

**Geometria 3**  
**A.A. 2020 – 2021**  
**Esercizi**

**Irriducibilità di polinomi di più variabili. Risultante. Discriminante. Curve piane. Teorema di Bézout.**

Negli esercizi, se non è specificato il campo base, esso si assume  $k = \mathbb{C}$ .

1. Sia  $f(x) \in \mathbb{C}[x]$  un polinomio di grado dispari. Si dimostri che  $F(x, y) = y^2 - f(x)$  è irriducibile in  $\mathbb{C}[x, y]$ . È vera la stessa affermazione se  $f(x)$  è di grado pari?
2. Si dimostri che il polinomio  $f(x, y) = xy^3 - (x + 1)^4$  è irriducibile in  $\mathbb{C}[x, y]$ .
3. Si dimostri che il polinomio  $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$  è irriducibile in  $\mathbb{C}[x, y]$ .
4. Sia  $k$  un campo di caratteristica  $\text{char}(k) \neq 2$ . Siano  $a(x), b(x)$  e  $c(x)$  tre polinomi di  $k[x]$ . Si dimostri che  $f(x, y) = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \in k[x, y]$  è irriducibile se e solo se  $a(x), b(x)$  e  $c(x)$  non hanno fattori non costanti in comune e il discriminante  $\Delta(x) = b(x)^2 - 4a(x)c(x)$  non sia un quadrato in  $k[x]$ .
5. Si dimostri che il polinomio  $y^4 + x^3 + x^2 - 2x$  è irriducibile in  $\mathbb{C}[x, y]$ .
6. Stabilire se il polinomio  $x^4 + x^2y + (x + 1)y^2$  è irriducibile o meno in  $\mathbb{C}[x, y]$ .

7. Si dimostri che l'applicazione di omogeneizzazione  $f(x, y) \mapsto F(x_0, x_1, x_2) = x_0^{\text{gr}(f)} f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$  stabilisce una biezione tra l'insieme dei polinomi non nulli nelle variabili  $x$  e  $y$  e l'insieme dei polinomi omogenei nelle variabili  $x_0, x_1, x_2$  non divisibili per  $x_0$ . Essa trasforma prodotto di polinomi in prodotto dei polinomi corrispondenti, stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i polinomi irriducibili e trasforma la scomposizione in prodotto di fattori irriducibili di ogni polinomio  $f(x, y)$  nella scomposizione in prodotto di fattori irriducibili del polinomio omogeneo corrispondente, conservando le molteplicità dei vari fattori irriducibili.
8. Sia  $k$  un campo algebricamente chiuso. Si dimostri che due curve piane proiettive possiedono infiniti punti in comune se e solo se possiedono una componente in comune.
- Suggerimento: Si consideri prima il caso particolare in cui  $x_0$  non divide nessuno dei due polinomi. Poi si riduca il caso generale al caso particolare tramite una proiettività.*
9. Si dimostri che il polinomio  $x_0x_1^4 + x_1x_2^4 + x_0^4x_2$  è irriducibile in  $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ .
10. Si dimostri che il polinomio  $x_0x_1^3 + x_0x_1^2x_2 + x_2^4$  è irriducibile in  $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ .
11. Sia  $d \geq 1$ . Siano  $f_{d-1}(x, y)$  e  $f_d(x, y)$  due polinomi omogenei di gradi  $d-1$  e  $d$  rispettivamente, che sono primi tra di loro. Si dimostri che il polinomio  $f(x, y) = f_{d-1}(x, y) + f_d(x, y)$  è irriducibile.

12. Sia  $d \geq 2$ . Siano  $f_{d-2}(x, y)$ ,  $f_{d-1}(x, y)$  e  $f_d(x, y)$  tre polinomi omogenei dove  $gr(f_i) = i$ . Trovare un criterio necessario e sufficiente affinché il polinomio  $f(x, y) = f_{d-2}(x, y) + f_{d-1}(x, y) + f_d(x, y)$  sia irriducibile.
13. Si dimostri che il risultante dei polinomi  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$  e  $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$  è uguale a

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

14. Risolvere il sistema

$$\begin{aligned} f(x, y) &= y^2 - 7xy + 4x^2 + 13x - 2y - 3 = 0 \\ g(x, y) &= y^2 - 14xy + 9x^2 + 28x - 4y - 5 = 0 \end{aligned}$$

15. Escludere  $x$  dal sistema

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= 0 \\ x^2y + xy^2 &= 6 \end{aligned}$$

16. Si verifichino le seguenti formule:

$$\text{se } f(x) = Ax^2 + Bx + C, \quad \text{allora } \Delta(f) = B^2 - 4AC$$

$$\text{se } f(x) = x^3 + px + q, \quad \text{allora } \Delta(f) = -(4p^3 + 27q^2)$$

17. Trovare i valori di  $\lambda$  per i quali i seguenti polinomi hanno radici multiple

(a)  $x^3 - 3x + \lambda$

(b)  $x^3 + 3x^2 + (3 - 3\lambda)x - 3\lambda + 3$

(c)  $x^4 - 4x + \lambda$

18. Siano  $P_1, \dots, P_5$  cinque punti nel piano proiettivo nessuno dei quali è allineato con gli altri due. Si dimostri che esiste una unica conica  $C$  che passa per questi punti ed essa è una conica non degenere.

### Studio locale delle curve algebriche piane.

19. Si dimostri che la curva di Fermat  $C \subset \mathbb{P}^2$  di equazione  $x_0^n + x_1^n + x_2^n = 0$  è non singolare.
20. Sia  $C$  la curva affine di equazione  $y^2 = f(x)$ , dove  $gr(f) \geq 4$ . Si dimostri che la sua chiusura proiettiva  $C^*$  possiede un unico punto improprio e che questo punto è singolare.
21. Si dimostri che se una curva affine o proiettiva è riducibile,  $C = C_1 + C_2$ , allora ogni punto  $P$  dell'intersezione dei supporti di  $C_1$  e  $C_2$  è singolare.
22. Si dimostri che se una curva piana proiettiva è non singolare essa è irriducibile. È vera la stessa affermazione per le curve affini?
23. Sia  $X = C + D$ . Supponiamo che il punto  $P$  appartiene al supporto di  $C$ , ma non appartiene al supporto di  $D$ . Sia  $r$  una retta che passa per  $P$ . Si dimostri che  $I(X, r; P) = I(C, r; P)$ . Si dimostri che le proprietà locali di  $X$  e  $C$  nel punto  $P$ , quali semplicità/singolarità, molteplicità, tangenti principali ecc., sono identiche.
24. Una curva si dice ridotta se tutte le sue componenti irriducibili hanno molteplicità 1. Si dimostri che se il campo base  $k$  è algebricamente chiuso, allora ogni curva piana ridotta, affine o proiettiva, possiede finiti punti singolari.
25. Nel piano affine  $\mathbb{A}^2$  si considerino le curve di equazioni:
  - (a)  $y^2(x - 2y) - (x^2 + y^2) = 0$
  - (b)  $(x - y)^3 + x^2 - y^2 - 4x = 0$
  - (c)  $x^2(x^2 - y^2) - 4x^2y + y^3 = 0$

(d)  $x^2y^2 - x^3 - y^3 - xy = 0$

(e)  $y^2 + x^4 + x^5 = 0$

(f)  $y - 4x^2 - x^5 = 0$

Di ognuna di esse studiare le proprietà locali nell'origine e all'infinito.

26. Si consideri la curva  $C$  di equazione

$$f(x, y) = x^3 + xy^2 + x^2 + 2y^2 - x - 1 = 0.$$

Si dimostri che  $C$  è irriducibile. Trovare e classificare i punti singolari di  $C$ . Studiare le proprietà locali di  $C$  all'infinito.

27. Sia  $C$  la curva di equazione  $f(x, y) = (x+1)(y-x)^3 - 1 = 0$ . Si dimostri che  $C$  è irriducibile. Trovare e classificare i punti singolari di  $C$  e trovare i suoi asintoti.

28. Si consideri, al variare dei parametri  $a, b \in \mathbb{C}$ , la curva affine  $C$  di equazione  $f(x, y) = x^2(y-5)^2 + y(bx + a^2y) = 0$ .

(a) Si determini il numero degli asintoti di  $C$ .

(b) Si dica se il punto  $(0, 0)$  è singolare per  $C$ , se ne calcoli la molteplicità e si dica se è un punto ordinario.

(c) Si dica se esistono valori dei parametri  $a, b \in \mathbb{C}$  tali che la curva passi per il punto  $(-1, 1)$  e sia ivi tangente alla retta  $3x + 5y - 2 = 0$ .

### Curve nel piano e nello spazio.

29. <sup>1\*</sup>La lunghezza, da  $t = 0$  a  $t = 9$ , dell'arco di curva di equazioni parametriche:  $x = 3t$  e  $y = 2t^2$  è:

A)  $\int_0^{81} \sqrt{9 - 16t^2} dt$

B)  $\int_0^9 \sqrt{9 + 16t^2} dt$

C)  $\int_0^9 \sqrt{9t^2 - 4t^4} dt$

D)  $\int_0^9 \sqrt{9t^2 + 4t^4} dt$

30. \*La lunghezza, da  $t = 0$  a  $t = 2$ , dell'arco di curva di equazioni parametriche:  $x = \frac{1}{2}t^2$ ,  $y = \frac{1}{9}(6t + 9)^{\frac{3}{2}}$  è uguale a:

A) 12

B) 14

C) 8

D) 10

31. \*La lunghezza dell'arco di catenaria  $y = \cosh x$  da  $x = 0$  a  $x = \ln 2$  è

A)  $1/4$

B)  $2/3$

C)  $3/4$

D) 1

---

<sup>1</sup>Gli esercizi segnalati con \* sono stati proposti alle prove di ammissione al TFA a.a.2011/2012.

32. \*Una particella si muove lungo il percorso descritto dalla curva di equazioni parametriche:  $x = \cos^3 t$ ,  $y = \sin^3 t$ . La distanza percorsa per  $t$  compreso tra 0 e  $\pi/2$  è uguale a:
- A) 0,75
- B) 0
- C) 1,50
- D) -3,50
33. Sia  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva avente curvatura costante  $\kappa \neq 0$ . Dimostrare che il sostegno  $\alpha(I)$  è contenuto in una circonferenza di raggio  $\frac{1}{|\kappa|}$ .
34. Sia  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regolare avente curvatura non nulla in ogni punto. Supponiamo che la sua immagine sia contenuta in una sfera di raggio  $r$ . Dimostrare che  $\kappa(t) \geq \frac{1}{r}$  per ogni  $t \in I$ .
35. Sia  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva differenziabile a velocità unitaria. Ponendo  $\beta_1(s) = \beta(-s)$  si consideri la curva  $\beta_1 : -J \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Si dimostri la seguente relazione tra gli apparati di Frenet delle curve  $\beta$  e  $\beta_1$ :
- $$\begin{aligned} (T_1(s), N_1(s), B_1(s), \kappa_1(s), \tau_1(s)) &= \\ (-T(-s), N(-s), -B(-s), \kappa(-s), \tau(-s)). \end{aligned}$$
36. Calcolare la curvatura della catenaria  $y = a \cosh(\frac{x}{a})$ ,  $a > 0$ .

37. Per ciascuna delle seguenti due curve parametrizzate rispondere se il loro sostegno è contenuto in una retta o meno. Motivare la risposta.

a)  $\alpha(t) = (t^2 - t, 3t^2 - 3t - 2, 2t^2 - 2t + 1)$

b)  $\beta(t) = (t^2 - 1, 3t^2 - 5, 2t^2 - t)$

38. Determinare il raggio del cerchio osculatore della curva  $\alpha(t) = (2t, \frac{1}{t}, -2t)$  in  $(2, 1, -2)$ .

39. Determinare il raggio del cerchio osculatore della curva  $\alpha(t) = (t^3, t^2, t)$  nel punto in cui  $t = 1$ .

40. Calcolare l'apparato di Frenet della seguente curva in un punto generico:

$$\alpha(t) = (2t, t^2, \frac{1}{3}t^3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Di che curva si tratta?

41. Data la curva nello spazio  $\alpha(t) = (\cos^2(t), \cos t, \sin t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,

a) determinare l'apparato di Frenet in  $t = 0$ ;

b) determinare il piano osculatore, il raggio e il centro del cerchio osculatore in  $t = 0$ ;

c) determinare le equazioni parametriche del cerchio osculatore in  $t = 0$ .

42. Calcolare l'apparato di Frenet, l'equazione del piano osculatore, il raggio e il centro del cerchio osculatore della seguente curva nel punto indicato:

$$\alpha(t) = (t, te^t, t^2e^t) \quad \text{nel punto in cui } t = 0.$$

43. Calcolare l'apparato di Frenet, l'equazione del piano osculatore, il raggio e il centro del cerchio osculatore della seguente curva nel punto indicato:

$$\alpha(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}, \ln(t)\right) \quad \text{nel punto in cui } t = 1.$$

44. Calcolare l'apparato di Frenet della seguente curva in un punto generico:

$$\alpha(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}\right).$$

45. Calcolare l'apparato di Frenet della seguente curva in un punto generico:

$$\alpha(t) = t(\cos t, \sin t, 1).$$

46. Determinare la curvatura e l'evolvente dell'ellisse  $x = 2 \cos t$ ,  $y = \sin t$ .

47. Determinare i valori massimo e minimo della curvatura dell'ellisse

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad \text{dove } a > b > 0.$$

48. Data la curva nello spazio  $\alpha(t) = (at - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ :

(a) stabilire per quale valore di  $a \in \mathbb{R}$  la curva è piana. Assegnato ad  $a$  tale valore, trovare l'equazione del piano che contiene la curva;

(b) posto  $a = 3$ , determinare la curvatura, la torsione e il triedro di Frenet in un generico punto di  $\alpha$ .

49. Data la curva nello spazio  $\alpha(t) = (3t^2, 1 + 3t, at^3)$ :
- (a) stabilire per quale valore di  $a \in \mathbb{R}$  la curva  $\alpha$  è rispettivamente: i) piana, ii) un'elica generalizzata.
  - (b) trovati i valori di  $a$  per i quali la curva è piana, per ciascun tale valore trovare l'equazione del piano corrispondente che contiene la curva;
  - (c) posto  $a = 2$ , determinare la curvatura, la torsione e il triedro di Frenet in un generico punto di  $\alpha$ .
  - (d) Calcolare la lunghezza dell'arco di curva compreso tra i punti  $A(0, 1, 0)$  e  $B(3, -2, -2)$ .
50. Data la curva nello spazio  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, \cos at)$  stabilire per quali valori di  $a$  la curva è piana. Quali curve si trovano in questo caso?
51. Data la curva nello spazio  $\alpha(t) = (e^{at}, e^{-t}, \sqrt{2}t)$
- (a) stabilire per quali valori di  $a \in \mathbb{R}$  la curva è piana.
  - (b) Posto  $a = 1$  determinare la curvatura e la torsione di  $\alpha$  in un punto generico. Di che curva si tratta?

### Geometria differenziale delle superfici.

52. Sia  $M$  l'elicoide  $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv)$ ,  $u > 0, v \in \mathbb{R}$ .
- (a) Calcolare la prima forma fondamentale di  $M$ .
  - (b) Calcolare l'area della porzione dell'elicoide  $1 < u < 3$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$ .

*Suggerimento.* Si utilizzi la formula

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \log |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

53. Dimostrare che l'area della porzione della sfera compresa tra due paralleli dipende solo dalla distanza tra i piani che contengono i paralleli.
54. Sia  $x = a \cosh(\frac{z}{a})$  la curva catenaria nel piano  $Oxz$ ,  $a > 0$ . Sia  $M$  la superficie di rotazione attorno all'asse delle  $z$ .
- (a) Trovare una parametrizzazione regolare di  $M$ . Disegnare la superficie.
  - (b) Calcolare la prima forma fondamentale di  $M$ ;
  - (c) Calcolare l'area della porzione del catenoide compresa tra i piani  $z = 1$  e  $z = -1$ .

*Suggerimento.* Utilizzare l'identità  $\cosh^2(u) = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2u)$ .

55. \*Nello spazio  $\mathbb{R}^3$  sia  $S$  la superficie sferica di centro  $O$  e di raggio 1. Le rette nella geometria sferica sono per definizione le circonferenze di raggio massimo (quindi, le intersezioni di  $S$  con i piani che passano per  $O$ ). Sia  $ABC$  un triangolo sferico non degenero su  $S$ . Se  $\alpha, \beta, \gamma$  denotano gli angoli rispettivamente in  $A, B$  e  $C$  allora (indicare la risposta corretta tra (A),(B),(C) e (D)):

- (A)  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$
- (B)  $\alpha + \beta + \gamma$  non è un multiplo di  $\pi$ , ma è una costante indipendente della scelta del triangolo  $ABC$
- (C)  $\alpha + \beta + \gamma$  è uguale all'area del triangolo  $ABC$
- (D)  $\alpha + \beta + \gamma$  è sempre maggiore di  $\pi$

56. Sia  $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 3\}$  e  $\varphi : D \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , l'applicazione così definita:

$$\varphi(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2}).$$

Dimostrare che  $\varphi$  è una parametrizzazione regolare e in  $\varphi(1, 1)$  calcolare curvatura media, curvatura gaussiana, curvatures principali e piano tangente affine.

57. Sia  $S$  la superficie descritta dalla parametrizzazione

$$\varphi(u, v) = (uv^2, v^3, u^2v), \quad (u, v) \in (0, \infty) \times (0, \infty).$$

- (a) Mostrare che  $\varphi$  è una parametrizzazione regolare.
- (b) Classificare i punti di  $M$ .
- (c) Determinare l'angolo delle linee coordinate di  $S$  per il punto  $Q = \varphi(1, 1)$ .
- (d) Determinare le direzioni asintotiche e le direzioni principali nel punto  $Q$ .

58. Sia  $U = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < s, t < \frac{\pi}{2}\}$  e

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(s, t) = (\sin(t), \cos(t) \cos(s), \sin(s)).$$

Dimostrare che  $\varphi$  è una parametrizzazione regolare e calcolare in  $\varphi(0, 0)$  curvatura media, curvatura gaussiana, curvatures principali e piano tangente affine.

59. Sia  $M$  la superficie descritta dalla parametrizzazione

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) &= (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, v), \\ (u, v) &\in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(a) Dimostrare che  $\varphi$  è una parametrizzazione regolare. Di che superficie si tratta?

(b) Trovare le curvatures Gaussiana e media in un punto qualsiasi di  $M$ . Classificare i punti di  $M$ .

(c) Determinare le curvatures principali e le direzioni principali di curvatura nel punto  $P = \varphi(0, 0)$ .

(d) Se  $\alpha_H$  è la sezione normale determinata dal punto  $P = \varphi(0, 0)$  e dal versore  $\vec{e} = \frac{1}{2}(-\vec{j} + \sqrt{3}\vec{k})$  calcolare la curvatura di  $\alpha_H$  nel punto  $P$ .

60. Sia  $M$  la superficie descritta dalla parametrizzazione

$$\varphi(u, v) = (u, e^u \cos v, e^u \sin v) \quad (u, v) \in (-\infty, +\infty) \times (0, 2\pi).$$

(a) Dimostrare che  $\varphi$  è una parametrizzazione regolare. Di che superficie si tratta? Disegnare la superficie.

(b) Calcolare le curvatures Gaussiana e media in un punto qualsiasi di  $M$ . Classificare i punti di  $M$ .

(c) Determinare le curvatures principali e le direzioni principali di curvatura nel punto  $P = \varphi(0, 0)$ .

(d) Se  $\alpha_H$  è la sezione normale determinata dal punto  $P = \varphi(0, 0)$  e dal versore  $\vec{e} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$  calcolare la curvatura di  $\alpha_H$  nel punto  $P$ .

61. Sia  $M$  la superficie descritta dalla parametrizzazione locale

$$\varphi(u, v) = \left(u, \frac{v^2}{2}, \frac{u^2}{2} - \frac{v^3}{3}\right) \quad (u, v) \in D.$$

(a) Determinare  $D$  in modo tale che la parametrizzazione sia regolare.

(b) Calcolare le curvatures Gaussiana e media in un generico punto di  $M$ . Classificare i punti di  $M$ .

(c) Se  $\alpha_H$  è la sezione normale determinata dal punto  $P = \varphi(1, 1)$  e dal versore  $\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$  calcolare la curvatura di  $\alpha_H$  nel punto  $P$ .