Geometria 3
A.A. 2015 – 2016
Esercizi

Irriducibilità di polinomi di più variabili. Risultante. Discriminante.

– Si dimostri che il polinomio di Fermat

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^d + \cdots + x_n^d$$

è irriducibile in $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ per $n \geq 3$.

– Sia k un campo. Si dimostri che un polinomio $f(x) \in k[x]$ di grado ≤ 3 è riducibile se e solo se $f(x)$ possiede almeno uno zero in k.

– Sia $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio di grado dispari. Si dimostri che $F(x, y) = y^2 - f(x)$ è irriducibile in $\mathbb{C}[x, y]$. È vera la stessa affermazione se $f(x)$ è di grado pari?

– Si dimostri che il polinomio $f(x, y) = xy^3 - (x + 1)^4$ è irriducibile in $\mathbb{C}[x, y]$.

– Si dimostri che il polinomio $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$ è irriducibile in $\mathbb{C}[x, y]$.

– Si dimostri che il polinomio $f(x, y) = x^2y + x^5 + 1$ è irriducibile in $\mathbb{C}[x, y]$.

– Si dimostri che il risultante dei polinomi $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ e $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ è uguale a

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

– Risolvere il sistema

$$\begin{aligned} f(x,y) &= y^2 - 7xy + 4x^2 + 13x - 2y - 3 = 0 \\ g(x,y) &= y^2 - 14xy + 9x^2 + 28x - 4y - 5 = 0 \end{aligned}$$

– Escludere x dal sistema

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= 0 \\ x^2y + xy^2 &= 6 \end{aligned}$$

– Si verifichino le seguenti formule:

$$\text{se} \quad f(x) = Ax^2 + Bx + C, \quad \text{allora} \quad \Delta(f) = B^2 - 4AC$$

$$\text{se} \quad f(x) = x^3 + px + q, \quad \text{allora} \quad \Delta(f) = -(4p^3 + 27q^2)$$

– Trovare i valori di λ per i quali i seguenti polinomi hanno radici multiple

(a) $x^3 - 3x + \lambda$
(b) $x^3 + 3x^2 + (3 - 3\lambda)x - 3\lambda + 3$
(c) $x^4 - 4x + \lambda$

Curve algebriche piane.

Si assume, se non detto al contrario, che il campo base k è algebricamente chiuso di caratteristica 0.

– Si dimostri che se una curva affine C di grado n di equazione $f(x, y) = 0$ ha supporto $V(f)$ uquale a una retta di equazione $ax + by + c = 0$, allora $f(x, y) = r(ax + by + c)^n$, dove r è una costante.

– Trovare i punti impropri della cubica $y^2 = x^3 + ax + b$.

– Trovare i punti impropri della curva iperellittica $y^2 = f(x)$, dove $f(x)$ è un polinomio di grado $n \geq 2$.

– Si dimostri che una curva affine di grado n possiede al massimo n punti impropri.

– Supponiamo che $f(x, y) \in k[x, y]$ sia un polinomio che non dipende da y, $f(x, y) = h(x)$. Si dimostri che la curva di equazione $f(x, y) = 0$ è una somma di rette.

– Si dimostri che se due curve hanno una componente in comune, esse hanno infiniti punti in comune.

– Siano A, B, M e N quattro matrici complesse del tipo $n \times n$. Siano u e v parametri complessi. Si dimostri che esiste almeno una coppia $(u_0, v_0) \neq (0, 0)$, tale che le matrici $u_0A + v_0B$ e $u_0M + v_0N$ hanno un autovalore in comune.

Studio locale delle curve algebriche piane.

– Sia C la curva affine di equazione $y^2 = f(x)$, dove $gr(f) \geq 3$. Si dimostri che C è non singolare se e solo se il discriminate $\Delta(f) \neq 0$.

– Si dimostri che la curva di Fermat $C \subset \mathbb{P}^2$ di equazione $x_0^n + x_1^n + x_2^n = 0$ è non singolare.

– Sia C la curva affine di equazione $y^2 = f(x)$, dove $gr(f) \geq 4$. Si dimostri che la sua chiusura proiettiva C^* possiede un unico punto improprio e che questo punto è singolare.

– Si dimostri che se una curva piana proiettiva è non singolare essa è irriducibile. È vera la stessa affermazione per le curve affini?

– Trovare le rette tangenti principali alla curva di equazione $y^2 = x^2(x-1)$ nel punto $(0,0)$.

– Trovare eventuali assintoti delle coniche $y^2 = 2px$ e $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

– Si dimostri che se il campo base k è algebricamente chiuso di caratteristica 0, allora ogni curva piana ridotta C possiede finiti punti singolari.

– Dimostrare l'affermazione dell'esercizio precedente se il campo base k è algebricamente chiuso di caratteristica $p > 0$.

Suggerimento: Ridurre al caso di curve irridicibili.

– Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ si considerino le curve di equazioni:

a. $y^2(x-2y)-(x^2+y^2)=0$

b. $(x-y)^3+x^2-y^2-4x=0$

c. $x^2(x^2-y^2)-4x^2y+y^3=0$

d. $x^2y^2-x^3-y^3-xy=0$

e. $y^2+x^4+x^5=0$

f. $y-4x^2-x^5=0$

Di ognuna di esse studiare le proprietà locali nell'origine e all'infinito.

– Si consideri la curva C di equazione

$$f(x,y)=x^3+xy^2+x^2+2y^2-x-1=0.$$

Si dimostri che C è irriducibile. Trovare e classificare i punti singolari di C. Studiare le proprietà locali di C all'infinito.

Curve nel piano e nello spazio.

–[1]*La lunghezza, da $t = 0$ a $t = 9$, dell'arco di curva di equazioni parametriche: $x = 3t$ e $y = 2t^2$ è:

A) $\int_0^{81} \sqrt{9 - 16t^2} dt$

B) $\int_0^{9} \sqrt{9 + 16t^2} dt$

C) $\int_0^{9} \sqrt{9t^2 - 4t^4} dt$

D) $\int_0^{9} \sqrt{9t^2 + 4t^4} dt$

– *La lunghezza, da $t = 0$ a $t = 2$, dell'arco di curva di equazioni parametriche: $x = \frac{1}{2}t^2$, $y = \frac{1}{9}(6t + 9)^{\frac{3}{2}}$ è uguale a:

A) 12

B) 14

C) 8

D) 10

– *La lunghezza dell'arco di catenaria $y = \cosh x$ da $x = 0$ a $x = \ln 2$ è

A) 1/4

B) 2/3

C) 3/4

D) 1

[1]Gli esercizi segnalati con * sono stati proposti alle prove di ammissione al TFA a.a.2011/2012.

– *Una particella si muove lungo il percorso descritto dalla curva di equazioni parametriche: $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$. La distanza percorsa per t compreso tra 0 e $\pi/2$ e uguale a:

A) 0,75

B) 0

C) 1,50

D) -3,50

– Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva avente curvatura costante $\kappa \neq 0$. Dimostrare che il sostegno $\alpha(I)$ è contenuto in una circonferenza di raggio $\frac{1}{|\kappa|}$.

– Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare avente curvatura non nulla in ogni punto. Supponiamo che la sua immagine sia contenuta in una sfera di raggio r. Dimostrare che $\kappa(t) \geq \frac{1}{r}$ per ogni $t \in I$.

– Sia $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ una curva differenziabile a velocità unitaria. Ponendo $\beta_1(s) = \beta(-s)$ si consideri la curva $\beta_1 : -J \to \mathbb{R}^3$. Si dimostri la seguente relazione tra gli apparati di Frenet delle curve β e β_1:

$$(T_1(s), N_1(s), B_1(s), \kappa_1(s), \tau_1(s)) = (-T(-s), N(-s), -B(-s), \kappa(-s), \tau(-s)).$$

– Calcolare la curvatura della catenaria $y = a\cosh(\frac{x}{a})$, $a > 0$.

– Per ciascuna delle seguenti due curve parametrizzate rispondere se il loro supporto è contenuto in una retta o no. Motivare la risposta.

a) $\alpha(t) = (t^2 - t, 3t^2 - 3t - 2, 2t^2 - 2t + 1)$

b) $\beta(t) = (t^2 - 1, 3t^2 - 5, 2t^2 - t)$

– Determinare il raggio del cerchio osculatore della curva $\alpha(t) = (2t, \frac{1}{t}, -2t)$ in $(2, 1, -2)$.

– Determinare il raggio del cerchio osculatore della curva $\alpha(t) = (t^3, t^2, t)$ nel punto in cui $t = 1$.

– Calcolare l'apparato di Frenet, l'equazione del piano osculatore, il raggio e il centro del cerchio osculatore della seguente curva nel punto indicato:

$$\alpha(t) = (\cos(t)^2, \cos(t), \sin(t)) \quad \text{nel punto in cui } t = 0.$$

– Calcolare l'apparato di Frenet, l'equazione del piano osculatore, il raggio e il centro del cerchio osculatore della seguente curva nel punto indicato:

$$\alpha(t) = (t, te^t, t^2e^t) \quad \text{nel punto in cui } t = 0.$$

– Calcolare l'apparato di Frenet, l'equazione del piano osculatore, il raggio e il centro del cerchio osculatore della seguente curva nel punto indicato:

$$\alpha(t) = (\frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}, \ln(t)) \quad \text{nel punto in cui } t = 1.$$

– Calcolare l'apparato di Frenet della seguente curva in un punto generico:

$$\alpha(t) = (t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}).$$

– Calcolare l'apparato di Frenet della seguente curva in un punto generico:

$$\alpha(t) = t(\cos t, \sin t, 1).$$

– Determinare la curvatura e l'evoluta dell'ellisse $x = 2\cos t$, $y = \sin t$.

– Determinare i valori massimo e minimo della curvatura dell'ellisse

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t \quad \text{dove} \quad a > b > 0.$$

– Data la curva nello spazio $\alpha(t) = (at - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$:

(a) stabilire per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la curva è piana. Assegnato ad a tale valore, trovare l'equazione del piano che contiene la curva;

(b) posto $a = 3$, determinare la curvatura, la torsione e il triedro di Frenet in un generico punto di α;

– Data la curva nello spazio $\alpha(t) = (3t^2, 1 + 3t, at^3)$:

(a) stabilire per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la curva α è piana

(b) trovati i valori di a per i quali la curva è piana, per ciascun tale valore trovare l' equazione del piano corrispondente che contiene la curva;

(c) posto $a = 2$, determinare la curvatura, la torsione e il triedro di Frenet in un generico punto di α.

(d) Calcolare la lunghezza dell'arco di curva compreso tra i punti $A(0, 1, 0)$ e $B(3, -2, -2)$.

– Data la curva nello spazio $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, \cos at)$ stabilire per quali valori di a la curva è piana. Quali curve si trovano in questo caso?

– Data la curva nello spazio $\alpha(t) = (e^{at}, e^{-t}, \sqrt{2}t)$

(a) stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la curva è piana.

(b) Posto $a = 1$ determinare la curvatura e la torsione di α in un punto generico.

Geometria differenziale delle superfici.

– Sia M l'elicoide $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv)$, $u > 0, v \in \mathbb{R}$.

(a) Calcolare la prima forma fondamentale di M.

(b) Calcolare l'area della porzione dell'elicoide $1 < u < 3$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

– Dimostrare che l'area della porzione della sfera compresa tra due paralleli dipende solo dalla distanza tra i piani che contengono i paralleli.

– Sia $x = a \cosh(\frac{z}{a})$ la curva catenaria nel piano Oxz, $a > 0$. Sia M la superficie di rotazione attorno all'asse delle z.

(a) Trovare una parametrizzazione regolare di M. Disegnare la superficie.

(b) Calcolare la prima forma fondamentale di M;

(c) Calcolare l'area della porzione del catenoide compresa tra i piani $z = 1$ e $z = -1$.

Suggerimento. Utilizare l'identità $\cosh^2(u) = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2u)$.

– *Nello spazio $\mathbb{R}^3$ sia S la superficie sferica di centro O e di raggio 1. Le rette nella geometria sferica sono per definizione le circonferenze di raggio massimo (quindi, le intersezioni di S con i piani che passano per O). Sia ABC un triangolo sferico non degenere su S. Se α, β, γ denotano gli angoli rispettivamente in A, B e C allora (indicare la risposta corretta tra (A),(B),(C) e (D)):

(A) $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

(B) $\alpha + \beta + \gamma$ non è un multiplo di π, ma è una costante indipendente della scelta del triangolo ABC

(C) $\alpha + \beta + \gamma$ è uguale all'area del triangolo ABC

(D) $\alpha + \beta + \gamma$ è sempre maggiore di π

– Sia $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 3\}$ e $\varphi : D \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^3$, l'applicazione cosi definita:

$$\varphi(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2}).$$

Dimostrare che φ è una parametrizzazione regolare e in $\varphi(1, 1)$ calcolare curvatura media, curvatura gaussiana, curvature principali e piano tangente affine.

– Sia S la superficie descritta dalla parametrizzazione

$$\varphi(u, v) = (uv^2, v^3, u^2v), \quad (u, v) \in (0, \infty) \times (0, \infty).$$

(a) Mostrare che φ è una parametrizzazione regolare.

(b) Classificare i punti di M.

(c) Determinare l'angolo delle linee coordinate di S per il punto $Q = \varphi(1, 1)$.

(d) Determinare le direzioni asintotiche e le direzioni principali nel punto Q.

– Sia $U = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 | -\frac{\pi}{2} < s,t < \frac{\pi}{2}\}$ e

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(s,t) = (\sin(t), \cos(t)\cos(s), \sin(s)).$$

Dimostrare che φ è una parametrizzazione regolare e calcolare in $\varphi(0,0)$ curvatura media, curvatura gaussiana, curvature principali e piano tangente affine.

– Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione

$$\varphi(u,v) = (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, v), \ (u,v) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}.$$

(a) Dimostrare che φ è una parametrizzazione regolare. Di che superficie si tratta?

(b) Trovare le curvature Gaussiana e media in un punto qualsiasi di M.

(c) Determinare le curvature principali e le direzioni principali di curvatura nel punto $P_0 = \varphi(0,0)$.

(d) Se α_H e la sezione normale determinata dal punto $P_0 = \varphi(0,0)$ e dal versore $\mathbf{e} = \frac{1}{2}(-\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k})$ calcolare la curvatura di α_H nel punto P_0.

– Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione

$$\varphi(u,v) = (u, e^u \cos v, e^u \sin v) \quad (u,v) \in (-\infty, +\infty) \times (0, 2\pi).$$

(a) Dimostrare che φ è una parametrizzazione regolare. Di che superficie si tratta?

(b) Calcolare la curvatura Gaussiana e media in un punto qualsiasi di M.

(c) Determinare le curvature principali e le direzioni principali di curvatura nel punto $P_0 = \varphi(0,0)$.

(d) Se α_H e la sezione normale determinata dal punto $P_0 = \varphi(0,0)$ e dal versore $\mathbf{e} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$ calcolare la curvatura di α_H nel punto P_0.

– Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione locale

$$\varphi(u,v) = (u, \frac{v^2}{2}, \frac{u^2}{2} - \frac{v^3}{3}) \quad (u,v) \in D.$$

(a) Dopo aver determinato D in modo tale che la superficie sia regolare, calcolare le curvature Gaussiana e media in un generico punto di M. Classificare i punti di M.

(b) Se α_H e la sezione normale determinata dal punto $P_0 = \varphi(1,1)$ e dal versore $\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ calcolare la curvatura di α_H nel punto P_0.