rappresentate da polinomi di primo grado.



2. Sia $X \subset \mathbb{A}^2_{\mathsf{k}}$ la parabola $\{y = x^2\}$. Definiamo $u : \mathbb{A}^1 \to X \subset \mathbb{A}^2_{\mathsf{k}}$ come $u(t) = (t, t^2)$, u è un'applicazione polinomiale perché $\mathbb{A}^1_{\mathsf{k}} \to \mathbb{A}^2_{\mathsf{k}}$ definita da $t \mapsto (t, t^2)$, è un'applicazione polinomiale, ed inoltre $u(t) \in X$ per ogni t: in effetti se consideriamo $x = t$ e $y = t^2$ si ha $y = x^2$, per come richiesto. Consideriamo $v : X \to \mathbb{A}^1$ definita da $v(x, y) = x$. L'applicazione v è polinomiale perché è definita dalla finzione polinimiale $t_1|_X$.

3. Sia $X = \{y^2 = x^3\}$ e sia $u : \mathbb{A}^1_{\mathsf{k}} \to X \subset \mathbb{A}^2_{\mathsf{k}}$ definita da $u(t) = (t^2, t^3)$, la cubica cuspidale. $u : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$ è un'applicazione polinomiale e $u(\mathbb{A}^1) \subset X$, infatti se $x = t^2$ e $y = t^3$ si ha $y^2 = (t^3)^2 = (t^2)^3 = x^3$, dunque è un'applicazione polinomiale in X.

Proposizione 51. *Siano $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ e $W \subset \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}}$ due chiusi affini e sia $u : V \to W$ un'applicazione polinomiale, allora u è un'applicazione continua nella topologia di Zariski.*

Dimostrazione. Sia $u = (f_1, \dots, f_m)$, $f_i \in A(V)$. Siano $F_i(t_1, \dots, t_n) \in \mathsf{k}[t_1, \dots, t_n]$ tali che $F_i|_V = f_i$. Vogliamo fare vedere che se $Z \subset W$ è un chiuso, allora $u^{-1}(Z)$ è un chiuso in V. I chiusi di W sono intersezione di W con chiusi dello spazio affine

$$Z = W \cap V(G_1, \dots, G_l) \quad \text{con} \quad G_i \in \mathsf{k}[s_1, \dots, s_m].$$

$u^{-1}(Z)$ è l'insieme di tutti i punti $P \in V$ tali che $u(P) \in Z$, cioè $(f_1(P), f_2(P), \dots, f_m(P)) \in Z$, e questo vale se, e solo se, $G_j\left(f_1(P), \dots, f_m(P)\right) = 0$ per ogni $j = 1, \dots, l$.

Ma sappiamo che $f_i = F_i|_V$, dunque $G_j\left(f_1(P), \dots, f_m(P)\right) = 0$ se, e solo se, $G_j\left(F_1(P), \dots, F_m(P)\right) = 0$ con $P \in V$, dunque se P appartiene a V, ed è soluzione del sistema

$$\begin{cases} G_1(F_1, \dots, F_m) = 0 \\ \vdots \\ G_l(F_1, \dots, F_m) = 0 \end{cases}$$

Ne concludiamo che $u^{-1}(Z)$ è il chiuso affine $V \cap V(\dots, G_j(F_1, \dots, F_m), \dots)$. □

Sia $u : V \to W$ un'applicazione polinomiale e sia $g \in A(W)$. Consideriamo $g \circ u$, dove $g \circ u(P) = g\left(u(P)\right)$. $g \circ u$ è una funzione polinomiale in V, infatti se $u = (f_1, \dots, f_m) = (F_1, \dots, F_m)|_V$ e se $g = G(s_1, \dots, s_m)|_W$, allora $g \circ u = G(F_1, \dots, F_m)|_V$, quindi $g \circ u$ è funzione polinomale.

Definizione 52. Si definisce con $u^* : A(W) \to A(V)$ l'applicazione $u^*(g) = g \circ u$.

Lemma 53. *L'applicazione $u^* : A(W) \to A(V)$ è un omomorfismo di $\mathsf{k}-$algebre.*

Dimostrazione. Si ha per $g_1, g_2 \in A(W)$ che

$$\begin{aligned}\left[u^*(g_1 + g_2)\right](P) &= (g_1 + g_2)\left(u(P)\right) = g_1\left(u(P)\right) + g_2\left(u(P)\right) = \\ &= \left(u^*(g_1)\right)(P) + \left(u^*(g_2)\right)(P) = \left(u^*(g_1) + u^*(g_2)\right)(P)\end{aligned}$$

per qualsiasi $P \in V$, dunque $u^*(g_1 + g_2) = u^*(g_1) + u^*(g_2)$. Similmente si fa vedere che $u^*(g_1 g_2) = u^*(g_1)u^*(g_2)$. Se $c \in \mathsf{k}$ e $g(P) = c$ per ogni $P \in W$, allora $u^*(g)(X) = c$, dunque u^* trasforma costanti negli stessi costanti e ne concludiamo che u^* è un omomorfismo di $\mathsf{k}-$algebre. $\square$

Esempio. Sia $u : V \to W \in \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}}$ un'applicazione polinomiale. $A(W)$ è generata dalle funzioni coordinate su W, $y_j = s_j|_W$. Cosa è $u^*(y_j)$? Sia $u = (f_1, \ldots, f_m)$ con $f_i \in A(V)$ e dunque si ha

$$(u^*(y_j))(P) = y_j(u(P)) = y_j(f_1(P), \ldots, f_m(P)) = f_j(P)$$

e ne concludiamo che $u^*(y_j) = f_j$, $j = \ldots, m$, le funzioni polinomiali tramite cui è data l'applicazione.

Composizione di applicazioni polinomiali

Siano $u : V \to W$ e $v : W \to X$ applicazioni polinomiali, allora la composizione $v \circ u : V \to X$ è polinomiale.

Dimostrazione. Sia $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$, $W \in \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}}$ e $X \subset \mathbb{A}^l_{\mathsf{k}}$, $u = (F_1, \ldots, F_m)|_V$, $v = (G_1, \ldots, G_l)|_W$, allora per avere $v \circ u$ basta sostituire F_i in G_j, otteniamo

$$v \circ u = (G_1(F_1, \ldots, F_m), \ldots, G_l(F_1, \ldots, F_m))|_V,$$

ancora polinomi, dunque $v \circ u$ è polinomiale. $\square$

Osserviamo i diagrammi

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "v\circ u"] \arrow[d, "u"'] & X \\ W \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A(V) & A(X) \arrow[l, "(v\circ u)^*"'] \arrow[dl, "v^*"] \\ A(W) \arrow[u, "u^*"] & \end{tikzcd} \qquad \text{ma anche} \qquad \begin{tikzcd} A(V) & A(X) \arrow[l, "u^*\circ v^*"'] \arrow[dl, "v^*"] \\ A(W) \arrow[u, "u^*"] & \end{tikzcd}$$

e notiamo che da applicazioni polinomiali induciamo delle applicazioni sulle algebre di funzioni polinomiali che invertono le frecce.

Lemma 54. $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$.

Dimostrazione. Sia $h \in A(X)$ e sia $P \in V$. Si ha da un lato

$$[(v \circ u)^* h](P) = h(v \circ u(P)) = h(v(u(P)))$$

e dall'altro

$$[u^* \circ v^*(h)](P) = [u^*(v^*(h))](P) = v^*(h)(u(P)) = h(v(u(P))).$$

dunque $(v \circ u)^*(h) = u^* \circ v^*(h)$ per ogni $h \in A(X)$. $\square$

Definizione 55. Un'applicazione polinomiale $u : V \to W$ si dice *isomorfismo* se esiste un'applicazione polinomiale $v : W \to V$ tale che $v \circ u = id_V$ e $u \circ v = id_W$.

Diamo adesso alcune proprietà degli isomorfismi

1. Se $u : V \to W$ è un isomorfismo, esso è omeomorfismo della topologia di Zariski.

   Dimostrazione. Sia $v = u^{-1} : W \to V$ applicazione polinomiale, quindi è continua, allora abbiamo una biiezione continua con inversa continua, quindi un omeomorfismo. $\square$

   Osserviamo che due spazi omeomorfi devono avere le stesse proprietà topologiche, come ad esempio l'irriducibilità.

2. Se $u : V \to W$ è un isomorfismo, allora $u^* : A(W) \to A(V)$ deve essere un isomorfismo di $\mathsf{k}-$algebre. (Vedremo che in realtà vale anche il viceversa).

   Dimostrazione. $v = u^{-1} : W \to V$ è un'applicazione polinomiale che induce l'omomorfismo di k-algebre $v^* : A(V) \to A(W)$. Affermiamo che u^* e v^* sono inversi uno ad altro. Per il Lemma 54 si ha

$$v^* \circ u^* = (u \circ v)^* = (id_W)^* = id_{A(W)}$$

perché id_W induce l'identità sulle $\mathsf{k}-$algebre associate, e dall'altro lato si ha

$$u^* \circ v^* = (v \circ u)^* = (id_V)^* = id_{A(V)}$$

e dunque u^* è un isomorfismo di $\mathsf{k}-$algebre. $\square$

Proposizione 56. *Siano $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ e $W \subset \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}}$ due chiusi affini, allora vale la seguente corrispondenza biunivoca*

$$\{u : V \to W \text{ applicazione polinomiale}\} \xleftrightarrow{1:1} \{\varphi : A(W) \to A(V) \text{ omomorfismi di } \mathsf{k}-\text{algebre}\}$$

data da $u \mapsto u^*$.

Dimostrazione. Bisogna fare vedere che $u \mapsto u^*$ è iniettiva e surgettiva.
Iniettività: siano $u : V \to W$ e $v : V \to W$ due applicazioni polinomiali date da $u = (f_1, \ldots, f_m)$ e $v = (g_1, \ldots, g_m)$. Supponiamo $u^* = v^*$ e valutiamo nelle funzioni coordinate $y_1, \ldots, y_m \in A(W)$ ed otteniamo

$$f_j = u^*(y_j) = v^*(y_j) = g_j$$

da cui $f_j = g_j$ per ogni $j = 1, \ldots, m$, dunque $u = v$.

Surgettività: Sia $\varphi : A(W) \to A(V)$ un omomorfismo di $\mathsf{k}-$algebre. Vogliamo fare vedere che esiste un'applicazione polinomiale $u : V \to W$ tale che $\varphi = u^*$.
Siano $y_1, \ldots, y_m$ le funzioni coordinate $y_j = s_j|_W$ su W e siano $\varphi(y_j) = f_j \in A(V)$, dunque se u esiste deve essere descritta attraverso le f_j, abbiamo un unico candidato.
Poniamo $u : V \to \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}}$ come $u = (f_1, \ldots, f_m)$, u è un'applicazione polinomiale. Dimostriamo che $u(V) \subset W$. Sia $G(s_1, \ldots, s_m)$ che si annulla su W, $G|_W = 0$. Affermiamo che $G|_{u(V)} = 0$ e questo basta per dimostrare che $u(V) \subset W$ perché se $W = V(G_1, \ldots, G_l)$ avremo, ponendo $G = G_i$ per qualsiasi $i = 1, \ldots, l$, che $u(V) \subset V(G_1, \ldots, G_l)$.
Per ogni $P \in V$ verifichiamo che $G(f_1(P), \ldots, f_m(P)) = 0$. Si ha

$$G(f_1(P), \ldots, f_m(P)) = G(f_1, \ldots, f_m)(P) = G(\varphi(y_1), \ldots, \varphi(y_m))(P) = \varphi(G(y_1, \ldots, y_m))(P)$$

perché φ è un omomorfismo di $\mathsf{k}-$algebre ed è importante che commuti con i coefficienti, si ha che

$$\varphi(G(y_1, \ldots, y_m))(P) = \varphi(G(s_1|_W, \ldots, s_m|_W))(P) = [\varphi(G(s_1, \ldots, s_m)|_W)](P) = \varphi(0)(P) = 0.$$

Quindi $u : V \to W \subset \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}}$ è applicazione polinomiale ed è definito $u^* : A(W) \to A(V)$, ma perché $u^* = \varphi$? Facciamo vedere che sono uguali sui generatori.
u^* e φ sono omomorfismi di $\mathsf{k}-$algebre, per verificare che $u^* = \varphi$, basta verificare l'uguaglianza su un sistema di generatori di $A(W)$. Prendiamo $y_1, \ldots, y_m$ funzioni coordinate, si ha

$$u^*(y_j) = f_i = \varphi(y_j) \quad \forall j = 1, \ldots, m$$

dunque ne concludiamo che $u^* = \varphi$. $\square$

Corollario 57. *$u : V \to W$ è isomorfismo (applicazione polinomiale biettiva tale che u^{-1} è polinomiale) se, e solo se, $u^* : A(W) \to A(V)$ è isomorfismo di $\mathsf{k}-$algebre.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) è stata già dimostrata. ($\Leftarrow$) Supponiamo che $\varphi = u^* : A(W) \to A(V)$ sia isomorfismo. Sia $\psi : A(V) \to A(W)$ tale che $\psi = \varphi^{-1}$. Secondo la proposizione 56 esiste un'applicazione polinomiale $v : W \to V$ tale che $\psi = v^*$. Quanto valgono $v \circ u$ e $u \circ v$? Sappiamo cosa succede se applichiamo gli asterischi

$$(v \circ u)^* = u^* \circ v^* = \varphi \circ \varphi^{-1} = id_{A(V)}$$

e sia $v \circ u : V \to V$ data da funzioni polinomiali $v \circ u = (h_1, \ldots, h_n)$. Sia $x_i = t_i|_V$ e si ha

$$(v \circ u)^*(x_i) = h_i \quad \text{ma} \quad (v \circ u)^*(x_i) = id_{A(V)}(x_i) = x_i$$

allora $v \circ u = (x_1, \ldots, x_n) = id_V$. Similmente da $(u \circ v)^* = v^* \circ u^* = id_{A(W)}$ si ottiene $u \circ v = id_W$. $\square$

Diamo adesso degli esempi:

1. Nell'ambito della geometria affine gli isomorfismi sono dati dalle affinità $u : \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}} \to \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$

$$u\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + B$$

dove A è una matrice $n \times n$ invertibile e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ e u^{-1} è data da

$$u^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + B_1$$

dunque u è un isomorfismo, ogni affinità è un isomorfismo, ma vediamo con il prossimo esempio che non è vero il viceversa.

2. Sia X una parabola $y = x^2$, $u : \mathbb{A}^1_{\mathsf{k}} \to X$ definita da $u(t) = (t, t^2)$ e $v : X \to \mathbb{A}^1_{\mathsf{k}}$ definita da $v(x, y) = x$ è l'inversa di u: si ha $v \circ u = id_{\mathbb{A}^1_{\mathsf{k}}}$ e $u \circ v = id_X$, dunque nell'ambito della geometria algebrica la parabola e la retta sono isomorfi, ma non sono affinemente isomorfi.

3. $u : \mathbb{A}^1_{\mathsf{k}} \to X$ dove $X = \{y^2 = x^3\}$ cubica cuspidale, $u(t) = (t^2, t^3)$. Vedremo negli esercizi che u è un omeomorfismo nella topologia di Zariski, però u non è isomorfismo, quindi non è possibile esprimere u^{-1} come funzione polinomiale.

Fissato un campo algebricamente chiuso k ricordiamo la corrispondenza fra

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chiusi affini e } u : X \to Y \\ \text{applicazioni polinomiali} \end{array} \right\} \stackrel{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \text{algebre finitamente generate su } \mathsf{k} \\ \text{e ridotte, } \varphi \text{ omomorfismi di } \mathsf{k}\text{-algebre} \end{array} \right\}$$

in cui ad ogni X chiuso affine si associa $A(X)$ e ad ogni algebra finitamente generata e ridotta si associa un chiuso V tale che $A(V) \simeq B$. Per quanto riguarda le frecce, esse si invertono, siamo in presenza di un *funtore controvariante*. Abbiamo visto che le due categorie sono equivalenti, quindi tutto quello che riguarda una delle categorie si deve tradurre anche per l'altra.

Che significa per la geometria che $u^* : A(W) \to A(V)$ è iniettivo?

Definizione 58. $u : V \to W$ si dice *dominante* se $u(V)$ è insieme denso in W.

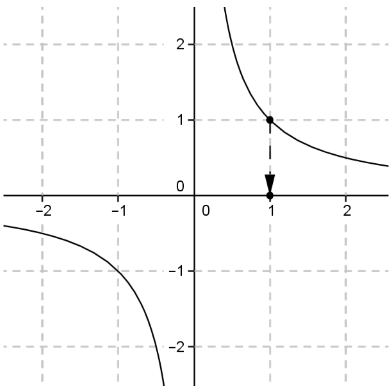
Diamo adesso un esempio: sia $V = \{xy = 1\}$ e $W = \mathbb{A}^1_{\mathsf{k}}$, $u : V \to W$ definita da $u(x, y) = x$, $u(V) = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, denso in $\mathbb{A}^1_{\mathsf{k}}$, dunque u è dominante.

Proposizione 59. *$u : V \to W$ è dominante se, e solo se, $u^* : A(W) \to A(V)$ è omomorfismo iniettivo.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Sia u dominante. Sia $g \in \ker u^*$, quindi per ogni $P \in V$ $(u^*(g))(P) = 0$, ma

$$(u^*(g))(P) = g(u(P)) = 0 \quad \forall P \in V$$

e questa condizione corrisponde a $u(V) \subset V_W(g) = V(g)$, insieme chiuso degli zeri di g in W. Essendo $u(V)$ denso in W e $V(g)$ chiuso in W, otteniamo che $W \subset V(g)$, cioè $g = 0$ e dunque $\ker(u^*) = 0$.



($\Leftarrow$) Supponiamo che u non sia dominante, dunque $\overline{u(V)} \neq W$, allora facciamo vedere che esiste una funzione non nulla in $\ker(u^*)$. Ricordiamo che l'applicazione che associa ad un chiuso un'ideale radicale è biiettiva. Secondo un risultato dimostrato si ha

$$I_W\left(\overline{u(V)}\right) \neq I_W(W) = (0)$$

perché $I_W(W)$ è composto da tutte le funzioni che si annullano su tutto W, dunque soltanto la funzione nulla è tale. Da quanto detto, esiste $g \in A(W)$ tale che $g \neq 0$ e $g|_{\overline{u(V)}} = 0$, ma chi è $u^*(g)$? Sia $P \in V$, allora

$$(u^*(g))\,(P) = g\,(u(P)) = 0$$

perché $u(P) \in u(V) \subset \overline{u(V)}$, dunque ne concludiamo che $u^*(g) = 0$, cioè $g \neq 0$, ma $g \in \ker(u^*)$, da cui $u^* : A(W) \to A(V)$ non è un omomorfismo iniettivo. $\square$

Corollario 60. *Se $u : V \to W$ è dominante e se V è irriducibile, allora W è irriducibile.*

Dimostrazione. $A(V)$ è un dominio di integrità, poiché V è irriducibile (condizione equivalente affinché V sia irriducibile) e $u^* : A(W) \to A(V)$ è omomorfismo iniettivo, allora anche $A(W)$ deve essere un dominio di integrità, dunque W è irriducibile. $\square$

Cosa significa geometricamente che u^* è surgettivo? Per capirlo diamo la seguente definizione

Definizione 61. Un'applicazione di chiusi affini $u : V \to W$ si dice *immersione chiusa* se

1. $u(V) = X$ è un chiuso in W;
2. $u : V \to X$ è un isomorfismo.

Proposizione 62. *Sia $u : V \to W$ un'applicazione polinomiale. Sono equivalenti le seguenti condizioni*

(i) *$u : V \to W$ è un'immersione chiusa;*

(ii) *$u^* : A(W) \to A(V)$ è un omomorfismo surgettivo.*

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii) Consideriamo $X = u(V)$, è un chiuso in W per ipotesi, $i : X \hookrightarrow W$ è un inclusione e $i^* : A(W) \to A(X)$ è surgettivo, perché X e W sono due chiusi dello stesso spazio affine ($X \subset W \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$), dunque ogni funzione polinomiale in $A(X)$ si ottiene come restrizione di una funzione polinomiale di $A(W)$. In effetti, se $f \in A(X)$ e $f = F(t_1, \ldots, t_n)|_X$, allora ponendo $g = F|_W \in A(W)$, si ha $f = g|_X = i^*(g)$. Si ha che $u = i \circ \varphi$ dove $\varphi : V \to X$ è un isomorfismo (condizione immersione chiusa)

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "u"'] & X \arrow[dl, "i"] \\ W & \end{tikzcd}$$

e dunque $u^* : A(W) \to A(V)$ è composizione

$$\begin{tikzcd} A(V) & A(X) \arrow[l, "\varphi^*"'] \\ A(W) \arrow[u, "u^*"] \arrow[ur, "i^*"'] & \end{tikzcd}$$

dove i^* è surgettivo, φ^* è un isomorfismo, quindi u^* è surgettivo.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Vogliamo invertire l'argomento. Sia $I = \ker(u^*)$. Poniamo $Z = V(I) \subset W$, chiuso in W. Affermiamo che $u(V) \subset Z$. Sia $P \in V$ e sia $g \in I \in \ker(u^*)$, allora $g(u(P)) = (u^*(g))(P) = 0$. Questo vale per ogni $g \in I$ e ogni $P \in V$, quindi $u(V) \subset V(I) = Z$. Ponendo $\varphi : V \to Z$ la restrizione di u, abbiamo che $u = i \circ \varphi$ e

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "u"'] & Z \arrow[dl, "i"] \\ W & \end{tikzcd}$$

e passando ai diagrammi per le algebre

$$\begin{tikzcd} A(V) & A(Z) \arrow[l, "\varphi^*"'] \\ A(W) \arrow[u, "u^*"] \arrow[ur, "i^*"'] & \end{tikzcd}$$

dove $u^* = \varphi^* \circ i^*$. L'omomorfismo φ^* è surgettivo, perché per ipotesi u^* è surgettivo. Calcoliamo $\ker \varphi^*$. Sia $h \in A(Z)$ e sia $\varphi^*(h) = 0$. Sia $g \in A(W)$ tale che $h = g|_Z = i^*(g)$. Si ha

$$0 = \varphi^*(h) = \varphi^*(i^*(g)) = u^*(g).$$

Quindi $g \in \ker(u^*) = I$. Siccome $Z = V(I)$ risulta che $i^*(g) = g|_Z = 0$. Quindi $h = 0$. Concludiamo che $\ker \varphi^* = 0$, quindi $\varphi^* : A(Z) \to A(V)$ è un isomorfismo. Questo implica, applicando il Corollario 57, che $\varphi : V \to Z$ è un isomorphismo polinomiale. Concludiamo che $u : V \to W$ è un'immersione chiusa. $\square$

Funzioni razionali

Oltre alle funzioni polinomiali, possiamo estenderci anche alle funzioni razionali. Sia $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ un chiuso affine irriducibile. $A(X)$ è un dominio di integrità e dunque possiede un campo dei quozienti.

Definizione 63. Il campo dei quozienti di $A(X)$ si denota con

$$\mathsf{k}(X) = \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in A(X), g \neq 0 \right\}$$

con le operazioni usuali, ed è detto campo delle funzioni razionali di X.

Ad esempio se $X = \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$, allora $A(X) = \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$ e

$$\mathsf{k}(X) = \left\{ \frac{P(t_1, \ldots, t_n)}{Q(t_1, \ldots, t_n)} : P, Q \text{ polinomi } Q \neq 0 \right\}.$$

e per parlare di funzioni dobbiamo capire come valutarle

Definizione 64. Una funzione razionale $\varphi \in \mathsf{k}(X)$ si dice *regolare nel punto* $P \in X$ se esiste una rappresentazione $\varphi = \frac{f}{g}$ con $f, g \in A(X)$ tale che $g(P) \neq 0$ e si pone $\varphi(P) = \frac{f(P)}{g(P)}$.

Ma se cambiamo rappresentazione, cosa succede? Non deve cambiare il valore di φ, verifichiamo che in effetti $\varphi(P)$ non dipende dalla scelta della rappresentazione.
Supponiamo che $\varphi = \frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1}$ dove $g(P) \neq 0 \neq g_1(P)$, allora $fg_1 - f_1 g = 0$ e valutando in P si ottiene $f(P)g_1(P) - f_1(P)g(P) = 0$. Dividiamo per $g(P)g_1(P)$ e otteniamo

$$\frac{f(P)}{g(P)} = \frac{f_1(P)}{g_1(P)}$$

dunque il valore $\varphi(P)$ non dipende dalla rappresetanzione scelta. Ad esempio in $X = \mathbb{A}^1_{\mathsf{k}}$ sia $\varphi = \frac{t^2+t-2}{t-1}$: per $P = 1$ otteniamo una forma indeterminata $\frac{0}{0}$, ma cambiando rappresentazione

$$\frac{t^2 + t - 2}{t - 1} = \frac{(t-1)(t+2)}{t-1} = t + 2$$

allora φ è regolare in $P = 1$ e $\varphi(1) = 3$.

Vogliamo confrontare funzioni polinomiali e funzioni razionali. Se $f \in A(X)$, allora $f = \frac{f}{1} \in \mathsf{k}(X)$ ed è regolare in ogni punto di X. Vogliamo fare vedere che è vero il viceversa: ogni funzione razionale, regolare in ogni punto di X, è funzione polinomiale. Prima di dimostrarlo, dimostriamo un lemma che risulta un corollario del teorema degli zeri di Hilbert.

Lemma 65 (Partizione dell'unità in $A(V)$). *Sia $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un insieme di funzioni polinomiali su $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$. Supponiamo che le funzioni f_α con $\alpha \in \Lambda$ non possiedono zeri comuni. Allora esistono $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Lambda$ e $h_1, \ldots, h_m \in A(V)$ tali che*

$$1 = \sum_{i=1}^{m} h_i f_{\alpha_i}.$$

Notiamo che quando Λ è finito e V è lo spazio affine, allora questo è il Corollario 37 del Teorema degli zeri.

Dimostrazione. Consideriamo $I(V) \subset \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$. $\forall \alpha \in \Lambda$ esiste $F_\alpha \in \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$ tale che $f_\alpha = F_\alpha|_V$. Sia $S = \{F_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \cup I(V)$. Calcoliamo $V(S)$. Se $P \in V(S)$, allora $P \in V(I(V)) = V$, in quanto $S \supset I(V)$ perché più grande è l'insieme dei polinomi più piccolo è l'insieme degli zeri comuni. $\forall \alpha \in \Lambda$ $F_\alpha(P) = 0$, ma $F_\alpha(P) = f_\alpha(P)$ perché $f_\alpha = F_\alpha|_V$ e $P \in V$.

Dall'ipotesi che le f_α non hanno zeri comuni in V, tale punto P non esiste e dunque $V(S) = \emptyset$. Sia $J = (S) \subset \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$, $V(S) = V(J) = \emptyset$, dunque secondo il teorema degli zeri (k algebricamente chiuso) si ha $J = (1)$, da cui

$$1 = \sum_{i=1}^{m} H_i F_{\alpha_i} + \sum_j R_j G_j$$

dove $G_j \in I(V)$ e per qualche $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Lambda$. Restringiamo su V e ponendo $h_i = H_i|_V$ otteniamo

$$1 = \sum_{i=1}^{m} h_i f_{\alpha_i}. \quad \square$$

Teorema 66. *Sia X un chiuso affine irriducibile. Una funzione razionale $\varphi \in \mathsf{k}(X)$ è regolare in ogni $P \in X$ se, e solo se, φ è una funzione polinomiale.*

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) $\varphi = \frac{f}{1}$ con $f \in A(X)$ e φ è regolare in ogni $P \in X$.
($\Rightarrow$) φ è regolare in ogni punto: per ogni $P \in X$ esiste una rappresentazione $\varphi = \frac{f_P}{g_P}$ con $f_P, g_P \in A(X)$ tale che $g_P(P) \neq 0$. Poniamo $\Lambda = X$ e consideriamo l'insieme $\{g_P\}_{P\in X}$: questo insieme non ha zeri comuni in X perché per $Q \in X$ esiste g_Q tale che $g_Q(Q) \neq 0$, dunque siamo nelle condizioni del lemma 65 e vi è una partizione dell'unità

$$1 = \sum_{i=1}^{m} h_i g_{P_i}$$

dove $h_i \in A(X)$ per $i = 1, \ldots, m$. Moltiplichiamo per φ e otteniamo la relazione in $\mathsf{k}(X)$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} h_i(\varphi g_{P_i}),$$

ma essendo $\varphi = \frac{f_{P_i}}{g_{P_i}}$ si ha $\varphi g_{P_i} = f_{P_i}$ e dunque

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} h_i f_{P_i} \in A(X). \quad \square$$

Cosa possiamo dire di una funzione generica? Se siamo su un chiuso irriducibile possiamo dare la seguente

Definizione 67. Se $\varphi \in \mathsf{k}(X)$ è una funzione razionale su un chiuso affine X irriducibile, l'insieme dei punti $P \in X$ dove φ è regolare è detto *dominio di* φ e si denota con $\mathrm{dom}(\varphi)$.

Una proprietà del dominio di φ è la seguente: $\mathrm{dom}(\varphi)$ è un aperto denso di X.

Dimostrazione. Sia $P \in \mathrm{dom}(\varphi)$, $\varphi = \frac{f}{g}$ dove $f, g \in A(X)$ e $g(P) \neq 0$. L'insieme $D(g) = X \setminus V(g)$ è un intorno di P, e $g(Q) \neq 0$ per $\forall Q \in D(g)$, quindi $D(g)$ è un intorno di P contenuto nel dominio di φ.
Questo dimostra che $\mathrm{dom}(P)$ è aperto ed è anche non vuoto perché se $\varphi = \frac{f}{g}$, $g \neq 0$ è una qualsiasi rappresentazione, allora $V(g) \neq X$ e $X \setminus V(g) \subset \mathrm{dom}(\varphi)$. Infine $\mathrm{dom}(\varphi)$ è denso, perché è aperto non vuoto nell'insieme chiusi irriducibile X. $\square$

Questa proprietà è una generalizzazione del fatto che una funzione razionale in una sola variabile è non regolare solo in un numero finito di punti perché il denominatore della funzione razionale è un polinomio che ha numero finito di radici.

Diamo adesso un esempio: sia $X = \mathbb{A}^1_{\mathsf{k}}$, $\mathsf{k}(X) = \mathsf{k}(t) = \left\{ \frac{f(t)}{g(t)} \right\}$ e sia $\varphi = \frac{t^2+1}{t-1}$. Cosa è $\mathrm{dom}(\varphi)$? Se $P \neq 1$, allora $P \in \mathrm{dom}(\varphi)$. Affermiamo che $1 \notin \mathrm{dom}(\varphi)$. Supponiamo per assurdo che $1 \in \mathrm{dom}(\varphi)$, allora

$$\frac{t^2+1}{t-1} = \frac{f(t)}{g(t)}$$

dove $g(1) \neq 0$, da cui $(t^2+1)g(t) = (t-1)f(t)$. Se valutiamo l'espressione in $t = 1$ otteniamo

$$2 \cdot g(1) = 0 \cdot f(1) = 0$$

che è un assurdo, dunque $1 \notin \mathrm{dom}(\varphi)$.

Abbiamo visto che X è isomorfo ad Y se e solo se $A(X)$ è isomorfa ad $A(Y)$. Adesso introduciamo una nuova nozione di isomorfismo

Definizione 68.

1. Due insiemi algebrici affini irriducibili X ed Y (non necessariamente dello stesso spazio) sono dette *birazionalmente* $\mathsf{k}-$*isomorfi* se $\mathsf{k}(X) \simeq \mathsf{k}(Y)$ come $\mathsf{k}-$algebre.

2. X si dice *razionale* se $\mathsf{k}(X)$ è isomorfo come $\mathsf{k}-$algebra a $\mathsf{k}(t_1, \ldots, t_d) \simeq \mathsf{k}(\mathbb{A}^d_{\mathsf{k}})$.

L'isomorfismo birazionale è un concetto analogo all'isomorfismo polinomiale, ma semplifica il problema di classificazione in quanto gli enti geometrici modello sono di meno. Ad esempio ogni conica irriducibile è birazionalmente isomorfa a $\mathbb{A}^1$, mentre non è vero che ogni conica irriducibile è isomorfa a $\mathbb{A}^1$, ad esempio l'iperbole $xy = 1$ non lo è.

Insiemi algebrici proiettivi
In questa sezione si assume che il campo base k è infinito.

Quanto fatto per negli spazi affini si può ripetere per spazi proiettivi.
Sia k un campo e $G_m = \mathsf{k}^* = \mathsf{k} \setminus \{0\}$ gruppo rispetto alla moltiplicazione. Definiamo $\mathbb{P}^n = \left(\mathsf{k}^{n+1} \setminus \{0\}\right) /G_m$ perché ricordiamo che la moltiplicazione per uno scalare è un'azione.
I punti di $\mathbb{P}^n$ sono in corrispondenza $1-1$ con le rette $\langle v \rangle$ dello spazio k^{n+1}, dove v è un vettore non nullo

$$\langle v \rangle = \{cv : c \in \mathsf{k}\}.$$

Se $P \in \mathbb{P}^n_{\mathsf{k}}$ diamo coordinate

$$(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) = [x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

dove possiamo moltiplicare per una costante c e il vettore $v = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0) \in \mathsf{k}^{n+1}$ rappresenta P: $P = (x_0 : x_1 : \ldots : x_n) = (\lambda x_0 : \lambda x_1 : \ldots : \lambda x_n)$ con $\lambda \in \mathsf{k}^* = \mathsf{k} \setminus \{0\}$.
I sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^n_{\mathsf{k}}$ sono $\mathbb{P}(E) = \{\langle v \rangle : v \in E\}$ dove $E \subset \mathsf{k}^{n+1}$ è un sottospazio vettoriale di $\dim(E) = \dim\mathbb{P}(E) + 1$. Inoltre ricordiamo che si ha

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^{n} \mathbb{A}^n_i$$

dove $\mathbb{A}^n_i = \{(x_0 : \ldots : x_i : \ldots : x_n) : x_i \neq 0\}$ sono le carte affini in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{A}^n$ per ogni i, $\mathbb{A}^n \longleftrightarrow \mathbb{A}^n_i$ definite da

$$\mathbb{A}^n \ni (t_1, \ldots, t_n) \mapsto (t_1 : \ldots, t_i : 1 : t_{i+1} : \ldots : t_n) \in \mathbb{A}^n_i$$

$$\mathbb{A}^n_i \ni (x_0 : \ldots, x_{i-1} : x_i : x_{i+1} : \ldots : x_n) = \left(\frac{x_0}{x_i} : \frac{x_1}{x_i} : \ldots : 1 : \ldots : \frac{x_n}{x_i}\right) \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{x+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) \in \mathbb{A}^n.$$

Definiamo adesso cosa significa essere zero di un polinomio

Definizione 69. Sia $F \in \mathsf{k}[t_0, \ldots, t_n]$ e sia $P = \langle v \rangle \in \mathbb{P}^n_{\mathsf{k}}$, $P = (a_0 : \ldots : a_n)$. Il punto P si dice *zero di F* se $F|_{\langle v \rangle} = 0$ o in modo equivalente $F(\lambda a_0, \lambda a_1, \ldots, \lambda a_n) = 0$ per ogni $\lambda \in \mathsf{k}^*$.

Caso particolare: F è omogeneo, allora

$$F(\lambda t_0, \ldots, \lambda t_n) = \lambda^d F(t_0, \ldots, t_n)$$

con $d = \mathrm{gr}F$. $P = (a_0 : \ldots : a_n)$ è zero di F se, è solo se, $F(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 0$, non c'è necessità di specificare perché è automatico, ma per i polinomi non omogenei?

Lemma 70. *Sia k un campo infinito, $F \in \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$ e sia $F = F_1 + \ldots + F_t$ una sua scomposizione in polinomi omogenei di grado $d_1 < d_2 < \ldots < d_t$, allora $P \in \mathbb{P}^n_{\mathsf{k}}$ è zero di F se, e solo se, P è sero di ogni componente omogenea F_i, $i = 1, \ldots, t$.*

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Se $F_i(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, t$ e $\lambda \in \mathsf{k}^*$, allora $F(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = 0$ per $\lambda \in \mathsf{k}^*$.
($\Rightarrow$) Supponiamo che $(a_0, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$ sia tale che $F(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = 0$ per ogni $\lambda \in \mathsf{k}^*$. Sostituendo in $F = F_1 + \ldots + F_t$ otteniamo

$$\lambda^{d_1} F_1(a_0, \ldots, a_n) + \lambda^{d_2} F_2(a_0, \ldots, a_n) + \ldots + \lambda^{d_t} F_t(a_0, \ldots, a_n) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathsf{k}^*.$$

Possiamo interpretare la parte sinistra dell'espressione come polinomio in λ ed utilizziamo il principio di identità dei polinomi (k è infinito) per concludere che $F_1(a_0, \ldots, a_n) = 0, \ldots, F_t(a_0, \ldots, a_n) = 0$ con F_i polinomi omogenei, quindi $P = (a_0 : \ldots : a_n)$ è zero per ogni F_i. $\square$

Definizione 71. Sia S un insieme di polinomi omogenei in $\mathsf{k}[t_0, \dots, t_n]$. Si denota con $V(S)$ l'insieme dei punti in $\mathbb{P}^n$ che sono zeri comuni di S. Gli insiemi $V(S)$ si dicono *insiemi algebrici proiettivi.*

Osservazione. Se k è infinito, secondo il Lemma 70, considerare $V(S)$ per un qualsiasi insieme di polinomi $S \subset \mathsf{k}[t_0, \dots, t_n]$ non cambia la definizione di chiusi proiettivi, perche sostituendo ogni polinomio $F \in S$ con l'insieme dei suoi componenti omogenei si ottiene un nuovo insieme di polinomi omogenei S' e $V(S) = V(S')$.

Diamo adesso degli esempi:

1. Sia $F(t_0, \dots, t_n) \neq 0$ un polinomio omogeneo non nullo. L'insieme proiettivo $V(F) = \{F(t_0, \dots, t_n) = 0\} \subset \mathbb{P}^n_{\mathsf{k}}$ si dice *ipersuperficie proiettiva.* Se $\mathrm{gr}(F) = 2$ allora otteniamo le quadriche, se $\mathrm{gr}(F) = 3$ otteniamo le cubiche.

2. Consideriamo $u : \mathbb{P}^1_{\mathsf{k}} \to \mathbb{P}^3_{\mathsf{k}}$ data da $u\left((x_0 : x_1)\right) = (x_0^3 : x_0^2 x_1 : x_0 x_1^2 : x_1^3)$. È un'applicazione ben definita perché se consideriamo $(\lambda x_0 : \lambda x_1)$ invece di $(x_0 : x_1)$ otteniamo

$$u\left((\lambda x_0 : \lambda x_1)\right) = (\lambda^3 x_0^3 : \lambda^3 x_0^2 x_1 : \lambda^3 x_0 x_1^2 : \lambda^3 x_1^3),$$

che è lo stesso punto. Inoltre se $(x_0, x_1) \neq (0, 0)$ allora $(x_0^3 : \dots : x_1^3) \neq (0, \dots, 0)$. In effetti se $x_0 \neq 0$, allora $x_0^3 \neq 0$, invece se $x_1 \neq 0$, allora $x_1^3 \neq 0$.

Consideriamo la matrice 2×3

$$\begin{pmatrix} T_0 & T_1 & T_2 \\ T_1 & T_2 & T_3 \end{pmatrix}$$

che ha tre minori e sia $X \subset \mathbb{P}^3_{\mathsf{k}}$ definita dalle equazioni

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} T_0 & T_1 \\ T_1 & T_2 \end{vmatrix} = T_0 T_2 - T_1^2 = 0 \\[2ex] \begin{vmatrix} T_0 & T_2 \\ T_1 & T_3 \end{vmatrix} = T_0 T_3 - T_1 T_2 = 0 \\[2ex] \begin{vmatrix} T_1 & T_2 \\ T_2 & T_3 \end{vmatrix} = T_1 T_3 - T_2^2 = 0 \end{cases}$$

X è l'insieme di soluzioni del sistema definito da 3 equazioni di secondo grado omogenee.

<u>Affermazione</u>: $u(\mathbb{P}^1_{\mathsf{k}}) = X$. Dimostriamo che $u(\mathbb{P}^1_{\mathsf{k}}) \subset X$, l'altra inclusione è un esercizio. Sia $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1_{\mathsf{k}}$ tale che $x_0 \neq 0$, allora $(x_0 : x_1) = (1 : t)$, da cui

$$u(1 : t) = (1 : t : t^2 : t^3)$$

e sostituiamo nella matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & t^2 & t^3 \end{pmatrix}.$$

La matrice ha rango 1 per ogni t, allora i tre minori estratti si annullano, da cui $u(1 : t) \in X$ per ogni t. Similmente si ragiona per caso $x_1 \neq 0$: $(x_0 : x_1) = (s : 1)$ e applicando u

$$u\left((s : 1)\right) = (s^3 : s^2 : s : 1).$$

Sostituendo nella matrice, otteniamo ancora una matrice di rango 1

$$\begin{pmatrix} s^3 & s^2 & s \\ s^2 & s & 1 \end{pmatrix}$$

quindi $u\left((s : 1)\right) \in X$, allora $u(\mathbb{P}^1) \subset X$.

Definizione 72. L'insieme $X = u_3(\mathbb{P}^1)$ $(= u(\mathbb{P}^1))$ è detto[14] *cubica gobba.*

Come vi era una corrispondenza fra chiusi affini e ideali di polinomi negli spazi affini, anche in questo caso vi è una corrispondenza fra chiusi proiettivi e ideali

Definizione 73. Un ideale $I \subset R = \mathsf{k}[t_0, \ldots, t_n]$ si dice *omogeneo* se generato da polinomi omogenei.

Lemma 74 *Valgono le seguenti affermazioni:*

(i) Un ideale $I \subset R$ è omogeneo se, e solo se, possiede la seguente proprietà: $F \in I$ se, e solo se, ogni componente omogenea di F appartiene ad I.

(ii) Un ideale omogeneo è generato da un insieme finito di polinomi omogenei.

Dimostrazione. (i) $(\Leftarrow)$ L'ideale $I \subset \mathsf{k}[t_0, \ldots, t_n]$ è generato da un numero finito di polinomi per il teorema della base, $I = (F_1, \ldots, F_m)$ e per ogni i si ha $I \ni F_i = \sum_j F_{ij}$, dove F_{ij} sono omogenei e dunque per la proprietà $F_{ij} \in I$ e $I = (F_{ij})_{i,j}$.

$(\Rightarrow)$ Supponiamo che $I = (F_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, dove Λ non è necessariamente finito e ogni F_α è polinomio omogeneo. Sia $G \in I$, alora

$$G = \sum_{i=1}^{m} H_i F_{\alpha_i}$$

per qualche $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Sia $G = G_1 + \ldots + G_l$ la scomposizione in polinomi omogenei di grado $d_1 < d_2 < \ldots < d_l$. Allora

$$G_j = \sum_{i=1}^{m} H_i^{(j)} F_{\alpha_i}$$

dove $H_i^{(j)}$ è la componente omogenea di H_i di grado $gr(G_j) - gr(F_{\alpha_j})$, se questo numero è non negativo e $H_i^{(j)} = 0$, se questo numero è negativo, quindi $G_j \in I$ per ogni j.

(ii) Questo segue dalla prima parte della dimostrazione di (i). $\square$

Proposizione 75. *Sia S un insieme di polinomi omogenei, sia $J = (S)$ e sia $J = (F_1, \ldots, F_m)$ con F_i polinomi omogenei, allora $V(S) = V(J) = V(F_1, \ldots, F_m)$.*

Dimostrazione. Lo stesso argomento come nel caso affine. $\square$

<u>Conclusione</u>: Ne concludiamo che ogni insieme algebrico proiettivo è dato da un sistema finito omogeneo

$$\begin{cases} F_1 = 0 \\ \vdots \\ F_m = 0 \end{cases}$$

Le proprietà degli insiemi proiettivi sono analoghe alle proprietà degli insiemi affini

1. L'intersezione di una qualsiasi famiglia di insiemi algebrici proiettivi è insieme algebrico proiettivo. In effetti $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} V(S_\alpha) = V\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha\right)$, dove S_α per ogni αsono insiemi di polinomi omogenei.

2. Unione finita di insiemi algebrici proiettivi è insieme algebrico proiettivo. La dimostrazione di questa proprietà è identica al caso affine.

[14] Il pedice 3 perché abbiamo considerato i monomi di grado 3.

Topologia di Zariski in $\mathbb{P}^n$
Come nel caso di uno spazio affine è possibile definire la topologia di Zariski in $\mathbb{P}^n$ considerando come chiusi gli insiemi algebrici proiettivi $V(S)$, dove S è un insieme di polinomi omogenei.

DEFINIZIONE 76. La topologia di Zariski in $\mathbb{P}^n$ è la topologia dove i chiusi sono gli insiemi algebrici proiettivi.

Gli assiomi di uno spazio topologico seguono dalle proprietà (1) e (2) di sopra. Possiamo definire anche in questo caso le due operazioni V ed I. Analizziamo l'operazione I: sia $V \subset \mathbb{P}^n$ e definiamo il sottoinsieme di $\mathsf{k}[t_0, \ldots, t_n]$

$$I(V) = \{F \in \mathsf{k}[t_0, \ldots, t_n] : \forall P \in V \text{ è zero di } F\}$$

cioè sinteticamente $F \in I(V) \Leftrightarrow \forall P = \langle v \rangle \in V$ si ha $F|_{\langle v \rangle} = 0$. Dal Lemma 70 segue che F si annulla su $\langle v \rangle$ se, e solo se, si annullano tutte le sue componenti omogenee. Pertanto $F \in I(V)$ se, e solo se, tutte le componenti omogenee di F appartengono a $I(V)$. Dal Lemma 74 otteniamo che $I(V)$ è un ideale omogeneo.

Possiamo enunciare proprietà analoghe al caso affine per le operazioni I e V.

Proprietà delle operazioni V ed I
Enunciamo proprietà analoghe a quelle viste nel caso affine:

(i) Sia $X \subset \mathbb{P}^n$, allora $X \subset V(I(X))$. Come nel caso affine $I(X)$ è fatto di tutti i polinomi che si annullano in X, dunque fra gli zeri comuni dei polonomi in $I(X)$ troviamo anche X.

(ii) $X = V(I(X))$ se, e solo se, X è chiuso in $\mathbb{P}^n$. La dimostrazione è analoga al caso affine.

(iii) $X_1 \supset X_2$, allora $I(X_1) \subset I(X_2)$ e questo è ovvio dalla definizione.

(iv) Se X_1, X_2 sono chiusi in $\mathbb{P}^n$, allora $X_1 = X_2$ se, e solo se, $I(X_1) = I(X_2)$.
Dimostrazione. La direzione ($\Rightarrow$) è ovvia. Se $I(X_1) = I(X_2)$ allora $V(I(X_1)) = V(I(X_2))$, ma X_1 ed X_2 sono chiusi, dunque per (ii) si ha $X_1 = X_2$. □

PROPOSIZIONE 77. *$\mathbb{P}^n$ dotato della topologia di Zariski è uno spazio noetheriano.*

Dimostrazione. Sia $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_k \supset \ldots$ una catena di chiusi. Applichiamo l'operazione I ed otteniamo

$$I(X_1) \subset I(X_2) \subset \ldots \subset I(X_r) \subset \ldots$$

è una catena di ideali omogenei nell'algebra $\mathsf{k}[t_0, \ldots, t_n]$. Dal teorema della base si ha che $I(X_s) = I(X_{s+1}) = \ldots$. Applichiamo adesso l'operazione V ed otteniamo $V(I(X_s)) = V(I(X_{s+1})) = \ldots$, ma gli X_i sono chiusi, dunque $X_s = X_{s+1} = \ldots$. □

Come nel caso affine, se $X \subset \mathbb{P}^n$ si considera la topologia indotta di Zariski. I chiusi in X sono $X \cap V(S)$, come nel caso affine sono intersezioni con insiemi algebrici proiettivi. Se X è chiuso proiettivo, $Y \subset X$ è chiuso se, e solo se, $Y = X \cap Z$ dove Z è chiuso in $\mathbb{P}^n$, ma questo avviene se, e solo se, $Y \subset \mathbb{P}^n$ è chiuso, $Y \subset X$ (per l'altra direzione prendiamo $Y = Z$).

DEFINIZIONE 78. Un sottoinsieme $V \subset \mathbb{P}^n$, aperto in un chiuso $X \subset \mathbb{P}^n$ si dice insieme quasi proiettivo[15].

Direttamente dalla definizione seguono le seguenti caratterizzazioni di un insieme quasiproiettivo

(i) $V = X \setminus Z$ dove X e Z sono chiusi in $\mathbb{P}^n$ (allora V è un aperto di un chiuso).

(ii) $V = X \cap W$ dove X è un chiuso in $\mathbb{P}^n$ e W è aperto in $\mathbb{P}^n$ (topologia indotta).

[15] Gli insiemi algebrici di questo tipo sono i più generali con cui uno lavora di solito in prattica

Diamo adesso degli esempi:

1. Sia $U_i = \mathbb{A}_i^n \subset \mathbb{P}^n$ con $\mathbb{A}_i^n = \{(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) : x_i \neq 0\}$, le *carte affini*, e si ha $U_i = \mathbb{P}^n \setminus V(x_i)$, dunque U_i è un insieme quasiproiettivo.

2. Sia $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ e sia $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ con F polinomio omogeneo, allora $\mathcal{C} = V(F)$ è un insieme proiettivo, ed in particolare è un insieme quasiproiettivo.

3. Sia $\Sigma = \{P_1, \ldots, P_r\} \subset \mathbb{P}^n$. È un insieme chiuso perché se $P = \langle v \rangle$, allora possiamo ottenere P come soluzione di un sistema di n equazioni lineari omogenee in k^{n+1}

$$P = \langle v \rangle : \begin{cases} L_1 = 0 \\ \vdots \\ L_n = 0 \end{cases}$$

dunque un punto è un insieme chiuso e $\{P_1, \ldots, P_r\}$ come unione finita di insiemi chiusi è chiuso, da cui Σ è insieme proiettivo.

4. Sia $\mathcal{C} = V(F) \subset \mathbb{P}^2$ con F omogeneo e $\Sigma = \{P_1, \ldots, P_r\} \subset \mathcal{C}$, allora $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C} \setminus \Sigma$ è quasi proiettivo perché $\mathcal{C}$ e Σ sono proiettivi.
Caso particolare: $\mathcal{C} \cap V(x_0) = Z$ è un chiuso, che può essere finito, ma anche infinito se la retta $Z = 0$ è una componente di $\mathcal{C}$. Per quanto detto, $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C} \setminus Z$, l'insieme dei punti propri di $\mathcal{C}$ è un insieme quasiproiettivo.

Proprietà della topologia di Zariski degli insiemi quasiproiettivi. Vediamo adesso alcune proprietà degli insiemi quasiproiettivi.
Sia $V \subset \mathbb{P}^n$ un insieme quasiproiettivo.

- Ogni sottoinsieme chiuso di V e ogni sottoinsieme aperto di V è pure quasiproiettivo.
  Dimostrazione. Sia $V = X \cap W$ con X chiuso e W aperto di $\mathbb{P}^n$. Se $Y \subset V$ è chiuso, allora $Y = V \cap Z$ con $Z \subset \mathbb{P}^n$ insieme chiuso, dunque $Y = (X \cap Z) \cap W$ è quasi proiettivo.
  Se $U \subset V$ è aperto, allora $U = V \cap T$ con $T \subset \mathbb{P}^n$ aperto, dunque $U = X \cap (W \cap T)$ à quasiproiettivo. □

- V è spazio noetheriano.
  Dimostrazione. Segue da un fatto generale dimostrato: ogni sottospazio di uno spazio noetheriano è noetheriano.

- V è quasi-compatto, perché V è notheriano.

- Sia $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_m$ una scomposizione in chiusi irriducibili (sappiamo che esiste ed è unica se chiediamo che sia non cancellabile), allora ogni V_i è quasi proiettivo.
  Dimostrazione. Ogni V_i è chiuso in V per ogni i, allora V_i è quasi proiettivo. □

Vogliamo studiare come si comportano i chiusi irriducibili di un insieme proiettivo in relazione ad un suo sottoinsieme quasiproiettivo, cosa succede per chiusura perché questo sarà importante nel passaggio dall'affine al proiettivo e viceversa.

Lemma 79. *Sia Y uno spazio topologico irriducibile. Sia $U \subset Y$ un aperto non vuoto, allora U è irriducibile.*

Dimostrazione. Sfruttiamo il criterio di irriducibilità per aperti: siano $U_1, U_2 \subset U$ aperti non vuoti. Essi sono aperti non vuoti di Y, quindi $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. □

Ricordiamo che in uno spazio topologico $V \subset E$ è irriducibile se, e solo se, $\overline{V} \subset E$ è irriducibile.

Proposizione 80 (Chiusi irriducibili in insiemi quasi proiettivi e in insiemi proiettivi). *Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ un chiuso proiettivo e sia $V \subset X$ un aperto in X. Vi è una corrispondenza biunivoca tra le seguenti famiglie di insiemi*

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{insiemi chiusi} \\ \textit{irriducibili } Y \subset X \\ \textit{tali che } Y \cap V \neq \emptyset \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} \textit{insiemi chiusi} \\ \textit{irriducibili non} \\ \textit{vuoti } W \subset V \end{array} \right\}.$$

data dalle seguenti applicazioni: $Y \mapsto W = Y \cap V, \quad Y = \overline{W} \longleftarrow W.$

Dimostrazione. Verifichiamo che le due applicazioni sono ben definite.

1. Sia $Y \subset X$ un insieme chiuso e irriducibile tale che $Y \cap V \neq \emptyset$. Sia $W = Y \cap V \neq \emptyset$. Allora $W \subset V$ è chiuso perché intersezione di V con il chiuso Y, $W \subset Y$ è aperto non vuoto come intersezione di Y con l'aperto V, dunque per il Lemma 79 W è irriducibile. Ne concludiamo che $Y \mapsto W$ è ben definita.

2. Sia $W \subset V$ un chiuso non vuoto in V, che è irriducibile. Allora la sua chiusura $Y = \overline{W}$ è un chiuso in X, l'intersezione $Y \cap V$ contiene W, ed è quindi non vuota, ed essendo la chiusura di un sottospazio irriducibile è irriducibile. Dunque la seconda applicazione fra le famiglie $W \mapsto Y = \overline{W}$ è ben definita.

Verifichiamo che le due composizioni sono le applicazioni di identità.

Dato Y, l'insieme W è aperto non vuoto in Y ed è quindi denso in Y in quanto Y è irriducibile. Pertanto si ha

$$Y \mapsto W = Y \cap V \mapsto \overline{W} = Y.$$

Dato $W \subset V$ chiuso e irriducibile, posto Y la chiusura di W in X, l'intersezione $Y \cap V$ è un chiuso in V in cui il sottoinsieme W è denso, essendo denso in Y. Ma W è per ipotesi chiuso in V e quindi coincide con la sua chiusura in V, dunque $Y \cap V = W$. Pertanto si ha

$$W \mapsto \overline{W} = Y \mapsto Y \cap V = W.$$

La proposizione è dimostrata. $\square$

Osservazione. Non abbiamo mai utilizzato che X è chiuso in $\mathbb{P}^n$. L'affermazione della proposizione vale per ogni coppia $V \subset X$, dove V è aperto non vuoto in uno spazio topologico X.

Tale proposizione è interessante perché ci permette di passare dallo studio di chiusi affini a chiusi proiettivi e viceversa. È generalizzazione di un fatto noto della teoria delle curve piane, che la chiusura proiettiva stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le curve affini irriducibili e le curve proiettive irriducibili, diverse dalla retta impropria.

Vogliamo capire come possiamo esprimere un teorema degli zeri di Hilbert nel caso proiettivo, perché non possiamo trasferirlo così per come è: nel caso affine per esempio avevamo che se J era un ideale proprio, allora $V(J) \neq \emptyset$, ma questo nel caso proiettivo non è vero.
Ad esempio, sia $R = \mathsf{k}[t_0, \ldots, t_n]$ e sia $R^+ = \{F = F_1 + F_2 + \ldots\} = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ ideale omogeneo. Si ha

$$V(R^+) = \left\{ \begin{array}{l} t_0 = 0 \\ \vdots \\ t_n = 0 \end{array} \right\} = \emptyset \quad \text{in } \mathbb{P}^n$$

e si ha anche $(R^+)^m \supset \{t_0^m, \ldots, t_n^m\}$, dunque $V\left((R^+)^m\right) \subset V(t_0^m, \ldots, t_n^m) = \emptyset$. L'affermazione del teorema degli zeri nel caso affine ha un analogo nel caso proiettivo. Vedremo che l'affermazione $V(I) \neq \emptyset$ è vera per ideali omogenei propri che non contengono alcuna potenza di R^+.

Vediamo come riportare un problema proiettivo ad un problema affine attraverso il *cono affine*.

Cono affine associato ad un insieme proiettivo

Sia $I \subset \mathsf{k}[t_0, \dots, t_n]$ un ideale omogeneo proprio[16], $I = (F_1, \dots, F_m)$ con F_i polinomi omogenei. Si ha $gr\, F_i \geq 1$, perché se uno dei polinomi F_i fosse una costante non nulla l'ideale I non sarebbe proprio.

$$V(I) = \left\{ \begin{array}{l} F_1 = 0 \\ \vdots \\ F_m = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{P}^n$$

dove $V(I) = \{P = \langle v \rangle \in \mathbb{P}^n : F|_{\langle v \rangle} = 0, \forall F \in I\}$. Consideriamo lo stesso sistema polinomiale in $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathsf{k}}$

$$(*) \qquad \left\{ \begin{array}{l} F_1(t_0, \dots, t_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(t_0, \dots, t_n) = 0 \end{array} \right. \qquad \subset \mathbb{A}^{n+1}_{\mathsf{k}}$$

Cosa sappiamo delle soluzioni di $(*)$? Inanzitutto il sistema polinomiale $(*)$ ha sempre la soluzione banale $(0, \dots, 0)$. Se $(a_0, \dots, a_n)$ è soluzione di $(*)$, allora $(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$ è pure soluzione per $\lambda \in \mathsf{k}$ perché gli F_i sono omogenei. Denotiamo con

$$V^a(I) = \{v \in \mathbb{A}^{n+1}_{\mathsf{k}} : F(v) = 0, \forall F \in I\},$$

cioè abbiamo applicato V ad I ma nello spazio affine e dunque otteniamo

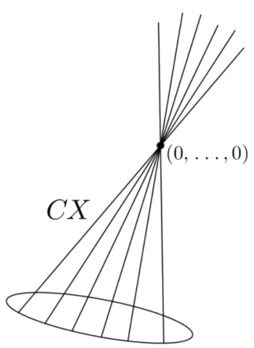
$$V^a(I) = \{v \in \mathsf{k}^{n+1} : v \neq (0, \dots, 0), P = \langle v \rangle \in V(I)\} \cup \{(0, 0, \dots, 0)\}.$$

Se consideriamo la proiezione $\pi : \mathsf{k}^{n+1} \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\} \to \mathbb{P}^n$ definita da

$$v = (a_0, \dots, a_n) \mapsto \langle v \rangle = (a_0, \dots, a_n) \, (\text{mod}\, \mathsf{k}^*)$$

allora $V^a(I) = \pi^{-1}(V(I)) \cup \{(0, 0, \dots, 0)\}$.

Definizione 81 Se $X = V(I) \subset \mathbb{P}^n$ è un chiuso proiettivo, $CX = V^a(I)$ si dice *cono affine associato ad* X.



Tale cono affine è stato introdotto per permettere il passaggio dal sistema proiettivo in $\mathbb{P}^n$ al sistema affine in $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathsf{k}}$, esso di fatto consiste in un'unione di rette che si incontrano in $(0, 0, \dots, 0)$.

Teorema 82 (Teorema degli zeri nel caso proiettivo). *Supponiamo* k *algebricamente chiuso e sia* $R = \mathsf{k}[t_0, \dots, t_n]$ *e sia* $R^+ = (t_0, \dots, t_n)$. *Sia* J *un ideale omogeneo di* R, $J \neq R$, *allora*

(a) $V(J) \neq \emptyset$ *se, e solo se,* J *non contiene nessuna potenza di* R^+, $J \not\supset (R^+)^m$ *per nessun numero naturale* $m \in \mathbb{N}$.

(a') $V(J) = \emptyset$ *se, e solo se,* $J \supset (R^+)^m$ *per qualche* $m \in \mathbb{N}$.

(b) Se $V(J) \neq \emptyset$ *allora* $I(V(J)) = \sqrt{J}$ *(simile al caso affine).*

Dimostrazione. Osserviamo che (a) è equivalente ad (a'), dunque dimostriamo (a'). La direzione $(\Leftarrow)$ è già dimostrata: $V(J) \subset V((R^+)^m) = \emptyset$. Per $(\Rightarrow)$ supponiamo $V(J) = \emptyset$, dunque $V^a(J)$ ha solo la soluzione banale, $V^a(J) = \{(0, 0 \dots, 0)\}$. Sappiamo dalla dimostrazione del teorema degli zeri nel caso affine che $I((0, 0, \dots, 0)) = (t_0, \dots, t_n)$ e inoltre $V^a(J) = \{(0, 0, \dots, 0)\}$ implica che $\sqrt{J} = (t_0, \dots, t_n)$ perché secondo il teorema degli zeri $\sqrt{J} = I(V^a(J)) = (t_0, \dots, t_n)$.
Questo significa che per ogni $i = 0, \dots, n$ esiste m_i tale che $t_i^{m_i} \in J$. Sia $d = \max_i\{m_i\}$ e sia m un numero $m > (d-1)(n+1)$. Si afferma che $(R^+)^m \subset J$.

[16] Abbiamo dimostrato che può essere generato da un numero finito di polinomi omogenei.

Consideriamo un monomio $t_0^{l_0}\dots t_n^{l_n}$ di grado $l_0+\dots+l_n \geq m$, perché solo monomi di questo tipo entrano nei polinomi di $(R^+)^m$. Almeno uno degli esponenti l_i deve essere $l_i \geq d$, altrimenti se $l_i < d$ per ogni i si avrebbe $l_0+\dots+l_n \leq (d-1)(n+1)$ e questo non è possibile perché abbiamo scelto $m > (d-1)(n+1)$ e si ha $l_0+\dots+l_n \geq m$. Sapendo che $t_i^d \in J$ per ogni i risulta che $(R^+)^m \subset J$. La parte (a') è dimostrata.
Quello che abbiamo appena dimostrato costituisce di fatto un criterio per capire se un sistema polinomiale omogeneo ammette soluzioni non banali.

(b) Sia $V(J) \neq \emptyset$ e consideriamo il cono affine $V^a(J) \subset \mathbb{A}^{n+1}_{\mathsf{k}}$. Si ha

$$I\left(V(J)\right) = \{F \in \mathsf{k}[t_0,\dots,t_n] : F|_{P=\langle v\rangle} = 0 \text{ per ogni } P \in V(J)\} = I\left(V^a(J)\right)$$

perché possiamo vedere il cono affine come unione di rette

$$V^a(J) = \bigcup_{P=\langle v\rangle \in V(J)} \langle v\rangle,$$

ma per il teorema degli zeri nel caso affine si ha $I\left(V^a(J)\right) = \sqrt{J}$ e dunque ne concludiamo che $I\left(V(J)\right) = \sqrt{J}$. Osserviamo che abbiamo ridotto tutto il problema al caso affine per cui già conosciamo il teorema degli zeri. □

Nel seguito supponiamo che il campo base k sia algebricamente chiuso.

Come per il caso affine, se F è un polinomio omogeneo, $F \in \mathsf{k}[t_0,\dots,t_n]$, $gr(F) \geq 1$, $V(F) \subset \mathbb{P}^n$ si dice *ipersuperficie proiettiva.*
Fatto noto: Se F è omogeneo, $F = cF_1^{l_1}\dots F_m^{l_m}$ con F_i irriducibili, allora ogni F_i è omogeneo, perché se almeno un F_i non fosse omogeneo, allora il prodotto non sarebbe omogeneo e dunque neppure F.

Proposizione 83. *Sia $F \in \mathsf{k}[t_0,\dots,t_n]$ un polinomio omogeneo.*

(i) Se F è irriducibile, allora $V(F) \subset \mathbb{P}^n$ è irriducibile nella topologia di Zariski.

(ii) Sia F un polinomio omogeneo arbitrario. Sia $F = cF_1^{l_1}\dots F_m^{l_m}$ la sua scomposizione in polinomi irriducibili, dove F_i non è proporzionale a F_j per $\forall i \neq j$, allora

$$V(F) = \bigcup_{i=1}^m V(F_i)$$

è la scomposizione non cancellabile di $V(F)$ in chiusi irriducibili[17] *di $V(F)$.*

Dimostrazione. (i) Supponiamo per assurdo che $X = V(F) = X_1 \cup X_2$ con X_i chiusi propri. Passando al cono affine si ha $V^a(F) = CX = CX_1 \cup CX_2$ con $CX_i \subsetneqq CX$ chiusi propri per $i=1,2$, perché sono unioni di rette, ma questo è un assurdo perché $V^a(F)$ è irriducibile per quanto sappiamo sul caso affine.

(ii) $V(F) = \bigcup_i V(F_i)$ perché, essendo i polinomi $F, F_i, i = 1,\dots,m$ omogenei, un punto $P = \langle v\rangle$ è zero di F se, e solo se $F(v) = 0 \Leftrightarrow F_i(v) = 0$ per qualche $i \Leftrightarrow P \in V(F_i)$ per qualche i. Gli insiemi chiusi $V(F_i)$ sono irriducibili secondo (i). Dobbiamo fare vedere che la scomposizione è non cancellabile: supponiamo per assurdo che $V(F_i) \supset V(F_j)$ per $i \neq j$, quindi $F_i \in I\left(V(F_j)\right) = \sqrt{(F_j)}$ secondo il Teorema 82, allora esiste $l \in \mathbb{N}$ tale che $F_j \mid F_i^l$, ma questo è assurdo perché F_i per $i=1,\dots,m$ sono polinomi irriducibili e non proporzionali fra loro. □

[17] Lo spazio topologico $V(F)$ è noetheriano, dunque tale scomposizione esiste, analogamente al caso affine.

Omeomorfismi di $\mathbb{A}^n$ con gli insiemi quasi proiettivi $\mathbb{A}^n_i$. Corollari.

Sappiamo che per uno spazio proiettivo si ha

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^{n} \mathbb{A}^n_i = U_0 \cup \ldots \cup U_n$$

dove $U_l = \mathbb{A}^n_l$ e ogni U_l è biiettivo a $\mathbb{A}^n$ tramite l'applicazione $j_l : U_l \to \mathbb{A}^n$, definita da

$$j_l : (x_0 : \ldots : x_l : \ldots : x_n) \mapsto \left(\frac{x_0}{x_l}, \ldots, \frac{x_{l-1}}{x_l}, \frac{x_{l+1}}{x_l}, \ldots, \frac{x_n}{x_l}\right),$$

la cui applicazione inversa è $i_l : \mathbb{A}^n \to U_l$ definita da

$$i_l : (t_1, \ldots, t_l, \ldots, t_n) \mapsto (t_1 : \ldots : t_l : 1 : t_{l+1} : \ldots, t_n).$$

Lo spazio affine $\mathbb{A}^n$ è dotato dalla topologia di Zariski e ogni insieme quasiproiettivo U_l è dotato dalla topologia di Zariski proveniente da $\mathbb{P}^n$.

Proposizione 84. *i_l e j_l sono omeomorfismi uno inverso all'altro.*

Dimostrazione. Che risulti $i_l \circ j_l = id_{U_l}$ e $j_l \circ i_l = id_{\mathbb{A}^n}$ si verifica subito. Bisogna dimostrare che i_l e j_l sono continue. Per semplicità verifichiamo questo fatto per $l = 0$: $j_0 : U_0 \to \mathbb{A}^n$ definita da

$$(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

e bisogna fare vedere che j_0^{-1} e i_0^{-1}trasformano chiusi in chiusi. Sia $Z = V(F_1, \ldots, F_m) \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ chiuso, allora si ha che

$$j_0^{-1}(Z) = \left\{ (x_0 : x_1 : \ldots : x_n) : \begin{array}{l} F_1\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) = 0 \\ \vdots \\ F_m\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) = 0 \end{array} \right\}$$

ma osserviamo che

$$F_i\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) = \frac{\widetilde{F}_i(x_0, x_1, \ldots, x_n)}{x_0^{d_i}},$$

dove ogni $\widetilde{F}_i$ è polinomio omogeneo, dunque $j_0^{-1}(Z)$ diventa

$$j_0^{-1}(Z) = \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{F}_1 = 0 \\ \vdots \\ \widetilde{F}_m = 0 \end{array} \right\} \setminus \{x_0 = 0\} = U_0 \cap V(\widetilde{F}_1, \ldots \widetilde{F}_m)$$

cioè $j_0^{-1}(Z)$ è un chiuso di U_0.

Consideriamo adesso $i_0 : \mathbb{A}^n \to U_0$ definita da

$$i_0 : (t_1, \ldots, t_n) \mapsto (1 : t_1 : \ldots : t_n).$$

Sia $U_0 \cap V(G_1, \ldots, G_m) = Y$ chiuso di U_0. I polinomi $G_i(x_0, \ldots, x_n)$ sono omogenei e si ha

$$i_0^{-1}(Y) = \left\{ \begin{array}{l} G_1(1, t_1, \ldots, t_n) = 0 \\ \vdots \\ G_m(1, t_1, \ldots, t_n) = 0 \end{array} \right.$$

dunque $i_0^{-1}(Y)$ è un chiuso affine in $\mathbb{A}^n$. $\square$

Osservazione 85. Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ un chiuso proiettivo, allora si ha

$$X = \bigcup_{i=0}^{n} (X \cap \mathbb{A}^n_i) = \bigcup_{i=0}^{n} V_i$$

dove per ogni i $V_i \subset X$ è aperto in X , come intersezione di X con l'aperto $\mathbb{A}^n_i$, e $V_i \subset \mathbb{A}^n_i$ è chiuso in $\mathbb{A}^n_i$ in quanto intersezione con il chiuso X. Abbiamo dimostrato nella proposizione 84 che $j_l : \mathbb{A}^n_l \to \mathbb{A}^n$ è un omeomorfismo, allora $j_l(V_l)$ è un insieme chiuso in $\mathbb{A}^n$, dunque ne deduciamo che possiamo ricoprire un chiuso proiettivo con aperti che sono omeomorfi a chiusi affini in $\mathbb{A}^n$.

Corollario 86. *$\mathbb{P}^n$ è irriducibile.*

Dimostrazione. Sappiamo che $\mathbb{P}^n = U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_n$ dove ogni U_l è omeomorfo ad $\mathbb{A}^n$, dunque è irriducibile[18]. Per $\forall i \neq j$ si ha che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ perché esistono punti con coordinate $x_i \neq 0 \neq x_j$, dunque possiamo concludere da un esercizio svolto[19] che $\mathbb{P}^n$ è irriducibile. □

Corollario 87. *Vi è una corrispondenza biunivoca fra le seguenti famiglie di insiemi*

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{chiusi proiettivi} \\ \textit{irriducibili } X \subset \mathbb{P}^n \\ \textit{tali che } X \not\subset V(x_0) \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} \textit{chiusi irriducibili} \\ V \subset \mathbb{A}^n \end{array} \right\}$$

data dalle seguenti applicazioni: $X \longrightarrow V = j_0(X \cap \mathbb{A}^n_0)$, $\quad X = \overline{i_0(V)} \longleftarrow V$, *dove* $\overline{i_0(V)}$ *corrisponde alla chiusura in* $\mathbb{P}^n$.

Dimostrazione. Si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chiusi irriducibili} \\ \text{in } \mathbb{P}^n \text{ che non} \\ \text{sono contenuti in } V(x_0) \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} \text{chiusi} \\ \text{irriducibili} \\ \text{in } U_0 = \mathbb{A}^n_0 \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} \text{chiusi} \\ \text{irriducibili} \\ \text{in } \mathbb{A}^n \end{array} \right\}.$$

La prima corrispondenza biunivoca sussiste per la Proposizione 80, invece la seconda si ha perché j_0 è un omeomorfismo secondo la Proposizione 84. Da queste due proposizioni ricaviamo la forma esplicita delle due biezioni: la prima composizione è $X \mapsto X \cap \mathbb{A}^n_0 \mapsto V = j_0(X \cap \mathbb{A}^n_0)$, la seconda è $X = \overline{i_0(V)} \longleftarrow i_0(V) \longleftarrow V$.
□

Ad esempio, se consideriamo $\mathbb{P}^2$ allora si ha $i_0 : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2_0 \subset \mathbb{P}^2$ e la corrispondenza del Corollario 87 ristretta sulla famiglia di chiusi irriducibili diversi da punti e $\mathbb{A}^2$ da la biezione nota

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{curve irriducibili} \\ \text{affini} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} \text{curve irriducibili} \\ \text{proiettive} \neq \mathbb{P}^1_\infty \end{array} \right\}$$

definita da

$$F(t_1, t_2) \longrightarrow x_0^d F\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = G(x_0, x_1, x_2) \quad \text{dove} \quad d = \text{gr}(F)$$

$$F(t_1, t_2) = G(1, t_1, t_2) \longleftarrow G(x_0, x_1, x_2).$$

[18] L'irriducibilità è una proprietà topologica, dunque si conserva per omeomorfismi.

[19] Sia E uno spazio topologico. Supponiamo che E sia coperto da insiemi aperti $E = \cup_{i \in I} V_i$ dove ogni V_i è irriducibile e ogni coppia V_i, V_j ha intersezione non vuota. Si dimostri che E è irriducibile.

Lemma 88. *Sia E uno spazio topologico. Sia $E = \cup_{i \in I} U_i$ con $U_i \subset E$ aperti, allora $X \subset E$ è chiuso in E se, e solo se, $X \cap U_i$ sono chiusi in U_i per ogni $i \in I$.*

Questo lemma ci dice che la proprietà di un insieme di essere chiuso è una proprietà locale perché si può verificare attraverso un ricoprimento aperto studiando l'intersezione dell'insieme con ogni aperto.

Dimostrazione. Poniamo $W = E \setminus X$. Bisogna dimostrare che W è aperto in E se, e solo se, $W \cap U_i \subset U_i$ è aperto in U_i per ogni $i \in I$. Se $W \cap U_i$ è aperto in U_i per ogni $i \in I$, allora $W \cap U_i$ è aperto anche in E e dunque W come unione di aperti è aperto

$$W = \bigcup_{i \in I} (W \cap U_i).$$

L'altra direzione è per definizione di topologia indotta. □

Corollario 89. *Consideriamo la scomposizione*

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{l=0}^{n} \mathbb{A}_l^n.$$

Un sottoinsieme $X \subset \mathbb{P}^n$ è chiuso proiettivo $\Leftrightarrow$ $j_l(X \cap \mathbb{A}_l^n) = i_l^{-1}(X)$ è un chiuso affine in $\mathbb{A}^n$ per ogni $l = 0, \ldots, n$.

Osserviamo che questo corollario ci permette di ridurre un problema proiettivo al caso affine.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Se $X \subset \mathbb{P}^n$ è un chiuso proiettivo, allora $X \cap \mathbb{A}_l^n \subset \mathbb{A}_l^n$ è chiuso in $\mathbb{A}_l^n$ per ogni l, allora $j_l(X \cap \mathbb{A}_l^n) \subset \mathbb{A}^n$ è chiuso in $\mathbb{A}^n$.
($\Leftarrow$) Supponendo che $i_l^{-1}(X)$ è chiuso in $\mathbb{A}^n$ per ogni l, dall'omeomorfismo $i_l : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}_l^n$ otteniamo che $X \cap \mathbb{A}_l^n \subset \mathbb{A}_l^n$ è chiuso in $\mathbb{A}_l^n$ per ogni l e così possiamo applicare il Lemma 88 per concludere. □

Anelli di frazioni. Sia A un anello commutativo con unità e sia $S \subset A$ un sottoinsieme moltiplicativo, cioè $0 \notin S$, se $s, t \in S$, allora $s \cdot t \in S$ e $1 \in S$. Si definisce[20]

$$S^{-1}A = \left\{ \frac{a}{s} : a \in A, s \in S \right\}$$

dove $\frac{a}{s} = \frac{a_1}{s_1}$ se esiste $t \in S$ tale che

$$t(as_1 - a_1 s) = 0.$$

Ad esempio se A è un dominio di integrita, $t \in S$ implica $t \neq 0$ e la relazione diventa $as_1 - a_1 s = 0$. $S^{-1}A$ ha una struttura di anello con operazioni definite come

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st} \quad \text{e} \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

ed osserviamo che $st \in S$. Le operazioni sono ben poste, non dipendono dal rappresentante scelto e l'applicazione $f : A \to S^{-1}A$ definita come $f(a) = \frac{a}{1}$ è un omomorfismo.

Diamo adesso altri esempi che in futuro potranno tornarci utili:

1. A è un dominio di integrità e consideriamo $S = A \setminus \{0\} = A^*$, allora

$$S^{-1}A = \left\{ \frac{a}{b} : b \neq 0 \right\}$$

e $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$ se, e solo se, esiste $c \in A^*$ tale che $c(ab_1 - a_1 b) = 0$, da cui $ab_1 - a_1 b = 0$ ed $S^{-1}A$ è il campo dei quozienti K di A.

2. A è dominio di integrità, $S \subset A^* = A \setminus \{0\}$ un qualsiasi sottoinsieme moltiplicativo, allora $S^{-1}A$ è isomorfo al sottoanello di K composto dagli elementi $\frac{a}{s}$ con $s \in S$. Di fatto osserviamo che non c'è differenza fra una frazione astratta di $S^{-1}A$ ed una guardata all'interno del campo dei quozienti.

3. Sia $A = \mathsf{k}[t]$ e sia $S = \{1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots\}$, allora

$$S^{-1}A = \left\{ \frac{g(t)}{t^m} : g(t) \in \mathsf{k}[t], m \geq 0 \right\}.$$

Un suo elemento sarà del tipo

$$\frac{a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n}{t^m} = \frac{b_{-m}}{t^m} + \ldots + \frac{b_{-1}}{t} + b_0 + \ldots + b_l t^l$$

e dunque sarà un *polinomio di Laurent*.

4. Sia $A = \mathsf{k}[t]$ e sia $\mathfrak{m} = (t)$ ideale massimale, $S = A \setminus \mathfrak{m}$ insieme moltiplicativo perché $\mathfrak{m}$ è massimale, $S = \{h(t) : h(0) \neq 0\}$, e l'anello delle frazioni è dato da

$$S^{-1}(A) = \left\{ \frac{g(t)}{h(t)} : h(0) \neq 0 \right\}.$$

$S^{-1}A$ possiede un ideale

$$M = \left\{ \frac{g(t)}{h(t)} : g(0) = 0 \right\}$$

[20] L'anello di frazioni costituisce una sorta di generalizzazione del concetto di campo dei quozienti. Questa modifica è necessaria se consideriamo ad esempio un anello A che non è dominio di integrita.

e osserviamo che se $\frac{g}{h} \notin M$, allora $g(0) \neq 0$ ed è invertibile di inverso $\frac{h}{g} \in S^{-1}A$.

5. Vediamo adesso una generalizzazione: sia A un anello con unità arbitrario, invece che prendere un ideale massimale $\mathfrak{m}$, consideriamo un ideale primo $\mathfrak{p}$ e $S = A \setminus \mathfrak{p}$. S è un insieme moltiplicativo perché se $x, y \notin \mathfrak{p}$, allora $xy \notin \mathfrak{p}$. L'anello di frazioni è dato da

$$S^{-1}A = \left\{ \frac{x}{s} : s \in A \setminus \mathfrak{p} \right\}$$

e l'uguaglianza fra due frazioni è data dalla relazione generale. Sia

$$M = \left\{ \frac{x}{s} : x \in \mathfrak{p} \right\},$$

M è un ideale in $S^{-1}A$, perché $\mathfrak{p}$ è ideale. Se $\frac{a}{s} \notin M$, allora $a \notin \mathfrak{p}$ perché per definizione M consiste di elementi $\frac{x}{s}$ con $x \in \mathfrak{p}$, quindi $\frac{s}{a} \in S^{-1}A$ e dunque $\frac{a}{s}$ è invertibile. Abbiamo costruito un ideale M con le stesse proprietà dell'ideale visto nell'esempio precedente.

Proposizione 90. *Un anello B si dice locale se è soddisfatta una delle seguenti condizioni equivalenti*

1. *Esiste un ideale proprio M tale che ogni elemento di $B \setminus M$ è invertibile.*

2. *B possiede un unico ideale massimale.*

L'ideale del punto 1 è quello massimale.

Dimostrazione. 1. $\Rightarrow$ 2. Sia I un ideale proprio di B. Vogliamo far vedere che $I \subset M$, che implicherebbe che M è l'unico ideale massimale.
Supponiamo per assurdo che $I \not\subset M$, allora esiste $x \in B \setminus M$. Per ipotesi x è invertibile, dunque esiste $y \in B$ tale che $yx = 1$, allora $yx \in I$ e quindi I non sarebbe proprio, contraddizione.

2. $\Rightarrow$ 1. Poniamo M come l'unico ideale massimale. Vogliamo fare vedere che ogni elemento di $B \setminus M$ è invertibile. Sia $x \notin M$ e sia $I = (x)$. Si afferma che I non può essere proprio. In effetti se $I \subsetneqq B$, allora esiste un ideale massimale N che lo contiene, $I \subset N$, ma essendo M l'unico ideale massimale, $N = M$ e questo è impossibile perché $x \notin M$. Dunque $I = (1)$ e quindi esiste un elemeno $y \in B$ tale che $xy = 1$. □

Fasci di funzioni

Quando abbiamo studiato i chiusi affini abbiamo definito le applicazioni polinomiali tramite le funzioni polinomiali. Per studiare i chiusi proiettivi non abbiamo un analogo naturale delle funzioni polinomiali definite in ogni punto dello spazio proiettivo. Invece vedremo che le funzioni associate ad uno spazio proiettivo, che sono quozienti di polinomi omogenee dello stesso grado, hanno ognuna il suo dominio di definizione, che varia da funzione a funzione. Per trattare questo tipo di problema, che si incontra anche in altri campi di geometria, introduciamo i concetti di *tipo di regolarità*[21] e *fascio di funzioni*.

Sia X uno spazio topologico. Si considerino funzioni con valori in un campo k e dominio contenuto in X. Introduciamo degli *assiomi di regolarità*: per ogni punto $P \in X$ si distingue una classe di funzioni dette *regolari* nel punto P. Si richiedono i seguenti assiomi

(i) Ogni funzione regolare in un punto P è definita in un intorno di P. Se $f(x) = g(x)$ per ogni x in un intorno di P e se f è regolare nel punto P, allora anche g è regolare[22] in P.

(ii) Se f è regolare in $P \in X$, essa è regolare in qualche intorno di P.

(iii) Le funzioni costanti sono regolari per ogni $P \in X$. Se f, g sono regolari in un punto P, allora $f \pm g$ e fg sono regolari nel punto P.

[21] Per esempio se $\mathsf{k} = \mathbb{R}$, un tipo di regolarità potrebbe essere dato dalla classe di funzioni $\mathcal{C}^k$, funzioni definite in qualche intorno aventi derivata continua fino all'ordine k.

[22] Questo assioma ci dice che la regolarità è una questione locale, dipende solo dal comportamento un intorno.

(iv) Se g è regolare nel punto P e $g(P) \neq 0$, allora esiste un intorno U di P tale che $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in U$ e $\frac{1}{g}$ è regolare nel punto P.

Definizione 91 Per ogni aperto $U \subset X$ si pone

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \to \mathsf{k} : f \text{ è regolare in ogni } P \in U\}.$$

Esempio. Regolare = differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 0$, oppure $k = \infty$.
Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, $\mathsf{k} = \mathbb{R}$. Una funzione f con dominio $\mathrm{dom}(f) \subset X$ si dice regolare nel punto $P \in X$ se esiste un intorno W di P contenuto in $\mathrm{dom}(f)$, tale che $f|_W \in \mathcal{C}^k(W)$. In questo caso

$$\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{C}^k(U) = \{f : U \to \mathbb{R} : f \text{ è continua ed ha derivate di ordine} \leq k \text{ continue in ogni punto di } U\}$$

Vediamo quali sono le proprietà di $\mathcal{O}_X(U)$, che associa ad ogni aperto una classe di funzioni, fissato un certo tipo di regolarità:

(a) Per ogni $U \subset X$ aperto, $\mathcal{O}_X(U)$ è una $\mathsf{k}-$algebra di funzioni con dominio U e codominio k, perché per gli assiomi se due funzioni sono regolari, allora è regolare la loro somma e il loro prodotto.

(b) Se $U \subset V \subset X$ con U, V aperti in X, allora $f \mapsto f|_U$ è un omomorfismo di $\mathcal{O}_X(V)$ in $\mathcal{O}_X(U)$ che si denota con $\rho_{UV} : \mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_X(U)$.

Dimostrazione. Sia $g = f|_U$ e sia $P \in U$. Le funzioni f e g coincidono su U e f è regolare in P. Secondo l'Assioma (i) g è regolare in P. Questo dimostra che ρ_{UV} è ben posta. Che è un omomorfismo segue da (a). $\square$

(c) Sia $U = \bigcup_\lambda W_\lambda$ con W_λ aperti in X. Se $f \in \mathcal{O}_X(U)$ e se $\rho_{W_\lambda U}(f) = f|_{W_\lambda} = 0$ per ogni λ, allora $f = 0$.

(d) Sia $U = \bigcup_\lambda W_\lambda$ con W_λ aperti. Siano $f_\lambda \in \mathcal{O}_X(W_\lambda)$ per ogni λ. Supponiamo che valga

$$(*) \quad f_\lambda|_{W_\lambda \cap W_\mu} = f_\mu|_{W_\lambda \cap W_\mu} \quad \text{(condizione di compatibilità)}$$

allora esiste ed è unica una $f \in \mathcal{O}_X(U)$ tale che $f|_{W_\lambda} = \rho_{W_\lambda U}(f) = f_\lambda$ per ogni λ.

Dimostrazione. Sia $P \in U$, allora $P \in W_\lambda$ per qualche λ. Poniamo $f(P) = f_\lambda(P)$ e dalla $(*)$ tale scelta è ben posta: se $P \in W_\mu$, allora $f_\lambda(P) = f_\mu(P)$ dalla $(*)$, dunque la funzione $f : U \to \mathsf{k}$ è tale che $f|_{W_\lambda} = f_\lambda$.
Sia $P \in U$ un punto arbitrario, $f|_{W_\lambda} = f_\lambda$ e dunque per l'Assioma (i)[23] f è regolare nel punto P, cioè $f \in \mathcal{O}_X(U)$. L'unicità segue da (c). $\square$

(e) Se $g \in \mathcal{O}_X(U)$, allora $D(g) = \{x \in U : g(x) \neq 0\}$ è aperto in U e $\frac{1}{g} \in \mathcal{O}_X(D(g))$.

Dimostrazione. Sia $P \in D(g)$, allora $g(P) \neq 0$. Per l'assioma (iv) $\exists W_P \subset \mathrm{dom}(g) = U$ intorno di U tale che $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in W_P$. Questo significa che $D(g)$ è aperto perché per ogni punto abbiamo trovato un intorno di P contenuto interamente nel dominio di g ($W_P \subset \mathrm{dom}(g)$).
Inoltre, sempre per l'assioma (iv), $\frac{1}{g}$ è regolare nel punto P e otteniamo che $\frac{1}{g} \in \mathcal{O}_X(D(g))$. $\square$

Definizione 92. Sia X uno spazio topologico e sia k un campo. Un *fascio di funzioni* con valori in k denotato con $\mathcal{F}$ è un'applicazione che ad ogni aperto U di X associa un insieme $\mathcal{F}(U)$, dove gli elementi di $\mathcal{F}(U)$ sono funzioni $f : U \to \mathsf{k}$, e sono soddisfatte le proprietà (a), (b), (c), (d), (e) dove $\mathcal{O}_X$ è sostituito con $\mathcal{F}$.

Da ogni tipo di regolarità si definisce un fascio, ma in realtà è vero anche il viceversa, dunque i concetti sono equivalenti.

Proposizione 93. *Il dato 'fascio di funzioni' è equivalente al dato 'tipo di regolarità'.*

[23] Se due funzioni coincidono su un intorno di P, W_λ in questo caso, e una è regolare, allora lo è anche l'altra.

Dimostrazione.
($\Leftarrow$) Dato un tipo di regilarità poniamo $\mathcal{F}(U) = \mathcal{O}_X(U)$. È un fascio perché verifica le proprietà (a) - (e).

($\Rightarrow$) Dato un fascio $\mathcal{F}$, definiamo un tipo di regolarità nel modo seguente. Diciamo che una funzione f con $\text{dom}(f) \subset X$ e valori in k è $\mathcal{F}-$regolare nel punto P se esiste un aperto $U \subset X$, $P \in U$, e $h \in \mathcal{F}(U)$ tale che $U \subset \text{dom}(f)$ e $f|_U = h$, cioè f coincide in un intorno di P con una funzione del fascio.
Verifichiamo gli assiomi di un tipo di regolarità (i) - (iv)

(i) Siano f e g due funzioni tale che $f(x) = g(x)$ in qualche intorno W di P. Se f è $\mathcal{F}-$regolare nel punto P, allora è vero che g è $\mathcal{F}-$regolare nel punto P?
Poiché f è $\mathcal{F}-$regolare, esiste un intorno U di P e $h \in \mathcal{F}(U)$ tale che $f|_U = h$. Consideriamo l'intersezione dei due intorni: $U \cap W$ è ancora un intorno di P e $h|_{U\cap W} \in \mathcal{F}(U \cap W)$. Sappiamo che $f|_U = h$ e $f|_W = g|_W$ dunque ne deduciamo che
$$g|_{U\cap W} = h|_{U\cap W}$$
da cui g è $\mathcal{F}-$regolare nel punto P.

(ii) Se $f|_U = h$, allora f è $\mathcal{F}-$regolare in ogni punto di U, perché basta utilizzare la stessa funzione h.

(iii) Se abbiamo due funzioni regolari in P, allora somma e prodotto sono regolari in P? Per ogni costante c, $f = c$, allora $f|_X = c \in \mathcal{F}(X)$, siamo in presenza di una $\mathsf{k}-$algebra, dunque le costanti sono regolari. Siano $f|_{U_1} = h_1 \in \mathcal{F}(U_1)$, dove U_1 è intorno di P, e $g|_{U_2} = h_2 \in \mathcal{F}(U_2)$, dove U_2 è intorno di P. Risulta che $h_1|_{U_1\cap U_2} \in \mathcal{F}(U_1 \cap U_2)$ e $h_2|_{U_1\cap U_2} \in \mathcal{F}(U_1 \cap U_2)$, da cui
$$f + g|_{U_1\cap U_2} = h_1|_{U_1\cap U_2} + h_2|_{U_1\cap U_2} \in \mathcal{F}(U_1 \cap U_2)$$
e dunque $f + g$ è $\mathcal{F}-$regolare nel punto P. Similmente è $f \cdot g$ è $\mathcal{F}-$regolare nel punto P, dunque $\mathcal{F}(U)$ sono $\mathsf{k}-$algebre.

(iv) Sia g $\mathcal{F}-$regolare nel punto P e sia $g(P) \neq 0$, allora esiste un intorno U di P e $h \in \mathcal{F}(U)$ tale che $g|_U = h$ e $h(P) = g(P) \neq 0$. Secondo l'ultima proprietà per i fasci, la proprietà (e), $D(h) \subset U$ è un aperto e $\frac{1}{h} \in \mathcal{F}(D(h))$. Ponendo $W = D(h) \subset U$ aperto, $g(x) = h(x) \neq 0$ per ogni $x \in W$ per definizione e dunque $\frac{1}{g} = \frac{1}{h}$ in $W = D(h)$, otteniamo che $\frac{1}{g}$ è $\mathcal{F}$ regolare nel punto P.

Adesso dobbiamo fare vedere che le due costruizioni sono inverse una dell'altra. Sia $\mathcal{F}$ un fascio
$$\mathcal{F} \text{ fascio} \longrightarrow \mathcal{F}-\text{regolarità} \longrightarrow \mathcal{O}_X.$$
Dobbiamo fare vedere che $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$. È banale che $\mathcal{F}(U) \subset \mathcal{O}_X(U)$. In effetti sia $f \in \mathcal{F}(U)$ e $f : U \to \mathsf{k}$, perché f è $\mathcal{F}-$regolare in ogni $P \in U$? Basta porre $h = f$, allora $f = h$ in ogni $P \in U$ ci dice che f è $\mathcal{F}-$regolare in ogni $P \in U$.

Dimostriamo che $\mathcal{O}_X(U) \subset \mathcal{F}(U)$, così verifichiamo l'uguaglianza. Sia $f : U \to \mathsf{k}$ e supponiamo che f sia $\mathcal{F}-$regolare per ogni punto $P \in U$, perché $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Per ogni punto $P \in U$ esiste W_P intorno di P in U e $g_P \in \mathcal{F}(W_P)$ tale che $f|_{W_P} = g_P$ in W_P.
$U = \bigcup_{P\in U} W_P$ e verifichiamo le condizioni di compatibilità fra le $g_P \in \mathcal{F}(W_P)$. Se $x \in W_P \cap W_Q$, allora $g_P(x) = f(x) = g_Q(x)$ perché f ha queste condizioni, $f|_{W_P} = g_P$ e $f|_{W_Q} = g_Q$. Secondo uno degli assiomi per i fasci, esiste $g \in \mathcal{F}(U)$ tale che $g|_{W_P} = g_P$ per ogni $P \in U$.
Se considero $f - g$, essa è una funzione $U \to \mathsf{k}$ ed è tale che $f - g|_{W_P} = g_P - g_P = 0$ per ogni $P \in U$, dunque poiché f, g sono funzioni, o applicando uno degli assiomi, otteniamo $f = g \in \mathcal{F}(U)$.

Adesso partiamo dal tipo di regolarità e vediamo che succede
$$\text{tipo di regolarità} \longrightarrow \mathcal{O}_X-\text{fascio} \longrightarrow \mathcal{O}_X-\text{regolarità}.$$

È vero che il tipo iniziale di regolarità corrisponde alla $\mathcal{O}_X-$regolarità? Si, dimostriamo.
Sia f regolare nel punto P, $\mathrm{dom}(f) \subset X$ e così via. Secondo l'assioma (ii) esiste un intorno U di P tale che f è regolare in ogni punto di U, quindi $g = f|_U \in \mathcal{O}_X(U)$.
Riscriviamo $f|_U = g$ e otteniamo che f è $\mathcal{O}_X-$regolare nel punto P.

Viceversa sia f $\mathcal{O}_X-$regolare nel punto P, quindi esiste un intorno U di P e $h \in \mathcal{O}_X(U)$ tale che $f|_U = h$, h è per definizione regolare in ogni $Q \in U$, in particolare in P, dunque secondo l'assioma (i) f è regolare nel punto P. $\square$

Segnaliamo l'esistenza di tipi di fasci più generali in cui ad esempio le f sono campi vettoriali e non funzioni e $\mathcal{O}_X$ è un insieme o qualcosa di meno strutturato rispetto ad una $\mathsf{k}-$algebra.

Fascio strutturale di chiusi affini in $\mathbb{A}^n$
Abbiamo due tipi di funzioni per chiusi irriducibili, funzioni polinomiali e razionali, ma quale tipo di regolarità scegliere? Definiremo adesso che tipo di regolarità si usa solitamente in geometria algebrica.

Sia X un chiuso affine[24], $\mathsf{k} = \overline{\mathsf{k}}$ algebricamente chiuso, X dotato della topologia di Zariski.

Definizione 94. Una funzione f con dominio $\mathrm{dom}(f) \subset X$ a valori in k si dice *regolare nel punto* $P \in X$ se esiste un intorno W di P tale che $W \subset \mathrm{dom}(f)$ e due funzioni polinomiali $p, q \in A(X)$ tale che $q(x) \neq 0$ per ogni $x \in W$ e $f = \frac{p}{q}$ in W.

Si verifica facilmente che gli assiomi (i), (ii), (iii) e (iv) sono verificati. Verifichiamo ad esempio l'assioma (iv). Sia $g = \frac{p}{q}$ in qualche intorno W e sia $g(P) \neq 0$, dunque $p(P) \neq 0$. $W \setminus V(p)$ è un intorno di P e $\frac{1}{g} = \frac{q}{p}$. Questa uguaglianza è valida in $W \setminus V(p)$ e dunque $\frac{1}{g}$ è regolare.

Sia $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ un chiuso. Si denota con $\mathcal{O}_X$ il fascio delle funzioni regolari

$$\mathcal{O}_X(U) = \left\{ f : U \to \mathsf{k} \quad \begin{array}{l} \text{tale che } \forall x \in U \text{ esiste } W_x \subset U \text{ intorno di } x \text{ in } U \text{ per} \\ \text{cui } f = \frac{p}{q}, \text{ dove } p, q \in A(X) \text{ e } q(y) \neq 0 \text{ per ogni } y \in W_x \end{array} \right\}.$$

Se X è irriducibile il fascio $\mathcal{O}_X$ ha una forma semplice. Ricordiamo che in questo caso $A(X)$ è dominio di integrità e $\mathsf{k}(X)$ è il suo campo dei quozienti.

Lemma 95. *Sia X un chiuso affine irriducibile, sia $A(X)$ l'algebra delle funzioni polinomiali, un dominio d'integrità, e sia $\mathsf{k}(X)$ il campo dei quozienti di $A(X)$, il campo dei funzioni razionali di X*

(a) Siano φ_1 e φ_2 in $\mathsf{k}(X)$. Supponiamo che esista un aperto non vuoto $W \subset dom(\varphi_1) \cap dom(\varphi_2)$ tale che $\varphi_1(P) = \varphi_2(P)$ per ogni $P \in W$, allora $\varphi_1 = \varphi_2$.

(b) Sia $f : U \to \mathsf{k}$ una funzione $\mathcal{O}_X-$regolare. Allora esiste ed è unica una $\varphi \in \mathsf{k}(X)$ tale che $U \subset dom(\varphi)$ e $f = \varphi|_U$.

Dimostrazione. (a) Sia $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ e $W \subset \mathrm{dom}(\varphi)$, $\varphi = \frac{g}{h}$ con $g, h \in A(X)$. Poiché si ha $h \neq 0$, $D(h) = X \setminus V(h)$ è un aperto non vuoto. Se $P \in W \cap D(h)$, si ha che $\varphi(P) = \frac{g(P)}{h(P)}$ $(h(P) \neq 0)$ per definizione e $\varphi(P) = \varphi_1(P) - \varphi_2(P) = 0$, quindi $g(P) = 0$.
Di conseguenza si ha $V(g) \supset W \cap D(h)$, ma $W \cap D(h)$ è l'intersezione di due aperti non vuoti nel chiuso irriducibile X, quindi $W \cap D(h)$ è denso in X, allora $V(g) = X$ perché chiuso, cioè $g = 0$, da cui $\varphi = 0$ e $\varphi_1 = \varphi_2$.

(b) f è una funzione $\mathcal{O}_X-$regolare, dunque se $P \in U$ esiste un intorno $W_P \subset U$ tale che $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ per $\forall x \in W_P$, dove $h(x) \neq 0$ per $\forall x \in W_P$. Poniamo $\varphi = \frac{g}{h} \in \mathsf{k}(X)$. Se $Q \in U$, allora $f(x) = \frac{g_1(x)}{h_1(x)}$ in qualche

[24]Irriducibile oppure no, non importa.

intorno W_Q, con lo stesso argomento. Sia $\varphi_1 = \frac{g_1}{h_1}$, $W_P \subset \mathrm{dom}(\varphi)$ e $W_Q \subset \mathrm{dom}(\varphi_1)$ e per ogni $x \in W_P \cap W_Q$ si ha $\varphi(x) = f(x) = \varphi_1(x)$ (prima e seconda rappresentazione di f).

Dalla parte (a) si ha $\varphi = \varphi_1$, allora la funzione razionale φ non cambia cambiando punto: $\varphi \in \mathsf{k}(X)$, $U \subset \mathrm{dom}(\varphi)$ e $\varphi|_U = f$, ragionando punto per punto, la funzione razionale associata ad f non cambia mai.

L'unicità di φ segue da (a): se φ_1 è un'altra funzione razionale con queste proprietà, $U \subset \mathrm{dom}(\varphi), U \subset \mathrm{dom}(\varphi_1)$ e $\varphi(x) = f(x) = \varphi_1(x)$, allora $\varphi = \varphi_1$ per la parte (a). $\square$

Proposizione 96. *Sia X un chiuso affine irriducibile. Per ogni aperto non vuoto $U \subset X$ si ha*

$$(*) \quad \mathcal{O}_X(U) = \{\varphi|_U : \varphi \in \mathsf{k}(X), U \subset dom(\varphi)\}.$$

Dimostrazione. Verifichiamo che la parte destra è contenuta in $\mathcal{O}_X(U)$. Sia $f = \varphi|_U : U \to \mathsf{k}$ e sia $P \in U$. Essendo φ regolare in P si ha che $\varphi = \frac{g}{h}$ dove $g, h \in A(X)$ e $h(P) \neq 0$. Poniamo $W_P = U \setminus V(h)$. Per ogni $x \in W_P$ si ha $f(x) = \varphi(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, dunque $f = \varphi|_U$ è $\mathcal{O}_X-$regolare nel punto P. Viceversa, sia $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Allora, secondo il Lemma 95 esiste un unico elemento $\varphi \in \mathsf{k}(X)$ tale che $U \subset \mathrm{dom}(\varphi)$ e $f = \varphi|_U$. Quindi $\mathcal{O}_X(U)$ è contenuto nella parte destra di $(*)$. $\square$

Aperti principali

Definizione 97. Sia $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ un chiuso affine. Sia $f \in A(X)$. L'insieme

$$D(f) = X \setminus V(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$$

si dice *aperto principale.*

Diamo adesso alcuni esempi:

1. Sia $X = \mathbb{A}^1_{\mathsf{k}}$ e sia $f(t) = t$, allora $D(f) = \mathbb{A}^1_{\mathsf{k}} \setminus \{0\}$ è un aperto principale e vediamo nel prossimo esempio che in $\mathbb{A}^1$ ogni aperto è principale.

2. Sia $\mathbb{A}^1 \setminus \{P_1, \dots, P_m\} = U$ un aperto. Siano $t_i = P_i$ le coordinate di P_i e se considero

$$f(t) = (t - t_1) \dots (t - t_m)$$

allora $U = D(f)$. Sicuramente $\emptyset$ e $\mathbb{A}^1_{\mathsf{k}}$ sono aperti principali se prendo $f(t) \equiv 0$ e $f(t) = c \neq 0$ rispettivamente. Ne concludiamo che in $\mathbb{A}^1_{\mathsf{k}}$ tutti gli aperti sono principali, ma non è vero per il piano e altri spazi.

Lemma 98. *Sia $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ un chiuso affine. Gli aperti principali di X formano una base nella topologia di Zariski.*

Dimostrazione. Sia $U \subset X$ aperto e sia $x \in U$. Dobbiamo fare vedere che esiste $f \in A(X)$ tale che $D(f) \subset U$ e $x \in D(f)$, così al variare di f otterremo una base della topologia di Zariski.
Conviene lavorare con i chiusi rispetto agli aperti: sia $U = X \setminus Z$, allora $D(f) = X \setminus V(f) \subset X \setminus Z$ se, e solo se, $V(f) \supset Z$. Sappiamo che $x \in D(f)$ se, e solo se, $x \notin V(f)$, quindi bisogna trovare una $f \in A(X)$ tale che $f \in I_X(Z)$, ma $f(x) \neq 0$, cioè $f \notin I_X(Z \cup \{x\})$. Verifichiamo che una tale funzione esiste. $Z \subsetneqq Z \cup \{x\}$ perché $x \in X \setminus Z$ e questi sono chiusi in X. I_X stabilisce una corrispondenza iniettiva fra chiusi in X ed ideali di $A(X)$ dunque $I_X(Z) \supsetneqq I_X(Z \cup \{x\})$, quindi la f esiste. $\square$

Vogliamo calcolare $\mathcal{O}_X(D(f))$ se $f \neq 0$. Ricordiamo che $f \in A = A(X)$ è un elemento non nilpotente ($f^n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$), ponendo $S = \{1, f, f^2, \dots, f^n, \dots\}$, abbiamo definito

$$S^{-1}A = \left\{ \frac{a}{f^l} : a \in A, l \in \mathbb{N} \right\}$$

con la relazione che ci dice quando due frazioni sono uguali. Si usa anche la notazione $A_f = S^{-1}A$.

Teorema 99. *Sia* k *un campo algebricamente chiuso. Sia* X *un insieme chiuso in qualche spazio affine. Sia* $f \in A(X)$ *con* $f \neq 0$*, allora*

$$\mathcal{O}_X\left(D(f)\right) \simeq \left(A(X)\right)_f .$$

In particolare $\mathcal{O}_X(X) \simeq A(X)$ *ponendo* $f = 1$.

Prima di dimostrare la proposizione osserviamo che in un caso particolare questo risultato ce lo abbiamo

Osservazione 100. Se X è un chiuso affine irriducibile, allora $\mathcal{O}_X(X) \simeq A(X)$ è un risultato noto perché

$$\mathcal{O}_X(X) = \{\varphi|_X : \varphi \in \mathsf{k}(X), X \subset \operatorname{dom}(\varphi)\} = A(X).$$

Infatti, abbiamo mostrato che le funzioni razionali regolari in ogni punto sono polinomiali ed in questo caso l'idea della dimostrazione è la stessa seguita nel caso particolare, ma più articolata: l'argomento è sempre basato sul Teorema degli zeri.

Dimostrazione(Teorema 99). Definiamo un omomorfismo $\psi : A(X)_f \to \mathcal{O}_X\left(D(f)\right)$: se $\frac{g}{f^m} \in A(X)_f$ consideriamo

$$\psi : \frac{g}{f^m} \mapsto \text{la funzione che associa } x \in D(f) \mapsto \frac{g(x)}{f(x)^m}$$

e dobbiamo fare vedere che è ben definita. Sia $\frac{g}{f^m} = \frac{h}{f^l}$ in $A(X)_f$, quindi esiste un $r \geq 0$ tale che $f^r(gf^l - hf^m) = 0$ in $A(X)$. Se $x \in D(f)$, cioè $f(x) \neq 0$, otteniamo

$$f(x)^r\left(g(x)f(x)^l - h(x)f(x)^m\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{g(x)}{f(x)^m} = \frac{h(x)}{f(x)^l}$$

perché abbiamo diviso per una potenza opportuna di f, dunque l'applicazione è ben definita.
L'applicazione è un omomorfismo di $\mathsf{k}-$algebre e questo è ovvio per il modo in cui sono definite somma e prodotto nell'anello di frazioni.

Rimane da fare vedere che l'omomorfismo ψ è un isomorfismo, cioè che è iniettivo e surgettivo. Per prima cosa facciamo vedere che è iniettivo: sia $\frac{g}{f^m} \in \ker\psi$: $\forall x \in D(f)$ si ha che $\frac{g(x)}{f(x)^m} = 0$, allora $V(g) \supset D(f) = X \setminus V(f)$, da cui $X = V(g) \cup V(f)$ e dunque $fg = 0$.
Affermiamo adesso che $\frac{g}{f^m} = \frac{0}{1}$ in $A(X)_f$. In effetti $f(g\cdot 1 - 0 \cdot f^m) = 0$ per la relazione, dunque l'applicazione è iniettiva.

Verifichiamo che $\psi : A(X)_f \to \mathcal{O}_X\left(D(f)\right)$ è surgettiva: sia $\varphi \in \mathcal{O}_X\left(D(f)\right)$, allora per ogni $x \in D(f)$ esiste un intorno di x, $W_x \subset D(f)$ e $h_x, g_x \in A(X)$ tale che $\varphi = \frac{h_x}{g_x}$ in W_x e $g_x(y) \neq 0$ per ogni $y \in W_x$. Abbiamo la relazione $g_x\varphi = h_x$ in W_x e vogliamo ottenere una simile relazione in tutto $D(f)$.

Vogliamo estendere la relazione in $D(f)$ e dunque poniamo $Z = X \setminus W_x$. Z è un chiuso di X, esso contiene $V(f)$, e inoltre $Z \subsetneq Z \cup \{x\}$ in quanto $x \in W_x$. Utilizziamo che l'operazione I_X è iniettiva[25] e dunque esiste $r_x \in A(X)$ tale che $r_x|_Z = 0$ e $r_x(x) \neq 0$, cioè $r_x \in I_X(Z) \setminus I_X\left(Z \cup \{x\}\right)$. Moltiplichiamo $g_x\varphi = h_x$ per r_x ed otteniamo $r_xg_x\varphi = r_xh_x$ e questa uguaglianza di funzioni vale in W_x.

Se $z \in D(f) \setminus W_x$, allora $0 = r_x(z)g_x(z)\varphi(z) = r_x(z)h_x(z) = 0$ e sono tutti ben definiti, $r_x, g_x, h_x \in A(X)$, φ è ben definita. Ponendo $G_x = r_xg_x$ e $H_x = r_xh_x$ otteniamo $G_x\varphi = H_x$ una relazione valida in tutto $D(f)$. G_x e H_x sono funzioni polinomiali come prodotto di funzioni polinomiali e $G_x(x) \neq 0$ (importante).

Sia J l'ideale in $A(X)$ generato dalle funzioni G_x per $x \in D(f)$. Affermiamo che $V(J) \subset V(f)$. In effetti se $x \in D(f) = X \setminus V(f)$, allora esiste G_x tale che $G_x(x) \neq 0$, quindi $x \notin V(J)$, da cui $V(J) \subset X \setminus D(f) = V(f)$. Otteniamo che $f \in I_X\left(V(J)\right) = \sqrt{J}$, allora esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $f^N \in (G_x)_{x \in D(f)}$, allora si ha la seguente uquaglianza nell algebra $A(X)$

$$f^N = \sum_{i=1}^{s} u_i G_{x_i}.$$

[25] Utilizziamo lo stesso argomento utilizzato nel lemma 98.

Restringendo su $D(f)$ e molteplicando per φ otteniamo

$$f^N\varphi = \sum_{i=1}^{s} u_i(G_{x_i}\varphi)$$

Secondo la relazione $G_x\varphi = H_x$ possiamo sostituire a $G_{x_i}\varphi$ la funzione H_{x_i} e dunque

$$\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{s} u_i H_{x_i}}{f^N} = \frac{g}{f^N},$$

relazione di funzioni in $D(f)$. $\square$

Corollario 101. *Sia $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ un chiuso irriducibile. Sia $A = A(X)$, $K = \mathsf{k}(X)$, $A \subset K$, $f \in A$, $f \neq 0$. Una funzione razionale $\varphi \in \mathsf{k}(X)$ ha la proprietà che $D(f) \subset dom(\varphi)$ se e solo se $\varphi = \frac{g}{f^l}$ per qualche $g \in A(X)$ e $l \in \mathbb{Z}, l \geq 0$.*

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Se $\varphi = \frac{g}{f^l}$, allora è ovvio che $D(f) \subset \mathrm{dom}(\varphi)$.
($\Rightarrow$) Sia $D(f) \subset \mathrm{dom}(\varphi)$. Poniamo $S = \{1, f, f^2, \ldots\}$. Ricordiamo della lezione degli anelli di frazioni che, essendo $A = A(X)$ dominio d'integrità si ha

$$S^{-1}A = \{\frac{g}{f^l} \in K : g \in A, l \geq 0\}$$

Poniamo $h = \varphi|_{D(f)} \in \mathcal{O}_X(D(f))$ (si veda Proposizione 96). Secondo il teorema esiste $\varphi_1 = \frac{g}{f^l}$, tale che $\varphi_1(x) = h(x)$ per $\forall x \in D(f)$. Allora $\varphi_1|_{D(f)} = \varphi|_{D(f)}$ e secondo il lemma 95 concludiamo che $\varphi = \varphi_1 = \frac{g}{f^l}$. $\square$
Esempio. $X = \mathbb{A}^1$, $f = t$, $D(f) = \mathbb{A}^1 \setminus 0$. Otteniamo che

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}(\mathbb{A}^1 \setminus 0) = \left\{\frac{g(t)}{t^l} : g(t) \in \mathsf{k}[t], l \geq 0\right\} = \{\text{i polinomi di Laurent}\}$$

Spazi con funzioni

Definizione 102 Sia k un campo. Sia X uno spazio topologico. Sia $\mathcal{O}_X$ un fasco di funzioni con valori in k ($\mathcal{O}_X$ si dice fascio di $\mathsf{k}-$funzioni). La coppia $(X, \mathcal{O}_X)$ si dice *spazio con* k*-funzioni.* $\mathcal{O}_X$ si dice *fascio strutturale dello spazio.*

Di fatto abbiamo uno spazio topologico X agganciato ad un tipo di regolarità, concetto che abbiamo visto essere equivalente a quello di fascio di funzioni. Diamo adesso degli esempi:
1. Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ aperto e sia $\mathsf{k} = \mathbb{R}$, allora $(X, \mathcal{C}^k_X)$ è uno spazio con funzioni.

2. Sia $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ un chiuso affine dotato dalla topologia di Zariski, $\mathcal{O}_X$ è il fascio di funzioni regolari, corrispondenti localmente a quozienti di funzioni polinomiali.

Definizione 103. Siano $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$ due spazi con funzioni. Un'applicazione $\varphi : X \to Y$ si dice *morfismo* se

(i) φ è un'applicazione continua;

(ii) è soddisfatta una delle seguenti condizioni equivalenti

  (a) Per ogni aperto $U \subset Y$ l'applicazione $f \mapsto \varphi^*(f) := f \circ \varphi$ trasforma $\mathcal{O}_Y(U)$ in $\mathcal{O}_X\left(\varphi^{-1}(U)\right)$.

  (b) Per ogni $x \in X$ e per ogni funzione f che è $\mathcal{O}_Y-$regolare nel punto $y = \varphi(x)$, la funzione $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ è $\mathcal{O}_X-$regolare nel punto x.

L'equivalenza di (a) e (b) si dimostra banalmente dalle definizioni.

Proposizione 104 *Siano* $u : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *e* $v : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ *due morfismi, allora* $v \circ u : X \to Z$ *è un morfismo rispetto ad* $\mathcal{O}_X$ *e* $\mathcal{O}_Z$.

Dimostrazione La composizione $v \circ u$ è continua in quanto composizione di due applicazioni continue. Sia $x \in X$, $y = u(x) \in Y$, $z = v(y) \in Z$. Sia h una funzione $\mathcal{O}_Z$-regolare nel punto z. Allora, $h \circ v$ è $\mathcal{O}_Y$-regolare nel punto y e $(h \circ v) \circ u$ è $\mathcal{O}_X$-regolare nel punto x. Si ha $(h \circ v) \circ u = h \circ (v \circ u)$, quindi è soddisfata la codizione (b) della definizione di morfismo per la composizione $v \circ u$. $\square$

Adesso possiamo definire cosa è un isomorfismo

Definizione 105. Si dice che il morfismo $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ è *isomorfismo* se esiste un morfismo $\psi : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ tale che $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X$ e $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Y$.

Esempio. Sia $\mathsf{k} = \mathbb{R}$. Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ aperti, $\mathcal{O}_X = \mathcal{C}^\infty_X$, $\mathcal{O}_Y = \mathcal{C}^\infty_Y$. Sia $\varphi : X \to Y$ un'applicazione data da $f_1, \ldots, f_m$, $\varphi(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ dove $f_i \in \mathcal{C}^\infty(X)$. L'applicazione φ è un morfismo perché è continua e se $g \in \mathcal{C}^\infty(V)$ dove $V \subset Y$ è un aperto, allora

$$\varphi^*(g) = g \circ \varphi = g(f_1, \ldots, f_m) \in \mathcal{C}^\infty\left(\varphi^{-1}(V)\right)$$

perché le f_i sono funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ e composizione di funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ ci restituisce ancora funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$. Se $m = n$, se φ è applicazione biiettiva e se $\varphi^{-1} = (g_1, \ldots, g_n)$ con $g_i \in \mathcal{C}^\infty(Y)$, l'applicazione φ è un isomorfismo. In questo caso particolare φ è detto *diffeomorfismo*.

Abbiamo visto che nel caso di un chiuso affine X le funzioni regolari sono funzioni razionali ristrette ad opportuni intorni. Tale processo di restrizione ci permette di generalizzare la nozione a spazi di funzioni su sottinsiemi.

Struttura di spazi con funzioni su sottoinsiemi

Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio con k-funzioni e sia $Y \subset X$ un sottospazio topologico[26]. Dotiamo Y con struttura di spazio con funzioni nel modo seguente, definendo un fascio o un tipo di regolarità, in questo caso è più conveniente definire il tipo di regolarità.

Una funzione f (a valori in k) con $\mathrm{dom}(f) \subset Y$ è $Y-$regolare nel punto $P \in Y$ se esiste un intorno V_P di P in X e una funzione $g \in \mathcal{O}_X(V_P)$ tale che $Y \cap V_P \subset \mathrm{dom}(f)$ e $f|_{Y \cap V_P} = g|_{Y \cap V_P}$, cioè localmente sono restrizioni di funzioni regolari su X.

Gli assiomi da (i) a (iv) si verificano subito e in questo modo abbiamo definito un tipo di regolarità. Questo tipo di regolarità definisce il fascio di funzioni $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X|_Y$.

Definizione 106 La coppia $(Y, \mathcal{O}_Y)$ si dice *sottospazio con funzioni* dello spazio con funzioni $(X, \mathcal{O}_X)$.

Ad esempio, se prendiamo $X = \mathbb{A}^n_\mathsf{k}$ e $Y \subset \mathbb{A}^n_\mathsf{k}$ un chiuso affine, una funzione f con $\mathrm{dom}(f) \subset Y$ è regolare nel punto $P \in Y$ se

$$f = \frac{P(t_1, \ldots, t_n)}{Q(t_1, \ldots, t_n)}$$

in qualche intorno $Y \cap U_P$ di P. Il tipo di regolarità così definito non è altro che il tipo che corrisponde a $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_\mathsf{k}}|_Y$, f è localmente restrizione di una funzione razionale. La nostra definizione nel caso particolare ci dice che $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_\mathsf{k}}|_Y$.

[26]Con sottospazio topologico intendiamo un sottoinsieme dotato della topologia indotta.

Proprietà di restrizione di fasci, proprietà di morfismi

1. Sia $Y \subset X$ un sottospazio con funzioni e sia $V \subset X$ aperto, allora l'omomorfismo di restrizione $h \mapsto h|_Y$ trasforma $\mathcal{O}_X(V)$ in $\mathcal{O}_Y(Y \cap V)$.

   Dimostrazione. Questo è ovvio dalle definizioni. $\square$

2. L'applicazione di inclusione $i : Y \hookrightarrow X$ definita da $i(y) = y$ è un morfismo.

   Dimostrazione. In effetti $i^*(f) = f|_Y$ per definizione e per ogni aperto $V \subset X$ i^* trasforma $\mathcal{O}_X(V)$ in $\mathcal{O}_Y(Y \cap V)$, secondo il punto 1. e $\mathcal{O}_Y(Y \cap V) = \mathcal{O}_Y\left(i^{-1}(V)\right)$, dunque abbiamo la condizione di morfismo. $\square$

3. Siano Y e Z sottospazi topologici dello spazio con funzioni X. Supponiamo che $Z \subset Y$. Se $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X|_Y$ e $\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_Y|_Z$, allora $\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_X|_Z$. In modo equivalente $(\mathcal{O}_X|_Y)|_Z = \mathcal{O}_X|_Z$.

   Dimostrazione. Sia $P \in Z$ e sia f una funzione a valori in k con $\mathrm{dom}(f) \subset Z$. Bisogna dimostrare che f è $\mathcal{O}_X|_Z-$regolare nel punto $P \Leftrightarrow f$ è $\mathcal{O}_Y|_Z-$regolare nel punto P. Abbiamo due tipi di regolarità e ognuno da luogo ad un unico fascio, vogliamo dimostrare che corrispondono.

   ($\Rightarrow$) Se f è $\mathcal{O}_X|_Z$-regolare in P, allora esiste $V_P \subset X$ intorno di P in X ed esiste $g \in \mathcal{O}_X(V_P)$ tale che $Z \cap V_P \subset \mathrm{dom}(f)$ e $f|_{Z \cap V_P} = g|_{Z \cap V_P}$. Poniamo $W_P = V_P \cap Y$ e poniamo $h = g|_{V_P \cap Y}$, $h \in \mathcal{O}_Y(W_P)$ secondo il punto 1 e inoltre $f|_{Z \cap W_P} = h|_{Z \cap W_P}$ e dunque f è $\mathcal{O}_Y|_Z-$regolare in P.

   ($\Leftarrow$) Se f è $\mathcal{O}_Y|_Z-$regolare in P, allora esiste W_P intorno di P in Y e una funzione $h \in \mathcal{O}_Y(W_P)$ tale che $W_P \cap Z \subset \mathrm{dom}(f)$ e $f|_{Z \cap W_P} = h|_{Z \cap W_P}$. La funzione h è $\mathcal{O}_Y-$regolare in P perché $h \in \mathcal{O}_Y(W_P)$, quindi esiste un $V_P \subset X$ intorno di P in X e una funzione $g \in \mathcal{O}_X(V_P)$ tale che $V_P \cap Y \subset \mathrm{dom}(h) = W_P$ e $h|_{V_P \cap Y} = g|_{V_P \cap Y}$. L'insieme $V_P \cap Y \subset W_P$ è aperto. Intersechiamo gli aperti con Z e restringiamo le funzioni su Z. Otteniamo $f|_{V_P \cap Z} = h|_{V_P \cap Z} = g|_{V_P \cap Z}$. Dunque f è $\mathcal{O}_X|_Z-$regolare nel punto P. $\square$

4. Sia $V \subset X$ aperto e sia $\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_X|_V$, allora per ogni aperto $U \subset V$ si ha $\mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_X(U)$.

   Entrambi gli insiemi sono costituiti da funzioni $f : U \to \mathsf{k}$. Bisogna confrontare per $\forall P \in U$ due tipi di regolarità. La proprietà segue dal seguente lemma.

   LEMMA 107. *Sia V un aperto di X e sia $P \in V$. Sia f una $\mathsf{k}-$funzione con $\mathrm{dom}(f) \subset X$, allora f è $\mathcal{O}_X-$regolare nel punto $P \Leftrightarrow f|_V$ è $\mathcal{O}_V-$regolare nel punto P.*

   Dimostrazione
   ($\Rightarrow$) Se f è $\mathcal{O}_X-$regolare in un punto P, allora per uno degli assiomi esiste un intorno $W_P \subset X$ tale che $W_P \subset \mathrm{dom}(f)$ e $h = f|_{W_P} \in \mathcal{O}_X(W_P)$ (secondo assioma del tipo di regolarità).
   L'uguaglianza $f(x) = h(x)$ per ogni $x \in V \cap W_P$ significa che $f|_V$ è $\mathcal{O}_V-$regolare nel punto P, in quanto $\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_X|_V$).

   ($\Leftarrow$) Sia $g = f|_V$. Il fatto che g è $\mathcal{O}_V-$regolare nel punto P ($\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_X|_V$) significa che esiste $U_P \subset X$ intorno di P e $h \in \mathcal{O}_X(U_P)$ tale che $g(x) = h(x)$ per ogni $x \in V \cap U_P$. Essendo V insieme aperto in X l'intersezione $V \cap U_P$ è un intorno di P in X e abbiamo che $f(x) = g(x) = h(x)$ per ogni $x \in V \cap U_P$, dove la prima uguaglianza è per definizione, la seconda per quanto detto sopra. Applichiamo l'assioma (i) di regolarità: h è $\mathcal{O}_X-$regolare nel punto P ed è uguale a f nell'intorno $V \cap U_P$ di P, dunque f è $\mathcal{O}_X-$regolare nel punto P. $\square$

5. Siano $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$ due spazi con funzioni. Sia $u : X \to Y$ un'applicazione. Supponiamo che X e Y abbiano ricoprimenti aperti
   $$X = \bigcup_{i \in I} X_i \quad \text{e} \quad Y = \bigcup_{j \in J} Y_j$$
   con la proprietà che $\forall i \in I$ $u(X_i) \subset Y_{j(i)}$ per qualche $j(i) \in J$ e inoltre la restrizione $u|_{X_i} : X_i \to Y_{j(i)}$ è un morfismo rispetto a $\mathcal{O}_{X_i} = \mathcal{O}_X|_{X_i}$ e $\mathcal{O}_{Y_{j(i)}} = \mathcal{O}_Y|_{Y_{j(i)}}$, allora $u : X \to Y$ è un morfismo.

   Dimostrazione. (a) Verifichiamo che u è un'applicazione continua. Sia $W \subset Y$ un aperto e sia $x \in u^{-1}(W)$. Sia $x \in X_i$. Allora $u(x) \in W \cap Y_{j(i)}$. Siccome $u|_{X_i} : X_i \to Y_{j(i)}$ è un'applicazione continua, $(u|_{X_i})^{-1}(W \cap Y_{j(i)})$ è aperto in X_i. Questo insieme è uguale a $X_i \cap u^{-1}(W)$ e inoltre X_i è aperto in X per ipotesi. Dunque $u^{-1}(W)$ contiene un intorno di x. Risulta che ogni punto $x \in u^{-1}(W)$ è punto interno di $u^{-1}(W)$, quindi $u^{-1}(W)$ è aperto.

(b) Sia $x \in X$ un punto e sia $y = u(x)$. Bisogna verificare che se f con $\mathrm{dom}(f) \subset Y$ è $\mathcal{O}_Y-$regolare nel punto y, allora $u^*(f) = f \circ u$ è $\mathcal{O}_X-$regolare nel punto x. Sia $x \in X_i$, allora $y \in Y_{j(i)} = Y_j$. Utilizziamo il lemma 107:
f è $\mathcal{O}_Y-$regolare nel punto $y \Rightarrow f|_{Y_j}$ è $\mathcal{O}_{Y_j}-$regolare nel punto $y \Rightarrow (u|_{X_i})^*(f|_{Y_j}) = (f \circ u)|_{X_i}$ è $\mathcal{O}_{X_i}$-regolare nel punto x (perché $u|_{X_i} : X_i \to Y_j$ è morfismo) $\Rightarrow f \circ u$ è $\mathcal{O}_X$-regolare nel punto x. □

6. Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio con k-funzioni e sia $(Y, \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X|_Y)$ un sottospazio. Sia $(Z, \mathcal{O}_Z)$ un altro spazio con funzioni. Sono equivalenti i seguenti dati

   (a) $\varphi : Z \to Y$ è morfismo;

   (b) $\psi : Z \to X$ è morfismo e $\psi(Z) \subset Y$.

   Dimostrazione. (a) $\Rightarrow$ (b). Sia $i : Y \to X$ l'inclusione. Dato φ, poniamo $\psi = i \circ \varphi$, che è un morphismo essendo la composizione di due morfismi.

   (b) $\Rightarrow$ (a) Poniamo $\varphi : Z \to Y$ come $\varphi(z) = \psi(z)$ ed è ben definita perché $\psi(Z) \subset Y$. È chiaro che $\psi = i \circ \varphi$, ma perché φ è morfismo? Se $W \subset Y$ aperto, allora $W = Y \cap V$ per qualche $V \subset X$ aperto e $\varphi^{-1}(W) = \psi^{-1}(V)$, dunque $\varphi^{-1}(W)$ è aperto in Z perché ψ è continua.
   Sia $z \in Z$, $y = \varphi(z) = \psi(z)$. Sia f una funzione con $\mathrm{dom}(f) \subset Y$ che è $\mathcal{O}_Y-$regolare nel punto y. Verifichiamo che $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ è $\mathcal{O}_Z-$regolare nel punto z. Per la definizione di $\mathcal{O}_Y$ esiste un aperto $V_y \subset X$ intorno di y e $h \in \mathcal{O}_X(V_y)$ tale che $V_y \cap Y \subset \mathrm{dom}(f)$ e $f|_{V_y \cap Y} = h|_{V_y \cap Y}$. Abbiamo $\varphi^{-1}(V_y \cap Y) = \psi^{-1}(V_y)$. Sia $w \in \varphi^{-1}(V_y \cap Y)$. Allora

$$(*) \qquad \varphi^*(f)(w) = f \circ \varphi(w) = f(\varphi(w)) = h(\psi(w)) = \psi^*(h)(w).$$

   Si ha $\psi^*(h) \in \mathcal{O}_Z(\psi^{-1}(V_y))$, perché ψ è un morfismo. Dalle uguaglianze $(*)$ $\varphi^*(f)|_{\varphi^{-1}(V_y \cap Y)} = \psi^*(h)$. Dunque, $\varphi^*(f)$ è $\mathcal{O}_Z-$regolare nel punto z secondo l'assioma (i) di regolarità. □

Osservazione 108. Sia $Y \subset X$ un sottospazio, sia V un aperto in X (parliamo di spazi con funzioni) e sia $U = V \cap Y$. In generale non è vero che per ogni $f \in \mathcal{O}_Y(U)$ esiste una funzione $g \in \mathcal{O}_X(V)$ tale che $f = g|_{V \cap Y}$. Possiamo solo affermare che esiste un ricoprimento $V \cap Y = \cup_i U_i$, dove $U_i = Y \cap V_i$ con V_i aperti in X, e funzioni $g_i \in \mathcal{O}_X(V_i)$ tali che

$$f|_{U_i} = g_i|_{V_i \cap Y} = g_i|_{U_i} \quad \text{per} \quad \forall i.$$

Per avere una rappresentazione $f = g|_{V \cap Y}$ bisogna che le g_i sono compatibili sulle intersezioni $V_i \cap V_j$, che non è sempre vero[27].

Definizione 109. Un insieme V aperto in un insieme X chiuso in $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ si dice insieme quasiaffine[28].

Dati V e X come nella definizione poniamo

$$\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_X|_V = (\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}}|_X)|_V = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}}|_V.$$

Otteniamo uno spazio con k-funzioni $(V, \mathcal{O}_V)$.

[27] Questo problema vienne affrontato nell'ambito della Coomologia di Fasci

[28] Analogo a quanto abbiamo fatto per un insieme quasi proiettivo.

Proprietà di $(V, \mathcal{O}_V)$**.** Sia $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ un insieme quasiaffine.

1. Una funzione f con $\mathrm{dom}(f) \subset V$ è $\mathcal{O}_V$-regolare nel punto $P \in V$ se in qualche intorno W_P di P in $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ si ha $f|_{V\cap W_P} = \frac{G(t_1,\ldots,t_n)}{H(t_1,\ldots,t_n)}|_{V\cap W_P}$, dove G e H sono polinomi in $\mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$. Questa proprietà segue da $\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}}|_V$.

2. Le funzioni $x_i = t_i|_V, i = 1, \ldots, n$, dette le funzioni coordinate di V, sono funzioni $\mathcal{O}_V$-regolari in ogni punto di V e si ha
$$P = (x_1(P), \ldots, x_n(P)) \in \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}} \quad \text{per} \quad \forall P \in V.$$

3. Sia V irriducibile. Poniamo $X = \overline{V}$, la sua chiusura in $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$. Allora X è irriducibile, V è aperto in X, e per ogni aperto $U \subset V$ si ha
$$\mathcal{O}_V(U) = \{\varphi|_U : \varphi \in \mathsf{k}(X), U \subset \mathrm{dom}(\varphi)\}.$$

   Dimostrazione Le affermazioni che X è irriducibile e che V è aperto in X sono state dimostrate durante le esercitazioni.
$$\begin{aligned}\mathcal{O}_V(U) &= \mathcal{O}_X(U) \quad \text{secondo una delle proprietà di restrizioni di fasci,}\\ &= \{\varphi|_U : \varphi \in \mathsf{k}(X), U \subset \mathrm{dom}(\varphi)\} \quad \text{secondo la proposizione 96.}\end{aligned}$$

$\square$

Definizione 110. Uno spazio con funzioni $(X, \mathcal{O}_X)$ si dice *varietà affine* se è isomorfo a $(Y, \mathcal{O}_Y)$ dove Y è chiuso qualche $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$. Lo spazio $(X, \mathcal{O}_X)$ si dice varietà quasiaffine se è isomorfo a $(V, \mathcal{O}_V)$, dove V è insieme quasiaffine in qualche $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$.

Esempio. La varietà quasiaffine $\mathbb{A}^2_{\mathsf{k}} \setminus \{(0, 0)\}$ non è una varietà affine. Lo vedremo durante le esercitazioni.

Proposizione 111 (Morfismi in varietà quasi affini). *Sia V aperto in un insieme chiuso di $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$, cioè V è un insieme quasi affine. Sia $(Z, \mathcal{O}_Z)$ uno spazio con k-funzioni. Sia $\varphi : Z \to V \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ un'applicazione data da $\varphi = (f_1, \ldots, f_n)$. Allora φ è un morfismo se, e solo se, $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}_Z(Z)$, cioè $f_1, \ldots, f_n$ sono $\mathcal{O}_Z-$regolari in ogni punto $P \in Z$.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Sia φ un morfismo e siano $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{O}_V(V)$ le funzioni coordinate $x_i = t_i|_V$. Si ha $f_i = \varphi^*(x_i)$ perché $x_i \circ \varphi(P) = f_i(P)$, la $i-$esima coordinata di φ è f_i, quindi $f_i \in \mathcal{O}_Z\left(\varphi^{-1}(V)\right) = \mathcal{O}_Z(Z)$ per ogni i perché φ è un morfismo, dunque trasforma funzioni regolari in funzioni regolari.

($\Leftarrow$) Siano $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}_Z(Z)$. Prima vogliamo fare vedere che $\psi = (f_1, \ldots, f_n) : Z \to \mathbb{A}^n$ è un morfismo.
1. ψ è un'applicazione continua: sia $U \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ aperto e sia $P \in \psi^{-1}(U)$. Sia $Q = \psi(P)$ e sappiamo che gli aperti principali formano una base della topologia di $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$, quindi esiste $G \in \mathsf{k}[t_1, \ldots, t_n]$ tale che $Q \in D(G) \subset U$. Si ha che
$$\psi^{-1}(D(G)) = \{z \in Z : G(f_1(z), \ldots, f_n(z)) \neq 0\}$$
$\mathcal{O}_Z(Z)$ è una $\mathsf{k}-$algebra, quindi $g = G(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{O}_Z(Z)$ e $\psi^{-1}(D(G)) = D(g)$ che è un aperto e $P \in D(g) \subset \psi^{-1}(U)$. Abbiamo fatto vedere che ogni punto in $\psi^{-1}(U)$ è interno, dunque $\psi^{-1}(U)$ è aperto.
2. Sia $P \in Z$ e sia $Q = \psi(P)$. Sia f una $\mathsf{k}-$funzione $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}-$regolare nel punto Q, allora
$$f = \frac{G(t_1, \ldots, t_n)}{H(t_1, \ldots, t_n)}$$
in qualche intorno U_Q di Q in $\mathbb{A}^n$, intorno in cui il denominatore è diverso da zero in ogni punto. Applicando ψ^* otteniamo
$$\psi^*(f) = \frac{G(f_1, \ldots, f_n)}{H(f_1, \ldots, f_n)}$$

e siano $g = G(f_1, \dots, f_n)$ e $h = H(f_1, \dots, f_n)$, $g, h \in \mathcal{O}_Z(Z)$ e $h(z) \neq 0$ per ogni $z \in \psi^{-1}(U_Q)$, perché se H è diverso da zero in ogni punto di U_Q, allora h, denominatore di $\psi^*(f) = f \circ \psi$ è diverso da zero in ogni punto di $\psi^{-1}(U_Q)$. Ne concludiamo che $\psi^*(f) = \frac{g}{h}$ nell'intorno $\psi^{-1}(U_Q)$ di P, dunque secondo uno degli assiomi del fascio, $\psi^*(f)$ è $\mathcal{O}_Z-$regolare nel punto P. ψ dunque è morfismo.

3. Utilizziamo la proprietà 6 dei morfismi: sapendo che $\psi = (f_1, \dots, f_n) : Z \to \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ è morfismo e sapendo che $\psi(Z) \subset V$, ponendo $\varphi(z) = \psi(z) = (f_1(z), \dots, f_n(z))$ ci da un morfismo $\varphi : Z \to V$. $\square$

Corollario 112. *Sia k algebricamente chiuso e siano $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ e $Y \subset \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}}$ due chiusi affini. Siano $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_Y$ i loro fasci di funzioni regolari. Allora $\varphi : X \to Y$ è un morfismo se, e solo se, φ è un'applicazione polinomiale.*

Dimostrazione. Sia $\varphi = (f_1, \dots, f_m) : X \to Y \subset \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}}$ e $\varphi(X) \subset Y$. φ è un morfismo se, e solo se, $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}_X(X)$, ma sappiamo che una funzione regolare in ogni punto del chiuso affine X è una funzione polinomiale, dunque questo succede se, e solo se, $f_1, \dots, f_m$ sono funzioni polinomiali, cioè se, e solo se, φ è un'applicazione polinomiale. $\square$

Notazione. Si pone $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(U)$.

Proposizione 113. *Sia $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ un chiuso affine e sia $f \in A(X)$. Sia $V = D(f)$ aperto principale, insieme quasi affine di $\mathbb{A}^n$, e sia $\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_X|_V = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}|_V$, allora $(V, \mathcal{O}_V)$ è una varietà affine, cioè è isomorfa ad un chiuso di un altro spazio affine.*

Prima di dimostrare la proposizione diamo un esempio che ci dà la chiave della dimostrazione, la proposizione cerca di generalizzare l'esempio: sia $X = \mathbb{A}^1$ e sia $f(t) = t$, allora $D(f) = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, $D(f)$ è un insieme quasi affine di $\mathbb{A}^1$, ma se consideriamo l'iperbole $Y = \{xy = 1\} \subset \mathbb{A}^2_{\mathsf{k}}$, chiuso di $\mathbb{A}^2$, allora sappiamo che $D(f)$ è isomorfo ad Y attraverso l'isomorfismo

$$t \mapsto \left(t, \frac{1}{t}\right) \quad \text{che ha per inversa} \quad (x, y) \mapsto x.$$

Dimostrazione(prop. 113). Siano $\{G_i(t_1, \dots, t_n) = 0\}_{i=1,\dots,m}$ le equazioni polinomiali che definiscono X. Sia $f = F(t_1, \dots, t_n)|_X$ e sia $Y \subset \mathbb{A}^{n+1}$ il chiuso affine definito dalle equazioni

$$\begin{cases} G_1(t_1, \dots, t_n) = 0 \\ \vdots \\ G_m(t_1, \dots, t_n) = 0 \\ F(t_1, \dots, t_n) t_{n+1} = 1 \end{cases}$$

Poniamo $V = D(f) \subset X$ aperto e costruiamo adesso due morfismi $\psi : Y \to V$ e $\varphi : V \to Y$ inversi uno all'altro. Poniamo per ogni $Q \in Y$, $Q = (a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$,

$$(*) \quad \psi(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = (a_1, \dots, a_n) = \psi(Q) = P.$$

$(a_1, \dots, a_n)$ soddisfa le prime m equazioni, quindi $P \in X$, inoltre $F(a_1, \dots, a_n) a_{n+1} = 1$, dunque $f(P) = F(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ e quindi $\psi(Q) = P$ appartiene a V. L'applicazione ψ trasforma Y in V ed è data dalle prime n funzioni coordinate, funzioni che appartengono a $\mathcal{O}_Y(Y)$, dunque per la proposizione 111 ψ è un morfismo. Poniamo adesso per ogni $P \in V$, $P = (b_1, \dots, b_n)$,

$$\varphi(b_1, \dots, b_n) = \left(b_1, \dots, b_n, \frac{1}{f(b_1, \dots, b_n)}\right) = \varphi(P) = Q.$$

φ trasforma $V = D(f)$ in Y perché $(b_1, \dots, b_n)$ soddisfa le prime m equazioni, in quanto consideriamo un punto $P \in X$, e anche l'ultima equazione di Y è soddisfatta perché $f(b_1, \dots, b_n) = F(b_1, \dots, b_n)$, dunque $F(b_1, \dots, b_n) \frac{1}{f(b_1, \dots, b_n)} = 1$.

$\varphi = \left(x_1, \dots, x_n, \frac{1}{f}\right)$ è data dalle funzioni x_i e $\frac{1}{f}$ che sono funzioni di $\mathcal{O}_V(V)$, dunque φ è un morfismo secondo la proposizione 111. Resta di fare vedere che le due applicazioni sono una inversa dell'altra:

$$Y \ni (a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \xrightarrow{\psi} (a_1, \dots, a_n) \xrightarrow{\varphi} \left(a_1, \dots, a_n, \frac{1}{f(a_1, \dots, a_n)}\right) = (a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$$

perché si ha $f = F|_X$ e per le equazioni che definiscono Y, dunque $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Y$. Vediamo adesso l'altra composizione, qui

$$(b_1, \dots, b_n) \xrightarrow{\varphi} \left(b_1, \dots, b_n, \frac{1}{f(b_1, \dots, b_n)}\right) \xrightarrow{\psi} (b_1, \dots, b_n),$$

dunque $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$. $\square$

Gli aperti principali considerati come spazio con funzioni sono varietà affini, cioè sono isomorfi a chiusi affini di opportuni spazi, ma questo non vale per aperti in chiusi affini in generale, come ad esempio $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Proposizione 114. *Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ una varietà affine.*

(i) Sia $Y \subset X$ un sottoinsieme chiuso e sia $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X|_Y$, allora $(Y, \mathcal{O}_Y)$ è una varietà affine.

(ii) Sia $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)\,(= \mathcal{O}_X(X))$. Sia $V = D(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ e sia $\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_X|_V$. Allora $(V, \mathcal{O}_V)$ è una varietà affine.

(iii) X ha una base di aperti che sono varietà affini.

Osserviamo che da una varietà affine si ottengono altre varietà affini passando ad un chiuso o ad un aperto principale.

Dimostrazione. (i) Sia $\varphi : X \xrightarrow{\sim} Z \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ isomorfismo, dove Z è un chiuso affine. Sia $\psi : Z \to X$ il morfismo inverso e sia $T = \varphi(Y)$. $T = \psi^{-1}(Y)$ è chiuso in Z e $\varphi|_Y : Y \to T$ è un omeomorfismo.

Poniamo $\mathcal{O}_T = \mathcal{O}_Z|_T$ e verifichiamo che $\varphi : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (T, \mathcal{O}_T)$ è un isomorfismo con morfismo inverso $\psi : (T, \mathcal{O}_T) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$. Già sappiamo che φ e ψ sono omeomorfismi, ma dobbiamo fare vedere che sono morfismi.

La composizione $Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\varphi} Z$ è un morfismo la cui immagine è contenuta in T, quindi φ è un morfismo di $(Y, \mathcal{O}_Y)$ in $(T, \mathcal{O}_Z|_T) = (T, \mathcal{O}_T)$.

Similmente la composizione $T \xrightarrow{i} Z \xrightarrow{\psi} X$ è un morfismo la cui immagine è contenuta in Y, da cui deduciamo che $(T, \mathcal{O}_T) \xrightarrow{\psi} (Y, \mathcal{O}_X|_Y) = (Y, \mathcal{O}_Y)$ è un morfismo.

Osserviamo che abbiamo utilizzato la proprietà dei morfismi due volte e che T è un chiuso affine con il suo fascio di funzioni regolari, ottenute per restrizione

$$\mathcal{O}_T = \mathcal{O}_Z|_T = (\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}|_Z)\,|_T = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}|_T$$

e dunque $(T, \mathcal{O}_T)$ è lo spazio con funzioni associato al chiuso affine $T \subset \mathbb{A}^n$.

(ii) Sia $\varphi : X \xrightarrow{\sim} Z \subset \mathbb{A}^n$ chiuso, φ isomorfismo con inverso $\psi : Z \to X$. Sia $\varphi^* : \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, allora φ^* è un isomorfismo con inverso ψ^*. Sia $g \in \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ tale che $\varphi^*(g) = f$, allora $\varphi : D(f) \to D(g)$ è un omeomorfismo. Lo stesso argomento usato nella parte (i) dimostra che $\varphi : D(f) \to D(g)$ è un isomorfismo, dove $D(f)$ e $D(g)$ sono dotati dei fasci di funzioni $\mathcal{O}_X|_{D(f)}$ e $\mathcal{O}_Z|_{D(g)}$ rispettivamente. Secondo la proposizione 113 $(D(g), \mathcal{O}_{D(g)})$ è isomorfo ad un chiuso affine. Dunque $(D(f), \mathcal{O}_{D(f)})$ è varietà affine.

(iii) Al variare di $f \in \mathcal{O}_X(X)$ gli aperti principali $D(f)$ formano una base della topologia in X perché questo è vero per Z e la sua topologia di Zariski, ma X è isomorfo a Z dunque l'affermazione è vera anche per X varietà affine generica. $\square$

Varietà algebriche

Definizione 115. Uno spazio con k-funzioni $(X, \mathcal{O}_X)$ si dice *varietà algebrica* se esiste ricoprimento aperto finito

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

tale che $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ sono varietà affini per ogni i, dove $\mathcal{O}_{U_i} = \mathcal{O}_X|_{U_i}$.

Di fatto le varietà algebriche sono incollamenti di pezzi di varietà affini, che è quello che abbiamo studiato finora e adesso daremo delle condizioni affinché uno spazio con funzioni risulti una varietà algebrica.

Proposizione 116. *Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio con $\mathsf{k}-$funzioni. Le seguenti affermazioni sono equivalenti*

(i) $(X, \mathcal{O}_X)$ *è varietà algebrica.*

(ii) *X è spazio topologico noetheriano e per ogni $x \in X$ esiste un intorno $x \in U$ tale che $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ è una varietà affine, cioè localmente X è una varietà affine.*

(iii) *X è quasi-compatto e per ogni $x \in X$ esiste un intorno $x \in U$ tale che $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ è una varietà affine.*

Dimostrazione. (i)⇒(ii) Si ha $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ con U_i aperti e varietà affini, dunque ognuno degli U_i è noetheriano perché omeomorfo ad un chiuso affine e sappiamo che unione finita di spazi noetheriani è noetheriana. Ne concludiamo che X è spazio noetheriano essendo unione finita di spazi noetheriani e per $x \in X$, allora $x \in U_i$ per qualche i, dunque U_i è l'intorno cercato.

(ii)⇒(iii) Questo è vero perché ogni spazio noetheriano è quasi-compatto.

(iii)⇒(i) Per ogni $x \in X$ esiste U_x tale che $(U_x, \mathcal{O}_X|_{U_x})$ è una varietà affine per l'ipotesi che abbiamo, dunque $X = \bigcup_{x \in X} U_x$ è un ricoprimento di aperti di X. Sappiamo che X è quasi-compatto, dunque dal ricoprimento possiamo estrarre un ricoprimento finito $X = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_m$ con la proprietà che U_j è varietà affine per $j = 1, \ldots, m$. □

Con le prossime proposizioni vedremo che dato uno spazio con funzioni che sostiene una varietà algebrica, allora restringendoci ad un aperto o ad un chiuso otteniamo ancora uno spazio con funzioni che sostiene una varietà algebrica.

Proposizione 117. *Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ una varietà algebrica, sia $V \subset X$ un aperto e sia $\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_X|_V$, allora $(V, \mathcal{O}_V)$ è una varietà algebrica.*

Dimostrazione. V è noetheriano come sottospazio topologico di X noetheriano. Sia $x \in V$, allora esiste un intorno U di x in X tale che $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ è varietà affine. Poniamo $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X|_U$ e l'intersezione $V \cap U$ è un intorno di x in U ma anche in V. Sappiamo che U è una varietà affine e gli aperti del tipo $D(f)$ formano una base per U, dunque esiste un aperto principale $D(f)$ con $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ tale che $x \in D(f) \subset V \cap U$. Secondo la proposizione 114 $\big(D(f), \mathcal{O}_U|_{D(f)}\big)$ è una varietà affine e affermiamo che $\mathcal{O}_U|_{D(f)} = \mathcal{O}_V|_{D(f)}$. Questo è vero perché da un lato si ha

$$\mathcal{O}_U|_{D(f)} = (\mathcal{O}_X|_U)\,|_{D(f)} = \mathcal{O}_X|_{D(f)}$$

e dall'altro invece

$$\mathcal{O}_V|_{D(f)} = (\mathcal{O}_X|_V)\,|_{D(f)} = \mathcal{O}_X|_{D(f)}$$

e dunque l'uguaglianza che cercavamo. Otteniamo dunque che $x \in D(f) \subset V$ e $\big(D(f), \mathcal{O}_V|_{D(f)}\big)$ è una varietà affine e questo dimostra la proposizione, perché ogni punto ha un aperto che è una varietà affine. □

Proposizione 118. *Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ una varietà algebrica e sia $Y \subset X$ un chiuso e sia $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X|_Y$, allora $(Y, \mathcal{O}_Y)$ è una varietà algebrica.*

Il ragionamento è simile a quello della proposizione appena dimostrata: facciamo vedere che Y è noetheriano e che ogni punto ha un intorno che è una varietà affine.

Dimostrazione. Y è noetheriano perché sottospazio di X noetheriano. Adesso bisogna fare vedere che ogni punto ha un intorno isomorfo ad una varietà affine: sia $y \in Y$ e sia $U \subset X$ un intorno di y tale che $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ è varietà affine. Poniamo $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X|_U$ e sia $W = Y \cap U$. W è un intorno di y in Y perché U è aperto, ma W è un chiuso in U, quindi per proposizione 114 $(W, \mathcal{O}_U|_W)$ è una varietà affine. Rimane da far vedere che $\mathcal{O}_U|_W = \mathcal{O}_Y|_W$. In effetti da un lato si ha

$$\mathcal{O}_U|_W = (\mathcal{O}_X|_U)\,|_W = \mathcal{O}_X|_W$$

e dall'altro invece

$$\mathcal{O}_Y|_W = (\mathcal{O}_X|_Y)\,|_W = \mathcal{O}_X|_W$$

e ne concludiamo così che $(W, \mathcal{O}_Y|_W)$ è una varietà affine, che è quanto cercavamo perché W è un intorno di y in Y. $\square$

Osservazioni.

Riflettiamoci sulla definizione delle varietà algebriche. Vienne scelta una classe di spazi con funzioni detti spazzi modello, in questo caso i chiusi affini. Nella definizione si richiede che lo spazio con funzioni è uno spazio topologico con certe proprietà, in questo caso spazio noetheriano, e che ogni punto possiede un intorno isomorfo ad uno spazio modello, in questo caso isomorfo ad un chiuso affine.

La stessa definizione si può utilizzare in altri campi della geometria. Nella *geometria differenziale* e nella *topologia differenziale* si studiano *varietà differenziabili* di classe $\mathcal{C}^k$ di dimensione n, che sono spazi con $\mathbb{R}$-funzioni. Gli spazi modello sono $(X, \mathcal{C}^k_X)$, dove $X \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto. La condizione topologica è che lo spazio deve essere di Hausdorff a base numerabile.

Nella *geometria complessa* si studiano *complex n-manifolds*, che sono spazi con $\mathbb{C}$-funzioni. Gli spazi modello sono $(X, \mathcal{O}^{an}_X)$, dove $X \subset \mathbb{C}^n$ è un aperto e il fascio $\mathcal{O}^{an}_X$ è il fascio delle funzioni olomorfe. Esso corrisponde al tipo di regolarità in cui una funzione con valori complessi è regolare (= olomorfa o analitica) nel punto $P = (a_1, \ldots, a_n) \in X$, se essa è svilupabile in serie di potenze assolutamente convergente nelle variabili $(z_1 - a_1, \ldots, z_n - a_n)$ in un intorno di P. Lo spazio topologico deve essere di Hausdorff a base numerabile. Quando $n = 1$ tali spazi con funzioni sono dette *Superfici di Riemann*.

Più in generale si studiano spazi con $\mathbb{C}$-funzioni, dove gli spazi modello della geometria algebrica $V(F_1, \ldots, F_m) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ vengono sostituiti con gli insiemi che sono zeri comuni di un numero finito di funzioni olomorfe in qualche aperto $U \subset \mathbb{C}^n$, denotate con $Z(f_1, \ldots, f_n) \subset U$, dove $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}^{an}_{\mathbb{C}^n}(U)$. Lo spazio topologico deve essere di Hausdorff a base numerabile. Tali spazi con funzioni sono dette *complex analytic spaces*.

Struttura di varietà algebriche su insiemi quasi proiettivi

Sia k un campo algebricamente chiuso e sappiamo che in $\mathbb{P}^n_{\mathsf{k}}$ abbiamo la topologia di Zariski. Inoltre $\mathbb{P}^n_{\mathsf{k}}$ è unione di $n+1$ aperti omeomorfi ad uno spazio affine di dimensione n

$$\mathbb{P}^n_{\mathsf{k}} = \bigcup_{i=0}^{n} \mathbb{A}^n_i$$

dove $\mathbb{A}^n_i = \{(x_0 : \ldots : x_i : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n : x_i \neq 0\}$ sono insiemi quasi proiettivi.

Definizione 119. Una $\mathsf{k}-$funzione f con $\mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{P}^n$ si dice *regolare* in $P \in \mathbb{P}^n$, $P = (a_0 : a_1 : \ldots : a_n)$ se

$$f = \frac{G(x_0 : \ldots : x_n)}{H(x_0 : \ldots : x_n)}$$

in qualche intorno $W_P \subset \mathbb{P}^n$ dove G, H sono polinomi omogenei, $\mathrm{gr}(G) = \mathrm{gr}(H)$ e $W_P \subset D(H) = \mathbb{P}^n \setminus V(H)$.

Risulta naturale considerare funzioni regolari di questo tipo, perché i singoli polinomi omogenei non sono funzioni: moltiplicando per λ, possiamo tirar fuori un fattore λ^r, dove r è il grado del polinomio, dunque non abbiamo una funzione ben definita. Per avere una buona definizione e togliere il fattore λ^r, divido per un polinomio omogeneo dello stesso grado e prendo un intorno in cui il polinomio al denominatore non si annulla.

Dobbiamo verificare i 4 assiomi di regolarità: gli assiomi (i), (ii) e (iii) sono facilmente verificati perché immediatamente si verifica che somma e prodotto sono funzioni di questo tipo, verifichiamo invece l'assioma (iv). Sia $P = (a_0 : \ldots : a_n)$ e sia $f(P) = \frac{G(P)}{H(P)} \neq 0$, cioè $P \in D(G)$. Nell'intorno $W_P \cap D(G)$ si ha $\frac{1}{f} = \frac{H}{G}$, dunque $\frac{1}{f}$ è regolare in quest'intorno.
Si denota con $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ il fascio di $\mathsf{k}-$funzioni ottenuto.

Proposizione 120. *$\mathbb{P}^n$ dotato della topologia di Zariski e del fascio strutturale $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ è una varietà algebrica.*

Dimostrazione. La scomposizione in carte affini è il buon candidato per quello che vogliamo dimostrare. Poniamo $\mathbb{A}^n_i = U_i$, allora $\mathbb{P}^n = U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_n$ e ricordiamo che U_l è omeomorfo ad $\mathbb{A}^n$ tramite le applicazioni

$$i_l : \mathbb{A}^n \to U_l \quad \text{definita da} \quad i_l(t_1, \ldots, t_n) = (t_1 : \ldots : t_l : 1 : t_{l+1} : \ldots : t_n)$$

e l'inversa

$$j_l : U_l \to \mathbb{A}^n \quad \text{definita da} \quad j_l(x_0 : \ldots : x_{l-1} : x_l : x_{l+1} : \ldots : x_n) = \left(\frac{x_0}{x_l}, \ldots, \frac{x_{l-1}}{x_l}, \frac{x_{l+1}}{x_l}, \ldots, \frac{x_n}{x_l} \right)$$

Abbiamo due applicazioni che definiscono omeomorfismi. Verifichiamo che queste due applicazioni sono morfismi fra $(U_l, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_{U_l})$ e $(\mathbb{A}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n})$, così otterremo spazi U_l isomorfi ad una varietà affine e avremo concluso. Per semplicità consideriamo $l = 0$ e sia $P = (a_1, \ldots, a_n)$, $Q = i_0(P) = (1 : a_1 : \ldots : a_n)$. Sia f una $\mathsf{k}-$funzione $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}-$regolare nel punto $Q \in U_0$, regolare su $\mathbb{P}^n$ o su U_0 è la stessa cosa, dunque

$$f = \frac{G(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)}{H(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)}$$

dove $H \neq 0$ in ogni punto di qualche intorno W_Q di Q. Se agisco con i_0^* ottengo

$$i_0^*(f) = f \circ i_0 = \frac{G(1, t_1, \ldots, t_n)}{H(1, t_1, \ldots, t_n)} = \frac{g}{h}$$

dove $h(z) \neq 0$ per ogni z tale che $z \in W_P = i_0^{-1}(W_Q)$, allora $i_0^*(f)$ è $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}-$regolare nell'intorno $i_0^{-1}(W_Q)$.

Sia adesso $\varphi = \frac{g}{h}$ una funzione $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}-$regolare nel punto P, quindi $\varphi(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ dove $z \in V_P$ intorno di P in $\mathbb{A}^n$, $h(z) \neq 0$ per ogni $z \in V_P$, secondo la definizione di regolarità. Applichiamo j_0^* e vediamo che succede

$$j_0^*(\varphi) = \frac{g\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)}{h\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)} = \frac{\frac{\widetilde{g}(x_0, \ldots, x_n)}{x_0^{\mathrm{gr}(g)}}}{\frac{\widetilde{h}(x_0, \ldots, x_n)}{x_0^{\mathrm{gr}(h)}}} = \frac{\widetilde{g} \cdot x_0^{\mathrm{gr}(h)}}{\widetilde{h} \cdot x_0^{\mathrm{gr}(g)}} = \frac{G(x_0, \ldots, x_n)}{H(x_0, \ldots, x_n)}$$

dove G, H sono polinomi omogenei di grado $\mathrm{gr}(G) = \mathrm{gr}(H) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$, $H(x) \neq 0$ in ogni punto $x \in j_0^{-1}(V_P)$, intorno di Q.

j_0 e i_0 trasformano funzioni regolari in funzioni regolari, dunque i_0 e j_0 sono isomorfismi. $\square$

Proposizione 121. *Sia $V \subset \mathbb{P}^n$ un insieme quasi proiettivo. Poniamo $\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_V$, allora $(V, \mathcal{O}_V)$ è una varietà algebrica.*

Dimostrazione. V è un aperto in un chiuso $X \subset \mathbb{P}^n$. Sappiamo che se $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_X$ e $(X, \mathcal{O}_X)$ è una varietà algebrica, perché chiuso di una varietà algebrica.
Inoltre sappiamo che $(V, \mathcal{O}_X|_V)$ è pure una varietà algebrica, perché aperto di una varietà algebrica e si ha

$$\mathcal{O}_V = (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_X)|_V = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_V. \quad \square$$

Definizione 122 Uno spazio con k-funzioni $(X, \mathcal{O}_X)$ si dice varietà proiettiva se è isomorfo ad un chiuso proiettivo $Z \subset \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathsf{k}^{n+1})$, dotato del fascio $\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_Z$. Uno spazio con k-funzioni $(X, \mathcal{O}_X)$ si dice varietà quasiproiettiva se è isomorfo ad un insieme quasiproiettivo $V \subset \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathsf{k}^{n+1})$, dotato del fascio $\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_V$.

Proposizione 123. *Si ha $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = \mathsf{k}$, cioè ogni funzione f regolare in ogni punto di $\mathbb{P}^1$ è costante.*

Osserviamo che la situazione è diversa dal caso in cui consideravamo insiemi chiusi affini e insiemi quasi affini, perché in quel caso le funzioni polinomiali sono funzioni regolari in ogni punto di tali insiemi.

Dimostrazione. Possiamo supporre che $f \neq 0$, altrimenti poniamo $c = 0$. Sappiamo che $\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1_0 \cup \mathbb{A}^1_1$ e abbiamo gli isomorfismi

$$\begin{aligned} i_0 : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1_0 \quad &\text{definito da} \quad i_0(t) = (1 : t), \\ i_1 : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1_1 \quad &\text{definito da} \quad i_1(s) = (s : 1). \end{aligned}$$

Sia $f \in \Gamma\left(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\right) \left(= \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1)\right)$, $i_0^*(f) \in \Gamma\left(\mathbb{A}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}\right)$, quindi $i_0^*(f) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ con $a_n \neq 0 = h(t)$. Similmente $i_1^*(f) = b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m = g(s)$ con $b_m \neq 0$ e confrontiamo i due polinomi.
Siano $j_0 : \mathbb{A}^1_0 \to \mathbb{A}^1$ definito da $j_0(x_0 : x_1) = \frac{x_1}{x_0}$ e $j_1 : \mathbb{A}^1_1 \to \mathbb{A}^1$ definito da $j_1(x_0 : x_1) = \frac{x_0}{x_1}$ i morfismi inversi a i_0 e i_1 rispettivamente. Abbiamo

$$\begin{aligned} f|_{\mathbb{A}^1_0} &= j_0^*(i_0^*(f)) = j_0^*(h(t)) = a_0 + a_1 \frac{x_1}{x_0} + \ldots + a_n \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^n \\ f|_{\mathbb{A}^1_1} &= j_1^*(i_1^*(f)) = j_0^*(g(s)) = b_0 + b_1 \frac{x_0}{x_1} + \ldots + b_m \left(\frac{x_0}{x_1}\right)^m \end{aligned}$$

Quindi si ha l'uguaglianza nell'intersezione $\mathbb{A}^1_0 \cap \mathbb{A}^1_1$

$$(*) \quad a_0 + a_1 \frac{x_1}{x_0} + \ldots + a_n \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^n = b_0 + b_1 \frac{x_0}{x_1} + \ldots + b_m \left(\frac{x_0}{x_1}\right)^m$$

Sostituendo $\frac{x_1}{x_0} = t$, $\frac{x_0}{x_1} = \frac{1}{t}$ otteniamo l'uguaglianza tra funzioni nell'insieme $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$

$$a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n = b_0 + b_1 \frac{1}{t} + \ldots + b_m \left(\frac{1}{t}\right)^m$$

da qui otteniamo l'uguaglianza di funzioni nell'insieme $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$

$$t^m(a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) = b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \ldots + b_m.$$

Per il principio di identità di polinomi l'ultima riga è identità di polinomi in $\mathsf{k}[t]$. Siccome $a_n b_m \neq 0$ tale uguaglianza è possibile solo se n=m=0. Dunque $f = a_0 = c \in \mathsf{k}$. $\square$

Corollario 124. *Sia $u : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{A}^n$ un morfismo, allora $u(\mathbb{P}^1)$ è un punto.*

Dimostrazione. Si ha $u = (f_1, \ldots, f_n)$ con $f_i \in \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$, ma $f_i = c_i$ con $c_i \in \mathsf{k}$ costanti per quello che abbiamo appena dimostrato, quindi $u(\mathbb{P}^1) = \{Q\}$ con $Q = (c_1, \ldots, c_n)$. $\square$

Corollario 125. *$(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$ non è isomorfo ad alcuna varietà quasi affine.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\varphi : \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} V$ con $V \subset \mathbb{A}^n$ varietà quasi affine. Sia $i : V \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ il morfismo d'inclusione, allora il morfismo $i \circ \varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{A}^n$ deve essere iniettivo, ma è un assurdo, perché nel corollario 124 abbiamo dimostrato che $(i \circ \varphi)(\mathbb{P}^1)$ è un punto. $\square$

Incollamento di fasci. Atlanti

Abbiamo definito una varietà algebrica come unione finita di varietà affini e dunque un modo per costruire nuove varietà algebriche potrebbe essere quello di incollare varietà affini.

Proposizione 126. *Sia k un campo e sia X uno spazio topologico. Sia $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ con X_i aperti in X. Supponiamo che ogni X_i è dotato di un fascio di $\mathsf{k}-$funzioni $\mathcal{O}_{X_i}$ è supponiamo che valga*

$$(*) \quad \mathcal{O}_{X_i}|_{X_i\cap X_j} = \mathcal{O}_{X_j}|_{X_i\cap X_j} \quad \forall i,j$$

allora esiste un fascio di $\mathsf{k}-$funzioni $\mathcal{O}_X$ su X tale che $\mathcal{O}_X|_{X_i} = \mathcal{O}_{X_i}$ per ogni i.

Questa proposizione ci permette di incollare i fasci, a meno di condizioni di compatibilità.

Dimostrazione. Definiamo tipo di regolarità su X nel modo seguente: f è regolare in un punto $P \in X$ se $P \in X_i$ e $f|_{X_i}$ è $\mathcal{O}_{X_i}-$regolare nel punto P. Osserviamo che P può appartenere a due diversi aperti di X che lo ricoprono, ma la condizione $(*)$ e il lemma 107 ci assicurano la buona definizione. In effetti, se $P \in X_i \cap X_j$, allora $f|_{X_i}$ è $\mathcal{O}_{X_i}-$regolare nel punto P se, e solo se, $f|_{X_i\cap X_j}$ è $\mathcal{O}_{X_i}|_{X_i\cap X_j}-$regolare nel punto P, se, e solo se, $f|_{X_i\cap X_j}$ è $\mathcal{O}_{X_j}|_{X_i\cap X_j}-$regolare nel punto P, se, e solo se, $f|_{X_j}$ è $\mathcal{O}_{X_j}-$regolare nel punto P. Sia $\mathcal{O}_X$ il fascio ottenuto. Dimostriamo che $\mathcal{O}_X|_{X_i} = \mathcal{O}_{X_i}$ per $\forall i$. Sia $U \subset X_i$ un aperto. Allora

$$\begin{aligned} &\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X|_{X_i}(U) \quad \text{secondo una delle proprietà di restrizioni di fasci} \\ &\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_{X_i}(U) \quad \text{per come è definito } \mathcal{O}_X, \end{aligned}$$

dunque $\mathcal{O}_X|_{X_i}(U) = \mathcal{O}_{X_i}(U)$. □

Corollario 127. *Supponiamo che nella proposizione 126 si abbia $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ e $(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ sono varietà algebriche, allora $(X, \mathcal{O}_X)$ è varietà algebrica.*

Dimostrazione. X è unione finita di spazi noetheriani, quindi è noetheriano. Sia $P \in X$ e sia $P \in X_i$ per qualche i. Per definizione esiste un intorno $U_i \subset X_i$ tale che $(U_i, \mathcal{O}_{X_i}|_{U_i})$ è varietà affine, allora abbiamo

$$\mathcal{O}_{X_i}|_{U_i} = (\mathcal{O}_X|_{X_i})|_{U_i} = \mathcal{O}_X|_{U_i}$$

da cui $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ è una varietà affine, dunque X è una varietà algebrica. □

Proposizione 128 (Atlanti). *Sia k un campo. Sia $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ unione di sottoinsiemi. Supponiamo che per ogni $i \in I$ esista una biiezione $\varphi_i : U_i \to X_i$ dove $(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ è uno spazio con $\mathsf{k}-$funzioni e inoltre supponiamo che per ogni i,j*

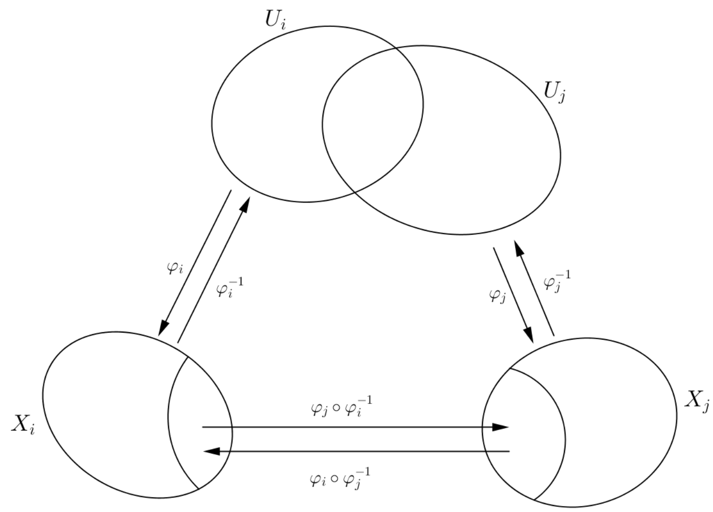
$$\begin{aligned} &\varphi_i(U_i \cap U_j) \quad \textit{sia aperto in} \quad X_i, \\ &\varphi_j(U_i \cap U_j) \quad \textit{sia aperto in} \quad X_j \quad \textit{e l'applicazione} \\ &\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j) \end{aligned}$$

sia un isomorfismo di spazi con funzioni[29]*. Allora X possiede una struttura di spazio con funzioni tale che per ogni $i \in I$ l'insieme U_i è aperto in X e*

$$\varphi_i : (U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}) \to (X_i, \mathcal{O}_{X_i})$$

è un isomorfismo.

[29] Tutto è analogo a quanto si conosce sulle varietà differeziabili.



Dimostrazione. Dotiamo ogni U_i di topologia utilizzando la biiezione φ_i, quindi $V \subset U_i$ è aperto se, e solo se, $\varphi_i(V) \subset X_i$ è aperto. Definiamo la topologia su X dicendo che $W \subset X$ è aperto se, e solo se, $W \cap U_i$ è aperto in U_i per ogni i.
Sapendo che $\varphi_j(U_i \cap U_j) \subset X_j$ è aperto per ogni j, vediamo che $U_i \subset X$ è aperto[30] per ogni i, dunque abbiamo definito una topologia su X e otteniamo un ricoprimento aperto $X = \bigcup_{i \in I} U_i$. Vogliamo costruire un fascio su X attraverso incollamento dei fasci che definiremo su U_i per ogni i.

Definiamo per ogni $i \in I$ un fascio di $\mathsf{k}-$funzioni $\mathcal{F}_i$ su U_i ponendo per ogni $U \subset U_i$

$$\mathcal{F}_i(U) = \{f = g \circ \varphi_i \text{ dove } g \in \mathcal{O}_{X_i}(\varphi_i(U))\}$$

cioè abbiamo trasportato il fascio $\mathcal{O}_{X_i}$ attraverso l'omeomorfismo φ_i, dunque le condizioni automaticamente sono verificate. È ovvio che $\varphi_i : (U_i, \mathcal{F}_i) \to (X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ è un isomorfismo, siamo nelle condizioni della proposizione precedente, ma devono essere verificate le condizioni di compatibilità per poter concludere. Affermiamo che

$$(**) \quad \mathcal{F}_i|_{U_i \cap U_j} = \mathcal{F}_j|_{U_i \cap U_j}.$$

Sia $P \in U_i \cap U_j$, una funzione f con $\mathrm{dom}(f) \subset U_i \cap U_j$ è $\mathcal{F}_i-$regolare nel punto P se, e solo se, $f = g \circ \varphi_i$ in qualche intorno di P in $U_i \cap U_j$ dove g è $\mathcal{O}_{X_i}-$regolare nel punto $\varphi_i(P)$.
Rappresentando f come

$$f = g \circ \varphi_i = g \circ (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) \circ \varphi_j = h \circ \varphi_j \quad \text{dove} \quad h = g \circ (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})$$

e utilizzando l'ipotesi che $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ è un morfismo, otteniamo che h è $\mathcal{O}_{X_j}-$regolare nel punto $\varphi_j(P)$, in quanto $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(\varphi_j(P)) = \varphi_i(P)$. Ne concludiamo che f è $\mathcal{F}_j-$regolare nel punto P e scambiando i con j otteniamo, ripetendo l'argomento che f è $\mathcal{F}_i-$regolare nel punto $P \in U_i \cap U_j$ se, e solo se, f è $\mathcal{F}_j-$regolare nel punto P, cioè vale $(**)$.

Applichiamo la proposizione 126 e otteniamo un fascio $\mathcal{O}_X$ tale che $\mathcal{O}_X|_{U_i} = \mathcal{F}_i$ per ogni I e dunque

$$\varphi_i : (U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}) = (U_i, \mathcal{F}_i) \to (X_i, \mathcal{O}_{X_i})$$

è un isomorfismo per ogni i. □

[30] U_i è aperto in X se, e solo se, $U_i \cap U_j$ è aperto in U_j per ogni j e questo se, e solo se, $\varphi_j(U_i \cap U_j) \subset X_j$ è aperto per ogni j, ma questo è vero per ipotesi.

Corollario 129. *Nelle condizioni della proposizione 128 supponiamo che I sia insieme finito, $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$. Supponiamo che $(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ siano varietà algebriche, allora $(X, \mathcal{O}_X)$ è varietà algebrica.*

Dimostrazione. $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ è isomorfo a $(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ e quindi è varietà algebrica per ogni $i = 1, \ldots, n$. Ora applichiamo il corollario 127. $\square$

Definizione 130. Nell'ipotesi del corollario 129 supponiamo che $(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ siano varietà affini, allora il ricoprimento $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$, $\varphi_i : U_i \xrightarrow{\sim} X_i$ si dice *atlante affine.*

Esempio. $\mathbb{P}^n = \cup_{i=0}^n \mathbb{A}_i^n$, $j_l : \mathbb{A}_l^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n$ è un atlante affine di $\mathbb{P}^n$.

Varietà differenziabili e atlanti

Siano $\mathsf{k} = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Nelle condizione della proposizione 128 supponiamo che X_i siano aperti di $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{O}_{X_i} = \mathcal{C}^\infty_{X_i}$. La scomposizione $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, $\varphi_i : U_i \to X_i$ si dice *atlante differenziabile.* Se U e V sono aperti in $\mathbb{R}^n$, allora $\varphi = (f_1, \ldots, f_n) : U \to V$ è un morfismo di $(U, \mathcal{C}^\infty_U)$ in $(V, \mathcal{C}^\infty_V)$ se, e solo se, $f_i \in \mathcal{C}^\infty_U$ per $\forall i$, cioè φ è applicazione di classe $\mathcal{C}^\infty$. In questo caso la condizione di compattibilità della proposizione 128 diventa: per ogni $i, j \in I$

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

deve essere un'applicazione di classe $\mathcal{C}^\infty$. Questa condizione implica, scambiando i e j, che infatti $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ è un diffeomorfismo. Vediamo che in questo caso particolare si ottiene la classica definizione di atlante di una varietà differenziabile. L'esistenza di un atlante non implica la condizione di Hausdorff, che deve essere verificata separatamente. Se l'insieme degli indici I è numerabile, la topologia su X è a base numerabile.

La stesse considerazioni valgono per i complex n-manifolds e le Superfici di Riemann, dove U_i sono aperti di $\mathbb{C}^n$, rispettivamente $\mathbb{C}$, e invece di finzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ si considerano funzioni olomorfe.

Varietà di Grassmann

Vediamo adesso un esempio importante di varietà algebrica che generalizza la nozione di spazio proiettivo. Siano $m, n \in \mathbb{N}$ e definiamo

$$G(m, m+n) = \left\{ W : \begin{array}{l} W \text{ è sottospazio di} \\ \mathsf{k}^{m+n} \text{ di dimensione } m \end{array} \right\}.$$

Sia $\mathsf{k}^{m+n} = V$ e analizziamo alcuni casi particolari: per $m = 1$ otteniamo

$$G(1, n+1) = \{\langle v \rangle : v \in \mathsf{k}^{n+1}, v \neq 0\} = \mathbb{P}(V)$$

e se $n = 1$

$$G(m, m+1) = \{H : H \subset \mathsf{k}^{m+1}, H \text{ iperpiano}\} \xleftrightarrow{1:1} \{\langle \alpha \rangle : \alpha \in V^*, \alpha \neq 0\} = \mathbb{P}(V^*)$$

perché ricordiamo che ogni iperpiano si rappresenta con un'equazione omogenea di primo grado. Anche nei casi generali possiamo interpretare $G(m, m+n)$ attraverso lo spazio proiettivo:

$$G(m, m+n) : \begin{array}{l} W \subset \mathsf{k}^{n+m} \\ \dim W = m \end{array} \xleftrightarrow{1:1} \begin{array}{l} \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(\mathsf{k}^{n+m}) \equiv \mathbb{P}^{n+m-1} \\ \dim \mathbb{P}(W) = m - 1 \end{array}$$

In questo caso l'insieme di Grassmann si denota con $Gr(m-1, m+n-1)$.

Esempio. Sia $m = 2$ e $n = 2$, allora gli elemeni di $G(2, 4)$ sono i sottospazi $W \subset \mathsf{k}^4$ di dimensione 2, mentre gli elementi di $Gr(1, 3)$ sono le rette proiettive in $\mathbb{P}^3$.

Sappiamo che $\mathbb{P}^n = \cup_{i=0}^n \mathbb{A}_i^n$ e vogliamo rappresentare in modo analogo l'insieme di Grassmann.

Fissiamo una base di k^{m+n}, $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ che ha 1 al posto $i-$esimo, 0 altrove. Dato un sottospazio di dimensione m $W \subset \mathsf{k}^{m+n}$, $W \in G(m, m+n)$ insieme di Grassman, sia $f_1, \ldots, f_m$ una base di W, $f_i = \sum_{j=1}^{n+m} x_{ij} e_j$. In questo modo otteniamo una matrice di tipo $m \times (m+n)$ le quali righe sono le coordinate di f_i

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1\,m+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{m\,m+n} \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha rango $\mathrm{rank}(X) = m$ perché le righe di X sono linearmente indipendenti. Viceversa, data una matrice X di tipo $m \times (m+n)$ di rango m, possiamo associare ad X il sottospazio $W \subset \mathsf{k}^{m+n}$ generato dalle righe di X. Tuttavia, due matrici X e X_1 possono determinare lo stesso W, e questo avviene se, e solo se, $X_1 = AX$ dove A è una matrice invertibile $m \times m$, A trasforma la base di W determinata da X nella base di W determinata da X_1. Otteniamo che

$$G(m, m+n) \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} \text{matrici } m \times (m+n) \\ \text{di rango } m \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

dove $X' \sim X$ se, e solo se, $X' = AX$ dove A è invertbile di tipo $m \times m$.

Vediamo adesso un esempio: sia $m = 1$ matrici riga $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ e $A = (\lambda)$ con $\lambda \neq 0$, dunque

$$X' \sim X \Leftrightarrow (x'_0, \dots, x'_n) = (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$$

e osserviamo che è la stessa relazione che si utilizza per definire uno spazio proiettivo.

Sia $I = \{i_1, \dots, i_m\}$ con $i_1 < i_2 < \dots < i_m$. Data una matrice X di tipo $m \times (m+n)$, denotiamo con X_I la matrice $m \times m$ formata dalle colonne di numeri $i_1, i_2, \dots, i_m$. Denotiamo con $\mathbb{A}_I^{n \cdot m}$ il sottoinsieme di $G(m, m+n)$ che corrisponde a sottospazi rappresentati da matrici X con $\det X_I \neq 0$.

Osserviamo che un elemento di $G(m, m+n)$ non determina univocamente la matrice X che lo rappresenta, tuttavia la definizione è corretta: se $X' = AX$ con A invertibile di tipo $m \times m$, allora $X'_I = AX_I$ e $\det X'_I = \det A \cdot \det X_I \neq 0$, dunque la definizione è indipendente dalla scelta della matrice.

Gli elementi di questi sottoinsiemi hanno una rappresentazione normale: dato un elemento $W \in \mathbb{A}_I^{m \cdot n}$, sia $f_1, \dots, f_m$ una base e sia

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1\,m+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{m\,m+n} \end{pmatrix}$$

la matrice corrispondente. La matrice

$$(*) \quad X_I^{-1} X = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & 1 & & 0 & & & 0 & \\ * & 0 & * & 1 & * & \dots & \vdots & * \\ & \vdots & & \vdots & & & 0 & \\ & 0 & & 0 & & & 1 & \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} & i_1 & & i_2 & & & i_m \end{array} \end{array}$$

corrisponde ad un'altra base $g_1, \dots, g_m$ di W che ha questa forma speciale. Affermiamo che vi è una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{A}_I^{m \cdot n} \subset G(m, m+n)$ e le matrici del tipo specificato $(*)$. In effetti per ogni W esiste una tale matrice che la rappresenta, ma se due matrici del tipo $(*)$ rappresentano lo stesso W, allora esiste A invertibile del tipo $m \times m$ tale che

$$A \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & 1 & & 0 & & & 0 & \\ * & 0 & * & 1 & * & \dots & \vdots & * \\ & \vdots & & \vdots & & & 0 & \\ & 0 & & 0 & & & 1 & \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} & i_1 & & i_2 & & & i_m \end{array} \end{array} = \begin{pmatrix} & 1 & & 0 & & & 0 & \\ *' & 0 & *' & 1 & *' & \dots & \vdots & *' \\ & \vdots & & \vdots & & & 0 & \\ & 0 & & 0 & & & 1 & \end{pmatrix}.$$

Considerando la sottomatrice composta dalle colonne con numeri $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$ otteniamo

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

da cui ne deduciamo che

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Così otteniamo una biiezione $\varphi_I : \mathbb{A}^{m \cdot n}_I \to \mathbb{A}^{m \cdot n}$, perché gli elementi $*$ sono liberi di variare in $m \times (m+n-m)$ modi, gli asterischi che rimangono non fissati sono in numero di $m \cdot n$.

Esempio. Sia $I = \{1, 2, \ldots, m\}$. Allora

$$\mathbb{A}^{m \cdot n}_{\{1,2,\ldots,m\}} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & t_{ij} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \end{pmatrix} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \mathbb{A}^{m \cdot n}.$$

Notiamo che si ha

$$G(m, m+n) = \bigcup_{\substack{I \subset \{1,\ldots,m+n\} \\ |I| = m}} \mathbb{A}^{m \cdot n}_I$$

perché per ogni X di rango m esiste almeno un minore X_I tale che $\det(X_I) \neq 0$.
Vediamo che succede ad esempio se $n = 1$: $\mathbb{P}^n = G(1, n+1)$ ed $I = \{i\}$, con $i \in \{0, \ldots, n\}$. Si ha

$$\mathbb{A}^n_i = \{(x_0, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)\}$$

dove $A = (1)$, una sola riga e colonna, e abbiamo ricavato quello che sappiamo

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^{n} \mathbb{A}^n_i$$

Proposizione 131 (Varietà di Grassmann). *Sia $G(m, m+n)$ l'insieme di Grassmann. Le biiezioni $\varphi_I : \mathbb{A}^{m \cdot n}_I \to \mathbb{A}^{m \cdot n}$ con $I \subset \{1, \ldots, m+n\}$, $|I| = m$ danno luogo ad un atlante affine di $G(m, m+n)$. La varietà algebrica ottenuta è detta varietà di Grassmann.*

Dimostrazione. Verifichiamo che sono soddisfatte le condizioni della proposizione 128. Prima bisogna verificare che $\varphi_I(\mathbb{A}^{m \cdot n}_I \cap \mathbb{A}^{m \cdot n}_J)$ è aperto in $\mathbb{A}^{m \cdot n}$ per ogni I e J. Per semplicità dimostriamo l'affermazione nel caso $I = \{1, \ldots, m\}$.
Se $W \in \mathbb{A}^{\{m \cdot n\}}_{\{1,\ldots,m\}}$, allora

$$W \xleftrightarrow{1:1} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & t_{ij} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \end{pmatrix}$$

dunque $\varphi_I(W) = (\ldots, t_{ij}, \ldots) \in \mathbb{A}^{m \cdot n}$ perché i coefficienti liberi sono in numero di $m \cdot n$.
Sia $J = \{j_1, \ldots, j_m\}$, $W \in \mathbb{A}^{m \cdot n}_I \cap \mathbb{A}^{m \cdot n}_J$ se, e solo se, il minore X_J è tale che $\det X_J \neq 0$, ma $\det X_J = \Delta_J(\ldots, t_{ij}, \ldots)$, polinomio dei t_{ij}. Ne deduciamo che

$$\varphi_I(\mathbb{A}^{m \cdot n}_I \cap \mathbb{A}^{m \cdot n}_J) = D(\Delta_J) \subset \mathbb{A}^{m \cdot n}$$

aperto principale, dunque la prima condizione è soddisfatta.

Ora bisogna dimostrare che per ogni I, J

$$\varphi_J \circ \varphi_I^{-1} : \varphi_I(\mathbb{A}_I^{m \cdot n} \cap \mathbb{A}_J^{m \cdot n}) \to \varphi_J(\mathbb{A}_I^{m \cdot n} \cap \mathbb{A}_J^{m \cdot n})$$

è un isomorfismo, ma basta dimostrare che è un morfismo perché scambiando I e J avremmo che anche l'applicazione inversa $\varphi_I \circ \varphi_J^{-1}$ è morfismo, le φ_I, φ_J sono già biiezioni.
Di nuovo supponiamo $I = \{1, \dots, m\}$ per comodità. Sia $W \in \mathbb{A}_I^{m \cdot n} \cap \mathbb{A}_J^{m \cdot n}$, allora

$$W \xleftrightarrow{1:1} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & t_{ij} & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & & \end{pmatrix}$$

e sappiamo che $\Delta_J = \det X_J \neq 0$ in W. La matrice inversa

$$X_J^{-1} = \frac{1}{\Delta_J} (\operatorname{cof} X_J)^t$$

dove $\operatorname{cof} X_J$ è la matrice dei cofattori (o di complementi algebrici) di X_J. Calcoliamo adesso $X_J^{-1} X$

$$X_J^{-1} X = \frac{1}{\Delta_J} (\operatorname{cof} X_J)^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & t_{ij} & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & & \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & 1 & & 0 & \\ * & 0 & s_{kl} & 0 & * \\ & \vdots & & \vdots & \\ & 0 & & 1 & \end{pmatrix} \\ \quad j_1 \qquad\quad j_m \end{array}$$

dunque si ha

$$\varphi_J \circ \varphi_I^{-1}(\dots, t_{ij}, \dots) = (\dots, s_{kl}, \dots)$$

dove gli s_{kl} sono gli elementi di $X_J^{-1} X$, rappresentazione normale rispetto a J e in particolare

$$s_{kl} = \frac{P_{kl}(\dots, t_{ij}, \dots)}{\Delta_J}$$

con P_{kl} polinomi in $\{t_{ij}\}$. Otteniamo quindi che le s_{kl} sono funzioni regolari su $D(\Delta_J) = \varphi_I(\mathbb{A}_I^{m \cdot n} \cap \mathbb{A}_J^{m \cdot n})$, da cui $\varphi_J \circ \varphi_I^{-1}$ è un morfismo, perché è applicazione definita da funzioni regolari. $\square$

Prodotto cartesiano di chiusi affini. È possibile dotare il prodotto cartesiano di due varietà algebriche con una struttura canonica di varietà algebrica. È una costruzione importante che richiede dei resultati preliminari. Prima consideriamo il caso di prodotto cartesiano di due chiusi affini.

PROPOSIZIONE 132. *Siano $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ e $W \subset \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}}$ chiusi affini, allora l'insieme $V \times W$ è un chiuso affine in $\mathbb{A}^{m+n}_{\mathsf{k}}$. Se V e W sono irriducibili, allora $V \times W$ è irriducibile.*

Dimostrazione. $V = \{G_i(t_1, \ldots, t_n) = 0\}_{i=1,\ldots,s}$ e $W = \{H_j(s_1, \ldots, s_m) = 0\}_{j=1,\ldots,l}$. Poniamo $t_{n+\alpha} = s_\alpha$ per $\alpha = 1, \ldots, l$ e consideriamo il sistema

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_1(t_1, \ldots, t_n) = 0 \\ \vdots \\ G_s(t_1, \ldots, t_n) = 0 \\ H_1(t_{n+1}, \ldots, t_{n+m}) = 0 \\ \vdots \\ H_l(t_{n+1}, \ldots, t_{n+m}) = 0 \end{array} \right\}.$$

Una $(m+n)-$pla $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+m})$ soddisfa $(*)$ se, e solo se, $(a_1, \ldots, a_n) \in V$ e $(a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}) \in W$ per come abbiamo definito V e W. Ne concludiamo che $V \times W = V(G_1, \ldots, G_s, H_1, \ldots, H_l)$ e dunque è un chiuso affine.

Supponiamo adesso che V e W siano irriducibili. Per ogni $w \in \mathbb{A}^m$ anche $V \times \{w\}$ è un chiuso irriducibile di $\mathbb{A}^{n+m}$: è chiuso perché V e $\{w\}$ sono chiusi, ma perché è irriducibile? $V \times \{w\}$ è irriducibile perché è isomorfo a V irriducibile attraverso gli isomorfismi polinomiali

$$x \mapsto (x, w) \quad \text{e} \quad (x, w) \mapsto x.$$

L'irriducibilità è una proprietà topologica, dunque si trasporta per isomorfismi e da V irriducibile ne concludiamo che $V \times \{w\}$ è irriducibile. Similmente per ogni $v \in \mathbb{A}^n$ si ha $\{v\} \times W$ è un chiuso irriducibile di $\mathbb{A}^{n+m}$. Supponiamo che $V \times W$ sia unione di due chiusi $V \times W = Z_1 \cup Z_2$, dove Z_i sono chiusi in $\mathbb{A}^{n+m}$ per $i = 1, 2$ e dobbiamo mostrare che non sono entrambi propri.
Sia $w \in W$, allora

$$V \times \{w\} = (V \times \{w\} \cap Z_1) \cup (V \times \{w\} \cap Z_2)\,,$$

ma $V \times \{w\}$ è irriducibile, dunque $V \times \{w\}$ deve coincidere con una delle intersezioni.
Abbiamo ottenuto che per ogni $w \in W$ si ha

$$(*) \quad V \times \{w\} \subset Z_1 \quad \text{oppure} \quad (**) \quad V \times \{w\} \subset Z_2.$$

Poniamo

$$W_1 = \{w \in W \text{ dove vale } (*)\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{w \in W \text{ dove vale } (**)\}.$$

Si ha $W = W_1 \cup W_2$ perché o è soddisfatta $(*)$ o $(**)$ e dimostriamo che W_i sono chiusi in W. Per ogni $v \in V$ denotiamo con

$$W_1^v = \{w \in W : (v, w) \in Z_1\} \quad \text{e} \quad W_2^v = \{w \in W : (v, w) \in Z_2\}.$$

v è fissato e osserviamo che W_1^v è la controimmagine di Z_1 rispetto all'applicazione polinomiale che manda $W \ni w \to (v, w) \in V \times W$, dunque W_1^v è un chiuso di W per ogni fissato $v \in V$.. Similmente anche W_2^v è

un chiuso in W per ogni $v \in V$.
Dalla definizione di W_1 e W_2 si ha

$$W_1 = \bigcap_{v \in V} W_1^v \quad \text{e} \quad W_2 = \bigcap_{v \in V} W_2^v$$

perché in W_1 (rispettivamente W_2) ci stanno quei punti $w \in W$ tale che la coppia (v, w) sta in Z_1 (rispettivamente Z_2) per ogni $v \in V$. Da quanto detto ne deduciamo che W_1, così come W_2, è un chiuso in W come intersezione di chiusi, allora $W = W_1 \cup W_2$ unione di due chiusi, ma W è irriducibile, quindi o $W_1 = W$, da cui $V \times W = Z_1$, oppure $W_2 = W$, da cui $V \times W = Z_2$ e questo dimostra tutto: se $V \times W$ si scompone nell'unione di due chiusi, allora $V \times W$ deve coincidere con uno dei due, dunque $V \times W$ è irriducibile. $\square$

Osservazione. Nella topologia il prodotto cartesiano di due spazi topologici $X \times Y$ viene dotato dalla topologia prodotto, che ha per base il prodotto cartesiano $U \times V$ dove $U \subset X$ e $V \subset Y$ sono aperti e variano tra gli aperti di X e Y. La topologia di Zariski del prodotto di due chiusi affini non è la topologia prodotto. Ad esempio gli aperti della topologia prodotto di $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ sono: $(\mathbb{A}^1 \setminus \Sigma_1) \times (\mathbb{A}^1 \setminus \Sigma_2)$, dove Σ_i è o un insieme finito, o $\emptyset$ o $\mathbb{A}^1$. Quindi oltre agli insiemi $\emptyset$ e $\mathbb{A}^2$ questi aperti sono complementari ad unioni di rette orizzontali e rette verticali. La topologia di Zariski di $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^2$ ha più insiemi aperti.

Se si vuole dotare il prodotto cartesiano di due varietà algebriche di struttura di varietà algebrica, spunta il problema come definire la topologia sul prodotto cartesiano. Vedremo che bisogna definire tale struttura tramite l'incollamento di varietà affini che sono prodotti cartesiani di carte affini di X e Y.

Siano X e Y come nella proposizione 132. Le due proiezioni $\pi_1 : X \times Y \to X$, definita da $\pi_1(x, y) = x$, e $\pi_2 : X \times Y \to Y$, definita da $\pi_2(x, y) = y$, sono morfismi in quanto date da funzioni coordinate, che sono funzioni regolari.

Proposizione 133 *[Proprietà universale del prodotto cartesiano]. Siano $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ e $Y \subset \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}}$ chiusi affini, allora per ogni spazio con $\mathsf{k}-$funzioni $(W, \mathcal{O}_W)$ e ogni coppia di morfismi $\varphi_1 : W \to X$ e $\varphi_2 : W \to Y$ esiste un unico morfismo $\varphi : W \to X \times Y$ tale che $\varphi_1 = \pi_1 \circ \varphi$ e $\varphi_2 = \pi_2 \circ \varphi$, cioè φ completa il diagramma*

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[d, dashed, "\exists!\,\varphi"] \arrow[ddl, "\varphi_1"'] \arrow[ddr, "\varphi_2"] & \\ & X \times Y \arrow[dl, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Dimostrazione.

<u>Unicità</u>: Sia φ un'applicazione che completa il diagramma. Sia $z \in W$ e sia $\varphi(z) = (x, y) \in X \times Y$, allora $\varphi_1(z) = \pi_1 \circ \varphi(z) = \pi_1(x, y) = x$ e similmente $y = \varphi_2(z)$, dunque l'unica possibilità per definire φ è $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \varphi_2(z))$ da cui se il morphismo φ esiste, allora esso è unico.

<u>Esistenza</u>: Sapendo che forma deve avere φ bisogna verificare le proprietà: $\varphi : W \to X \times Y$ definita da $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \varphi_2(z))$ è un morfismo? Sappiamo che φ_1 e φ_2 lo sono, dunque

$$\varphi_1 = (f_1, \ldots, f_n) : W \to X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}} \quad \text{con} \quad f_i \in \mathcal{O}_W(W)$$

e

$$\varphi_2 = (g_1, \ldots, g_m) : W \to Y \subset \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}} \quad \text{con} \quad g_j \in \mathcal{O}_W(W)$$

da cui otteniamo

$$\varphi = (f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m) : W \to X \times Y \subset \mathbb{A}^{n+m}$$

morfismo perché le f_i e g_j sono funzioni regolari su W, secondo la proposizione 111. $\square$

Se W e X sono due spazi con $\mathsf{k}-$funzioni, si denota con $\mathrm{Mor}(W, X)$ l'insieme dei morfismi[31] da W in X. La proprietà universale si può riformulare così: l'applicazione

$$\mathrm{Mor}(W, X \times Y) \to \mathrm{Mor}(W, X) \times \mathrm{Mor}(W, Y)$$

definita come

$$\varphi \mapsto (\pi_1 \circ \varphi, \pi_2 \circ \varphi) = (\varphi_1, \varphi_2)$$

è una biiezione. In effetti nella proprietà universale l'iniettività corrisponde all'unicità e la surgettività all'esistenza ed in questo modo possiamo definire cosa è il prodotto cartesiano fra spazi con funzioni.

Definizione 134. Siano X e Y due spazi con $\mathsf{k}-$funzioni. Una tripla (Z, p, q), dove Z è uno spazio con $\mathsf{k}-$funzioni e $p : Z \to X$, $q : Z \to Y$ sono morfismi, è detta *prodotto cartesiano di X e Y* se è soddisfatta la seguente proprietà universale: per ogni spazio con $\mathsf{k}-$funzioni W l'applicazione

$$\mathrm{Mor}(W, Z) \to \mathrm{Mor}(W, X) \times \mathrm{Mor}(W, Y) \quad \text{definita da} \quad \varphi \mapsto (p \circ \varphi, q \circ \varphi)$$

è una biiezione.

Tale biiezione si può dare in questo modo: esiste ed è unica φ che commuta il diagramma

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[d, dashed, "\exists!\ \varphi"'] \arrow[ddl, "\varphi_1"'] \arrow[ddr, "\varphi_2"] & \\ & Z \arrow[dl, "p"] \arrow[dr, "q"'] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Esempio. Se X e Y sono chiusi affini, $X \subset \mathbb{A}^n$, $Y \subset \mathbb{A}^m$, allora $(X \times Y, \pi_1, \pi_2)$, dove $X \times Y \subset \mathbb{A}^{n+m}$ e π_1, π_2 sono le due proiezioni è prodotto cartesiano di X e Y come dimostrato nella proposizione 133.

Proposizione 135. *Supponiamo $(Z, \mathcal{O}_Z)$ con $p : Z \to X$ e $q : Z \to Y$ sia prodotto cartesiano di $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$, allora*

(i) L'insieme Z è biiettivo al prodotto cartesiano insiemistico $X \times Y$ e tramite questa biiezione

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "p"] \arrow[dr, "q"'] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \quad \textit{si identifica con} \quad \begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\ X & & Y \end{tikzcd} .$$

(ii) Se $(Z', \mathcal{O}_{Z'})$ con $p' : Z' \to X$ e $q' : Z' \to Y$ è un altro prodotto cartesiano di $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$, allora esiste un isomorfismo $u : Z \to Z'$ tale che $p' \circ u = p$, $q' \circ u = q$ e tale isomorfismo è unico[32].

(iii) Se $(Z_1, \mathcal{O}_{Z_1}) \simeq (Z, \mathcal{O}_Z)$, $(X_1, \mathcal{O}_{X_1}) \simeq (X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y_1, \mathcal{O}_{Y_1}) \simeq (Y, \mathcal{O}_Y)$, allora $(Z_1, \mathcal{O}_{Z_1})$ con i morfismi $p_1 : Z_1 \to X_1$ e $q_1 : Z_1 \to Y_1$ corrispondenti a $p : Z \to X$ e $q : Z \to Y$ è prodotto cartesiano di $(X_1, \mathcal{O}_{X_1})$ e $(Y_1, \mathcal{O}_{Y_1})$.

Dimostrazione. (i) Poiché la proprietà universale vale per ogni spazio con funzioni $(W, \mathcal{O}_W)$, possiamo prenderne uno particolare costituito da un solo punto: $W = \{x\}$, $\mathcal{O}_W = \mathsf{k}$. Allora $\mathrm{Mor}(W, Z) \simeq Z$, $\mathrm{Mor}(W, X) \simeq X$ e $\mathrm{Mor}(W, Y) \simeq Y$. La biiezione

$$(*) \qquad \mathrm{Mor}(W, Z) \simeq \mathrm{Mor}(W, X) \times \mathrm{Mor}(W, Y)$$

[31] A volte si utilizza anche il simbolo $\mathrm{Hom}(W, X)$.

[32] Questa parte è la formulazione precisa dell'affermazione: se il prodotto cartesiano esiste, allora è unico a meno di isomorfismo.

implica la biiezione

$$(**) \qquad Z \simeq X \times Y.$$

Troviamola in modo esplicito. Sia $z \in Z$. Sia $\varphi : W \to Z$ il morfismo definito da $\varphi(x) = z$. La biiezione $(*)$ è data da

$$\psi \mapsto (p \circ \psi, q \circ \psi).$$

Ponendo $\psi = \varphi$ e valutando in x otteniamo che la biiezione $(**)$ è data da

$$z \mapsto (p(z), q(z)).$$

Questa formula identifica (Z, p, q) con $(X \times Y, \pi_1, \pi_2)$.

(ii) Applichiamo la proprietà universale a Z' ponendo $W = Z$, allora esiste ed è unico $u : Z \to Z'$ che completa il diagramma. Applichiamo adesso la proprietà universale al prodotto cartesiano Z ponendo $W = Z'$, allora esiste ed è unico u' che completa il diagramma

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, leftrightarrow, "u", "u'"'] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "q" near start] & Z' \arrow[dl, dashed, "p'" near end] \arrow[d, dashed, "q'"] \\
X & Y
\end{tikzcd}$$

Dobbiamo fare vedere che $u' \circ u : Z \to Z$ è uguale a id_Z sfruttando quello che sappiamo su p, p', q, q'

$$p \circ (u' \circ u) = (p \circ u') \circ u = p' \circ u = p.$$

Similmente $q \circ (u' \circ u) = q$, allora $u' \circ u = \mathrm{id}_Z$ perché, applicando la proprietà universale a Z ponendo $W = Z$, un tale morfismo $Z \to Z$ è unico e la stessa proprietà di composizione con p e q la soddisfa l'identità, dunque $u' \circ u$ non può essere altro che l'identità. In modo analogo si dimostra che $u \circ u' = \mathrm{id}_{Z'}$.

(iii) Per ogni $(W, \mathcal{O}_W)$ l'applicazione

$$\varphi \mapsto (p \circ \varphi, q \circ \varphi) \quad \text{stabilisce una biezione} \quad \mathrm{Mor}(W, Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mor}(W, X) \times \mathrm{Mor}(W, Y).$$

Sostituendo Z con Z_1, X con X_1, Y con Y_1, p con p_1 e q con q_1 otteniamo che l'applicazione

$$\psi \mapsto (p_1 \circ \psi, q_1 \circ \psi) \quad \text{stabilisce una biezione} \quad \mathrm{Mor}(W, Z_1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mor}(W, X_1) \times \mathrm{Mor}(W, Y_1).$$

Poiché la condizione di biiettività è soddisfatta per Z_1, X_1, Y_1, la tripla (Z_1, p_1, q_1) è prodotto cartesiano di X_1 e Y_1. $\square$

Corollario 136. *Il prodotto cartesiano di ogni due varietà affini esiste ed esso è varietà affine. Se le due varietà sono irriducibili il prodotto cartesiano è irriducibile.*

Dimostrazione. Abbiamo dimostrato questo fatto per qualsiasi chiusi affini $X \subset \mathbb{A}^n$, $Y \subset \mathbb{A}^m$. Concludiamo utilizzando la proprietà (iii) della proposizione. $\square$

Osservazione 137. La proposizione 135 mostra che per costruire il prodotto cartesiano di due spazi con k-funzioni $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$ bisogna dotare $X \times Y$, prodotto cartesiano insiemistico, di topologia e fascio di k-funzioni $\mathcal{O}_{X \times Y}$ tali che:

$(*)$ le due proiezioni $\pi_1 : X \times Y \to X$ e $\pi_2 : X \times Y \to Y$ sono morfismi;

$(**)$ dati $(W, \mathcal{O}_W)$ e due morfismi $p : W \to X$ e $q : W \to Y$, l'applicazione $\varphi : W \to X \times Y$, data da $\varphi(z) = (p(z), q(z))$ è morfismo.

Notiamo che se il prodotto cartesiano insiemistico $X \times Y$ può essere dotato di topologia e fascio di $\mathsf{k}-$funzioni $\mathcal{O}_{X\times Y}$ che soddifano le condizioni $(*)$ e $(**)$ essi sono unici. In effetti supponiamo che ci siano una seconda topologia e fascio che soddisfano le proprietà $(*)$ e $(**)$, allora dalla parte (ii) della proposizione 135 segue che l'identità $id : X \times Y \to X \times Y$ è un isomorfismo, ma questo significa che le due topologie e i due fasci coincidono.

Lemma 138. *Siano $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$ due spazi con $\mathsf{k}-$funzioni. Supponiamo che esista il prodotto cartesiano $(X \times Y, \mathcal{O}_{X\times Y})$ (cioè sono soddisfate le condizioni dell'osservazione 137). Siano $U \subset X$ e $V \subset Y$ due sottospazi, $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X|_U$ e $\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_Y|_V$, allora $U \times V$ dotato della topologia indotta e dal fascio $\mathcal{O}_{U\times V} = \mathcal{O}_{X\times Y}|_{U\times V}$ è prodotto cartesiano di $(U, \mathcal{O}_U)$ e $(V, \mathcal{O}_V)$.*

Dimostrazione. Denotiamo con $p_1 : U \times V \to U$ e $p_2 : U \times V \to V$ le due proiezioni. La composizione

$$U \times V \xrightarrow{i} X \times Y \xrightarrow{\pi_1} X$$

è un morfismo come composizione di morfismi: i è un morfismo perché $U \times V$ è un sottospazio con funzioni, π_1 è morfismo per definizione di prodotto cartesiano. Inoltre $\pi_1 \circ i(u, v) = u = p_1(u, v)$, dunque l'immagine di $\pi_1 \circ i$ è U. Ne deduciamo che $U \times V \xrightarrow{p_1} U \subset X$ è un morfismo per le proprietà dei morfismi. Similmente $p_2 : U \times V \to V$ è morfismo. Verifichiamo la proprietà universale: siano $p : W \to U$ e $q : W \to V$ morfismi e definiamo l'applicazione $\varphi : W \to U \times V$ come $\varphi(w) = (p(w), q(w))$

$$\begin{tikzcd}
& W \arrow[d, "\varphi"] \arrow[ddl, "p"'] \arrow[ddr, "q"] & \\
& U \times V \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\
U & & V
\end{tikzcd}$$

Bisogna dimostrare che φ è morfismo. Consideriamo le inclusioni $U \xrightarrow{i_1} X$ e $V \xrightarrow{i_2} Y$, componiamo con p e q e otteniamo

$$\varphi_1 : W \xrightarrow{i_1 \circ p} X \quad \text{e} \quad \varphi_2 : W \xrightarrow{i_2 \circ q} Y.$$

che sono morfismi perché sia le inclusioni i_1 e i_2 sono morfismi sia p, q per ipotesi. Dalla proprietà universale l'applicazione $\psi : W \to X \times Y$ definita come $\psi(w) = (i_1 \circ p(w), i_2 \circ q(w)) = (p(w), q(w)) \in X \times Y$ è un morfismo. Ora $\psi(W) \subset U \times V$ e $\psi(z) = \varphi(z)$ per ogni $z \in W$. Per una delle proprietà di morfismi $\varphi : W \to U \times V$ è morfismo rispetto ai fasci $\mathcal{O}_W$ e $\mathcal{O}_{U\times V} = \mathcal{O}_{X\times Y}|_{U\times V}$. □

Lemma 139. *Supponiamo $(X \times Y, \mathcal{O}_{X\times Y})$ sia il prodotto cartesiano di $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$. Siano $U \subset X$ e $V \subset Y$ aperti, allora $U \times V$ è aperto in $X \times Y$. Siano $S \subset X$ e $T \subset Y$ chiusi, allora $S \times T$ è chiuso in $X \times Y$.*

Dimostrazione. Le due proiezioni $\pi_1 : X \times Y \to X$ e $\pi_2 : X \times Y \to Y$ sono morfismi, dunque $U \times V = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)$ e aperto in $X \times Y$ e similmente $S \times T = \pi_1^{-1}(S) \cap \pi_2^{-1}(T)$ è chiuso in $X \times Y$. □

Teorema 140. *Siano $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$ due varietà algebriche. Allora esiste il prodotto cartesiano $(X \times Y, \mathcal{O}_{X\times Y})$ ed esso è varietà algebrica. Se X e Y sono irriducibili, allora $X \times Y$ è irriducibile.*

Dimostrazione. Daremo solo l'idea della dimostrazione dell'esistenza del prodotto cartesiano.
Sia $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ e $Y = \bigcup_{j=1}^m V_j$ dove $(U_i, \mathcal{O}_{U_i} = \mathcal{O}_X|_{U_i})$ e $\left(V_j, \mathcal{O}_{V_j} = \mathcal{O}_Y|_{V_j}\right)$ sono varietà affini, per definizione di varietà algebrica. Abbiamo la scomposizione in insiemi

$$X \times Y = \bigcup_{i,j} U_i \times V_j$$

e per le varietà affini già sappiamo che esiste il prodotto cartesiano. Sia $\left(U_i \times V_j, \mathcal{O}_{U_i \times V_j}\right)$ la struttura di prodotto cartesiano di $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ e $(V_j, \mathcal{O}_{V_j})$. Questi prodotti cartesiani sono varietà affini e le denotiamo con X_{ij}. Poniamo $\varphi_{ij} : U_i \times V_j \to X_{ij}$ l'applicazione di identità. Si dimostra che sono soddisfate le condizioni della proposizione 128 (Atlanti) e quindi $X \times Y$ ha una struttura di varietà algebrica di cui $\{U_i \times V_j\}$ formano un atlante affine. Poi si dimostra che sono soddisfate le condizioni $(*)$ e $(**)$ dell'osservazione 137 utilizzando le varie proprietà di morfismi che abbiamo dimostrato.

Daremo la dimostrazione dell'ultima affermazione. Supponiamo che X e Y siano irriducibili, $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ e $Y = \bigcup_{j=1}^m V_j$ con U_i e V_j aperti irriducibili e varietà affini, non vuoti. U_i e V_j sono aperti irriducibili e $U_i \cap U_s$ è non vuoto, così come $V_j \cap V_t \neq \emptyset$ per ogni i, s, j, t, per le proprietà di insiemi irriducibili. Sappiamo che $U_i \times V_j$ sono varietà irriducibili ed inoltre per ogni i, j, s, t

$$U_i \times V_j \cap U_s \times V_t = (U_i \cap U_s) \times (V_j \cap V_t) \neq \emptyset,$$

dunque si ha

$$X \times Y = \bigcup_{i,j} U_i \times V_j$$

con $U_i \times V_j$ aperti in $X \times Y$ irriducibili e ogni due aperti di questo ricoprimento hanno intersezione non vuota. Per un esercizio svolto concludiamo che $X \times Y$ è irriducibile. $\square$.

Corollario 141. *Siano $f_1 : X_1 \to Y_1$ e $f_2 : X_2 \to Y_2$ due morfismi di varietà algebriche, allora $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ dove $f_1 \times f_2(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ è un morfismo, detto il morfismo prodotto dei morfismi f_1 e f_2.*

Dimostrazione. Abbiamo il seguente diagramma commutativo di applicazioni

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \times X_2 \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] \arrow[dd, dashed, "\varphi"] \arrow[dddl, "f_1 \circ p_1"] \arrow[dddr, "f_2 \circ p_2"'] & \\
X_1 \arrow[dd, "f_1"'] & & X_2 \arrow[dd, "f_2"] \\
 & Y_1 \times Y_2 \arrow[dl, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\
Y_1 & & Y_2
\end{tikzcd}$$

Le applicazioni $f_1 \circ p_1$ e $f_2 \circ p_2$ sono morfismi in quanto sono composizioni di morfismi e $\varphi(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)))$. Applicando la proprietà universale a $Y_1 \times Y_2$ e $W = X_1 \times X_2$ concludiamo che l'applicazione φ è morfismo. $\square$

Ora ci occupiamo del prodotto cartesiano di varietà quasiproiettive (si veda Definizione 122). In questo caso particolare il prodotto cartesiano ha una forma più esplicita.

Varietà di Segre

Siano $n, m \in \mathbb{N}$ e sia $N = (n+1)(m+1) - 1$. Poniamo

$$s_{n,m}\left((x_0 : \ldots : x_n), (y_0 : \ldots : y_m)\right) = (x_0 y_0 : \ldots : x_i y_j : \ldots : x_n y_m)$$

dove $(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n$ e $(y_0 : \ldots : y_m) \in \mathbb{P}^m$. Affermiamo che $s_{n,m} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^N$ è ben posta, dove $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ è prodotto cartesiano <u>insiemistico</u>. Se $\lambda \neq 0$, allora $(x_0 : \ldots : x_n) = (\lambda x_0 : \ldots : \lambda x_n)$ da cui

$$(\ldots : x_i y_j : \ldots) = (\ldots : \lambda x_i y_j : \ldots)$$

e similmente se moltiplichiamo $(y_0 : \ldots : y_n)$ per μ non cambia il punto $(\ldots : x_i y_j : \ldots)$. Inoltre se $x_i \neq 0$ per qualche i e $y_j \neq 0$ per qualche j, allora $x_i y_j \neq 0$, quindi l'immagine è effettivamente un punto proiettivo e $s_{n,m}$ è un'applicazione ben posta.

Definizione 142. $s_{n,m} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^N$ è detta *applicazione di Segre*.

Teorema 143 *[Varietà di Segre].*

(i) l'applicazione $s_{n,m}$ *è iniettiva e* $\Sigma_{n,m} = s_{n,m}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$ *è un sottoinsieme chiuso proiettivo di* $\mathbb{P}^N$ *detto varietà di Segre.*

(ii) L'applicazione $s_{n,m} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \Sigma_{n,m}$ *(biiettiva) è un isomorfismo fra le varietà algebriche* $(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^m})$ *e* $\left(\Sigma_{n,m}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}|_{\Sigma_{n,m}}\right)$

Dimostrazione. Denotiamo con w_{ij} le coordinate proiettive di $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1} = \mathbb{P}^N$, per $i = 0, \ldots, n$ e $j = 0, \ldots, m$, allora si ha

$$s_{n,m}\left((x_0 : \ldots : x_n), (y_0 : \ldots : y_m)\right) = (\ldots : w_{ij} : \ldots) \quad \text{con} \quad w_{ij} = x_i y_j.$$

I punti di $\Sigma_{n,m}$ soddisfano le seguenti equazioni omogenee

$$w_{ij}w_{kl} - w_{il}w_{kj} = 0 \quad \text{per ogni} \quad i, j \quad \text{e} \quad k, l$$

ed in effetti si ha $(x_i y_j)(x_k y_l) - (x_i y_l)(x_k y_j) = 0$. Sia $X \subset \mathbb{P}^N$ il chiuso proiettivo definito dalle equazioni

$$\{w_{il}w_{kl} - w_{il}w_{kj} = 0\}_{i,j,k,l}$$

e vogliamo fare vedere che $X = \Sigma_{n,m}$. Già abbiamo visto che $\Sigma_{n,m} \subset X$. Sia $(\ldots : w_{ij} : \ldots) \in X$ e supponiamo prima che $w_{00} \neq 0$, possiamo supporre che $w_{00} = 1$ dividendo per w_{00} quindi possiamo scrivere

$$w_{ij} = w_{00}w_{ij} = w_{0j}w_{i0} = w_{i0}w_{j0}.$$

Poniamo $x_i = w_{i0}$ per $i = 0, \ldots, n$ e $y_j = w_{0j}$ per $j = 0, \ldots, m$ e osserviamo che $x_0 = 1 = y_0$, dunque

$$(\ldots : w_{ij} : \ldots) = s_{n,m}\left((\ldots : x_i : \ldots), (\ldots : y_j : \ldots)\right).$$

Il caso $w_{\alpha\beta} \neq 0$ è simile, basta porre $w_{\alpha\beta} = 1$ e ripetere lo stesso argomento, allora $\Sigma_{n,m} = X$.
Dimostriamo che $s_{n,m} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^N$ è iniettiva: siano (x, y) e (x', y') tali che

$$s_{n,m}(x, y) = s_{n,m}(x', y') = (\ldots : w_{ij} : \ldots),$$

allora $w_{ij} = \lambda x_i y_j$ per ogni i, j con λ fissato e $w_{ij} = \mu x'_i y'_j$ per ogni i, j e μ fissato.
Supponiamo $w_{00} \neq 0$, allora $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$, $x'_0 \neq 0$ e $y'_0 \neq 0$ da cui

$$x_i = \frac{1}{\lambda y_0} w_{i0} \quad \text{per} \quad i = 0, \ldots, n$$

e

$$x'_i = \frac{1}{\mu y'_0} w_{i0} \quad \text{per} \quad i = 0, \ldots, n$$

ponendo $j = 0$, da cui ne deduciamo $(x_0 : \ldots : x_n) = (x'_0 : \ldots : x'_n)$ perché proporzionali, sinteticamente $x = x'$. Similmente

$$y_j = \frac{1}{\lambda x_0} w_{0j} \quad \text{e} \quad y'_j = \frac{1}{\lambda x'_0} w_{0j} \quad \text{per} \quad j = 0, \ldots, m$$

e dunque $y = y'$. Il ragionamento nel caso $w_{\alpha\beta} \neq 0$ è simile, perché basta considerare $w_{i\beta}$ e $w_{\alpha j}$.

(ii) Sappiamo che

$$\mathbb{P}^N = \bigcup_{\substack{i=0,\ldots,n \\ j=0,\ldots,m}} \mathbb{A}^N_{i,j}$$

dove $\mathbb{A}^N_{i,j}$ è l'insieme quasiproiettivo $w_{ij} \neq 0$ e $s^{-1}_{n,m}\left(\mathbb{A}^N_{i,j}\right) = \mathbb{A}^n_i \times \mathbb{A}^m_j$. Affermiamo che $s_{n,m}|_{\mathbb{A}^n_i \times \mathbb{A}^m_j}$ è un morfismo e verifichiamo la proprietà per $i, j = 0$.

L'insieme $\mathbb{A}_0^n \times \mathbb{A}_0^m$ è un aperto di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ secondo il lemma 139, è isomorfo a $\mathbb{A}^{n+m}$ e $\mathbb{A}_0^N$ è isomorfo a $\mathbb{A}^N$. Utilizzando le coordinate standardi si ha

$$s_{n,m}\left((1 : t_1 : \ldots : t_n), (1 : s_1 : \ldots : s_m)\right) = (1 : \ldots : t_i s_j : \ldots)$$

perché $t_0 = 1 = s_0$ e sfruttando gli isomorfismi appena citati si ha

$$((t_1, \ldots, t_n), (s_1, \ldots, s_m)) \mapsto (t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_m, \ldots, t_i s_j, \ldots),$$

che è un'applicazione polinomiale $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \equiv \mathbb{A}^{n+m} \to \mathbb{A}^N$ perché sono presenti polinomi di primo e secondo grado al più. Ne deduciamo che $s_{n,m}|_{\mathbb{A}_0^n \times \mathbb{A}_0^m}$ è un morfismo. In modo simile si dimostra che $s_{n,m}|_{\mathbb{A}_i^n \times \mathbb{A}_j^m}$ è morfismo per ogni i, j.

Poniamo $U_{ij} = \Sigma_{n,m} \cap \mathbb{A}_{ij}^N$ ed affermiamo che $s_{n,m}^{-1}|_{U_{ij}} : U_{ij} \to \mathbb{A}_i^n \times \mathbb{A}_j^m$ è un morfismo per ogni i, j. Sappiamo che $s_{n,m}$ è una biiezione fra $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ e $\Sigma_{n,m}$ e in $s_{n,m}^{-1}$ restringiamoci ad un aperto in dominio e codominio. Supponiamo $i = j = 0$: $s_{n,m}^{-1}|_{U_{00}}$ è data da

$$(1 : \ldots : t_{ij} : \ldots) \mapsto ((1 : t_{10} : \ldots : t_{i0} : \ldots : t_{n0}), (1 : t_{01} : \ldots : t_{0j} : \ldots : t_{0m}))$$

dalle formule dedotte per le biiezioni. Ne deduciamo che, identificando $\mathbb{A}_0^N$ con $\mathbb{A}^N$, $\mathbb{A}_0^n$ e $\mathbb{A}_0^m$ rispettivamente con $\mathbb{A}^n$ e $\mathbb{A}^m$, l'applicazione $s_{n,m}^{-1}|_{U_{00}} : U_{00} \to \mathbb{A}_0^n \times \mathbb{A}_0^m$ è data da polinomi (di primo grado) e dunque è un morfismo. Similmente $s_{n,m}^{-1}|_{U_{ij}} : U_{ij} \to \mathbb{A}_i^n \times \mathbb{A}_j^m$ è un morfismo.

Dalle proprietà dei morfismi per cui se ho ricoprimenti aperti e se restringo la funzione su ogni aperto allora ottengo un morfismo otteniamo che l'applicazione è un morfismo, dunque da questi ragionamenti ed applicando questa proprietà segue che $s_{n,m} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \Sigma_{n,m}$ e $s_{n,m}^{-1} : \Sigma_{n,m} \to \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ sono morfismi, cioè $s_{n,m}$ è un isomorfismo. $\square$

Esempio. Sia $\mathsf{k} = \mathbb{C}$. Sia $n = m = 1$, allora $N = 2 \cdot 2 - 1 = 3$, dunque $s_{1,1} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ è un morfismo iniettivo. Ne deduciamo che $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ è isomorfo a $\Sigma_{1,1} \subset \mathbb{P}^3$, quadrica di $\mathbb{P}^3$ di equazione

$$w_{00}w_{11} - w_{01}w_{10} = 0.$$

Sul campo dei numeri complessi tutte le quadriche proiettive in $\mathbb{P}^3$ non degeneri sono proiettivamente equivalenti. Quindi ogni tale quadrica è isomorfa al prodotto cartesiano $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. La stessa conclusione è vera per ogni campo algebricamente chiuso di caratteristica diversa da 2.

Corollario 144.

(i) Se $X \subset \mathbb{P}^n$ e $Y \subset \mathbb{P}^m$ sono chiusi proiettivi, allora $(X \times Y, \mathcal{O}_{X \times Y})$ è varietà proiettiva.

(ii) Se $X \subset \mathbb{P}^n$ e $Y \subset \mathbb{P}^m$ sono insiemi quasi proiettivi, allora $(X \times Y, \mathcal{O}_{X \times Y})$ è varietà quasi proiettiva.

Dimostrazione. (i) $X \times Y$ è un chiuso nella varietà $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ per il lemma 139 e $\mathcal{O}_{X \times Y} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m}|_{X \times Y}$ per il lemma 138, quindi $(X \times Y, \mathcal{O}_{X \times Y})$ è isomorfo a $\left(s_{n,m}(X \times Y), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}|_{s_{n,m}(X \times Y)}\right)$ per l'isomorfismo di Segre. Ne deduciamo che $s_{n,m}(X \times Y)$ è chiuso in $\Sigma_{n,m}$, che a sua volta e chiuso in $\mathbb{P}^N$, allora $(X \times Y, \mathcal{O}_{X \times Y})$ è varietà proiettiva perché isomorfa al chiuso $s_{n,m}(X \times Y)$ di $\mathbb{P}^N$.

(ii) Si ripete tutto: $X = X_1 \cap V_1$ con $X_1 \subset \mathbb{P}^n$ chiuso e $V_1 \subset \mathbb{P}^n$ aperto, $Y = Y_1 \cap W_1$ con $Y_1 \subset \mathbb{P}^m$ chiuso e $W_1 \subset \mathbb{P}^m$ aperto, allora

$$X \times Y = X_1 \times Y_1 \cap V_1 \times W_1$$

dove $X_1 \times Y_1$ è chiuso in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ e $V_1 \times W_1$ aperto in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Applichiamo $s_{n,m}$ e dunque $s_{n,m}(X_1 \times Y_1)$ è un chiuso di $\Sigma_{n,m}$ e quindi di $\mathbb{P}^N$, $s_{n,m}(V_1 \times W_1)$ è aperto di $\Sigma_{n,m}$, quindi intersezione di un aperto U di $\mathbb{P}^N$ con $\Sigma_{n,m}$

$$\begin{aligned} s_{n,m}(X \times Y) &= s_{n,m}(X_1 \times Y_1) \cap s_{n,m}(V_1 \times W_1) = s_{n,m}(X_1 \times Y_1) \cap (\Sigma_{n,m} \cap U) = \\ &= (s_{n,m}(X_1 \times Y_1) \cap \Sigma_{n,m}) \cap U. \\ &= s_{n,m}(X_1 \times Y_1) \cap U \end{aligned}$$

Ne deduciamo che $s_{n,m}(X \times Y)$ è un insieme quasi proiettivo di $\mathbb{P}^N$ e dalle proprietà di restrizioni di fasci segue che $(X \times Y, \mathcal{O}_{X\times Y})$ è una varietà isomorfa a $\big(s_{n,m}(X \times Y), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}|_{s_{n,m}(X\times Y)}\big)$ ed è dunque una varietà quasi proiettiva. $\square$

Varietà separate. Grafico di un morfismo

Definizione 145. Una varietà algebrica $(X, \mathcal{O}_X)$ si dice *separata* se l'insieme

$$\Delta = \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$$

detto diagonale di $X \times X$ è insieme chiuso di $X \times X$.

Osserviamo che X è una varietà algebrica, il prodotto cartesiano ha una struttura di varietà algebrica, in particolare topologia, dunque ha senso chiedere che Δ sia un chiuso.

La proprietà di essere separata è invariante rispetto a isomorfismi della varietà algebrica come si vede dal corollario 141. In effetti, se $f : X \to X_1$ è un isomorfismo, allora $f \times f : X \times X \to X_1 \times X_1$ è un isomorfiso, con morfismo inverso $f^{-1} \times f^{-1}$, che trasforma il diagonale Δ nel diagonale Δ_1.

Ad esempio ogni chiuso affine $V \subset \mathbb{A}^n$, e più in generale ogni varietà quasiaffine, è una varietà separata. Se $V = \mathbb{A}^n$, allora

$$\Delta = \{t_1 - s_1 = 0, \dots, t_n - s_n = 0\} \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \equiv \mathbb{A}^{2n}$$

di coordinate $(t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n)$. Se $V \subset \mathbb{A}^n$, allora $V \times V \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ e si ha

$$\Delta_V = \Delta_{\mathbb{A}^n} \cap V \times V \subset V \times V$$

è dunque Δ_V è un chiuso in $V \times V$.

Osservazione 146. Se $X \times X$ è lo spazio topologico dotato della topologia prodotto, $\Delta_X \subset X \times X$ è chiuso se, e solo se, X è uno spazio di Hausdorff. Nell'ambito della varietà algebriche, dove la topologia di $X \times X$ non è la topologia prodotto, le varietà separate corrispondono agli spazi topologici di Hausdorff.

Teorema 147. *Ogni varietà quasiproiettiva è separata.*

Dimostrazione. Procediamo per passi.

Passo 1. Sia $X = \mathbb{P}^n$. Sia $(x, y) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ e siano $x = (x_0 : \ldots : x_n)$ e $y = (y_0 : \ldots : y_n)$. $x = y$ se, e solo se, la matrice

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}$$

ha rango 1, il rango è diverso da zero perché la matrice non può essere tutta nulla, matrice con punti proiettivi. La matrice ha rango 1 se, e solo se, tutti i minori 2×2 sono nulli e questo se, e solo se, $x_i y_j - x_j y_i = 0$, cioè $w_{ij} - w_{ji} = 0$, dove $w_{ij} = x_i y_j$ sono le coordinate dell'applicazione di Segre. Otteniamo che

$$s_{n,n}(\Delta_{\mathbb{P}^n}) = \Sigma_{n,n} \cap \{w_{ij} - w_{ji} = 0\}_{i,j},$$

dunque per l'isomorfismo di Segre Δ è chiuso in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ e $\mathbb{P}^n$ è varietà separata.

Passo 2. Sia $V \subset \mathbb{P}^n$, V quasi proiettivo. $V \times V \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ dotato di topologia indotta e fascio indotto per il lemma 138, allora

$$\Delta_V = \Delta_{\mathbb{P}^n} \cap (V \times V)$$

e dunque Δ_V è chiuso in $V \times V$.

Passo 3. Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ isomorfo a $(V, \mathcal{O}_V)$ tramite $\varphi : X \to V$, dove $V \subset \mathbb{P}^n$ quasi proiettivo, $\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_V$. $X \times X$ è isomorfo a $V \times V$ tramite l'isomorfismo $\varphi \times \varphi : X \times X \to V \times V$, isomorfismo per il corollario 141 in cui Δ_X viene trasformato in Δ_V, dunque essendo Δ_V chiuso, anche Δ_X lo è. $\square$

Le varietà separate sono un analogo degli spazi di Hausdorff e abbiamo visto che le varietà quasiproiettive lo sono.

Definizione 148. Sia $f : X \to Y$ un morfismo di varietà algebriche. L'insieme

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$$

è detto *grafico di f*.

Diamo adesso alcuni esempi:

1. Sia $X = \mathbb{A}^1$ e $f(t) = t^2$, allora $\Gamma_f = \{(x, y) : y = x^2\} \subset \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \equiv \mathbb{A}^2$, cioè Γ_f è una parabola.
2. Se $f : X \to X$ ed $f = \mathrm{id}$, allora $\Gamma_f = \{(x, x) : x \in X\} = \Delta_X$.

Proposizione 149. *Sia $f : X \to Y$ un morfismo di varietà algebriche. Supponiamo che Y sia varietà separata, allora il grafico Γ_f è un insieme chiuso di $X \times Y$.*

Dimostrazione. Sappiamo che $f \times \mathrm{id}_Y : X \times Y \to Y \times Y$ è un morfismo, quindi $(f \times \mathrm{id}_Y)^{-1}(\Delta_Y)$ è chiuso, essendo $\Delta_Y \subset Y \times Y$ chiuso perché Y è varietà separata.
$(x, y) \in (f \times \mathrm{id}_Y)^{-1}(\Delta_Y)$ se, e solo se, $f(x) = y$ e questo se, e solo se, $(x, y) \in \Gamma_f$, allora $\Gamma_f = (f \times \mathrm{id}_Y)^{-1}(\Delta_Y)$ è un chiuso in $X \times Y$. □

Osservazione 150. L'ipotesi di Y varietà separata è importante e non ne possiamo fare a meno, infatti la proprietà della proposizione vale solo se Y è separata: se per esempio $f = \mathrm{id}_Y : Y \to Y$, allora $\Gamma_f = \Delta_Y \subset Y \times Y$, dunque Γ_f è chiuso se, e solo se, Y è separata.

Dimostriamo adesso una proposizione che spiega il nome di questo tipo di varietà

Proposizione 151 *[Proprietà di separazione]. Sia X uno spazio con funzioni. Sia Y una varietà algebrica separata. Siano $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ morfismi. Allora l'insieme $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ è chiuso in X.*

Dimostrazione. Sfruttiamo la proprietà universale del prodotto Cartesiano

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[ddl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\,\varphi"] \arrow[ddr, "g"] & \\
& Y \times Y \arrow[dl, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\
Y & & Y
\end{tikzcd}$$

dunque $\varphi : X \to Y \times Y$ definita da $\varphi(x) = (f(x), g(x))$ è un morfismo e si ha

$$\{x \in X : f(x) = g(x)\} = \varphi^{-1}(\Delta_Y).$$

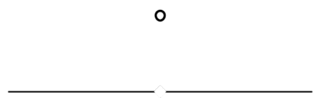
Essendo Y varietà separata, $\varphi^{-1}(\Delta_Y)$ è chiuso in X. □

Proposizione 152. *Le affermazioni delle proposizioni 151 e 149 valgono per ogni varietà quasi proiettiva Y.*

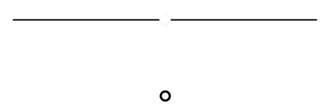
Dimostrazione. Y è separata. □

Esemio. [Retta affine con un punto sdoppiato.] Sia $\mathbb{A}^1$ e consideriamo l'aperto $U = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, varietà algebrica e affine. Siano le coppie varietà alagebrica con un suo aperto $(X_1, U_1) = (\mathbb{A}^1, U)$ e $(X_2, U_2) = (\mathbb{A}^1, U)$. Poniamo $X_1 \sqcup X_2$ l'unione sconnessa, due rette che non si intersecano, e sia $X = X_1 \sqcup X_2 / \sim$ dove $x \sim y$ se, e solo se, $x \in U_1$, $y \in U_2$ e $x = y$ oppure $x \in U_2$, $y \in U_1$ e $x = y$, oppure $x, y \in U_i, x = y$. Di fatto abbiamo incollato $X_1 = \mathbb{A}^1$ e $X_2 = \mathbb{A}^1$ nell'aperto U e abbiamo ottenuto il quoziente in cui dopo l'identificazione è rimasto l'aperto U più due punti, in quanto il punto d'origine di X_1 non va identificato con quello di X_2.

Sia V_1 l'immagine di X_1 in X e sia V_2 l'immagine di X_2 in X,



oppure



dove su X abbiamo considerato la topologia quoziente (gli aperti in X sono quozienti di insiemi aperti saturati in $X_1 \sqcup X_2$), dunque ne deduciamo che $V_1 \subset X$ e $V_2 \subset X$ sono aperti omeomorfi a $\mathbb{A}^1$. Per incollamento dei fasci $\mathcal{O}_{V_1}$ e $\mathcal{O}_{V_2}$, X diventa una varietà algebrica e si ottiene lo spazio con funzioni $(X, \mathcal{O}_X)$ perché $X = V_1 \cup V_2$ e $V_i \simeq \mathbb{A}^1$. Tuttavia X non soddisfa la proprietà di separazione: consideriamo $f : \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\sim} V_1 \subset X$ e $g : \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\sim} V_2 \subset X$, si ha $f(x) = g(x)$ se, e solo se, $x \in U \subset \mathbb{A}^1$, ma U è aperto, quindi la varietà algebrica che abbiamo ottenuto tramite incollamento non può essere separata, in particolare X non è varietà quasi proiettiva. Notiamo che la stessa costruzione con lo spazio topologico $\mathbb{R}$ dotato della topologia euclidea da un esempio di spazio topologico che possiede atlante di classe $\mathcal{C}^\infty$, però non è spazio di Hausdorff, e quindi non è varietà differenziabile.

Insiemi chiusi in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$

Dimostreremo adesso un importante teorema che ci dice che l'immagine di un morfismo da una varietà proiettiva ad una quasiproiettiva è un insieme chiuso nella topologia di Zariski, ed è importante capire come descrivere i chiusi in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.

Sia $s_{n,m}$ l'isomorfismo di Segre $s_{n,m} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \Sigma_{n,m} \subset \mathbb{P}^N$ con $N = (n+1)(m+1) - 1$. I chiusi in $\Sigma_{n,m}$ sono gli insiemi del tipo

$$\Sigma_{n,m} \cap \{F_\alpha(\ldots : w_{ij} : \ldots) = 0\}_{\alpha=1,\ldots,l}$$

Dunque, ponendo $w_{ij} = x_i y_j$, i chiusi in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ sono gli insiemi del tipo

$$\{(\ldots : u_i : \ldots), (\ldots : v_j : \ldots) : F_\alpha(\ldots, u_i v_j, \ldots) = 0, \alpha = 1, \ldots, l\}$$

con F_α polinomi omogenei nelle variabili w_{ij}.

Sia $F(\ldots, w_{ij}, \ldots)$ omogeneo, allora $G(u_0, \ldots, u_n; v_0, \ldots, v_m) = F(\ldots, u_i v_j, \ldots)$ è omogeneo sia rispetto a $u_0, \ldots, u_n$, sia rispetto a $v_0, \ldots, v_m$, perché se prendo λu_i, allora w_{ij} vengono tutti moltiplicati per la stessa costante λ ed F è omogeneo, analogo discorso se moltiplico v_j per $\mu \neq 0$. Inoltre i due gradi di omogeneità sono uguali a $\mathrm{gr}(F)$, perché in entrambi i casi possiamo tirar fuori $\lambda^{\mathrm{gr}(F)}$.

Viceversa, se un polinomio $G(u_0, \ldots, u_n; v_0, \ldots, v_m)$ possiede queste proprietà, allora esiste un $F(\ldots, w_{ij}, \ldots)$ omogeneo tale che $G(\underline{u}; \underline{v}) = F(\ldots, w_{ij}, \ldots)$, dove $w_{ij} = u_i v_j$.
Ad esempio sia $G(\underline{u}; \underline{v}) = u_0^3 v_0 v_1^2 + u_1^2 u_2 v_1^3$, allora G si può scrivere come

$$u_0^3 v_0 v_1^2 + u_1^2 u_2 v_1^3 = (u_0 v_0)(u_0 v_1)(u_0 v_1) + (u_1 v_1)(u_1 v_1)(u_2 v_1) = w_{00} w_{01}^2 + w_{11}^2 w_{21} = F(\ldots, w_{ij}, \ldots),$$

dove $w_{ij} = u_i v_j$ e F è omogeneo nelle variabili w_{ij}. Nel caso generale il ragionamento è lo stesso, dunque i chiusi di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ sono dati da equazioni polinomiali omogenee rispetto ai due sistemi di variabili con gradi, rispetto ai due sistemi, uguali.

Lemma 153. *L'insieme $X \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ è chiuso se, e solo se, è l'insieme di soluzioni di un sistema*

$$\{G_\alpha(u_0, \ldots, u_n; v_0, \ldots, v_m) = 0\}_{\alpha=1,\ldots,l}$$

dove ogni G_α è omogeneo rispetto sia alle variabili $u_0, \ldots, u_n$ sia alle variabili $v_0, \ldots, v_m$.

Osserviamo che la differenza con quanto detto finora è che i gradi di omogeneità rispetto alle due variabili non sono necessariamente uguali.

Dimostrazione.
($\Rightarrow$) è gia dimostrata, G_α sono di questo tipo e i gradi di omogeneità sono gli stessi.
($\Leftarrow$) Sia r_α il grado di G_α rispetto alle variabili $u_0, \dots, u_n$ e sia s_α il grado di G_α rispetto alle variabili $v_0, \dots, v_m$. Se $r_\alpha = s_\alpha$, allora abbiamo già visto che $G_\alpha = F(\dots, u_i v_j, \dots)$, dove $F(\dots, w_{ij}, \dots)$ è omogeneo. Supponiamo $r_\alpha > s_\alpha$ e sostituiamo l'equazione $G_\alpha = 0$ con

$$\begin{cases} v_0^{r_\alpha - s_\alpha} G_\alpha = 0 \\ \vdots \\ v_n^{r_\alpha - s_\alpha} G_\alpha = 0 \end{cases}.$$

Ogni equazione è equivalente al sistema appena scritto perché chiaramente con questo sistema otteniamo le stesse soluzioni: se $G_\alpha = 0$, allora il sistema è verificato, invece se il sistema è verificato, allora almeno un $v_i \neq 0$, dunque $G_\alpha = 0$.
Se invece $s_\alpha > r_\alpha$ si considera il sistema

$$\begin{cases} u_0^{s_\alpha - r_\alpha} G_\alpha = 0 \\ \vdots \\ u_n^{s_\alpha - r_\alpha} G_\alpha = 0 \end{cases}$$

Faccendo tali sostituzioni per ogni α otteniamo che X è soluzione di un sistema in cui i gradi di omogeneità sono gli stessi, dunque X è chiuso di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. $\square$

Insiemi chiusi in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ Sappiamo che

$$\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m \simeq \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}_0^m \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m.$$

I chiusi in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}_0^m$ sono intersezioni di chiusi in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ con $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}_0^m$, quindi soluzioni di sistemi

$$\{G_\alpha(u_0, \dots, u_n; v_0, \dots, v_m) = 0\}_{\alpha=1,\dots,l} \cap \{v_0 \neq 0\}$$

dove $G_\alpha(\underline{u}, \underline{v})$ sono omogenei rispetto a $\underline{u}$ e $\underline{v}$ separatamente. Questo corrisponde esattamente a

$$\left\{ v_0^{s_\alpha} G_\alpha \left(u_0, \dots, u_n; 1, \frac{v_1}{v_0}, \dots, \frac{v_m}{v_0} \right) = 0 \right\}_{\alpha=1,\dots,l} \cap \{v_0 \neq 0\}$$

e se poniamo $\frac{v_i}{v_0} = t_i$, tenedo conto dell'isomorpfismo $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m \cong \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}_0^m$, allora è equivalente a

$$\{g_\alpha(u_0, \dots, u_n; t_1, \dots, t_m) = 0\}_{\alpha=1,\dots,l},$$

dove $g_\alpha(\underline{u}; \underline{t})$ sono omogenei rispetto a $u_0, \dots, u_n$, ma scompare l'omogeneità rispetto a t_j.
Conclusione: I chiusi in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ sono gli insiemi di soluzioni di sistemi polinomiali del tipo

$$\{g_\alpha(u_0, \dots, u_n; t_1, \dots, t_m) = 0\}_{\alpha=1,\dots,l}$$

dove $g_\alpha(\underline{u}; \underline{t})$ sono polinomi omogenei rispetto a $u_0, \dots, u_n$.

Teorema dell'immagine di varietà proiettive

Il morfismo $\varphi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ definito da $\varphi(x, y) = (x, xy)$ ha un'immagine né chiusa né aperta, questo non succede per le immersioni di varietà proiettive negli spazi proiettivi.

TEOREMA 154. *Sia $f : X \to Y$ un morfismo di una varietà proiettiva X in una varietà separata Y, allora $f(X)$ è un insieme chiuso in Y. In particolare l'immagine di ogni morfismo di una varietà proiettiva in una varietà quasiproiettiva è chiusa nel codominio.*

Tale teorema ha molte applicazioni, ma prima di dimostrarlo diamo la seguente

DEFINIZIONE 155. Una varietà separata X si dice propria se per ogni varietà Y la proiezione $p_2 : X \times Y \to Y$ trasforma insiemi chiusi in insiemi chiusi.

Notiamo che nell'ambito della topologia la stessa definizione, sotto l'ipotesi che X è spazio topologico di Hausdorff, è equivalente alla compattezza di X. Quindi le varietà algebriche complete sono l'analogo degli spazi compatti della topologia.

Il teorema 154 segue dal seguente teorema la cui dimostrazione daremo dopo.

TEOREMA 156. *Ogni varietà proiettiva X è varietà propria.*

Prima vediamo come il teorema 154 segue dal teorema 156.

Dimostrazione(teorema 154). Sia $\Gamma_f \subset X \times Y$ il grafico di f. Esso è chiuso in $X \times Y$ in quanto Y è varietà separata e inoltre $f(X) = p_2(\Gamma_f) \subset Y$, perché $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$. Secondo il teorema 156 la proiezione $p_2(\Gamma_f)$ è un insiema chiuso in Y. $\square$

Osservazione. Questa dimostrazione in effetti si può applicare ad ogni varietà completa e mostra che ogni morfismo di una varietà completa in una varietà separata ha immagine chiusa. Notiamo l'analogo con il fatto noto della topologia, che ogni applicazione continua di uno spazio compatto in uno spazio di Hausdorff ha immagine chiusa.

Ora daremo la dimostrazione del teorema 156.

Dimostrazione. Inanzitutto X è varietà separate secondo il teorema 147. Dobbiamo dimostrare che per ogni varietà algebrica Y la proiezione $p_2 : X \times Y \to Y$ trasforma ogni $Z \subset X \times Y$ chiuso in $p_2(Z) \subset Y$ chiuso e dimostreremo questa affermazione in due passi.

Passo 1: Riduzione al caso particolare $X = \mathbb{P}^n$ e $Y = \mathbb{A}^m$, cioè se l'affermazione è vera per queste due varietà, allora è vera in generale.

Possiamo suppore che X è un chiuso proiettivo di $\mathbb{P}^n$, perché X è varietà proiettiva, dunque X è isomorfo ad un chiuso di $\mathbb{P}^n$. Secondo il lemma 138 $X \times Y$ è chiuso in $\mathbb{P}^n \times Y$, quindi Z è chiuso in $\mathbb{P}^n \times Y$. Se $\pi_2 : \mathbb{P}^n \times Y \to Y$ è la proiezione, allora $p_2(Z) = \pi_2(Z)$, quindi se riusciamo a dimostrare che $p_2 : \mathbb{P}^n \times Y \to Y$ trasforma chiusi in chiusi avremo che $p_2(Z)$ è insieme chiuso in Y.

Si ha $Y = \bigcup_{i=1}^r Y_i$ dove Y_i sono varietà affini, dunque il chiuso $Z \subset \mathbb{P}^n \times Y$ è l'unione

$$Z = \bigcup_{i=1}^{r} (Z \cap (\mathbb{P}^n \times Y_i)) .$$

Siano $\pi_{2,i} : \mathbb{P}^n \times Y_i \to Y_i$ e se riusciamo a dimostrare l'affermazione (per proiezione trasformiamo chiusi in chiusi) per varietà affini Y, avremo che per ogni i si ha $\pi_{2,i}(Z \cap (\mathbb{P}^n \times Y_i))$ è chiuso in Y_i. È chiaro che $\pi_{2,i}(Z \cap (\mathbb{P}^n \times Y_i)) = p_2(Z) \cap Y_i$. Applicando il lemma 88 a $p_2(Z) \subset Y = \bigcup_{i=1}^r Y_i$ concludiamo che $p_2(Z)$ è chiuso in Y.

Basta dimostrare dunque l'affermazione per chiusi $Z \subset \mathbb{P}^n \times Y$, dove Y è varietà affine, dunque $Y \simeq V \subset \mathbb{A}^m$. Possiamo sostituire Y con V e dunque

$$Z \subset \mathbb{P}^n \times V \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$$

dove Z è chiuso in $\mathbb{P}^n \times V$, chiuso a sua volta in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$. Se $p_2 : \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^m$ è la proiezione, si ha $p_2(Z) = \pi_2(Z)$ e se riusciamo a dimostrare che la proiezione $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^m$ trasforma chiusi in chiusi, il teorema sarebbe dimostrato.

Passo 2: Sia $Z \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ un chiuso, Z è soluzione di un sistema polinomiale del tipo

$$\{f_i(x_0, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_m) = 0\}_{i=1,\ldots,l}$$

dove f_i è omogeneo di grado k_i rispetto alle variabili $x_0, \ldots, x_n$. A cosa corrisponde $p_2(Z)$? Sia $y_0 \in \mathbb{A}^m$, allora

$$(*) \quad Z \cap p_2^{-1}(y_0) = \{f_i(x_0, \ldots, x_n; y_0) = 0\}_{i=1,\ldots,l}$$

ed $y_0 \in p_2(Z)$ se, e solo se, il sistema omogeneo $(*)$ possiede soluzioni non banali.

Per il teorema di Hilbert degli zeri proiettivo, il sistema $(*)$ possiede soluzioni non banali se, e solo se,

$$(f_1(\underline{x}, y_0), \ldots, f_l(\underline{x}, y_0)) \not\supset (R^+)^s$$

per nessun $s \in \mathbb{N}$ dove $R^+ = (x_0, \ldots, x_n) \subset \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]$. Fissiamo $s \in \mathbb{N}$ e consideriamo l'insieme

$$T_s = \left\{y_0 \in \mathbb{A}^m : (f_1(\underline{x}, y_0), \ldots, f_l(\underline{x}, y_0)) \not\supset (R^+)^s\right\}$$

e dunque si ha $p_2(Z) = \bigcap_{s \in \mathbb{N}} T_s$. Poiché l'intersezione di chiusi è chiusa, per dimostrare il teorema è sufficiente mostrare che T_s è chiuso in $\mathbb{A}^m$ per ogni $s \in \mathbb{N}$.

Siano $H^{(\alpha)}$ i monomi in $x_0, \ldots, x_n$ di grado s ordintati in qualche modo, al variare di α prendiamo tutti i monomi. L'ideale $(R^+)^s$ è generato dall'insieme $\{H^{(\alpha)}\}$. Consideriamo la contronominale della condizione che definisce T_s. L'ideale

$$(f_1(\underline{x}, y_0), \ldots, f_l(\underline{x}, y_0)) \supset (R^+)^s$$

se, e solo se,

$$(**) \quad \text{ogni} \quad H^{(\alpha)} \quad \text{si rappresenta come} \quad H^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{l} f_i(\underline{x}, y_0) G_{\alpha,i}(\underline{x})$$

dove sia f_i che $G_{\alpha,i}$ sono omogenei, $\mathrm{gr}(f_i) = k_i$ e

$$\mathrm{gr}(G_{\alpha,i}) = \begin{cases} s - k_i & s \geq k_i \\ 0 & s < k_i \end{cases}$$

perché se un f_i ha grado maggiore di s, allora esso non può comparire nella somma.

Denotiamo con $N_j^{(\beta)}$ i monomi di grado $s - k_j$ ordinati in qualche modo, a patto che $s \geq k_j$. La condizione $(**)$ è equivalente alla condizione che al variare di i e β i polinomi $f_i(\underline{x}, y_0) N_i^{(\beta)}$ generano lo spazio vettoriale generato da $H^{(\alpha)}$ (α varia), che corrisponde allo spazio di tutti i polinomi omogenei di grado s.

Ne concludiamo che la condizione $(f_1(\underline{x}, y_0), \ldots, f_l(\underline{x}, y_0)) \not\supset (R^+)^s$ è equivalente alla condizione

$$(***) \quad f_i(\underline{x}, y_0) N_i^{(\beta)} \quad ((i, \beta) \text{ variano}), \text{ non generano lo spazio generato da } \quad H^{(\alpha)} \quad (\alpha \quad \text{varia}).$$

Distinguiamo due casi:

Caso 1: Il numero di polinomi $f_i(\underline{x}, y_0) N_i^{(\beta)}$ (i e β variano) è minore del numero dei monomi $H^{(\alpha)}$, dunque in questo caso non potranno mai generare lo spazio, dunque $(***)$ è vero per ogni $y_0 \in \mathbb{A}^m$. Questo significa che $T_s = \mathbb{A}^m$, quindi è insieme chiuso.

Caso 2: Il numero dei polinomi $f_i(\underline{x}, y_0) N_i^{(\beta)}$ è maggiore o uguale al numero dei monomi $H^{(\alpha)}$. Rappresentiamo per ogni i, β

$$f_i(\underline{x}, y_0) N_i^{(\beta)} = \sum_{\alpha} h_{i,\beta,\alpha}(y_0) H^{(\alpha)}.$$

Fissato y_0 vale $(**)$ se, e solo se, la matrice

$$M(y_0) = (h_{i,\beta,\alpha}(y_0))_{(i,\beta),\alpha}$$

dove l'indice (i,β) indica la righa e l'indice α la colonna, ha rango massimo. Infatti, se vale $(**)$, quindi la contronominale di $(***)$, allora le righe della matrice generano uno spazio vettoriale di dimensione $\dim\langle H_\alpha\rangle_\alpha$, quindi la matrice ha rango massimo. Viceversa, se la matrice ha rango massimo, allora uno dei minori di rango massimo è diverso da zero, possiamo invertire la matrice quadrata corrispondente ed esprimere $H^{(\alpha)}$ come combinazione lineare di $f_i(\underline{x}, y_0)N_i^{(\beta)}$. Concludiamo che vale $(***)$, la contronominale di $(**)$, se, e solo se, tutti i minori di rango massimo della matrice $M(y_0)$ si anullano. Ora ricordiamo che ogni $f_i(\underline{x}, \underline{t})$ è un polinomio nelle variabili $(\underline{x}, \underline{t})$. Esprimendo $f_i(\underline{x}, \underline{t})N_i^{(\beta)}$ come combinazione lineare dei monomi $H^{(\alpha)}$ i coefficienti risultano polinomi in $t_1, \ldots, t_m$, che denotiamo con $h_{i,\beta,\alpha}(t_1, \ldots, t_m)$. I minori di rango massimo della matrice

$$M(t_1, \ldots, t_m) = (h_{i,\beta,\alpha}(t_1, \ldots, t_m))_{(i,\beta),\alpha}$$

sono polinomi in $t_1, \ldots, t_m$ e quindi $y_0 \in T_s$ se, e solo se, y_0 è zero comune di questi polinomi. Dunque T_s è un chiuso in in $\mathbb{A}^m$. Il teorema è dimostrato. $\square$

Corollario 157. *Sia $V \subset \mathbb{P}^n$ una varietà quasi proiettiva isomorfa ad una varieta proiettiva $X \subset \mathbb{P}^m$, allora V è un insieme chiuso in $\mathbb{P}^n$.*

Dimostrazione. Siano $\varphi : V \to X$ e $\psi : X \to V$ i due morfismi inversi uno all'altro, allora

$$i \circ \psi : X \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{i} \mathbb{P}^n$$

è un morfismo. Secondo il teorema 154 l'immagine V è chiusa in $\mathbb{P}^n$. $\square$
Confrontando con le varietà affini: un'immersione può avere un'immagine aperta o chiusa negli spazi affini, come per l'iperbole, ma questo non succede per le immersioni di varietà proiettive negli spazi proiettivi.

Corollario 158. *Sia X una varietà proiettiva irriducibile, allora ogni funzione regolare $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ è una costante.*

Lo abbiamo dimostrato in modo esplicito per $\mathbb{P}^n$, ma in realtà è vero per ogni varietà proiettiva irriducibile.
Dimostrazione. Sia $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ e sia $\varphi : X \to \mathbb{A}^1$ il morfismo $\varphi(x) = f(x)$. Sappiamo che $\mathbb{A}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^1_0 \subset \mathbb{P}^1$ attraverso $j(t) = (1 : t)$ e consideriamo la composizione $j \circ \varphi : X \to \mathbb{P}^1$ definita da $j \circ \varphi(x) = (1 : f(x))$.
Secondo il teorema 154 $j \circ \varphi(X)$ è un insieme chiuso in $\mathbb{P}^1$ e gli insiemi chiusi in $\mathbb{P}^1$ sono $\mathbb{P}^1$, gli insiemi finiti e $\emptyset$, ma $\infty = (0 : 1) \notin j \circ \varphi(X)$, quindi $j \circ \varphi(X)$ è un insieme finito. Per ipotesi X è irriducibile, quindi $j \circ \varphi(X) = \{P\} = (1 : c)$ con $c \in \mathsf{k}$, allora $f = c$ con c costante. $\square$.

Corollario 159. *Sia $\varphi : X \to Y$ un morfismo di una varietà proiettiva in una varietà quasiaffine Y, allora $\varphi(X)$ consiste di un numero finito di punti.*

Dimostrazione. Sia $j : Y \xrightarrow{\sim} Z \subset \mathbb{A}^m$ un isomorfismo dove Z è un insieme quasiaffine. Sia $\psi = j \circ \varphi : X \to Z \subset \mathbb{A}^m$ la composizione e sappiamo che $\psi = (f_1, \ldots, f_m)$ con $f_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ perché i morfismi in insiemi quasi affini sono fatti così. Scomponiamo $X = X_1 \cup \ldots \cup X_s$ in insiemi chiusi irriducibili, X_l è irriducibile per ogni $l = 1, \ldots, s$, allora $f_i|_{X_l}$ è costante per il corollartio precedente e questo significa che $\psi(X_l) = P_l \in \mathbb{A}^m$, dove il punto P_l ha per coordinate le costanti $f_i|_{X_l}$. Concludiamo che $\varphi(X)$ è un insieme finito di Y. $\square$

Ipersuperfici

Lemma 160. *Lo spazio vettoriale dei polinomi omogenei $\{F(t_0, \ldots, t_n)\}$ di grado m ha dimensione*

$$\binom{n+m}{m} = \binom{n+m}{n}.$$

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione su $l = n + m$. La formula è vera se $n = 0$ o se $m = 0$. Se $n = 0$, allora abbiamo una sola variabile: $F(t_0) = ct_0^m$ e $\binom{0+m}{m} = 1$. Se $m = 0$, allora abbiamo i polinomi costanti: $F(t_0, \ldots, t_n) = c$ costante e $\binom{n+0}{0} = 1$.

Supponiamo che la formula sia vera per ogni coppia m, n tale che $m + n \leq l$. Sia $m + n = l + 1$, $m \geq 1$ e $n \geq 1$ perché i casi $m = 0$ e $n = 0$ li abbiamo già affrontati. Sia $d(m, n)$ la dimensione che voglio calcolare, allora $F(t_0, \ldots, t_n)$ di grado m lo possiamo scrivere come

$$F(t_0, \ldots, t_n) = G(t_0, \ldots, t_{n-1}) + t_n \cdot H(t_0, \ldots, t_n)$$

dove $G(t_0, \ldots, t_{n-1})$ è un polinomio di grado m che dipende solo dalle prime n variabili, non da t_n, $H(t_0, \ldots, t_n)$ ha grado $m-1$ e tale scomposizione è unica. Ne deduciamo che, applicando l'ipotesi induttiva,

$$d(n, m) = d(m, n-1) + d(m-1, n) = \binom{m+n-1}{m} + \binom{m+n-1}{m-1} = \binom{m+n}{m}$$

secondo la formula per i coefficienti bionmiali ed è quanto volevamo dimostrare. □

Denotiamo con $r_{n,m} = \binom{n+m}{n} - 1$, allora si ha

$$\{F(t_0, \ldots, t_n) \text{mod} \mathsf{k}^*, F \neq 0\} = \mathbb{P}^{r_{n,m}}$$

perché l'insieme a sinistra è la proiettivizzazione dello spazio vettoriale dei polinomi omogenei e inoltre le coordinate proiettive di un punto $\langle F \rangle \in \mathbb{P}^{r_{n,m}}$ sono

$$\langle F \rangle = (\ldots : a_{i_0 \ldots i_n} : \ldots) \in \mathbb{P}^{r_{n,m}}$$

dove $F = \sum a_{i_0 \ldots i_n} T_0^{i_0} \ldots T_n^{i_n} \neq 0$ e $i_0 + \ldots + i_n = m$. Dunque lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^{r_{n,m}}$ parametrizza gli ipersuperfici di grado m in $\mathbb{P}^n$. Qui di ipersuperficie intendiamo non il chiuso proiettivo, ma l'equazione omogenea a meno di molteplicazione di una costante, come si fa per le curve piane. Notiamo che lo spazio proiettivo duale, che parametrizza gli iperpiani in $\mathbb{P}^n$ è un caso particolare in cui $m = 1$ e $r_{n,m} = n$.

Esempio Consideriamo le coniche in $\mathbb{P}^2$: il numero delle variabili è 3, dunque $n = 2$ perché partiamo da zero, allora $m = 2$ e $\binom{2+2}{2} = 6$ e $r_{2,2} = 5$, da cui $\mathbb{P}^{r_{2,2}} = \mathbb{P}^5$ e le coniche in $\mathbb{P}^2$ dipendono da 5 parametri. Ad esempio vogliamo mostrare che dati 5 punti $P_1, \ldots, P_5 \in \mathbb{P}^2$ esiste una conica $\mathcal{C}$ che li contiene. Siano $P_i = (\alpha_{i0} : \alpha_{i1} : \alpha_{i2})$ e sia $\mathcal{C}$ rappresentata dall'equazione

$$F = \sum v_{i_0 i_1 i_2} t_0^{i_0} t_1^{i_1} t_2^{i_2}.$$

Se $F(P_i) = 0$, allora

$$\sum v_{i_0 i_1 i_2} \alpha_{i0}^{i_0} \alpha_{i1}^{i_1} \alpha_{i2}^{i_2} = 0$$

dove $v_{i_0 i_1 i_2}$ sono incognite, quindi indeterminate, e $\alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \alpha_{i2}$ sono costanti dati dall'imporre il passaggio per P_i. Al variare di $i = 1, \ldots, 5$ otteniamo 5 equazioni lineari per le 6 incognite $v_{i_0 i_1 i_2}$, ma cinque equazioni lineari omogenee in 6 incognite hanno sempre una soluzione non banale, che corrisponde ai coefficienti della conica, dunque la conica $\mathcal{C}$ passante per $P_1, \ldots, P_5$ esiste.

Ricordiamo che una conica in $\mathbb{P}^2$ è per definizione degenere se la forma quadratica che la determina è prodotto di due forme lineari. È noto che una conica è degenere se, e solo se, la matrice simmetrica associata alla forma quadratica ha determinante nullo. Questo significa che in $\mathbb{P}^5$ i punti che corrispondono alle coniche degeneri formano un insieme chiuso proiettivo proprio, più precisamente l'insieme degli zeri del determinante di una matrice simmetrica di tipo 3×3 i quali elementi sono le indeterminate $t_0, \ldots, t_5$.

La prossima proposizione estende questo risultato alle ipersuperfici in $\mathbb{P}^n$ di qualsiasi grado.

Proposizione 161. *Sia $n \geq 2$. Le ipersuperfici riducibili di grado $m \geq 2$ in $\mathbb{P}^n$, cioè quelle di equazione $F = 0$ tale che $F = G_1G_2$ con $gr(G_i) \geq 1, i = 1, 2$, formano un sottoinsieme chiuso proprio in $\mathbb{P}^{r_{n,m}}$.*

Osserviamo che non abbiamo esplicitato l'insieme, questo è difficile, ma almeno possiamo affermare che si tratta di un insieme chiuso proiettivo proprio.

Dimostrazione. Dimostriamo prima che l'insieme è chiuso in $\mathbb{P}^{r_{n,m}}$. Sia $F = G_1G_2$ dove $\mathrm{gr}(G_1) = k_1$ e $\mathrm{gr}(G_2) = k_2$, $k_1, k_2 \geq 1$ e $m = k_1 + k_2$. Fissato m vi sono finite possibilita per k_1 e k_2 per soddisfare la condizione. Quindi basta dimostrare che è chiuso l'insieme in considerazione con k_1 e k_2 fissati, perché l'inseme della proposizione sarà unione finita di tali chiusi e quindi sara chiuso.
Fissiamo $k_1, k_2 \geq 1$ tale che $m = k_1 + k_2$, qual è l'insieme di polinomi che si possono scomporre così? Muoviamoci nell'ambito di morfismi di varietà algebriche e consideriamo il prodotto cartesiano $\mathbb{P}^{r_{n,k_1}} \times \mathbb{P}^{r_{n,k_2}}$ che parametrizza le coppie $(G_1 \mathrm{mod} \mathsf{k}^*, G_2 \mathrm{mod} \mathsf{k}^*)$. Consideriamo l'applicazione

$$(*) \quad \mathbb{P}^{r_{n,k_1}} \times \mathbb{P}^{r_{n,k_2}} \to \mathbb{P}^{r_{n,m}} \quad \text{definita da} \quad (G_1 \mathrm{mod} \mathsf{k}^*, G_2 \mathrm{mod} \mathsf{k}^*) \mapsto (G_1G_2 \mathrm{mod} \mathsf{k}^*).$$

L'applicazione è ben posta perché moltiplicando per costanti G_1 o G_2 si moltiplica per la stessa costante G_1G_2 e inoltre se $G_1 \neq 0$ e $G_2 \neq 0$, allora $G_1G_2 \neq 0$ perché $\mathsf{k}[t_0, \ldots, t_n]$ è un dominio di integrità. Tramite coordinate si esprime come

$$\left(\sum_{s_0+\ldots+s_n=k_1} u_{s_0\ldots s_n} t_0^{s_0} \ldots t_n^{s_n} \mathrm{mod} \mathsf{k}^*, \sum_{r_0+\ldots+r_n=k_2} v_{r_0\ldots r_n} t_0^{r_0} \ldots t_n^{r_n} \mathrm{mod} \mathsf{k}^* \right) \mapsto$$
$$\mapsto \sum_{i_0+\ldots+i_n=m} \left(\sum_{\substack{s_0+r_0=i_0 \\ \vdots \\ s_n+r_n=i_n}} u_{s_0\ldots s_n} \cdot v_{r_0\ldots r_n} \right) t_0^{i_0} \ldots t_n^{i_n}$$

Sappiamo che $\mathbb{P}^{r_{n,k_1}} \times \mathbb{P}^{r_{n,k_2}}$ è isomorfo alla varietà di Segre $\Sigma_{r_{n,k_1}, r_{n,k_2}} = \Sigma$

$$\mathbb{P}^{r_{n,k_1}} \times \mathbb{P}^{r_{n,k_2}} \xrightarrow{\sim} \Sigma \subset \mathbb{P}^N$$

con N opportuno, dove le coordinate proiettive in $\mathbb{P}^N$ sono $w_{s_0\ldots s_n, r_0\ldots r_n}$.
Alla coppia di un punto generico di $\mathbb{P}^{r_{n,k_1}} \times \mathbb{P}^{r_{n,k_2}}$ corrisponde un unico punto in Σ con coordinate proiettive $w_{s_0\ldots s_n, r_0\ldots r_n} = u_{s_0\ldots s_n} v_{r_0\ldots r_n}$. Sostituendo $\mathbb{P}^{r_{n,k_1}} \times \mathbb{P}^{r_{n,k_2}}$ con la varietà di Segre, l'applicazione $(*)$ è data da

$$\left(\left(\ldots : \sum_{s_0+\ldots+s_n=k_1} u_{s_0\ldots s_n} : \ldots \right), \left(\ldots : \sum_{r_0+\ldots+r_n=k_2} v_{r_0\ldots r_n} : \ldots \right) \right) \leftrightarrow$$
$$(\ldots : w_{s_0\ldots s_n, r_0\ldots r_n} : \ldots) \mapsto \left(\ldots : \sum w_{s_0\ldots s_n, r_0\ldots r_n} : \ldots \right).$$

Quindi $(*)$ risulta un'applicazione definita sulla varietà di Segre Σ tramite certi polinomi omogenei di primo grado che non si annullano simultaneamente in alcun punto di Σ (in quanto $G_1G_2 \neq 0$ purché $G_1 \neq 0$ e $G_2 \neq 0$). Applicando un eserizio svolto concludiamo che $(*)$ è un morfismo. Poiché $\mathbb{P}^{r_{n,k_1}} \times \mathbb{P}^{r_{n,k_2}}$ è una varietà proiettiva isomorfa alla varietà di Segre, secondo il teorema dell'immagine di varietà proiettive, l'immagine di $(*)$ è un insieme chiuso in $\mathbb{P}^{r_{n,m}}$.
Per dimostrare che l'insieme di $\mathbb{P}^{r_{n,m}}$ che corrisponde alle ipersuperfici riducibili è proprio, basta verificare che esistono ipersuperfici irriducibili. Il polinomio di Fermat $F = t_0^m + \ldots + t_n^m$, è un polinomio omogeneo irriducibile. $\square$

Osservazione. Qual'è l'uso corretto delle frasi del tipo '*La retta generica soddisfa ...*', oppure '*Per la cubica generica è vero che ...*' ecc. Si tratta di enti geometrici parametrizzati dai punti di una varietà algebrica irriducibile. Quando si dice che l'ente geometrico *generico* soddisfa una certa proprietà si intende che esiste un certo chiuso proprio della varietà algebrica, tale che per ogni ente geometrico, che corrisponde ad un punto non appartenente a questo chiuso proprio, vale la proprietà enunciata. Ad esempio uno degli esercizi svolti in classe si può formulare cosi: fisati m punti nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$ l'iperpiano generico non passa per nessuno di questi punti. Un'altro esempio è: la conica generica in $\mathbb{P}^2$ è non degenere. Infine, la proposizione 161 dice che l'ipersuperficie di grado m in $\mathbb{P}^n$ generica è irriducibile. Ovviamente dietro ciascuna di queste affermazioni deve stare una proposizione o un teorema precisi, come ad esempio la proposizione 161.

L'applicazione di Veronese

Sia $r_{n,m} = \binom{n+m}{m} - 1$. Consideriamo l'applicazione $v_m : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{r_{n,m}}$ definita da tutti i monomi in $u_0, \dots, u_n$ di grado m:

$$v_m(u_0 : \ldots : u_n) = (\ldots : u_0^{i_0} u_1^{i_1} \cdots u_n^{i_n} : \ldots) \quad \text{con} \quad i_0 + i_1 + \ldots + i_n = m.$$

In coordinate proiettive $v_{i_0 \ldots i_n} = u_0^{i_0} \ldots u_n^{i_n}$. Ad esempio sia $n = 1$ e $m = 3$, allora $v_3 : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ è data da

$$v_3(x_0 : x_1) = (x_0^3 : x_0^2 x_1 : x_0 x_1^2 : x_1^3)$$

la cui immagine è la cubica gobba, un chiuso in $\mathbb{P}^3$.

L'applicazione v_m è ben definita: se si moltiplica $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ per λ, allora

$$(\lambda u_0 : \ldots : \lambda u_n) = (\lambda^m u_0^m : \ldots : \lambda^m u_0^{i_0} \ldots u_n^{i_n} : \ldots).$$

Se $(u_0, \ldots, u_n) \neq (0, \ldots, 0)$, allora per qualche i si ha $u_i \neq 0$, dunque $u_i^m = v_{0\ldots 0m0\ldots 0} \neq 0$. Inoltre l'applicazione v_m è definita da polinomi omogenei dello stesso grado, quindi è un morfismo, $X = v_m(\mathbb{P}^n)$ è un chiuso nello spazio $\mathbb{P}^{r_{n,m}}$ per il teorema dell'immagine di varietà proiettive, X è irriducibile perché $\mathbb{P}^n$ è irriducibile.

Definizione 162. $v_m : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{r_{n,m}}$ è detto *morfismo di Veronese* e $X = v_m(\mathbb{P}^n)$ è detta *varietà di Veronese.*

Esempio. La cubica gobba $X = v_3(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$ è un esempio di varietà di Veronese.

Proposizione 163. *$v_m : \mathbb{P}^n \to X$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Sia $X_i = X \setminus V(v_{0\ldots 0m0\ldots 0})$, dove m è al posto $i-$esimo, polinomio omogeneo di primo grado, dunque X_i è un aperto di X, $X_i \subset X$. Si ha

$$v_m^{-1}(X_i) = \{(x_0 : \ldots : x_n) : x_i^m \neq 0\} = \mathbb{A}_i^n$$

perché $v_{i_0 \ldots u_n} = u_0^{i_0} \ldots u_n^{i_n}$. Siccome $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n \mathbb{A}_i^n$, allora $X = \bigcup_{i=0}^n X_i$. Restringiamo l'applicazione di Veronese su questi aperti: consideriamo $v_m|_{\mathbb{A}_i^n} : \mathbb{A}_i^n \to X_i$, affermiamo che $v_m|_{\mathbb{A}_i^n}$ si può invertire, cioè esiste $g_i : X_i \to \mathbb{A}_i^n$ morfismo tale che $g_i \circ v_m|_{\mathbb{A}_i^n} = \mathrm{id}$.

Consideriamo $i = 0$, gli altri casi sono analoghi: poniamo $g_0 : X_0 \to \mathbb{A}_0^n$

$$g_0(\ldots : v_{i_0 \ldots i_n} : \ldots) = (v_{m0\ldots 0} : v_{m-110\ldots 0} : \ldots : v_{m-10\ldots 01})$$

ed è ben posta perché data da polinomi omogenei di primo grado e $v_{m0\ldots 0} \neq 0$ per la definizione di X_0. Dunque g_0 è un morfismo perché è un morfismo in $\mathbb{P}^n$ il quale dominio è la varietà quasi proiettiva X_0 e il codominio è $\mathbb{A}_0^n$. Calcoliamo $g_0 \circ v_m|_{\mathbb{A}_0^n}$.

$$(u_0 : \ldots : u_n) \xrightarrow{v_m} (u_0^m : \ldots : u_0^{i_0} \ldots u_n^{i_n} : \ldots) \xrightarrow{g_0} (u_0^m : u_0^{m-1} u_1 : \ldots : u_0^{m-1} u_n) = (u_0 : \ldots : u_n)$$

cancellando $u_0^{m-1} \neq 0$, dunque possiamo invertire. Concludiamo la dimostrazione con il seguente lemma. $\square$

LEMMA 164. *Sia $f : V \to X$ un morfismo surgettivo di spazi con funzioni. Sia $X = \bigcup_i X_i$ con X_i aperti. Siano $V_i = f^{-1}(X_i)$. Supponiamo che per ogni i esiste $g_i : X_i \to V_i$ morfismo tale che $g_i \circ f|_{V_i} = id_{V_i}$, allora f è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Verifichiamo che f è iniettiva: siano Q_1 e Q_2 in V tali che $f(Q_1) = f(Q_2) = P$. Supponiamo che $P \in X_i$, allora $Q_1, Q_2 \in f^{-1}(X_i) = V_i$. Applicando g_i si ha

$$g_i(P) = g_i\left(f(Q_1)\right) = Q_1 \quad \text{e} \quad g_i(P) = g_i\left(f(Q_2)\right) = Q_2$$

da cui $Q_1 = Q_2$. Poniamo $g = f^{-1} : X \to V$, ben definita e si ha $g \circ f = \mathrm{id}_V$, $f \circ g = \mathrm{id}_X$. Dobbiamo dimostrare che g è un morfismo e per farlo mostriamo che lo è in ogni restrizione a X_i, ma $g^{-1}(V_i) = f(V_i) = X_i$ e $g|_{X_i} = g_i$ morfismo, dunque in questa situazione g è un morfismo secondo una delle proprietà dei morfismi. □

La varietà di Veronese è importante perché alcune affermazioni per ipersuperfici si riconducono ad affermazioni per iperpiani. Sia $V(F) = \{F(t_0, \dots, t_n) = 0\} \subset \mathbb{P}^n$ ipersuperficie, $F = \sum a_{i_0 \dots i_n} t_0^{i_0} \dots t_n^{i_n}$, allora

$$V(F) = \left\{(u_0 : \dots : u_n) : \sum a_{i_0 \dots i_n} u_0^{i_0} \dots u_n^{i_n} = 0\right\}.$$

Ricordiamo che le coordinate proiettive nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^{r_{n,m}}$ sono denotate con $v_{i_0 \dots i_n}$. Sia H l'iperpiano $\sum a_{i_0 \dots i_n} v_{i_0 \dots i_n} = 0$ in $\mathbb{P}^{r_{n,m}}$. Qua'è il chiuso proiettivo $v_m^{-1}(H)$?. Si ha

$$v_m^{-1}(H) = \left\{(u_0 : \dots : u_n) : \text{ ponendo } v_{i_0 \dots i_n} = u_0^{i_0} \dots u_n^{i_n} \text{ si ha che } (\dots : v_{i_0 \dots i_n} : \dots) \in H\right\}$$

dunque devo sostituire il punto $(\dots : v_{i_0 \dots i_n} : \dots) = (\dots : u_0^{i_0} \dots u_n^{i_n} : \dots)$ nell'equazione di H, da cui

$$\sum a_{i_0 \dots i_n} u_0^{i_0} \dots u_n^{i_n} = 0.$$

Otteniamo che $v_m^{-1}(X \cap H) = V(F)$. Concludiamo, tenendo conto che $v_m : \mathbb{P}^n \to X$ è isomorfismo, che $V(F)$ è isomorfa a $X \cap H$ e inoltre l'aperto $\mathbb{P}^n \setminus V(F)$ è isomorfo tramite v_m a $X \setminus H$.

La prossima proposizione è importante per le applicazioni che abbiamo

PROPOSIZIONE 165. *Sia F un polinomio omogeneo di $n+1$ variabili. Sia $Y \subset \mathbb{P}^n$ un chiuso proiettivo, allora $D_Y(F) = Y \setminus V(F) = \{y \in Y : F(y) \neq 0\}$ è una varietà affine.*

Dimostrazione. Consideriamo $v_m : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{r_{n,m}}$. Sia $H \subset \mathbb{P}^{r_{n,m}}$ l'iperpiano tale che $V(F) = v_m^{-1}(H)$. $D_Y(F) = Y \setminus V(F)$ viene trasformato tramite v_m in $v_m(Y) \setminus (X \cap H) = v_m(Y) \setminus H$ perché $v_m(Y) \subset X$, X è la varietà di Veronese isomorfa a $\mathbb{P}^n$.
$v_m(Y)$ è chiuso in $\mathbb{P}^{r_{n,m}}$ perché è isomorfo ad un chiuso della varietà di Veronese, che è un chiuso in $\mathbb{P}^{r_{n,m}}$. $v_m(Y) \setminus H$ è un chiuso di $\mathbb{P}^{r_{n,m}} \setminus H$, ma $\mathbb{P}^{r_{n,m}} \setminus H$ è isomorfo ad $\mathbb{A}_0^{r_{n,m}}$ trasformando con una proiettività l'iperpiano H nell'iperpiano $v_{m0 \dots 0} = 0$. A sua volta $\mathbb{A}_0^{r_{n,m}}$ è isomorfo a $\mathbb{A}^{r_{n,m}}$, quindi $v_m(Y) \setminus H$ è isomorfo a un chiuso in $\mathbb{A}^{r_{n,m}}$ tramite questi isomorfismi, allora $D_Y(F)$ è una varietà affine. □

TEOREMA 166. *Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ un chiuso proiettivo con infiniti punti. Sia $F \in \mathsf{k}[t_0, \dots, t_n]$ un polinomio omogeneo, allora $X \cap V(F) = \{x \in X : F(x) = 0\} \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $X \cap V(F) = \emptyset$, allora $D_X(F) = X$. Secondo la proposizione precedente, $D_X(F)$ è una varietà affine. Sia $i : X \to X = D_X(F)$ il morfismo identità. Secondo uno dei corollari al teorema dell'immagine di varietà proiettive, essendo X proiettivo e $D_X(F)$ affine si ha che l'immagine $i(X)$ deve essere un numero finito di punti, contraddizione perché X è infinito, proveniente dall'aver supposto che $X \cap V(F) = \emptyset$. □

Teorema di esistenza di soluzioni non banali di sistemi di equazioni polinomiali omogenee

TEOREMA 167. *Sia* k *campo algebricamente chiuso e siano* $F_1(t_0,\dots,t_n),\dots,F_m(t_0,\dots,t_n)$ *polinomi omogenei. Supponiamo che* $1 \le m \le n$, *allora il sistema polinomiale omogeneo*

$$\begin{cases} F_1(t_0,\dots,t_n)=0 \\ \vdots \\ F_m(t_0,\dots,t_n)=0 \end{cases}$$

possiede soluzioni non banali, cioè diverse da $(0,\dots,0)$.

Questo teorema è la generalizzazione del fatto noto nel caso in cui $\mathrm{gr}(F_i)=1$.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n. Sia $n=1$, da cui $m=1$, allora $F(t_0,t_1)=0$ e distinguiamo i due casi

- *Caso 1*: $F=at_0^d$, allora $(0:1)$ è soluzione;
- *Caso 2*: $F=a_0t_0^d+\ldots+a_jt_0^{d-j}t_1^j$ con $j\ge 1$ e $a_j\neq 0$, allora $F=t_0^d\left(a_0+a_1t+\ldots+a_jt^j\right)$ con $t=\frac{t_1}{t_0}$. Sia α radice del polinomio $f(t)=a_0+a_1t+\ldots+a_jt^j$, che esiste perché k è algebricamente chiuso, allora $(1:\alpha)$ è soluzione di $F(t_0,t_1)=0$.

Supponiamo che $n\ge 2$ e supponiamo che il teorema sia vero per un numero di variabili minore o uguale ad n. Sia $X\subset\mathbb{P}^n$ il chiuso proiettivo dato da $X=V(F_1,\dots,F_{m-1})$. Se X ha infiniti punti, allora secondo il teorema 166 $X\cap V(F_m)\neq\emptyset$, dunque il nostro sistema ha soluzioni non banali.
Supponiamo per assurdo che X sia insieme finito, $X=\{P_1,\dots,P_l\}$. Secondo un esercizio svolto, esiste $H\subset\mathbb{P}^n$ iperpiano tale che $H\cap\{P_1,\dots,P_l\}=\emptyset$. Sia $T:\mathbb{P}^n\to\mathbb{P}^n$ una proiettività tale che $T(H)=\{x_n=0\}$, allora

$$T(X)=\left\{\begin{array}{l} G_1=0 \\ \vdots \\ G_{m-1}=0 \end{array}\right\}$$

dove $G_i(\underline{x})=F_i\left(T^{-1}(\underline{x})\right)$, perché considerando soluzioni di $F_1,\dots,F_{m-1}$ e trasformando con T, ottengo soluzioni del sistema $T(X)$.
Il fatto che $X\cap H=\emptyset$ implica che il sistema omogeneo

$$(**)\quad \begin{cases} G_1(x_0,\dots,x_{n-1},0)=0 \\ \vdots \\ G_{m-1}(x_0,\dots,x_{n-1},0)=0 \end{cases}$$

non ha soluzioni non banali in quanto queste soluzioni sono date da $T(X)\cap\{x_n=0\}$ che è vuoto, in quanto $X\cap H=\emptyset$.
Il sistema $(**)$ è omogeneo in n variabili con un numero di equazioni minore di n $(m-1\le n-1)$, contraddizione con l'ipotesi induttiva. Il teorema è dimostrato. $\square$