

Geometria 3
A.A. 2012 – 2013
Esercizi

Omotopia di applicazioni continue.

- Si dimostri che lo spazio $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \geq 1\}$ è connesso.
- Siano x, y punti di uno spazio topologico X . Si dimostri che le applicazioni costanti $c_x : I \rightarrow X$ e $c_y : I \rightarrow X$ sono omotope se e solo se x e y appartengono alla stessa componente connessa per archi.
- Dimostrare che uno spazio X è contraibile se e solo se l'applicazione id_X è omotopa a un'applicazione costante di X in se stesso.
- Dimostrare che un sottospazio convesso di \mathbb{R}^n è contraibile. In particolare D^n, \overline{D}^n, I^n sono contraibili.
- Dimostrare che uno spazio contraibile è connesso per archi.
- Si dimostri che $f : S^{n-1} \rightarrow Y$ è omotopa ad un'applicazione costante $h : S^{n-1} \rightarrow \{p\} \in Y$ se e solo se f si estende ad un'applicazione continua $g : \overline{D}^n \rightarrow Y$.
- Si dimostri che $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}, D^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ e $\overline{D}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ sono spazi topologici omotopicamente equivalenti alla sfera S^{n-1} .
- Un sottospazio topologico $X \subset \mathbb{R}^n$ si dice stellato se esiste un punto $p \in X$ tale che per ogni $q \in X$ il segmento \overline{pq} è contenuto in X . Si dimostri che ogni insieme stellato è contraibile.

- Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un aperto convesso. Sia $p \in X$. Si dimostri che $X \setminus \{p\}$ è omotopicamente equivalente alla sfera S^{n-1} .
- Sia $\ell \subset \mathbb{R}^3$ una retta. Si dimostri che $\mathbb{R}^3 \setminus \ell$ è omotopicamente equivalente alla circonferenza S^1 .
- Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio affine di dimensione k . Si dimostri che $\mathbb{R}^n \setminus E$ è omotopicamente equivalente alla sfera S^{n-k-1} .
- Sia $B \subset \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme convesso. Sia X uno spazio topologico e sia $A \subset X$ un suo sottospazio. Siano $f : X \rightarrow B$ e $g : X \rightarrow B$ due applicazioni continue, tali che $f(a) = g(a)$ per $\forall a$. Si dimostri che f è omotopicamente equivalente a g relativamente ad A .

Gruppo fondamentale.

Nelle esercizi dove si richiede il calcolo del gruppo fondamentale bisogna dare una presentazione tramite generatori e relazioni ed esplicitamente descrivere i generatori.

- Si dimostri che il gruppo

$$\langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} = 1, x^n = 1, y^m = 1 \rangle$$

è isomorfo a $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.

- Si dimostri che il gruppo S_3 ha la presentazione

$$\langle x, y \mid x^2 = 1, y^3 = 3, xyx^{-1}y^{-2} = 1 \rangle .$$

Suggerimento. Si considerino gli elementi (12) e (123) del gruppo S_3 .

- Dimostrare che l'insieme $x \in \overline{D}^2$ tale che $\overline{D}^2 \setminus \{x\}$ è semplicemente connesso coincide con S^1 . Dedurre che se $f : \overline{D}^2 \rightarrow \overline{D}^2$ è un omeomorfismo, allora $f(S^1) = S^1$, $f(D^2) = D^2$.
- Esiste uno spazio topologico Y , tale che $S^1 \times Y$ è omeomorfo a S^2 , oppure a $\mathbb{R}P^2$?
- Siano (T_1, x_1) e (T_2, x_2) due tori. Si consideri il bouquet $X = T_1 \sqcup T_2 / x_1 \sim x_2$. Sia x_0 il punto identificato. Calcolare $\pi_1(X, x_0)$.
- Siano $x, y \in D^2$. Calcolare $\pi_1(D^2 \setminus \{x, y\}, x_0)$.
- Siano $x, y \in \mathbb{R}P^2$. Calcolare $\pi_1(\mathbb{R}P^2 \setminus \{x, y\}, x_0)$.
- Sia $M = T^2 \# \dots \# T^2$ (n volte) e sia $x \in M$. Calcolare $\pi_1(M \setminus \{x\}, x_0)$.
- Nell'esercizio precedente siano $x, y \in M$. Calcolare $\pi_1(M \setminus \{x, y\}, x_0)$.
- Calcolare il gruppo fondamentale di \mathbb{R}^3 privato di due rette parallele.
- Calcolare il gruppo fondamentale della sfera S^2 privata di tre punti distinti.
- Siano L_1, L_2, L_3 le tre assi coordinate di \mathbb{R}^3 . Calcolare $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L_1 \cup L_2 \cup L_3, x_0)$.
Suggerimento. Ridurre il problema ad un sottospazio di S^2 .
- Calcolare il gruppo fondamentale di \mathbb{R}^3 privato di due rette passanti per l'origine.

- Sia M una varietà topologica connessa di dimensione $n \geq 3$. Si dimostri che per ogni $q \in M$ si ha un isomorfismo $\pi_1(M \setminus \{q\}, x_0) \cong \pi_1(M, x_0)$ indotto dall'inclusione $M \setminus \{q\} \hookrightarrow M$.
- Sia M una varietà topologica connessa di dimensione $n \geq 3$. Siano q_1, \dots, q_m punti di M . Si dimostri che si ha un isomorfismo $\pi_1(M \setminus \{q_1, \dots, q_m\}, x_0) \cong \pi_1(M, x_0)$ indotto dall'inclusione $M \setminus \{q_1, \dots, q_m\} \hookrightarrow M$.
- Sia $X \subset \mathbb{R}^3$ l'unione di S^2 con il segmento $\{(0, 0, z) \mid -1 \leq z \leq 1\}$. Si calcoli $\pi_1(X, N)$, dove N è il polo nord. Descrivere esplicitamente il/i generatore/i del gruppo.
- Si calcoli il gruppo fondamentale del manico.
- Si calcoli il gruppo fondamentale del nastro di Moebius.

Rivestimenti.

- Si dimostri che l'applicazione $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ data di

$$p((x_0, x_1, \dots, x_n)) = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$$

è un rivestimento di grado 2.

- Si dimostri che se $p_1 : R_1 \rightarrow X_1$ e $p_2 : R_2 \rightarrow X_2$ sono rivestimenti, allora $p_1 \times p_2 : R_1 \times R_2 \rightarrow X_1 \times X_2$ è un rivestimento. Se p_1 e p_2 sono rivestimenti finiti di gradi d_1 e d_2 rispettivamente, quanto è il grado di $p_1 \times p_2$?
- Sia $p : R \rightarrow X$ un rivestimento finito di grado n . Si dimostri che R è compatto se e solo se X è compatto. Esistono rivestimenti infiniti con R compatto?

Negli esercizi seguenti si assume, se non scritto al contrario, che i rivestimenti sono applicazioni tra spazi topologici connessi e localmente connessi per archi.

- Si dimostri che se $p : R \rightarrow X$ è un rivestimento di grado n , allora il sottogruppo $p_*\pi_1(R, r_0)$ ha indice n in $\pi_1(X, x_0)$, dove $r_0 \in R$ è punto arbitrario e $x_0 = p(r_0)$.
- Costruire un rivestimento connesso di grado 3 del toro T^2 , oppure dimostrare che tale rivestimento non esiste.
- Costruire un rivestimento connesso di grado 3 del piano proiettivo $\mathbb{R}P^2$, oppure dimostrare che tale rivestimento non esiste.
- Sia $p : R \rightarrow X$ un rivestimento finito di grado n . Supponiamo $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z}$. Calcolare il gruppo fondamentale di R .
- Dimostrare che un rivestimento di spazi connessi per archi $p : R \rightarrow X$ è omeomorfismo se e solo se

$$p_*\pi_1(R, x_0) = \pi_1(X, x_0).$$

- Sia X uno spazio topologico semplicemente connesso. Sia $p : R \rightarrow X$ un rivestimento qualsiasi (R non si assume connesso). Si dimostri che R è omeomorfo ad una unione disgiunta di spazi topologici omeomorfi a X .
- Classificare i rivestimenti di grado 4 (non necessariamente connessi) di S^1 .

Curve nel piano e nello spazio.

^{-1*}La lunghezza, da $t = 0$ a $t = 9$, dell'arco di curva di equazioni parametriche: $x = 3t$ e $y = 2t^2$ è:

A) $\int_0^{81} \sqrt{9 - 16t^2} dt$

B) $\int_0^9 \sqrt{9 + 16t^2} dt$

C) $\int_0^9 \sqrt{9t^2 - 4t^4} dt$

D) $\int_0^9 \sqrt{9t^2 + 4t^4} dt$

– *La lunghezza, da $t = 0$ a $t = 2$, dell'arco di curva di equazioni parametriche: $x = \frac{1}{2}t^2$, $y = \frac{1}{9}(6t + 9)^{\frac{3}{2}}$ è uguale a:

A) 12

B) 14

C) 8

D) 10

– *La lunghezza dell'arco di catenaria $y = \cosh x$ da $x = 0$ a $x = \ln 2$ è

A) $1/4$

B) $2/3$

C) $3/4$

D) 1

– *Una particella si muove lungo il percorso descritto dalla curva di equazioni parametriche: $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$. La distanza percorsa per t compreso tra 0 e $\pi/2$ è uguale a:

¹Gli esercizi segnalati con * sono stati proposti alle prove di ammissione al TFA a.a.2011/2012.

- A) 0,75
- B) 0
- C) 1,50
- D) -3,50

– Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva avente curvatura costante $\kappa \neq 0$. Dimostrare che $\alpha(I)$ è contenuta in una circonferenza di raggio $\frac{1}{|\kappa|}$.

– Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare la cui immagine sia contenuta in una sfera di raggio r . Dimostrare che $\kappa(t) \geq \frac{1}{r}$ per ogni $t \in I$.

– Calcolare la curvatura della catenaria $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, $a > 0$.

– Determinare il raggio del cerchio osculatore della curva $\alpha(t) = (2t, \frac{1}{t}, -2t)$ in $(2, 1, -2)$.

– Determinare il raggio del cerchio osculatore della curva $\alpha(t) = (t^3, t^2, t)$ nel punto in cui $t = 1$.

– Calcolare l'apparato di Frenet, l'equazione del piano osculatore e le equazioni parametriche del cerchio osculatore della seguente curva nel punto indicato:

$$\alpha(t) = (\cos(t)^2, \cos(t), \sin(t)) \quad \text{in} \quad \alpha(0).$$

– Calcolare l'apparato di Frenet, l'equazione del piano osculatore e le equazioni parametriche del cerchio osculatore della seguente curva nel punto indicato:

$$\alpha(t) = (t, te^t, t^2e^t) \quad \text{in} \quad \alpha(0).$$

– Calcolare l'apparato di Frenet, l'equazione del piano osculatore e le equazioni parametriche del cerchio osculatore della seguente curva nel punto indicato:

$$\alpha(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}, \ln(t)\right) \quad \text{in} \quad \alpha(1).$$

– Calcolare l'apparato di Frenet della seguente curva in un punto generico:

$$\alpha(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}\right).$$

– Calcolare l'apparato di Frenet della seguente curva in un punto generico:

$$\alpha(t) = t(\cos t, \sin t, 1).$$

– Data la curva nello spazio $\alpha(t) = (at - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$:

(a) stabilire per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la curva è piana. Assegnato ad a tale valore, trovare l'equazione del piano che contiene la curva;

(b) posto $a = 3$, determinare la curvatura, la torsione e il triedro di Frenet in un generico punto di α .

– Data la curva nello spazio $\alpha(t) = (3t^2, 1 + 3t, at^3)$:

(a) stabilire per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la curva è piana. Assegnato ad a tale valore, trovare l'equazione del piano che contiene la curva;

(b) posto $a = 2$, determinare la curvatura, la torsione e il triedro di Frenet in un generico punto di α .

(c) Calcolare la lunghezza d'arco di curva compresa tra i punti $A(0, 1, 0)$ e $B(3, -2, -2)$.

Geometria differenziale delle superfici.

- Sia M l'elicoide $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv)$, $u > 0, v \in \mathbb{R}$.
 - (a) Calcolare la prima forma fondamentale di M .
 - (b) Calcolare l'area della porzione dell'elicoide $1 < u < 3$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

– Dimostrare che l'area della porzione della sfera compresa tra due paralleli dipende solo dalla distanza tra i piani che contengono i paralleli.

- Sia $x = a \cosh(\frac{z}{a})$ la curva catenaria nel piano Oxz , $a > 0$. Sia M la superficie di rotazione attorno all'asse delle z .

(a) Trovare una parametrizzazione regolare di M . Disegnare la superficie.

(b) Calcolare la prima forma fondamentale di M ;

(c) Calcolare l'area della porzione del catenoide compresa tra i piani $z = 1$ e $z = -1$.

Suggerimento. Utilizzare l'identità $\cosh^2(u) = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2u)$.

- *Nello spazio \mathbb{R}^3 sia S la superficie sferica di centro O e di raggio 1. Le rette nella geometria sferica sono per definizione le circonferenze di raggio massimo (quindi, le intersezioni di S con i piani che passano per O). Sia ABC un triangolo sferico non degenere su S . Se α, β, γ denotano gli angoli rispettivamente in A, B e C allora (indicare la risposta corretta tra (A),(B),(C) e (D)):

(A) $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

(B) $\alpha + \beta + \gamma$ non è un multiplo di π , ma è una costante indipendente della scelta del triangolo ABC

(C) $\alpha + \beta + \gamma$ è uguale all'area del triangolo ABC

(D) $\alpha + \beta + \gamma$ è sempre maggiore di π

– Sia $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 3\}$ e $\varphi : D \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, l'applicazione così definita:

$$\varphi(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2}).$$

Dimostrare che φ è una parametrizzazione regolare e in $\varphi(1, 1)$ calcolare curvatura media, curvatura gaussiana, curvature principali e piano tangente affine.

– Sia $U = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < s, t < \frac{\pi}{2}\}$ e

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(s, t) = (\sin(t), \cos(t) \cos(s), \sin(s)).$$

Dimostrare che φ è una parametrizzazione regolare e calcolare in $\varphi(0, 0)$ curvatura media, curvatura gaussiana, curvature principali e piano tangente affine.

– Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione

$$\varphi(u, v) = (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, v), \quad (u, v) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}.$$

(a) Dimostrare che φ è una parametrizzazione regolare. Di che superficie si tratta?

(b) Trovare la curvatura Gaussiana e media in un punto qualsiasi di M .

(c) Determinare le curvature principali e le direzioni principali di curvatura nel punto $P_0 = \varphi(0, 0)$.

(c) Calcolare la curvatura della sezione normale determinata dal punto $P_0 = \varphi(0, 0)$ e dal versore $\mathbf{e} = \frac{1}{2}(-\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k})$.

– Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione

$$\varphi(u, v) = (u, e^u \cos v, e^u \sin v) \quad (u, v) \in (-\infty, +\infty) \times (0, 2\pi).$$

(a) Dimostrare che φ è una parametrizzazione regolare. Di che superficie si tratta?

(b) Calcolare la curvatura Gaussiana e media in un punto qualsiasi di M .

(c) Calcolare la curvatura della sezione normale determinata dal punto $P_0 = \varphi(0, 0)$ e dal versore $\mathbf{e} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$.

– Sia $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | v > 0\}$ e sia M la superficie data dalla parametrizzazione

$$\varphi(u, v) = \left(u, \frac{v^2}{2}, \frac{u^2}{2} - \frac{v^3}{3}\right).$$

(a) Dimostrare che φ è una parametrizzazione regolare.

(b) Calcolare la curvatura Gaussiana e media in un generico punto di M . Classificare i punti di M .

(c) Trovare la curvatura della sezione normale determinata dal punto $P_0 = \varphi(1, 1)$ e dal versore $\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$.