Geometria 3
A.A. 2011 – 2012
Esercizi

Omotopia di applicazioni contiue.

– Sia X uno spazio topologico e sia $p \in X$. Denotiamo con $C_a(p)$ l'insieme dei punti di X che possono essere connessi per archi con p. Si dimostri che $C_a(p)$ è la componente connessa per archi di X che contiene p.

– Esercizi nn.1–4 del libro [Sernesi, Geometria 2] Capitolo 4 §13.

– Si dimostri che $f : S^{n-1} \to Y$ è omotopa ad un'applicazione costante $h : S^{n-1} \to \{p\} \in Y$ se e solo se f si estende ad un'applicazione continua $g : \overline{D}^n \to Y$.

– Si dimostri che $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $D^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ e $\overline{D}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ sono spazi topologici omotopicamente equivalenti alla sfera S^{n-1}.

– Un sottospazio topologico $X \subset \mathbb{R}^n$ si dice stellato se esiste un punto $p \in X$ tale che per ogni $q \in X$ il segmento $\overline{pq}$ è contenuto in X. Si dimostri che ogni insieme stellato è contraibile.

– Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un aperto convesso. Sia $p \in X$. Si dimostri che $X \setminus \{p\}$ è omotopicamente equivalente alla sfera S^{n-1}.

– Sia $\ell \subset \mathbb{R}^3$ una retta. Si dimostri che $\mathbb{R}^3 \setminus \ell$ è omotopicamente equivalente alla circonferenza S^1.

– Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio affine di dimensione k. Si dimostri che $\mathbb{R}^n \setminus E$ è omotopicamente equivalente alla sfera S^{n-k-1}.

– Sia $B \subset \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme convesso. Sia X uno spazio topologico e sia $A \subset X$ un suo sottospazio. Siano $f : X \to B$ e $g : X \to B$ due applicazioni continue, tali che $f(a) = g(a)$ per $\forall a$. Si dimostri che f è omotopicamente equivalente a g relativamente ad A.

Gruppo fondamentale.

Nelle esercizi dove si richiede il calcolo del gruppo fondamentale bisogna dare una presentazione tramite generatori e relazioni ed esplicitamente descrivere i generatori.

– Si dimostri che il gruppo

$$< x, y | xyx^{-1}y^{-1} = 1, x^n = 1, y^m = 1 >$$

è isomorfo a $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.

– Dimostrare che l'insieme $x \in \overline{D}^2$ tale che $\overline{D}^2 \backslash \{x\}$ è semplicemente connesso coincide con S^1. Dedurre che se $f : \overline{D}^2 \to \overline{D}^2$ è un omeomorfismo, allora $f(S^1) = S^1$, $f(D^2) = D^2$.

– Esiste uno spazio topologico Y, tale che $S^1 \times Y$ è omeoomorfo a S^2, oppure a $\mathbb{R}P^2$?

– Siano (T_1, x_1) e (T_2, x_2) due tori. Si consideri il bouquet $X = T_1 \sqcup T_2 / x_1 \sim x_2$. Sia x_0 il punto identificato. Calcolare $\pi_1(X, x_0)$.

– Siano $x, y \in D^2$. Calcolare $\pi_1(D^2 \backslash \{x, y\}, x_0)$.

– Siano $x, y \in \mathbb{R}P^2$. Calcolare $\pi_1(\mathbb{R}P^2 \backslash \{x, y\}, x_0)$.

– Sia $M = T^2 \# \cdots \# T^2$ (n volte) e sia $x \in M$. Calcolare $\pi_1(M \backslash \{x\}, x_0)$.

– Nell'esercizio precedente siano $x, y \in M$. Calcolare $\pi_1(M \backslash \{x, y\}, x_0)$.

– Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3$ privato di due rette parallele.

– Calcolare il gruppo fondamentale della sfera S^2 privata di tre puni distinti.

– Siano L_1, L_2, L_3 le tre assi coordinate di $\mathbb{R}^3$. Calcolare $\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash L_1 \cup L_2 \cup L_3, x_0)$.

Suggerimento. Ridurre il problema ad un sottospazio di S^2.

– Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3$ privato di due rette passanti per l'origine.

– Sia M una varietà topologica connessa di dimensione $n \geq 3$. Si dimostri che per ogni $q \in M$ si ha un isomorfismo $\pi_1(M \backslash \{q\}, x_0) \cong \pi_1(M, x_0)$ indotto dall'inclusione $M \backslash \{q\} \hookrightarrow M$.

– Sia M una varietà topologica connessa di dimensione $n \geq 3$. Siano $q_1, \ldots, q_m$ punti di M. Si dimostri che si ha un isomorfismo $\pi_1(M \backslash \{q_1, \ldots, q_m\}, x_0) \cong \pi_1(M, x_0)$ indotto dall'inclusione $M \backslash \{q_1, \ldots, q_m\} \hookrightarrow M$.

– Sia $X \subset \mathbb{R}^3$ l'unione di S^2 con il segmento $\{(0, 0, z) | -1 \leq z \leq 1\}$. Si calcoli $\pi_1(X, N)$, dove N è il polo nord. Descrivere esplicitamente il/i generatore/i del gruppo.

– Si calcoli il gruppo fondamentale del manico.

– Si calcoli il gruppo fondamentale del nastro di Moebius.

Rivestimenti.

– Si dimostri che l'applicazione $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ data di

$$p((x_0, x_1, \ldots, x_n)) = (x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$$

è un rivestimento di grado 2.

– Si dimostri che se $p_1 : R_1 \to X_1$ e $p_2 : R_2 \to X_2$ sono rivestimenti, allora $p_1 \times p_2 : R_1 \times R_2 \to X_1 \times X_2$ è un rivestimento. Se p_1 e p_2 sono rivestimenti finiti di gradi d_1 e d_2 rispettivamente, quanto è il grado di $p_1 \times p_2$?

– Sia $p : R \to X$ un rivestimento finito di grado n. Si dimostri che R è compatto se e solo se X è compatto. Esistono rivestimenti infiniti con R compatto?

Negli esercizi seguenti si assume che i rivestimenti sono applicazioni tra spazi topologici connessi e localmente connessi per archi.

– Si dimostri che se $p : R \to X$ è un rivestimento di grado n, allora il sottogruppo $p_*\pi_1(R, r_0)$ ha indice n in $\pi_1(X, x_0)$, dove $r_0 \in R$ è punto arbitrario e $x_0 = p(r_0)$.

– Costruire un rivestimento connesso di grado 3 del toro T^2 , oppure dimostrare che tale rivestimento non esiste.

– Costruire un rivestimento connesso di grado 3 del piano proiettivo $\mathbb{R}P^2$, oppure dimostrare che tale rivestimento non esiste.

– Sia $p : R \to X$ un rivestimento finito di grado n. Supponiamo $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z}$. Calcolare il gruppo fondamentale di R.

– Dimostrare che un rivestimento $p : R \to X$ è omeomorfismo se e solo se
$$p_*\pi_1(R, x_0) = \pi_1(X, x_0).$$

Numeri complessi; Limiti e continuità.

–Sia $z = 1 + i$, $w = 2 - i$, $\zeta = 4 + 3i$. Calcolare
a) $Re(\zeta^{-1}), Im(\zeta^{-1})$, b) $\frac{w}{z}$ c) $\zeta^2 + 2\overline{\zeta} + 3$

–Rappresentare in forma esponenziale $re^{i\theta}$ i numeri
a) $\sqrt{5} - i$, b) $\frac{\sqrt{2}}{1+i}$ c) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4$

– Trovare le radici
a) $\sqrt[3]{-i}$, b) $\sqrt[5]{1 - i}$ c) $\sqrt[7]{\frac{1}{1-i}}$

–Trovare i punti dove le funzioni sono continue

$$a) \qquad f(z) = \begin{cases} \frac{z^3+i}{z-i}, & z \neq i \\ -2 & z = i \end{cases}$$

$$b) \qquad f(z) = \begin{cases} \frac{z^4-1}{z-i}, & z \neq i \\ 4i & z = i \end{cases}$$

– Trovare i seguenti limiti all'infinito o spiegare perchè non esistono
a) $f(z) = \frac{1}{|z|-1}$, b) $h(z) = \frac{|z|}{z}$ c) $g(z) = \frac{4z^6-7z^3}{(z^2-4)^3}$

d) $h(z) = Arg(z)$ e) $g(z) = \frac{z^4-1}{z^3+3z+2}$

Serie. Serie di potenze.

– Siano $\sum_{k\geq 0} a_k$ e $\sum_{k\geq 0} b_k$ due serie di numeri complessi. Supponiamo le serie siano assolutamente convergenti e siano A e B le loro somme. Si dimostri che il prodotto di Cauchy $\sum_{n\geq 0} c_n$, dove $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ è assolutamente convergente a la sua somma è uguale a $A \cdot B$.

–Trovare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} k(z-1)^k$, b) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{3j}}{2^j}$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} 5^{(-1)^n} z^n$

–Trovare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k-1)!}(z-2)^k$, b) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$

– Supponiamo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ abbia raggio di convergenza $R > 0$. Suponiamo esista un $r \leq R$, $r > 0$ tale che $f(z) = 0$ per ogni $|z - z_0| < r$. Si dimostri che $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = \ldots = 0$.

– Se $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ e $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ hanno valori uguali in qualche disco $|z - z_0| < r$, $r > 0$, si dimostri che $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n, \ldots$.

– Trovare le somme infinite

a) $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$

– Siano $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ e $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ due serie di potenze convergenti nel disco $|z - z_0| < R$. Allora il prodotto di Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, dove $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ è convergente nello stesso disco e si ha $f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ per $|z - z_0| < R$.

Funzioni elementari.

– Si dimostri che valgono le seguenti identità:

a) $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \qquad \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

b) $\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \sin(z), \qquad \sin(\frac{\pi}{2} - z) = \cos(z)$

– Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione di variabile complessa. Un punto $z_0 \in A$ si dice zero di f se $f(z_0) = 0$. Trovare gli zeri delle funzioni $\sin(z)$ e $\cos(z)$.

– Siano

$$\begin{aligned} \sinh(z) &= \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = z + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \dots \\ \cosh(z) &= \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = 1 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \dots \end{aligned}$$

le estenzioni al piano complesso delle funzioni reali $\sinh(x)$ e $\cosh(x)$. Verificare le seguenti identità:

$$\sin(iz) = i\sinh(z), \qquad \cos(iz) = \cosh(z)$$

Trovare gli zeri delle funzioni $\sinh(z)$ e $\cosh(z)$.

– Sia $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Sia $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. Si dimostri che la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k \;=\; 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \cdots,$$

detta serie binomiale, ha raggio di convergenza 1.

– Sia $F_\alpha(z)$ la somma della serie binomiale. Si dimostri che vale l'identità

$$F'_\alpha(z) = \alpha \frac{F_\alpha(z)}{1+z}$$

Integrazione di funzioni a variabile complessa, Principio d'identità di funzioni olomorfe, Serie di Laurent

– Calcolare

$$a) \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^4}\, dz \qquad b) \quad \oint_{|z-1|=3} \frac{\sin(z+1)}{(z-1)^3}\, dz$$

– a) Si dimostri che invertendo $e^z = w$ si ottiene la funzione polidroma

$\log(w) = \ln(|w|) + i(Arg(w) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad Arg(w) \in [0, 2\pi)$

b) Si dimostri che la funzione

$$Log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots$$

soddisfa l'identità $e^{Log(1+z)} = 1 + z$. Quindi la funzione

$$Log(w) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(w-1)^n}{n}$$

è un ramo di $\log(w)$ nel disco $|w-1| < 1$.

– Si dimostri che la funzione binomiale $F_{\frac{1}{n}}(z)$ è un ramo della funzione polidroma $\sqrt[n]{1+z}$ nel disco $|z| < 1$, cioè:

$$\left[F_{\frac{1}{n}}(z)\right]^n = 1 + z$$

– Determinare la serie di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)}$$

in un intorno bucato di ciascuno dei due poli $z = 2$ e $z = 3$, specificando il massimo raggio di convergenza.

– Determinare la serie di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z}$$

nelle regioni:

1. $0 < |z| < 3$;
2. $|z - \frac{3}{2}| < \frac{3}{2}$.

– Trovare la parte principale e il residuo di ciascuna delle funzioni nel punto z_0.

a) $\frac{e^z-1}{z^2}$, $z_0 = 0$; b) $\frac{z^2}{z^2-1}$, $z_0 = 1$; c) $\frac{\sin z}{(z-\pi)^2}$, $z_0 = \pi$

– Trovare i poli e i residui della funzione

$$f(z) = \frac{1}{\sin^2(z)}.$$

Formula dei residui

– Calcolare gli integrali

$$\text{a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)(x^2+9)}\, dx \qquad \text{b)} \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

– Calcolare gli integrali

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+5}\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$

– Calcolare gli integrali

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,,\quad a,b>0$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

– Calcolare gli integrali

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx\quad(\alpha>0)$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^4+1}\,dx$

– Calcolare gli integrali

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+6x+10}\,dx,$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x+\alpha)^2+\beta^2}\,dx$

– Calcolare gli integrali

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2-\sin\theta)^2}$ b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+\beta\cos\theta)^2}\quad -1<\beta<1$

– Calcolare gli integrali

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1}\,dx\quad(a\geq 0)$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\ (a>b>0)$ d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{3+\cos\theta}d\theta$