Geometria 3
A.A. 2014 – 2015
Esercizi

Omotopia di applicazioni contiue. Equivalenza omotopica.

– Si dimostri che lo spazio $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : \quad ||x|| \geq 1\}$ è connesso.

– Si dimostri che lo spazio topologico

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 - z^2 = 1,\ |z| \leq 1\}.$$

è connesso.

– Si dimostri che l'intervallo $X = (a, b) \subset \mathbb{R}^1$ non è omeomorfo al disco aperto $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 < 1\}$.

– Siano x, y punti di uno spazio topologico X. Si dimostri che le applicazioni costanti $c_x : I \to X$ e $c_y : I \to X$ sono omotope se e solo se x e y appartengono alla stessa componente connessa per archi.

– Dimostrare che uno spazio X è contraibile se e solo se l'applicazione id_X è omotopa a un'applicazione costante di X in se stesso.

– Dimostrare che un sotospazio convesso di $\mathbb{R}^n$ è contraibile. In particolare $D^n, \overline{D}^n, I^n$ sono contraibili.

– Dimostrare che uno spazio contraibile è connesso per archi.

– Si dimostri che $\mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$, $D^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ e $\overline{D}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ sono spazi topologici omotopicamente equivalenti alla sfera S^{n-1}.

– Un sottospazio topologico $X \subset \mathbb{R}^n$ si dice stellato se esiste un punto $p \in X$ tale che per ogni $q \in X$ il segmento $\overline{pq}$ è contenuto in X. Si dimostri che ogni insieme stellato è contraibile.

– Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un aperto convesso. Sia $p \in X$. Si dimostri che $X \backslash \{p\}$ è omotopicamente equivalente alla sfera S^{n-1}.

– Sia $\ell \subset \mathbb{R}^3$ una retta. Si dimostri che $\mathbb{R}^3 \backslash \ell$ è omotopicamente equivalente alla circonferenza S^1.

– Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio affine di dimensione k. Si dimostri che $\mathbb{R}^n \backslash E$ è omotopicamente equivalente alla sfera S^{n-k-1}.

– Sia $B \subset \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme convesso. Sia X uno spazio topologico e sia $A \subset X$ un suo sottospazio. Siano $f : X \to B$ e $g : X \to B$ due applicazioni continue, tali che $f(a) = g(a)$ per $\forall a$. Si dimostri che f è omotopicamente equivalente a g relativamente ad A.

Gruppo fondamentale.

Nelle esercizi dove si richiede il calcolo del gruppo fondamentale bisogna dare una presentazione tramite generatori e relazioni ed esplicitamente descrivere i generatori.

– Si dimostri che il gruppo

$$< x, y | xyx^{-1}y^{-1} = 1, x^n = 1, y^m = 1 >$$

è isomorfo a $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.

– Si dimostri che il gruppo

$$< a, b, c | aba^{-1}b^{-1}c = 1 >$$

è isomorfo al gruppo libero $F < a, b >$.

– Dimostrare che l'insieme $x \in \overline{D}^2$ tale che $\overline{D}^2 \backslash \{x\}$ è semplicemente connesso coincide con S^1. Dedurre che se $f : \overline{D}^2 \to \overline{D}^2$ è un omeomorfismo, allora $f(S^1) = S^1$, $f(D^2) = D^2$.

– Esiste uno spazio topologico Y, tale che $S^1 \times Y$ è omeomorfo a S^2, oppure a $\mathbb{R}P^2$?

– Siano (T_1, x_1) e (T_2, x_2) due tori. Si consideri il bouquet $X = T_1 \sqcup T_2 / x_1 \sim x_2$. Sia x_0 il punto identificato. Calcolare $\pi_1(X, x_0)$.

– Siano $x, y \in D^2$. Calcolare $\pi_1(D^2 \backslash \{x, y\}, x_0)$.

– Sia M una sfera con g manici e sia $x \in M$. Calcolare $\pi_1(M \backslash \{x\}, x_0)$.

– Nell'esercizio precedente siano $x, y \in M$. Calcolare $\pi_1(M \backslash \{x, y\}, x_0)$.

– Siano $x, y \in \mathbb{R}P^2$. Calcolare $\pi_1(\mathbb{R}P^2 \backslash \{x, y\}, x_0)$.

– Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3$ privato di due rette parallele.

– Calcolare il gruppo fondamentale della sfera S^2 privata di tre puni distinti.

– Siano L_1, L_2, L_3 le tre assi coordinate di $\mathbb{R}^3$. Calcolare $\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash L_1 \cup L_2 \cup L_3, x_0)$.

Suggerimento. Ridurre il problema ad un sottospazio di S^2.

– Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3$ privato di due rette passanti per l'origine.

– Sia M una varietà topologica connessa di dimensione $n \geq 3$. Si dimostri che per ogni $q \in M$ si ha un isomorfismo $\pi_1(M \backslash \{q\}, x_0) \cong \pi_1(M, x_0)$ indotto dall'inclusione $M \backslash \{q\} \hookrightarrow M$.

– Sia M una varietà topologica connessa di dimensione $n \geq 3$. Siano $q_1, \ldots, q_m$ punti di M. Si dimostri che si ha un isomorfismo $\pi_1(M \backslash \{q_1, \ldots, q_m\}, x_0) \cong \pi_1(M, x_0)$ indotto dall'inclusione $M \backslash \{q_1, \ldots, q_m\} \hookrightarrow M$.

– Sia $X \subset \mathbb{R}^3$ l'unione di S^2 con il segmento $\{(0, 0, z) | -1 \leq z \leq 1\}$. Si calcoli $\pi_1(X, N)$, dove N è il polo nord. Descrivere esplicitamente il/i generatore/i del gruppo.

– Si calcoli il gruppo fondamentale del manico.

– Si calcoli il gruppo fondamentale del nastro di Moebius.

Rivestimenti.

– Si dimostri che l'applicazione $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ data di

$$p((x_0, x_1, \ldots, x_n)) = (x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$$

è un rivestimento di grado 2.

– Si dimostri che se $p_1 : R_1 \to X_1$ e $p_2 : R_2 \to X_2$ sono rivestimenti, allora $p_1 \times p_2 : R_1 \times R_2 \to X_1 \times X_2$ è un rivestimento. Se p_1 e p_2 sono rivestimenti finiti di gradi d_1 e d_2 rispettivamente, quanto è il grado di $p_1 \times p_2$?

– Sia $p : R \to X$ un rivestimento finito di grado n. Si dimostri che R è compatto se e solo se X è compatto. Esistono rivestimenti infiniti con R compatto?

Negli esercizi seguenti si assume, se non scritto al contrario, che i rivestimenti sono applicazioni tra spazi topologici connessi e localmente connessi per archi.

– Si dimostri che se $p : R \to X$ è un rivestimento di grado n, allora il sottogruppo $p_*\pi_1(R, r_0)$ ha indice n in $\pi_1(X, x_0)$, dove $r_0 \in R$ è punto arbitrario e $x_0 = p(r_0)$.

– Costruire un rivestimento connesso di grado 3 del toro T^2 , oppure dimostrare che tale rivestimento non esiste.

– Costruire un rivestimento connesso di grado 3 del piano proiettivo $\mathbb{R}P^2$, oppure dimostrare che tale rivestimento non esiste.

– Si calcolino i grupppi fondamentali degli spazi proiettivi $\mathbb{R}P^n$, $n \geq 1$.

– Sia $p : R \to X$ un rivestimento finito di grado n. Supponiamo $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z}$. Calcolare il gruppo fondamentale di R.

– Dimostrare che un rivestimento di spazi connessi per archi $p : R \to X$ è omeomorfismo se e solo se

$$p_*\pi_1(R, x_0) = \pi_1(X, x_0).$$

– Quanti rivestimenti connessi non equivalenti possiede lo spazio topologico $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$?

– Classificare i rivestimenti connessi di grado 3 dello spazio topologico $S^1 \times \mathbb{R}P^2$.

– Siano $x, y \in \mathbb{R}P^3$ due punti. Classificare i rivestimenti connessi dello spazio topologico $X = \mathbb{R}P^3 \setminus \{x, y\}$.

Curve nel piano e nello spazio.

–[1]*La lunghezza, da $t = 0$ a $t = 9$, dell'arco di curva di equazioni parametriche: $x = 3t$ e $y = 2t^2$ è:

A) $\int_0^{81} \sqrt{9 - 16t^2}dt$

B) $\int_0^{9} \sqrt{9 + 16t^2}dt$

C) $\int_0^{9} \sqrt{9t^2 - 4t^4}dt$

D) $\int_0^{9} \sqrt{9t^2 + 4t^4}dt$

– *La lunghezza, da $t = 0$ a $t = 2$, dell'arco di curva di equazioni parametriche: $x = \frac{1}{2}t^2$, $y = \frac{1}{9}(6t + 9)^{\frac{3}{2}}$ è uguale a:

A) 12

B) 14

C) 8

D) 10

– *La lunghezza dell'arco di catenaria $y = \cosh x$ da $x = 0$ a $x = \ln 2$ è

A) 1/4

B) 2/3

C) 3/4

D) 1

[1]Gli esercizi segnalati con * sono stati proposti alle prove di ammissione al TFA a.a.2011/2012.

– *Una particella si muove lungo il percorso descritto dalla curva di equazioni parametriche: $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$. La distanza percorsa per t compreso tra 0 e $\pi/2$ e uguale a:

A) 0,75

B) 0

C) 1,50

D) -3,50

– Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva avente curvatura costante $\kappa \neq 0$. Dimostrare che il sostegno $\alpha(I)$ è contenuto in una circonferenza di raggio $\frac{1}{|\kappa|}$.

– Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare avente curvatura non nulla in ogni punto. Supponiamo che la sua immagine sia contenuta in una sfera di raggio r. Dimostrare che $\kappa(t) \geq \frac{1}{r}$ per ogni $t \in I$.

– Calcolare la curvatura della catenaria $y = a \cosh(\frac{x}{a})$, $a > 0$.

– Per ciascuna delle seguenti due curve parametrizzate rispondere se il loro supporto è contenuto in una retta o no. Motivare la risposta.

a) $\alpha(t) = (t^2 - t, 3t^2 - 3t - 2, 2t^2 - 2t + 1)$

b) $\beta(t) = (t^2 - 1, 3t^2 - 5, 2t^2 - t)$

– Determinare il raggio del cerchio osculatore della curva $\alpha(t) = (2t, \frac{1}{t}, -2t)$ in $(2, 1, -2)$.

– Determinare il raggio del cerchio osculatore della curva $\alpha(t) = (t^3, t^2, t)$ nel punto in cui $t = 1$.

– Calcolare l'apparato di Frenet, l'equazione del piano osculatore, il raggio e il centro del cerchio osculatore della seguente curva nel punto indicato:

$$\alpha(t) = (\cos(t)^2, \cos(t), \sin(t)) \quad \text{nel punto in cui } t = 0.$$

– Calcolare l'apparato di Frenet, l'equazione del piano osculatore, il raggio e il centro del cerchio osculatore della seguente curva nel punto indicato:

$$\alpha(t) = (t, te^t, t^2e^t) \quad \text{nel punto in cui } t = 0.$$

– Calcolare l'apparato di Frenet, l'equazione del piano osculatore, il raggio e il centro del cerchio osculatore della seguente curva nel punto indicato:

$$\alpha(t) = (\frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}, \ln(t)) \quad \text{nel punto in cui } t = 1.$$

– Calcolare l'apparato di Frenet della seguente curva in un punto generico:

$$\alpha(t) = (t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}).$$

– Calcolare l'apparato di Frenet della seguente curva in un punto generico:

$$\alpha(t) = t(\cos t, \sin t, 1).$$

– Data la curva nello spazio $\alpha(t) = (at - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$:

(a) stabilire per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la curva è piana. Assegnato ad a tale valore, trovare l'equazione del piano che contiene la curva;

(b) posto $a = 3$, determinare la curvatura, la torsione e il triedro di Frenet in un generico punto di α;

(c) dimostrare che la curva della parte (b) è un'elica generalizzata e trovare il suo asse.

– Data la curva nello spazio $\alpha(t) = (3t^2, 1 + 3t, at^3)$:

(a) stabilire per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la curva α è rispettivamente: i) piana, ii) un'elica generalizzata.

(b) trovati i valori di a per i quali la curva è piana, per ciascun tale valore trovare l' equazione del piano corrispondente che contiene la curva;

(c) posto $a = 2$, determinare la curvatura, la torsione e il triedro di Frenet in un generico punto di α.

(d) Calcolare la lunghezza dell'arco di curva compreso tra i punti $A(0, 1, 0)$ e $B(3, -2, -2)$.

– Data la curva nello spazio $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, \cos at)$ stabilire per quali valori di a la curva è piana. Quali curve si trovano in questo caso?

– Data la curva nello spazio $\alpha(t) = (e^{at}, e^{-t}, \sqrt{2}t)$

(a) stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la curva è piana.

(b) Posto $a = 1$ determinare la curvatura e la torsione di α in un punto generico. Di che curva si tratta?

Geometria differenziale delle superfici.

– Sia M l'elicoide $\varphi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, bv)$, $u > 0, v \in \mathbb{R}$.

(a) Calcolare la prima forma fondamentale di M.

(b) Calcolare l'area della porzione dell'elicoide $1 < u < 3$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

– Dimostrare che l'area della porzione della sfera compresa tra due paralleli dipende solo dalla distanza tra i piani che contengono i paralleli.

– Sia $x = a\cosh(\frac{z}{a})$ la curva catenaria nel piano Oxz, $a > 0$. Sia M la superficie di rotazione attorno all'asse delle z.

(a) Trovare una parametrizzazione regolare di M. Disegnare la superficie.

(b) Calcolare la prima forma fondamentale di M;

(c) Calcolare l'area della porzione del catenoide compresa tra i piani $z = 1$ e $z = -1$.

Suggerimento. Utilizare l'identità $\cosh^2(u) = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2u)$.

– *Nello spazio $\mathbb{R}^3$ sia S la superficie sferica di centro O e di raggio 1. Le rette nella geometria sferica sono per definizione le circonferenze di raggio massimo (quindi, le intersezioni di S con i piani che passano per O). Sia ABC un triangolo sferico non degenere su S. Se α, β, γ denotano gli angoli rispettivamente in A, B e C allora (indicare la risposta corretta tra (A),(B),(C) e (D)):

(A) $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

(B) $\alpha + \beta + \gamma$ non è un multiplo di π, ma è una costante indipendente della scelta del triangolo ABC

(C) $\alpha + \beta + \gamma$ è uguale all'area del triangolo ABC

(D) $\alpha + \beta + \gamma$ è sempre maggiore di π

– Sia $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 3\}$ e $\varphi : D \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^3$, l'applicazione cosi definita:

$$\varphi(u,v) = (u, v, \sqrt{u^2+v^2}).$$

Dimostrare che φ è una parametrizzazione regolare e in $\varphi(1,1)$ calcolare curvatura media, curvatura gaussiana, curvature principali e piano tangente affine.

– Sia $U = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 | -\frac{\pi}{2} < s, t < \frac{\pi}{2}\}$ e

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(s,t) = (\sin(t), \cos(t)\cos(s), \sin(s)).$$

Dimostrare che φ è una parametrizzazione regolare e calcolare in $\varphi(0,0)$ curvatura media, curvatura gaussiana, curvature principali e piano tangente affine.

– Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione

$$\varphi(u,v) = (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, v), \ (u,v) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}.$$

(a) Dimostrare che φ è una parametrizzazione regolare. Di che superficie si tratta?

(b) Trovare le curvature Gaussiana e media in un punto qualsiasi di M.

(c) Determinare le curvature principali e le direzioni principali di curvatura nel punto $P_0 = \varphi(0,0)$.

(d) Se α_H e la sezione normale determinata dal punto $P_0 = \varphi(0,0)$ e dal versore $\mathbf{e} = \frac{1}{2}(-\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k})$ calcolare la curvatura di α_H nel punto P_0.

– Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione

$$\varphi(u,v) = (u, e^u \cos v, e^u \sin v) \quad (u,v) \in (-\infty, +\infty) \times (0, 2\pi).$$

(a) Dimostrare che φ è una parametrizzazione regolare. Di che superficie si tratta?

(b) Calcolare la curvatura Gaussiana e media in un punto qualsiasi di M.

(c) Determinare le curvature principali e le direzioni principali di curvatura nel punto $P_0 = \varphi(0,0)$.

(d) Se α_H e la sezione normale determinata dal punto $P_0 = \varphi(0,0)$ e dal versore $\mathbf{e} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$ calcolare la curvatura di α_H nel punto P_0.

– Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione locale

$$\varphi(u,v) = (u, \frac{v^2}{2}, \frac{u^2}{2} - \frac{v^3}{3}) \quad (u,v) \in D.$$

(a) Dopo aver determinato D in modo tale che la superficie sia regolare, calcolare le curvature Gaussiana e media in un generico punto di M. Classificare i punti di M.

(b) Se α_H e la sezione normale determinata dal punto $P_0 = \varphi(1,1)$ e dal versore $\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ calcolare la curvatura di α_H nel punto P_0.