

**Geometria Algebrica A.A. 2020 – 2021**  
**Esercizi**

**Insiemi algebrici affini, Insiemi algebrici irriducibili.**

Negli esercizi si suppone, se non scritto al contrario, che il campo  $k$  sia algebricamente chiuso di caratteristica zero, ad esempio  $k = \mathbb{C}$ .

– Sia  $V \subset \mathbb{A}_k^n$  un insieme algebrico affine. Sia  $L$  una retta non contenuta in  $V$ . Allora l'intersezione di  $V$  con  $L$  è o un insieme vuoto o un insieme finito.

– Quali degli insiemi seguenti sono insiemi algebrici affini ?

1.  $\{(\cos t, \sin t) | t \in [0, 2\pi]\} \subset \mathbb{R}^2$

2.  $\{(t, \sin t) | t \in (0, \infty)\} \subset \mathbb{R}^2$

– Si dimostri che gli insiemi chiusi della topologia di Zariski di  $\mathbb{A}_k^2$  sono  $\mathbb{A}_k^2$ ,  $\emptyset$  e gli insiemi del tipo:

$$\cup_{i=1}^n V(F_i) \cup \{P_1, \dots, P_m\}$$

dove  $F_i$  sono polinomi irriducibili e  $P_j$  sono punti,  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$ .

*Suggerimento.* Si utilizzi che due curve piane hanno infiniti punti in comune se e solo se hanno una componente in comune.

– L'insieme  $V \subset \mathbb{A}_k^2$  è dato dalle equazioni

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad G(x, y) = x - 1 = 0.$$

Trovare  $I(V)$ . È vero che  $I(V) = (F, G)$ ?

– Sia  $f : X \rightarrow Y$  un'applicazione continua di spazi topologici. Supponiamo che  $X$  sia irriducibile e  $f(X)$  sia denso in  $Y$ . Si dimostri che  $Y$  è irriducibile.

– Si dimostri che ogni sottospazio affine di  $\mathbb{A}_k^n$  è irriducibile.

– Sia  $k$  un campo algebricamente chiuso di  $\text{char}(k) \neq 2$ . Trovare le componenti irriducibili dell'insieme  $X \subset \mathbb{A}_k^3$  dato dalle equazioni

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0$$

– Sia  $V = V(I) \subset \mathbb{A}_k^3$  l'insieme chiuso affine che corrisponde all'ideale  $I = (x^2 - yz, xz - x)$ . Si scomponga  $V$  in componenti irriducibili.

– Sia  $E$  uno spazio topologico e sia  $V$  un sottoinsieme dotato dalla topologia indotta. Si dimostri che  $V$  è irriducibile se e solo se la chiusura  $\overline{V}$  è irriducibile.

– Sia  $E$  uno spazio topologico. Supponiamo che  $E$  sia coperto da insiemi aperti  $E = \cup_{i \in I} V_i$ , dove ogni  $V_i$  è irriducibile e ogni coppia  $V_i, V_j$  ha intersezione non vuota. Si dimostri che  $E$  è irriducibile.

**Algebra di funzioni polinomiali. Applicazioni polinomiali, isomorfismo. Funzioni razionali.**

- Sia  $V \subset \mathbb{A}_k^n$  un insieme chiuso affine e sia  $A(V)$  la sua algebra di funzioni polinomiali. Sia  $X$  un qualsiasi sottoinsieme di  $V$ . Si dimostri che  $\overline{X} = V(I_V(X))$ , dove  $\overline{X}$  è la chiusura di  $X$  in  $V$ . In particolare  $X$  è denso in  $V$  se e solo se  $I_V(X) = 0$ .
- Sia  $X \subset \mathbb{A}_k^2$  la curva  $y^2 = x^3$ . Si dimostri che l'applicazione  $\mathbb{A}_k^1 \rightarrow X$  data da  $t \mapsto (t^2, t^3)$  è un omeomorfismo ma non è un isomorfismo polinomiale.
- Si dimostri che l'iperbole  $xy = 1$  non è isomorfa a  $\mathbb{A}_k^1$ .
- Si dimostri che se  $X \subset \mathbb{A}_k^2$  è una conica non degenera a centro allora  $X$  non è isomorfa a  $\mathbb{A}_k^1$ .
- Sia  $X$  una conica non degenera a centro. Allora non esistono applicazioni polinomiali dominanti  $u : \mathbb{A}_k^1 \rightarrow X$ .
- Considerare l'applicazione polinomiale  $u : \mathbb{A}_k^2 \rightarrow \mathbb{A}_k^2$  data da  $u(x, y) = (x, xy)$ . Trovare l'immagine  $u(\mathbb{A}_k^2)$ . È vero che questo insieme è: aperto; denso; chiuso?
- Sia  $V$  un chiuso affine irriducibile e sia  $\varphi \in k(V)$  una funzione razionale. Sia  $P \in V$  e supponiamo che  $\varphi = \frac{f}{g}$  dove  $f, g \in A(V)$ ,  $f(P) \neq 0, g(P) = 0$ . Si dimostri che  $P \notin \text{dom}(\varphi)$ .
- Sia  $C \subset \mathbb{A}_k^2$  la curva  $x^2 + y^2 = 1$ . Sia  $\varphi = \frac{1-y}{x}$ . Si calcoli il dominio di  $\varphi$ .

## Insiemi algebrici proiettivi.

– Sia  $u : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$  l'applicazione data di

$$u((x_0 : x_1)) = (x_0^3 : x_0^2x_1 : x_0x_1^2 : x_1^3)$$

Si dimostri che l'immagine  $X = u(\mathbb{P}^1)$  è l'insieme proiettivo definito dalle equazioni  $M_{i,j} = 0$ , dove  $M_{i,j}$  sono i minori  $2 \times 2$  della matrice

$$\begin{pmatrix} T_0 & T_1 & T_2 \\ T_1 & T_2 & T_3 \end{pmatrix}$$

L'insieme proiettivo  $X$  è detto cubica gobba.

– Sia  $X$  la cubica gobba. Siano  $P_1, P_2, P_3, P_4$  quattro punti distinti appartenenti a  $X$ . Si dimostri che essi non appartengono ad alcun piano in  $\mathbb{P}^3$ .

– Siano  $P_1, \dots, P_7$  sette punti della cubica gobba  $X$ . Si dimostri che se una quadrica  $Q$  in  $\mathbb{P}^3$  contiene i sette punti  $P_1, \dots, P_7$  allora essa contiene la cubica gobba  $X$ .

– Sia  $u : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$  l'applicazione data di

$$u((x_0 : x_1)) = (x_0^n : x_0^{n-1}x_1 : \dots : x_0x_1^{n-1} : x_1^n)$$

Si dimostri che l'immagine  $X = u(\mathbb{P}^1)$  è l'insieme proiettivo definito dalle equazioni  $M_{i,j} = 0$ , dove  $M_{i,j}$  sono i minori  $2 \times 2$  della matrice

$$\begin{pmatrix} T_0 & T_1 & \dots & T_{n-1} \\ T_1 & T_2 & \dots & T_n \end{pmatrix}$$

N.B. L'insieme proiettivo  $X$  è detto curva normale razionale di grado  $n$ .

– Sia  $X \subset \mathbb{P}^n$  la curva normale razionale di grado  $n$ . Sia  $\Sigma = \{P_1, \dots, P_d\}$  un insieme di  $d$  punti distinti di  $X$ , dove  $d > n$ . Si dimostri che nessun sottoinsieme di  $n + 1$  punti di  $\Sigma$  appartiene ad un iperpiano di  $\mathbb{P}^n$ .<sup>1</sup>.

– Sia  $X \subset \mathbb{P}^n$  un insieme quasiproiettivo. Si dimostri che  $X$  è insieme aperto nell'insieme proiettivo  $\overline{X}$ .

– Siano  $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{P}^n$  punti dello spazio proiettivo. Si dimostri che esiste un iperpiano  $H$ , tale che  $x_i \notin H$  per ogni  $i$ .

*Suggerimento:* Se  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$  si consideri lo spazio proiettivo duale  $\mathbb{P}(V^*)$  che parametrizza gli iperpiani in  $\mathbb{P}^n$ .

– Nell'esercizio precedente supponiamo che  $m \geq 2$ . Si dimostri che esiste un iperpiano  $H$ , tale che  $x_1 \in H$  e  $x_i \notin H$  per ogni  $i \geq 2$ .

---

<sup>1</sup>Si dice che l'insieme  $\Sigma$  è in posizione generale lineare.

## Varietà algebriche.

– Sia  $(X, \mathcal{O}_X)$  uno spazio con funzioni. Sia  $Y \subset \mathbb{A}_k^n$  un insieme chiuso affine e sia  $\mathcal{O}_Y$  il suo fascio di funzioni regolari. Si dimostri che vi è una corrispondenza biunivoca tra i morfismi  $u : X \rightarrow Y$  degli spazi con funzioni  $(X, \mathcal{O}_X)$  e  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  e gli omomorfismi delle  $k$ -algebre  $\varphi : A(Y) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ .

– Si dimostri che  $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = k$ .

– Si dimostri che ogni morfismo  $\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$  trasforma  $\mathbb{P}^n$  in un punto. In particolare  $\mathbb{P}^n$  è isomorfo a una varietà quasi affine se e solo se  $n = 0$ .

– Si dimostri che la varietà quasi affine  $V = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  non è una varietà affine.

*Suggerimento.* Calcolare  $\Gamma(V, \mathcal{O}_V)$  e utilizzare il teorema degli zeri per le varietà affini.

– Si dimostri che  $V = \mathbb{A}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  è una varietà affine se e solo se  $n = 1$ .

– Sia  $V \subset \mathbb{P}^n$  una varietà quasi proiettiva. Siano  $F_0(\underline{t}), \dots, F_m(\underline{t})$  polinomi omogenei dello stesso grado nelle variabili  $\underline{t} = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ . Supponiamo che per ogni  $x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in V$  esista  $F_i(\underline{t})$  tale che  $x$  non sia zero di  $F_i$ , allora l'applicazione  $\phi : V \rightarrow \mathbb{P}^m$  data da  $\phi(x) = (F_0(x_0, \dots, x_n) : \dots : F_m(x_0, \dots, x_n))$  è un morfismo.

– Sia  $V \subset \mathbb{P}^n$  un insieme quasi proiettivo. Si dimostri che un'applicazione  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{P}^m$  è morfismo se e solo se per ogni punto  $P \in V$  esiste un intorno  $U$  e polinomi omogenei dello

stesso grado  $F_0(\underline{T}), \dots, F_m(\underline{T})$  tali che la restrizione  $\varphi|_U$  ha la forma dell'esercizio precedente.

– Se  $X = (x_{ij})$  è una matrice  $m \times (m + n)$  con coefficienti nel campo  $k$  di rango  $m$  denotiamo con  $W = [X]$  il sottospazio di  $k^{m+n}$  di dimensione  $m$  generato dalle righe di  $X$ . Consideriamo l'applicazione

$$u : G(m, m + n) \rightarrow \mathbb{P}^N$$

data di

$$W = [X] \mapsto (\dots : M_{i_1 \dots i_m} : \dots)$$

dove  $M_{i_1 \dots i_m}$ , con  $i_1 < \dots < i_m$ , sono tutti i minori  $m \times m$  della matrice  $X$ . Si dimostri che:

- (i)  $u$  è applicazione ben definita;
- (ii)  $u$  è un morfismo;
- (iii)  $u$  è applicazione iniettiva.

## Varietà quasi proiettive

- Si dimostri che tra 9 punti in  $\mathbb{P}^2$  passa almeno una cubica.
- Dati 9 punti in  $\mathbb{P}^3$  si dimostri che esiste almeno una quadrica che li contiene.
- Sia  $\nu_{n,m} = \binom{n+m}{n} - 1$ , dove  $m = r\ell$ ,  $\ell \geq 2$ . Denotiamo con  $T_\ell$  il sottoinsieme di  $\mathbb{P}^{\nu_{n,m}}$  che corrisponde ai polinomi omogenei in  $n+1$  variabili che sono potenze  $\ell$ -esime di polinomi di grado  $r$ . Si dimostri che  $T_\ell$  è un sottoinsieme chiuso proiettivo, proprio di  $\mathbb{P}^{\nu_{n,m}}$ .
- Si dimostri che la varietà di Segre  $\Sigma_{n,m} \subset \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$  non è contenuta in nessun iperpiano di  $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$ .
- Sia  $X = \mathbb{A}^2 \setminus \{x\}$  dove  $x$  è un punto. Si dimostri che  $X$  non è isomorfa né a una varietà affine, né a una varietà proiettiva.
- Si dimostri che la varietà quasi proiettiva  $V = \mathbb{P}^2 \setminus \{x\}$  non è isomorfa né a una varietà quasi affine, né a una varietà proiettiva.  
*Suggerimento.* Si calcoli  $\Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ .
- Si dimostri che la varietà quasi proiettiva  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1$  non è isomorfa né a una varietà quasi affine, né a una varietà proiettiva.

– Consideriamo l'applicazione di Segre  $s_{1,1} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$ . Sia  $\Sigma_{1,1}$  la quadrica  $w_{00}w_{11} - w_{01}w_{10} = 0$ . Per ogni  $\alpha = (\alpha_0 : \alpha_1) \in \mathbb{P}^1$  poniamo  $L_\alpha = s_{1,1}(\alpha \times \mathbb{P}^1)$  e per ogni  $\beta = (\beta_0 : \beta_1) \in \mathbb{P}^1$  poniamo  $M_\beta = s_{1,1}(\mathbb{P}^1 \times \beta)$ . Si dimostri che  $L_\alpha, \alpha \in \mathbb{P}^1$  e  $M_\beta, \beta \in \mathbb{P}^1$  formano due famiglie di rette contenute in  $\Sigma_{1,1}$  con le seguenti proprietà:

(i) per ogni  $\alpha, \alpha' \in \mathbb{P}^1, \alpha \neq \alpha'$  si ha  $L_\alpha \cap L_{\alpha'} = \emptyset$  e per ogni  $\beta, \beta' \in \mathbb{P}^1, \beta \neq \beta'$  si ha  $M_\beta \cap M_{\beta'} = \emptyset$ ;

(ii) per ogni  $\alpha \in \mathbb{P}^1$  e ogni  $\beta \in \mathbb{P}^1$  si ha  $|L_\alpha \cap M_\beta| = 1$ .

– Sia il campo base  $k$  algebricamente chiuso di caratteristica  $\neq 2$ . Sia  $Q \subset \mathbb{P}^3$  una quadrica di rango 4. Si dimostri che esistono due famiglie di rette  $L_\alpha, \alpha \in \mathbb{P}^1$  e  $M_\beta, \beta \in \mathbb{P}^1$  contenute in  $Q$ , tali che

- $L_\alpha \cap L_{\alpha'} = \emptyset$  se  $\alpha \neq \alpha'$  e  $M_\beta \cap M_{\beta'} = \emptyset$  se  $\beta \neq \beta'$
- $|L_\alpha \cap M_\beta| = 1$  per  $\forall \alpha, \beta$ .

– Si dimostri che la varietà proiettiva  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  non è isomorfa a  $\mathbb{P}^2$ .

*Suggerimento.* Si utilizzi il teorema di Bézout.

– Sia il campo base  $k$  algebricamente chiuso. È noto che  $\mathbb{P}^{r,n,m}$  parametrizza i polinomi omogenei di grado  $m$  nelle indeterminate  $x_0, x_1, \dots, x_n$  a meno di moltiplicazione per costanti non nulli. Si parametrizzi l'insieme  $\{F(t_1, \dots, t_n) \bmod k^*\}$ , dove  $F$  varia tra i polinomi di grado  $m$ , tramite i punti di una varietà algebrica irriducibile. Si dimostri che se  $n \geq 2$  il polinomio generico di grado  $m$  è irriducibile, cioè nella varietà i polinomi riducibili corrispondono ad un sottoinsieme chiuso proprio.

– Sia il campo base  $k$  algebricamente chiuso e sia

$$F_t(t_1, t_2, \dots, t_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1, \dots, i_n}(t) t_1^{i_1} t_2^{i_2} \cdots t_n^{i_n}$$

una famiglia di polinomi di grado  $\leq d$ , dove  $a_{i_1, \dots, i_n}(t)$  sono funzioni razionali del parametro  $t \in \mathbb{A}^1$ . Supponiamo che per  $t = c$  il polinomio  $F_c$  sia irriducibile di grado  $d$ . Si dimostri che esiste un sottoinsieme finito  $\Sigma \subset \mathbb{A}^1$ , tale che per ogni  $t \in \mathbb{A}^1 \setminus \Sigma$  il polinomio  $F_t$  è irriducibile di grado  $d$ .

– Sia  $k = \mathbb{R}$ . Sia  $F(t, x, y) \in \mathbb{R}[t, x, y]$  un polinomio. Al variare  $t \in \mathbb{R}$  otteniamo una famiglia di polinomi in  $\mathbb{R}[x, y]$  parametrizzati dal parametro  $t$ . Poniamo  $f_t(x, y) = F(t, x, y)$ . Supponiamo che

$$F(t, x, y) = a_1 + a_2 x^4 + a_3 y^4 + tG(t, x, y), \quad a_i \neq 0 \quad \text{per} \quad \forall a_i$$

dove il grado di  $G(t, x, y)$  rispetto alle variabili  $x, y$  è minore o uguale a 4. Si dimostri che esiste un  $\epsilon > 0$ , tale che  $f_t(x, y)$  è irriducibile per ogni  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|t| < \epsilon$ .