Geometria 3
A.A. 2022 – 2023
Esercizi

Irriducibilità di polinomi di più variabili. Risultante. Discriminante. Curve piane. Teorema di Bézout.

Negli esercizi, se non è specificato il campo base, esso si assume $k = \mathbb{C}$.

1. Sia $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio di grado dispari. Si dimostri che $F(x, y) = y^2 - f(x)$ è irriducibile in $\mathbb{C}[x, y]$. È vera la stessa affermazione se $f(x)$ è di grado pari?

2. Si dimostri che il polinomio $f(x, y) = xy^3 - (x + 1)^4$ è irriducibile in $\mathbb{C}[x, y]$.

3. Si dimostri che il polinomio $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$ è irriducibile in $\mathbb{C}[x, y]$.

4. Sia k un campo di charatteristica $char\,(k) \neq 2$. Siano $a(x), b(x)$ e $c(x)$ tre polinomi di $k[x]$. Si dimostri che $f(x, y) = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \in k[x, y]$ è irriducibile se e solo se $a(x), b(x)$ e $c(x)$ non hanno fattori non costanti in comune e il discriminante $\Delta(x) = b(x)^2 - 4a(x)c(x)$ non sia un quadrato in $k[x]$.

5. Si dimostri che il polinomio $y^4 + x^3 + x^2 - 2x$ è irriducibile in $\mathbb{C}[x, y]$.

6. Stabilire se il polinomio $x^4 + x^2y + (x + 1)y^2$ è irriducibile o meno in $\mathbb{C}[x, y]$.

7. Si dimostri che l'applicazione di omogeneizzazione $f(x,y) \mapsto F(x_0,x_1,x_2) = x_0^{gr(f)} f(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0})$ stabilisce una biezione tra l'insieme dei polinomi non nulli nelle variabili x e y e l'insieme dei polinomi omogenei nelle variabili x_0, x_1, x_2 non divisibili per x_0. Essa trasforma prodotto di polinomi in prodotto dei polinomi corrispondenti, stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i polinomi irriducibili e trasforma la scomposizione in prodotto di fattori irriducibili di ogni polinomio $f(x,y)$ nella scomposizione in prodotto di fattori irriducibili del polinomio omogeneo corrisponente, conservando le molteplicità dei vari fattori irriducibili.

8. Sia k un campo algebricamente chiuso. Si dimostri che due curve piane proiettive possiedono infiniti punti in comune se e solo se possiedono una componente in comune.

   Suggerimento: Si consideri prima il caso particolare in cui x_0 *non divide nessuno dei due polinomi. Poi si riduca il caso generale al caso particolare tramite una proiettività.*

9. Si dimostri che il polinomio $x_0x_1^4 + x_1x_2^4 + x_0^4x_2$ è irriducibile in $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$.

10. Si dimostri che il polinomio $x_0x_1^3 + x_0x_1^2x_2 + x_2^4$ è irriducibile in $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$.

11. Sia $d \geq 1$. Siano $f_{d-1}(x,y)$ e $f_d(x,y)$ due polinomi omogenei di gradi $d-1$ e d rispettivamente, che sono primi tra di loro. Si dimostri che il polinomio $f(x,y) = f_{d-1}(x,y) + f_d(x,y)$ è irriducibile.

12. Sia $d \geq 2$. Siano $f_{d-2}(x,y)$, $f_{d-1}(x,y)$ e $f_d(x,y)$ tre polinomi omogenei dove $gr(f_i) = i$. Trovare un criterio necesario e sufficiente affinché il polinomio $f(x,y) = f_{d-2}(x,y) + f_{d-1}(x,y) + f_d(x,y)$ sia irriducibile.

13. Si dimostri che il risultante dei polinomi $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ e $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ è uguale a

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

14. Risolvere il sistema

$$\begin{aligned} f(x,y) &= y^2 - 7xy + 4x^2 + 13x - 2y - 3 = 0 \\ g(x,y) &= y^2 - 14xy + 9x^2 + 28x - 4y - 5 = 0 \end{aligned}$$

15. Escludere x dal sistema

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= 0 \\ x^2y + xy^2 &= 6 \end{aligned}$$

16. Si verifichino le seguenti formule:

$$\text{se} \quad f(x) = Ax^2 + Bx + C, \quad \text{allora} \quad \Delta(f) = B^2 - 4AC$$

$$\text{se} \quad f(x) = x^3 + px + q, \quad \text{allora} \quad \Delta(f) = -(4p^3 + 27q^2)$$

17. Trovare i valori di λ per i quali i seguenti polinomi hanno radici multiple
    (a) $x^3 - 3x + \lambda$
    (b) $x^3 + 3x^2 + (3 - 3\lambda)x - 3\lambda + 3$
    (c) $x^4 - 4x + \lambda$

18. Siano $P_1, \ldots, P_5$ cinque punti nel piano proiettivo nessuni tre di cui sono allineati. Si dimostri che esiste una unica conica C che passa per questi punti ed essa è una conica non degenere.

Studio locale delle curve algebriche piane.

19. Si dimostri che la curva di Fermat $C \subset \mathbb{P}^2$ di equazione $x_0^n + x_1^n + x_2^n = 0$ è non singolare.

20. Sia C la curva affine di equazione $y^2 = f(x)$, dove $gr(f) \geq 4$. Si dimostri che la sua chiusura proiettiva C^* possiede un unico punto improprio e che questo punto è singolare.

21. Si dimostri che se una curva affine o proiettiva è riducibile, $C = C_1 + C_2$, allora ogni punto P dell'intersezione dei supporti di C_1 e C_2 è singolare.

22. Si dimostri che se una curva piana proiettiva è non singolare essa è irriducibile. È vera la stessa affermazione per le curve affini?

23. Sia $X = C + D$. Supponiamo che il punto P appartiene all'unione $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$. Si dimostri che $m_P(X) = m_P(C) + m_P(D)$ e l'insieme delle tangenti principali di X nel punto P è l'unione degli insiemi delle tangenti principali di C e di D nel punto P. Se $P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, allora P è singolare. Se $P \in \mathcal{C} \cup \mathcal{D} \setminus \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, allora P è semplice se e solo se P è punto semplice della componente a cui appartiene e in tal caso coincidono le rette tangenti a X e alla componente nel punto P.

24. Una curva si dice ridotta se tutte le sue componenti irriducibili hanno molteplicità 1. Si dimostri che se il campo base k è algebricamente chiuso, allora ogni curva piana ridotta, afine o proiettiva, possiede finiti punti singolari.

25. Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ si considerino le curve di equazioni:

(a) $y^2(x-2y)-(x^2+y^2)=0$

(b) $(x-y)^3+x^2-y^2-4x=0$

(c) $x^2(x^2-y^2)-4x^2y+y^3=0$

(d) $x^2y^2-x^3-y^3-xy=0$

(e) $y^2+x^4+x^5=0$

(f) $y-4x^2-x^5=0$

Di ognuna di esse studiare le proprietà locali nell'origine e all'infinito.

26. Si consideri la curva C di equazione

$$f(x,y)=x^3+xy^2+x^2+2y^2-x-1=0.$$

Si dimostri che C è irriducibile. Trovare e classificare i punti singolari di C. Studiare le proprietà locali di C all'infinito.

27. Sia C la curva di equazione $f(x,y)=(x+1)(y-x)^3-1=0$. Si dimostri che C è irriducibile. Trovare e classificare i punti singolari di C e trovare i suoi asintoti.

28. Si consideri, al variare dei parametri $a,b\in\mathbb{C}$, la curva affine C di equazione $f(x,y)=x^2(y-5)^2+y(bx+a^2y)=0$.

(a) Si determini il numero degli asintoti di C.

(b) Si dica se il punto $(0,0)$ è singolare per C, se ne calcoli la molteplicità e si dica se è un punto ordinario.

(c) Si dica se esistono valori dei parametri $a,b\in\mathbb{C}$ tali che la curva passi per il punto $(-1,1)$ e sia ivi tangente alla retta $3x+5y-2=0$.

Curve nel piano e nello spazio.

29. [1]*La lunghezza, da $t = 0$ a $t = 9$, dell'arco di curva di equazioni parametriche: $x = 3t$ e $y = 2t^2$ è:

A) $\int_0^{81} \sqrt{9 - 16t^2}dt$

B) $\int_0^9 \sqrt{9 + 16t^2}dt$

C) $\int_0^9 \sqrt{9t^2 - 4t^4}dt$

D) $\int_0^9 \sqrt{9t^2 + 4t^4}dt$

30. *La lunghezza, da $t = 0$ a $t = 2$, dell'arco di curva di equazioni parametriche: $x = \frac{1}{2}t^2$, $y = \frac{1}{9}(6t + 9)^{\frac{3}{2}}$ è uguale a:

A) 12

B) 14

C) 8

D) 10

31. *La lunghezza dell'arco di catenaria $y = \cosh x$ da $x = 0$ a $x = \ln 2$ è

A) 1/4

B) 2/3

C) 3/4

D) 1

[1]Gli esercizi segnalati con * sono stati proposti alle prove di ammissione al TFA a.a.2011/2012.

32. *Una particella si muove lungo il percorso descritto dalla curva di equazioni parametriche: $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$. La distanza percorsa per t compreso tra 0 e $\pi/2$ e uguale a:

    A) 0,75

    B) 0

    C) 1,50

    D) -3,50

33. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva avente curvatura costante $\kappa \neq 0$. Dimostrare che il sostegno $\alpha(I)$ è contenuto in una circonferenza di raggio $\frac{1}{|\kappa|}$.

34. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare avente curvatura non nulla in ogni punto. Supponiamo che la sua immagine sia contenuta in una sfera di raggio r. Dimostrare che $\kappa(t) \geq \frac{1}{r}$ per ogni $t \in I$.

35. Sia $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ una curva differenziabile a velocità unitaria. Ponendo $\beta_1(s) = \beta(-s)$ si consideri la curva $\beta_1 : -J \to \mathbb{R}^3$. Si dimostri la seguente relazione tra gli apparati di Frenet delle curve β e β_1:

$$(T_1(s), N_1(s), B_1(s), \kappa_1(s), \tau_1(s)) = (-T(-s), N(-s), -B(-s), \kappa(-s), \tau(-s)).$$

36. Calcolare la curvatura della catenaria $y = a\cosh(\frac{x}{a})$, $a > 0$.

37. Per ciascuna delle seguenti due curve parametrizzate rispondere se il loro sostegno è contenuto in una retta o meno. Motivare la risposta.

    a) $\alpha(t) = (t^2 - t, 3t^2 - 3t - 2, 2t^2 - 2t + 1)$

    b) $\beta(t) = (t^2 - 1, 3t^2 - 5, 2t^2 - t)$

38. Determinare il raggio del cerchio osculatore della curva $\alpha(t) = (2t, \frac{1}{t}, -2t)$ in $(2, 1, -2)$.

39. Determinare il raggio del cerchio osculatore della curva $\alpha(t) = (t^3, t^2, t)$ nel punto in cui $t = 1$.

40. Calcolare l'apparato di Frenet della seguente curva in un punto generico:

$$\alpha(t) = (2t, t^2, \frac{1}{3}t^3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

    Di che curva si tratta?

41. Data la curva nello spazio $\alpha(t) = \big(\cos^2(t), \cos t, \sin t\big)$, $t \in \mathbb{R}$,

    a) determinare l'apparato di Frenet in $t = 0$;

    b) determinare il piano osculatore, il raggio e il centro del cerchio osculatore in $t = 0$;

    c) determinare le equazioni parametriche del cerchio osculatore in $t = 0$.

42. Calcolare l'apparato di Frenet, l'equazione del piano osculatore, il raggio e il centro del cerchio osculatore della seguente curva nel punto indicato:

$$\alpha(t) = (t, te^t, t^2e^t) \quad \text{nel punto in cui } t = 0.$$

43. Calcolare l'apparato di Frenet, l'equazione del piano osculatore, il raggio e il centro del cerchio osculatore della seguente curva nel punto indicato:

$$\alpha(t) = (\frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}, \ln(t)) \quad \text{nel punto in cui } t = 1.$$

44. Calcolare l'apparato di Frenet della seguente curva in un punto generico:

$$\alpha(t) = (t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}).$$

45. Calcolare l'apparato di Frenet della seguente curva in un punto generico:

$$\alpha(t) = t(\cos t, \sin t, 1).$$

46. Determinare la curvatura e l'evoluta dell'ellisse $x = 2\cos t$, $y = \sin t$.

47. Determinare i valori massimo e minimo della curvatura dell'ellisse

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t \quad \text{dove} \quad a > b > 0.$$

48. Data la curva nello spazio $\alpha(t) = (at - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$:

    (a) stabilire per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la curva è piana. Assegnato ad a tale valore, trovare l'equazione del piano che contiene la curva;

    (b) posto $a = 3$, determinare la curvatura, la torsione e il triedro di Frenet in un generico punto di α.

49. Data la curva nello spazio $\alpha(t) = (3t^2, 1 + 3t, at^3)$:

(a) stabilire per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la curva α è rispettivamente: i) piana, ii) un'elica generalizzata.

(b) trovati i valori di a per i quali la curva è piana, per ciascun tale valore trovare l' equazione del piano corrispondente che contiene la curva;

(c) posto $a = 2$, determinare la curvatura, la torsione e il triedro di Frenet in un generico punto di α.

(d) Calcolare la lunghezza dell'arco di curva compreso tra i punti $A(0, 1, 0)$ e $B(3, -2, -2)$.

50. Data la curva nello spazio $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, \cos at)$ stabilire per quali valori di a la curva è piana. Quali curve si trovano in questo caso?

51. Data la curva nello spazio $\alpha(t) = (e^{at}, e^{-t}, \sqrt{2}t)$

(a) stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la curva è piana.

(b) Posto $a = 1$ determinare la curvatura e la torsione di α in un punto generico. Di che curva si tratta?

Geometria differenziale delle superfici.

52. Sia M l'elicoide $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv)$, $u > 0, v \in \mathbb{R}$.

    (a) Calcolare la prima forma fondamentale di M.

    (b) Calcolare l'area della porzione dell'elicoide $1 < u < 3$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

    Suggerimento. Si utilizzi la formula

    $$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \log|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

53. Dimostrare che l'area della porzione della sfera compresa tra due paralleli dipende solo dalla distanza tra i piani che contengono i paralleli.

54. Sia $x = a\cosh(\frac{z}{a})$ la curva catenaria nel piano Oxz, $a > 0$. Sia M la superficie di rotazione attorno all'asse delle z.

    (a) Trovare una parametrizzazione regolare di M. Disegnare la superficie.

    (b) Calcolare la prima forma fondamentale di M;

    (c) Calcolare l'area della porzione del catenoide compresa tra i piani $z = 1$ e $z = -1$.

    Suggerimento. Utilizare l'identità $\cosh^2(u) = \frac{1}{2}(1+\cosh 2u)$.

55. *Nello spazio $\mathbb{R}^3$ sia S la superficie sferica di centro O e di raggio 1. Le rette nella geometria sferica sono per definizione le circonferenze di raggio massimo (quindi, le intersezioni di S con i piani che passano per O). Sia ABC un triangolo sferico non degenere su S. Se α, β, γ denotano gli angoli rispettivamente in A, B e C allora (indicare la risposta corretta tra (A),(B),(C) e (D)):

(A) $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

(B) $\alpha + \beta + \gamma$ non è un multiplo di π, ma è una costante indipendente della scelta del triangolo ABC

(C) $\alpha + \beta + \gamma$ è uguale all'area del triangolo ABC

(D) $\alpha + \beta + \gamma$ è sempre maggiore di π

56. Sia $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 3\}$ e $\varphi : D \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^3$, l'applicazione cosi definita:

$$\varphi(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2}).$$

Dimostrare che φ è una parametrizzazione regolare e in $\varphi(1, 1)$ calcolare curvatura media, curvatura gaussiana, curvature principali e piano tangente affine.

57. Sia S la superficie descritta dalla parametrizzazione

$$\varphi(u, v) = (uv^2, v^3, u^2v), \quad (u, v) \in (0, \infty) \times (0, \infty).$$

(a) Mostrare che φ è una parametrizzazione regolare.

(b) Classificare i punti di M.

(c) Determinare l'angolo delle linee coordinate di S per il punto $Q = \varphi(1, 1)$.

(d) Determinare le direzioni asintotiche e le direzioni principali nel punto Q.

58. Sia $U = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 | -\frac{\pi}{2} < s, t < \frac{\pi}{2}\}$ e

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(s, t) = (\sin(t), \cos(t)\cos(s), \sin(s)).$$

Dimostrare che φ è una parametrizzazione regolare e calcolare in $\varphi(0, 0)$ curvatura media, curvatura gaussiana, curvature principali e piano tangente affine.

59. Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione

$$\varphi(u,v) = (\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, v),$$
$$(u,v) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}.$$

(a) Dimostrare che φ è una parametrizzazione regolare. Di che superficie si tratta?

(b) Trovare le curvature Gaussiana e media in un punto qualsiasi di M. Classificare i punti di M.

(c) Determinare le curvature principali e le direzioni principali di curvatura nel punto $P = \varphi(0,0)$.

(d) Se α_H e la sezione normale determinata dal punto $P = \varphi(0,0)$ e dal versore $\vec{e} = \frac{1}{2}(-\vec{j} + \sqrt{3}\vec{k})$ calcolare la curvatura di α_H nel punto P.

60. Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione

$$\varphi(u,v) = (u, e^u \cos v, e^u \sin v) \quad (u,v) \in (-\infty, +\infty) \times (0, 2\pi).$$

(a) Dimostrare che φ è una parametrizzazione regolare. Di che superficie si tratta? Disegnare la superficie.

(b) Calcolare le curvature Gaussiana e media in un punto qualsiasi di M. Classificare i punti di M.

(c) Determinare le curvature principali e le direzioni principali di curvatura nel punto $P = \varphi(0,0)$.

(d) Se α_H e la sezione normale determinata dal punto $P = \varphi(0,0)$ e dal versore $\vec{e} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$ calcolare la curvatura di α_H nel punto P.

61. Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione locale

$$\varphi(u,v) = (u, \frac{v^2}{2}, \frac{u^2}{2} - \frac{v^3}{3}) \quad (u,v) \in D.$$

(a) Determinare D in modo tale che la parametrizzazione sia regolare.

(b) Calcolare le curvature Gaussiana e media in un generico punto di M. Classificare i punti di M.

(c) Se α_H e la sezione normale determinata dal punto $P = \varphi(1,1)$ e dal versore $\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$ calcolare la curvatura di α_H nel punto P.