Geometria Algebrica A.A. 2014 – 2015
Esercizi

Insiemi algebrici affini, Insiemi algebrici irriducibili.

Negli esercizi si suppone, se non scritto al contrario, che il campo k sia algebricamente chiuso di caratteristica zero, ad esempio $k = \mathbb{C}$.

– Sia $V \subset \mathbb{A}^n_k$ un insieme algebrico affine. Sia L una retta non contenuta in V. Allora l'intersezione di V con L è o un insieme vuoto o un insieme finito.

– Quali degli insiemi seguenti sono insiemi algebrici affini ?

1. $\{(\cos t, \sin t) | t \in [0, 2\pi]\} \subset \mathbb{R}^2$
2. $\{(t, \sin t) | t \in (0, \infty)\} \subset \mathbb{R}^2$

– Si dimostri che gli insiemi chiusi della topologia di Zariski di $\mathbb{A}^2_k$ sono gli insiemi del tipo:

$$\cup_{i=1}^n V(F_i) \cup \{P_1, \dots, P_m\}$$

dove F_i sono polinomi irriducibili e P_j sono punti, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$.

Suggerimento. Si utilizzi che due curve piane hanno infiniti punti in comune se e solo se hanno una componente in comune.

– L'insieme $V \subset \mathbb{A}_k^2$ è dato delle equazioni

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad G(x, y) = x - 1 = 0.$$

Trovare $I(V)$. È vero che $I(V) = (F, G)$?

– Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua di spazi topologici. Supponiamo che X sia irriducibile e $f(X)$ sia denso in Y. Si dimostri che Y è irriducibile.

– Si dimostri che ogni sottospazio affine di $\mathbb{A}_k^n$ è irriducibile.

– Sia k un campo algebricamente chiuso di $char(k) \neq 2$. Trovare le componenti irriducibili dell'insieme $X \subset \mathbb{A}_k^3$ dato dalle equazioni

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0$$

– Sia $V = V(I) \subset \mathbb{A}_k^3$ l'insieme chiuso affine che corrisponde all'ideale $I = (x^2 - yz, xz - x)$. Si scomponga V in componenti irriducibili.

– Sia E uno spazio topologico e sia V un sottoinsieme dotato dalla topologia indotta. Si dimostri che V è irriducibile se e solo se la chiusura $\overline{V}$ è irriducibile.

– Sia E uno spazio topologico. Supponiamo che E sia coperto da insiemi aperti $E = \cup_{i \in I} V_i$, dove ogni V_i è irriducibile e ogni coppia V_i, V_j ha intersezione non vuota. Si dimostri che E è irriducibile.

Algebra di funzioni polinomiali. Applicazioni polinomiali, isomorfismo. Funzioni razionali.

– Sia $V \subset \mathbb{A}^n_k$ un insieme chiuso affine e sia $A(V)$ la sua algebra di funzioni polinomiali. Sia X un qualsiasi sottoinsieme di V. Si dimostri che $\overline{X} = V(I_V(X))$, dove $\overline{X}$ è la chiusura di X in V. In particolare X è denso in V se e solo se $I_V(X) = 0$.

– Sia $X \subset \mathbb{A}^2_k$ la curva $y^2 = x^3$. Si dimostri che l'applicazione $\mathbb{A}^1_k \to X$ data da $t \mapsto (t^2, t^3)$ è un omeomorfismo ma non è un isomorfismo polinomiale.

– Si dimostri che l'iperbole $xy = 1$ non è isomorfa a $\mathbb{A}^1_k$.

– Si dimostri che se $X \subset \mathbb{A}^2_k$ è una conica non degenere a centro allora X non è isomorfa a $\mathbb{A}^1_k$.

– Sia X una conica non degenere a centro. Allora non esistono applicazioni polinomiali dominanti $u : \mathbb{A}^1_k \to X$.

– Considerare l'applicazione polinomiale $u : \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^2_k$ data da $u(x, y) = (x, xy)$. Trovare l'immagine $u(\mathbb{A}^2_k)$. È vero che questo insieme è: aperto; denso; chiuso?

– Sia V un chiuso affine irriducibile e sia $\varphi \in k(V)$ una funzione razionale. Sia $P \in V$ e supponiamo che $\varphi = \frac{f}{g}$ dove $f, g \in A(V)$, $f(P) \neq 0, g(P) = 0$. Si dimostri che $P \notin dom(\varphi)$.

– Sia $C \subset \mathbb{A}^2_k$ la curva $x^2 + y^2 = 1$. Sia $\varphi = \frac{1-y}{x}$. Si calcoli il dominio di φ.

Insiemi algebrici proiettivi.

– Sia $u : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ l'applicazione data di

$$u(\lambda : \mu) = (\lambda^3 : \lambda^2\mu : \lambda\mu^2 : \mu^3)$$

Si dimostri che l'immagine $X = u(\mathbb{P}^1)$ è l'insieme proiettivo definito dalle equazioni $M_{i,j} = 0$, dove $M_{i,j}$ sono i minori 2×2 della matrice

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

– Sia $u : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ l'applicazione data di

$$u(\lambda : \mu) = (\lambda^n : \lambda^{n-1}\mu : \ldots : \lambda\mu^{n-1} : \mu^n)$$

Si dimostri che l'immagine $X = u(\mathbb{P}^1)$ è l'insieme proiettivo definito dalle equazioni $M_{i,j} = 0$, dove $M_{i,j}$ sono i minori 2×2 della matrice

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{n-1} \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$$

N.B. X è detta curva normale razionale di grado n.

– Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ un insieme quasiproiettivo. Si dimostri che X è insieme aperto nell'insieme proiettivo $\overline{X}$.

– Siano $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{P}^n$ punti dello spazio proiettivo. Si dimostri che esiste un iperpiano H, tale che $x_i \notin H$ per ogni i.

Suggerimento: Se $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ si consideri lo spazio proiettivo duale $\mathbb{P}(V^*)$ che parametrizza gli iperpiani in $\mathbb{P}^n$.

– Nell'esercizio precedente supponiamo che $m \geq 2$. Si dimostri che esiste un iperpiano H, tale che $x_1 \in H$ e $x_i \notin H$ per ogni $i \geq 2$.

Fasci. Spazi con funzioni. Varietà algebriche.

– Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio con funzioni. Sia $x \in X$. Si considerino le coppie (f, U) dove U è un insieme aperto di X contenente x e $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Due coppie (f, U) e (g, V) sono equivalenti se esiste un intorno W di x contenuto in $U \cap V$ tale che $f|_W = g|_W$. Le classi di equivalenza di tali coppie si dicono *germi* del fascio $\mathcal{O}_X$ nel punto x e l'insieme dei germi si denota con $\mathcal{O}_{X,x}$. Si dimostri che $\mathcal{O}_{X,x}$ è un anello locale con ideale massimale $M_x = \{(f, U) | f(x) = 0\}$.

– Sia $X \subset \mathbb{A}_k^n$ un insieme chiuso affine. Sia $\mathcal{O}_X$ il fascio delle funzioni regolari su X. Sia $x \in X$. Sia $\mathfrak{m}_x$ l'ideale massimale di $A = A(X)$ corrispondente a x. Sia $S = A \setminus \mathfrak{m}_x$. Si dimostri che l'anello dei quozienti $A_{\mathfrak{m}_x} := S^{-1}A$ è isomorfo all'anello $\mathcal{O}_{X,x}$ dell'esercizio precedente.

– Siano $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$ due spazi con funzioni. Sia $u : X \to Y$ un morfismo. Si dimostri che per ogni $x \in X$ l'applicazione u induce un omomorfismo di k-algebre locali $u_x^* : \mathcal{O}_{Y,u(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$. Si dimostri che un morfismo $u : X \to Y$ è isomorfismo se e solo se u è omeomorfismo tale che per ogni $x \in X$ l'omomorfismo $u_x^* : \mathcal{O}_{Y,u(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ è surgettivo.

– Siano $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$ due spazi con funzioni. Un morfismo $u : X \to Y$ si dice *immersione chiusa* se: a) $Z = u(X)$ è un sottoinsieme chiuso di Y; b) il morfismo $u : X \to Z$ è un isomorfismo, dove Z è dottato del fascio strutturale $\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_Y|_Z$. Si dimostri che un morfismo $u : X \to Y$ è immersione chiusa se e solo se: (i) $u(X)$ è un insieme chiuso in Y; (ii) l'applicazione $u : X \to u(X)$ è un omeomorfismo; (iii) per ogni punto $x \in X$ l'omomorfismo di algebre locali $u_x^* : \mathcal{O}_{Y,u(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ è surgettivo.

– Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio con funzioni. Sia $Y \subset \mathbb{A}^n_k$ un insieme chiuso affine e sia $\mathcal{O}_Y$ il suo fascio di funzioni regolari. Si dimostri che vi è una corrispondenza biunivoca tra i morfismi $u : X \to Y$ degli spazi con funzioni $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$ e gli omomorfismi delle k-algebre $\varphi : A(Y) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

– Si dimostri che $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = k$.

– Si dimostri che ogni morfismo $\mathbb{P}^n \to \mathbb{A}^m$ trasforma $\mathbb{P}^n$ in un punto. In particolare $\mathbb{P}^n$ è isomorfo a una varietà quasi affine se e solo se $n = 0$.

– Si dimostri che la varietà quasiaffine $V = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è una varietà affine.

Suggerimento. Calcolare $\Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ e utilizzare il teorema degli zeri per le varietà affini.

– Si dimostri che $V = \mathbb{A}^n \setminus \{(0,\dots,0)\}$ è una varietà affine se e solo se $n = 1$.

– Sia $V \subset \mathbb{P}^n$ una varietà quasi proiettiva. Siano $F_0(\underline{T}), \dots, F_m(\underline{T})$ polinomi omogenei dello steso grado nelle variabili $\underline{T} = (T_1, \dots, T_n)$. Supponiamo che per ogni $x \in V$ esiste un $F_i(\underline{T})$ tale che $F_i(x) \neq 0$. Allora l'applicazione $\phi : V \to \mathbb{P}^m$ data di $\phi(x) = (F_0(x) : \cdots : F_m(x))$ è un morfismo.

– Sia $V \subset \mathbb{P}^n$ una varietà quasi proiettiva. Si dimostri che un'applicazione $\varphi : V \to \mathbb{P}^m$ è morfismo se e solo se per ogni punto $P \in V$ esiste un intorno U e polinomi omogenei dello stesso grado $F_0(\underline{T}), \dots, F_m(\underline{T})$ tali che la restrizione $\varphi|_U$ ha la forma dell'esercizio precedente.

– Se $X = (x_{ij})$ è una matrice $m \times (m+n)$ con coefficienti nel campo k di rango m denotiamo con $W = [X]$ il sottospazio di k^{m+n} di dimensione m generato dalle righe di X. Consideriamo l'applicazione

$$u : G(m, m+n) \to \mathbb{P}^N$$

data di

$$W = [X] \mapsto (\ldots : M_{i_1 \cdots i_m} : \ldots)$$

dove $M_{i_1 \cdots i_m}$, con $i_1 < \cdots < i_m$, sono tutti i minori $m \times m$ della matrice X. Si dimostri che:

(i) u è applicazione ben definita;

(ii) u è un morfismo;

(iii) u è applicazione iniettiva.

Varietà quasi proiettive

– Si dimostri che tra 9 punti in $\mathbb{P}^2$ passa almeno una cubica.

– Dati 9 punti in $\mathbb{P}^3$ si dimostri che esiste almeno una quadrica che li contiene.

– Sia $m = r\ell,\ \ell \geq 2$. Denotiamo con T_ℓ il sottoinsieme di $\mathbb{P}^{\nu_{n,m}}$ che corrisponde ai polinomi omogenei in $n+1$ variabili che sono potenze ℓ-esime di polinomi di grado r. Si dimostri che T_ℓ è un sottoinsieme chiuso proiettivo, proprio di $\mathbb{P}^{\nu_{n,m}}$.

– Si dimostri che la varietà di Segre $\Sigma_{n,m} \subset \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$ non è contenuta in nessun iperpiano di $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$.

– Sia $X = \mathbb{A}^2 \setminus \{x\}$ dove x è un punto. Si dimostri che X non è isomorfa ne a una varietà affine, ne a una varietà proiettiva.

– Si dimostri che la varietà quasi proiettiva $V = \mathbb{P}^2 \setminus \{x\}$ non è isomorfa ne a una varietà quasi affine, ne a una varietà proiettiva.

Suggerimento. Si calcoli $\Gamma(V, \mathcal{O}_V)$.

– Si dimostri che la varietà quasi proiettiva $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1$ non è isomorfa ne a una varietà quasi affine, ne a una varietà proiettiva.

– Consideriamo l'applicazione di Segre $s_{1,1} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$. Sia $\Sigma_{1,1}$ la quadrica $w_{00}w_{11} - w_{01}w_{10} = 0$. Per ogni $\alpha = (\alpha_0 : \alpha_1) \in \mathbb{P}^1$ poniamo $L_\alpha = s_{1,1}(\alpha \times \mathbb{P}^1)$ e per ogni $\beta = (\beta_0 : \beta_1) \in \mathbb{P}^1$ poniamo $M_\beta = s_{1,1}(\mathbb{P}^1 \times \beta)$. Si dimostri che $L_\alpha, \alpha \in \mathbb{P}^1$ e $M_\beta, \beta \in \mathbb{P}^1$ formano due famiglie di rette contenute in $\Sigma_{1,1}$ con le seguenti proprietà:

(i) per ogni $\alpha, \alpha' \in \mathbb{P}^1, \alpha \neq \alpha'$ si ha $L_\alpha \cap L_{\alpha'} = \emptyset$ e per ogni $\beta, \beta' \in \mathbb{P}^1, \beta \neq \beta'$ si ha $M_\beta \cap M_{\beta'} = \emptyset$;

(ii) per ogni $\alpha \in \mathbb{P}^1$ e ogni $\beta \in \mathbb{P}^1$ si ha $|L_\alpha \cap M_\beta| = 1$.

– Si dimostri che $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ non è isomorfa a $\mathbb{P}^2$.

Suggerimento. Si utilizzi il teorema di Bezout.

– [1]*Sia

$$F_t(T_1, T_2, \ldots, T_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1,\ldots,i_n}(t) T_1^{i_1} T_2^{i_2} \cdots T_n^{i_n}$$

una famiglia di polinomi di grado $\leq d$, dove $a_{i_1,\ldots,i_n}(t)$ sono funzioni razionali del parametro $t \in \mathbb{A}^1$. Supponiamo che per $t = c$ il polinomio F_c sia irriducibile di grado d. Si dimostri che esiste un sottoinsieme finito $\Sigma \subset \mathbb{A}^1$, tale che per ogni $t \in \mathbb{A}^1 \setminus \Sigma$ il polinomio F_t è irriducibile di grado d.

[1]Gli esercizi segnalati con * non saranno chiesti all'esame orale

Applicazioni razionali

– Si dimostri che l'applicazione polinomiale $u : \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^2_k$ data da $u(x, y) = (x, xy)$ è un isomorfismo birazionale.

– Si dimostri che la cubica nodale $y^2 = x^2 + x^3$ è razionale.

– Si dimostri che ogni conica non degenere $C \subset \mathbb{A}^2_k$ è razionale.

– Sia X una ipersiperficie irriducibile, la quale equazione ha la forma

$$f_{n-1}(T_1, \ldots, T_n) + f_n(T_1, \ldots, T_n) = 0$$

dove f_{n-1} e f_n sono polinomi omogenei di gradi $n-1$ e n rispettivamente. Si dimostri che X è birazionalmente isomorfa a $\mathbb{A}^{n-1}$.

– Sia $V \subset \mathbb{P}^n$ una varietà quasi proiettiva. Si dimostri che ogni applicazione razionale $\varphi : V \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ è data da $m + 1$ polinomi omogenei dello stesso grado $F_0(\underline{T}), \ldots, F_m(\underline{T})$ tali che V non è contenuta in $V(F_0, \ldots, F_m)$ e $\varphi = (F_0 : \cdots : F_m)$.

– Si dimostri che ogni applicazione razionale $f : \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ è un morfismo, cioè $dom(f) = \mathbb{P}^1$.