

**Geometria Algebrica 2009 –2010**  
**Esercizi**

**Insiemi algebrici affini, Insiemi algebrici irriducibili.**

Negli esercizi si suppone, se non detto al contrario, che il campo  $k$  è algebricamente chiuso.

– Sia  $V \subset \mathbb{A}_k^n$  un insieme algebrico affine. Sia  $L$  una retta non contenuta in  $V$ . Allora l'intersezione di  $V$  con  $L$  è o un insieme vuoto o un insieme finito.

– Quali degli insiemi seguenti sono insiemi algebrici affini ?

1.  $\{(\cos t, \sin t) | t \in [0, 2\pi]\} \subset \mathbb{R}^2$

2.  $\{(t, \sin t) | t \in (0, \infty)\} \subset \mathbb{R}^2$

– Si dimostri che gli insiemi chiusi della topologia di Zariski di  $\mathbb{A}_k^2$  sono gli insiemi del tipo:

$$\cup_{i=1}^n V(F_i) \cup \{P_1, \dots, P_m\}$$

dove  $F_i$  sono polinomi irriducibili e  $P_j$  sono punti,  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$ .

*Suggerimento.* Si utilizzi che due curve piane hanno infiniti punti in comune se e solo se hanno una componente in comune.

– L'insieme  $V \subset \mathbb{A}_k^2$  è dato dalle equazioni

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad G(x, y) = x - 1 = 0.$$

Trovare  $I(V)$ . È vero che  $I(V) = (F, G)$ ?

– Sia  $k$  un campo di  $\text{char}(k) \neq 2$ . Trovare i componenti irriducibili dell'insieme  $X \subset \mathbb{A}_k^3$  dato delle equazioni

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0$$

– Sia  $V = V(I) \subset \mathbb{A}_k^3$  l'insieme chiuso affine che corrisponde all'ideale  $I = (x^2 - yz, xz - x)$ . Si scomponi  $V$  in componenti irriducibili.

– Sia  $E$  uno spazio topologico e sia  $V$  un sottoinsieme dotato della topologia indotta. Si dimostri che  $V$  è irriducibile se e solo se la chiusura  $\overline{V}$  è irriducibile.

– Sia  $E$  uno spazio topologico. Supponiamo che  $E$  è coperto di insiemi, aperti  $E = \cup_{i \in I} V_i$  dove ogni  $V_i$  è irriducibile e ogni coppia  $V_i, V_j$  ha intersezione non vuota. Si dimostri che  $E$  è irriducibile.

### **Funzioni e applicazioni polinomiali, Composizione e isomorfismo, Funzioni razionali.**

– Sia  $V \subset \mathbb{A}_k^n$  un insieme chiuso affine e sia  $A(V)$  la sua algebra di funzioni regolari. Sia  $X$  un qualsiasi sottoinsieme di  $V$ . Si dimostri che  $\overline{X} = V(I_V(X))$ , dove  $\overline{X}$  è la chiusura di  $X$  in  $V$ . In particolare  $X$  è denso in  $V$  se e solo se  $I_V(X) = 0$ .

– Sia  $X \subset \mathbb{A}_k^2$  la curva  $y^2 = x^3$ . Si dimostri che l'applicazione  $\mathbb{A}_k^1 \rightarrow X$  data di  $t \mapsto (t^2, t^3)$  è un omeomorfismo ma non è un isomorfo polinomiale.

– Si dimostri che l'iperbole  $xy = 1$  non è isomorfo a  $\mathbb{A}_k^1$ .

– Si dimostri che se  $X \subset \mathbb{A}_k^2$  è una conica non degenera di centro allora  $X$  non è isomorfa a  $\mathbb{A}_k^1$ .

- Considerare l'applicazione polinomiale  $u : \mathbb{A}_k^2 \rightarrow \mathbb{A}_k^2$  data da  $u(x, y) = (x, xy)$ . Trovare l'immagine  $u(\mathbb{A}_k^2)$ . È vero che questo insieme è: aperto; denso; chiuso?
- Sia  $f : X \rightarrow Y$  un'applicazione continua di spazi topologici. Supponiamo che  $X$  sia irriducibile e  $f(X)$  sia denso in  $Y$ . Allora  $Y$  è irriducibile.
- Si dimostri che ogni sottospazio affine di  $\mathbb{A}_k^n$  è insieme algebrico irriducibile.
- Sia  $V$  un chiuso affine irriducibile e sia  $\varphi \in k(V)$  una funzione razionale. Sia  $P \in V$  e supponiamo che  $\varphi = \frac{f}{g}$  dove  $f, g \in A(V)$ ,  $f(P) \neq 0, g(P) = 0$ . Allora  $P \notin \text{dom}(\varphi)$ .
- Sia  $C \subset \mathbb{A}_k^2$  la curva  $x^2 + y^2 = 1$ . Sia  $\varphi = \frac{1-y}{x}$ . Si calcoli il dominio di  $\varphi$ .

### Insiemi algebrici proiettivi.

- Sia  $u : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$  l'applicazione data di

$$u(\lambda : \mu) = (\lambda^3 : \lambda^2\mu : \lambda\mu^2 : \mu^3)$$

Si dimostri che l'immagine  $X = u(\mathbb{P}^1)$  è la varietà proiettiva definita dalle equazioni  $M_{i,j} = 0$ , dove  $M_{i,j}$  sono i minori  $2 \times 2$  della matrice

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

- Sia  $u : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$  l'applicazione data di

$$u(\lambda : \mu) = (\lambda^n : \lambda^{n-1}\mu : \dots : \lambda\mu^{n-1} : \mu^n)$$

Si dimostri che l'immagine  $X = u(\mathbb{P}^1)$  è la varietà proiettiva definita dalle equazioni  $M_{i,j} = 0$ , dove  $M_{i,j}$  sono i minori  $2 \times 2$  della matrice

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

N.B.  $X$  è detta curva normale razionale di grado  $n$ .

– Sia  $X \subset \mathbb{P}^n$  una varietà quasiproiettiva. Si dimostri che  $X$  è un insieme aperto nella varietà proiettiva  $\overline{X}$ .

– Siano  $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{P}^n$  punti dello spazio proiettivo. Si dimostri che esiste un iperpiano  $H$ , tale che  $x_i \notin H$  per ogni  $i$ .

*Suggerimento:* Se  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$  si consideri lo spazio proiettivo duale  $\mathbb{P}(V^*)$  che parametrizza gli iperpiani in  $\mathbb{P}^n$ .

– Nell'esercizio precedente supponiamo che  $m \geq 2$ . Si dimostri che esiste un iperpiano  $H$ , tale che  $x_1 \in H$  e  $x_i \notin H$  per ogni  $i \geq 2$ .

### **Fasci, Spazi con funzioni.**

– Sia  $(X, \mathcal{O}_X)$  uno spazio con funzioni. Sia  $x \in X$ . Si considerano le coppie  $(f, U)$  dove  $U$  è un insieme aperto di  $X$  contenente  $x$  e  $f \in \mathcal{O}_X(U)$ . Due coppie  $(f, U)$  e  $(g, V)$  sono equivalenti se esiste un intorno  $W$  di  $x$  contenuto in  $U \cap V$  tale che  $f|_W = g|_W$ . Le classi di equivalenza di tali coppie si dicono *germi* del fascio  $\mathcal{O}_X$  nel punto  $x$  e l'insieme dei germi si denota con  $\mathcal{O}_{X,x}$ . Si dimostri che  $\mathcal{O}_{X,x}$  è un anello locale con ideale massimale  $M_x = \{(f, U) | f(x) = 0\}$ .

– Sia  $X \subset \mathbb{A}_k^n$  un insieme chiuso affine. Sia  $\mathcal{O}_X$  il fascio delle funzioni regolari su  $X$ . Sia  $x \in X$ . Sia  $\mathfrak{m}_x$  l'ideale massimale di

$A = A(X)$  corrispondente a  $x$ . Sia  $S = A \setminus \mathfrak{m}_x$ . Si dimostri che l'anello dei quozienti  $A_{\mathfrak{m}_x} := S^{-1}A$  è isomorfo all'anello  $\mathcal{O}_{X,x}$  dell'esercizio precedente.

– Siano  $(X, \mathcal{O}_X)$  e  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  due spazi con funzioni. Sia  $u : X \rightarrow Y$  un morfismo. Si dimostri che per ogni  $x \in X$   $u$  induce un omomorfismo di  $k$ -algebre locali  $u_x^* : \mathcal{O}_{Y,u(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ . Si dimostri che  $u$  è un isomorfismo se e solo se è omeomorfismo tale che per ogni  $x \in X$  l'omomorfismo  $u_x^*$  è un isomorfismo.

– Sia  $(X, \mathcal{O}_X)$  uno spazio con funzioni. Sia  $Y \subset \mathbb{A}_k^n$  un insieme chiuso affine e sia  $\mathcal{O}_Y$  il suo fascio di funzioni regolari. Si dimostri che vi è una corrispondenza biunivoca tra i morfismi  $u : X \rightarrow Y$  degli spazi con funzioni  $(X, \mathcal{O}_X)$  e  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  e gli omomorfismi delle  $k$ -algebre  $\varphi : A(Y) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ .

### Varietà algebriche.

– Si dimostri che  $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = k$ .

– Si dimostri che ogni morfismo  $\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$  trasforma  $\mathbb{P}^n$  in un punto. In particolare  $\mathbb{P}^n$  è isomorfo a una varietà affine se e solo se  $n = 0$ .

– Si dimostri che la varietà quasiaffine  $V = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  non è una varietà affine.

*Suggerimento.* Calcolare  $\Gamma(V, \mathcal{O}_V)$  e utilizzare il teorema degli zeri per le varietà affini.

– Si dimostri che  $V = \mathbb{A}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  è una varietà affine se e solo se  $n = 1$ .

– Siano  $(X, \mathcal{O}_X)$  e  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  due varietà algebriche. Sia  $u : X \rightarrow Y$  un'applicazione. Supponiamo che  $X$  e  $Y$  hanno ricoprimenti di

insiemi aperti  $X = \cup_{i \in I} U_i$  e  $Y = \cup_{j \in J} V_j$  tali che per ogni  $i$  esiste un  $j(i)$  tale che  $u(U_i) \subset V_{j(i)}$  e le restrizioni  $u : U_i \rightarrow V_{j(i)}$  sono morfismi di varietà algebriche. Allora  $u : X \rightarrow Y$  è un morfismo di varietà algebriche.

– Sia  $V \subset \mathbb{P}^n$  una varietà quasi proiettiva. Siano  $F_0(\underline{T}), \dots, F_m(\underline{T})$  polinomi omogenei dello stesso grado nelle variabili  $\underline{T} = (T_1, \dots, T_n)$ . Supponiamo che per ogni  $x \in V$  esiste un  $F_i(\underline{T})$  tale che  $F_i(x) \neq 0$ . Allora l'applicazione  $\phi : V \rightarrow \mathbb{P}^m$  data da  $\phi(x) = (F_0(x) : \dots : F_m(x))$  è un morfismo.

– Sia  $V \subset \mathbb{P}^n$  una varietà quasi proiettiva. Si dimostri che un'applicazione  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{P}^m$  è morfismo se e solo se per ogni punto  $P \in V$  esiste un intorno  $U$  e polinomi omogenei dello stesso grado  $F_0(\underline{T}), \dots, F_m(\underline{T})$  tali che la restrizione  $\varphi|_U$  ha la forma dell'esercizio precedente.

### Varietà quasi proiettive

– Sia  $m = r\ell$ ,  $\ell \geq 2$ . Denotiamo con  $T_\ell$  il sottoinsieme di  $\mathbb{P}^{n,m}$  che corrisponde ai polinomi omogenei in  $n+1$  variabili che sono potenze  $\ell$ -esime di polinomi di grado  $r$ . Si dimostri che  $T_\ell$  è un sottoinsieme chiuso proiettivo, proprio di  $\mathbb{P}^{n,m}$ .

– Si dimostri che la varietà di Segre  $\Sigma_{n,m} \subset \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$  non è contenuta in nessun iperpiano di  $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$ .

– Sia  $X = \mathbb{A}^2 \setminus \{x\}$  dove  $x$  è un punto. Si dimostri che  $X$  non è isomorfa ne a una varietà affine, ne a una varietà proiettiva.

– Si dimostri che la varietà quasi proiettiva  $V = \mathbb{P}^2 \setminus \{x\}$  non è isomorfa né a una varietà quasi affine, né a una varietà proiettiva.

*Suggerimento.* Si calcoli  $\Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ .

– Si dimostri la stessa affermazione per  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1$ .

– Consideriamo l'applicazione di Segre  $s_{1,1} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$ . Sia  $\Sigma_{1,1}$  la quadrica  $w_{00}w_{11} - w_{01}w_{10} = 0$ . Per ogni  $\alpha = (\alpha_0 : \alpha_1) \in \mathbb{P}^1$  poniamo  $L_\alpha = s_{1,1}(\alpha \times \mathbb{P}^1)$  e per ogni  $\beta = (\beta_0 : \beta_1) \in \mathbb{P}^1$  poniamo  $M_\beta = s_{1,1}(\mathbb{P}^1 \times \beta)$ . Si dimostri che  $L_\alpha, \alpha \in \mathbb{P}^1$  e  $M_\beta, \beta \in \mathbb{P}^1$  formano due famiglie di rette contenute in  $\Sigma_{1,1}$  con le seguenti proprietà:

(i) per ogni  $\alpha, \alpha' \in \mathbb{P}^1, \alpha \neq \alpha'$  si ha  $L_\alpha \cap L_{\alpha'} = \emptyset$  e per ogni  $\beta, \beta' \in \mathbb{P}^1, \beta \neq \beta'$  si ha  $M_\beta \cap M_{\beta'} = \emptyset$ ;

(ii) per ogni  $\alpha \in \mathbb{P}^1$  e ogni  $\beta \in \mathbb{P}^1$  si ha  $|L_\alpha \cap M_\beta| = 1$ .

– Si dimostri che  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  non è isomorfa a  $\mathbb{P}^2$ .

*Suggerimento.* Si utilizzi il teorema di Bezout.