Geometria Algebrica A.A. 2022 – 2023
Esercizi

Insiemi algebrici affini, Insiemi algebrici irriducibili.

Negli esercizi si suppone, se non scritto al contrario, che il campo k sia algebricamente chiuso di caratteristica zero, ad esempio $k = \mathbb{C}$.

– Sia k un campo infinito. Sia $V \subset \mathbb{A}^n_k$ un insieme algebrico affine. Sia L una retta non contenuta in V. Allora l'intersezione di V con L è o un insieme vuoto o un insieme finito.

– Sia $k = \mathbb{R}$. Quali degli insiemi seguenti sono insiemi algebrici affini ?

1. $\{(\cos t, \sin t) | t \in [0, 2\pi]\} \subset \mathbb{R}^2$
2. $\{(t, \sin t) | t \in (0, \infty)\} \subset \mathbb{R}^2$

– Sia k un campo infinito. Si dimostri che gli insiemi chiusi della topologia di Zariski di $\mathbb{A}^2_k$ sono $\mathbb{A}^2_k$, $\emptyset$ e gli insiemi del tipo:

$$\cup_{i=1}^n V(F_i) \cup \{P_1, \dots, P_m\}$$

dove F_i sono polinomi irriducibili e P_j sono punti, $i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, m$.

Suggerimento. Si utilizzi che due curve piane hanno infiniti punti in comune se e solo se hanno una componente in comune.

– L'insieme $V \subset \mathbb{A}_k^2$ è dato dalle equazioni

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad G(x,y) = x - 1 = 0.$$

Trovare $I(V)$. È vero che $I(V) = (F, G)$?

– Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua di spazi topologici. Supponiamo che X sia irriducibile e $f(X)$ sia denso in Y. Si dimostri che Y è irriducibile.

– Si dimostri che ogni sottospazio affine di $\mathbb{A}_k^n$ è irriducibile.

– Sia k un campo algebricamente chiuso di $char(k) \neq 2$. Trovare le componenti irriducibili dell'insieme $X \subset \mathbb{A}_k^3$ dato dalle equazioni

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0$$

– Sia $V = V(I) \subset \mathbb{A}_k^3$ l'insieme chiuso affine che corrisponde all'ideale $I = (x^2 - yz, xz - x)$. Si scomponga V in componenti irriducibili.

– Sia E uno spazio topologico e sia V un sottoinsieme dotato dalla topologia indotta. Si dimostri che V è irriducibile se e solo se la chiusura $\overline{V}$ è irriducibile.

– Sia E uno spazio topologico. Supponiamo che E sia coperto da insiemi aperti $E = \cup_{i \in I} V_i$, dove ogni V_i è irriducibile e ogni coppia V_i, V_j ha intersezione non vuota. Si dimostri che E è irriducibile.

Algebra di funzioni polinomiali. Applicazioni polinomiali, isomorfismo. Funzioni razionali.

– Sia $V \subset \mathbb{A}^n_k$ un insieme chiuso affine e sia $A(V)$ la sua algebra di funzioni polinomiali. Sia X un qualsiasi sottoinsieme di V. Si dimostri che $\overline{X} = V(I_V(X))$, dove $\overline{X}$ è la chiusura di X in V. In particolare X è denso in V se e solo se $I_V(X) = 0$.

– Sia $X \subset \mathbb{A}^2_k$ la curva $y^2 = x^3$. Si dimostri che l'applicazione $\mathbb{A}^1_k \to X$ data da $t \mapsto (t^2, t^3)$ è un omeomorfismo ma non è un isomorfismo polinomiale.

– Si dimostri che l'iperbole $xy = 1$ non è isomorfa a $\mathbb{A}^1_k$.

– Si dimostri che se $X \subset \mathbb{A}^2_k$ è una conica non degenere a centro allora X non è isomorfa a $\mathbb{A}^1_k$.

– Sia X una conica non degenere a centro. Allora non esistono applicazioni polinomiali dominanti $u : \mathbb{A}^1_k \to X$.

– Considerare l'applicazione polinomiale $u : \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^2_k$ data da $u(x, y) = (x, xy)$. Trovare l'immagine $u(\mathbb{A}^2_k)$. È vero che questo insieme è: aperto; denso; chiuso?

– Sia V un chiuso affine irriducibile e sia $\varphi \in k(V)$ una funzione razionale. Sia $P \in V$ e supponiamo che $\varphi = \frac{f}{g}$ dove $f, g \in A(V)$, $f(P) \neq 0, g(P) = 0$. Si dimostri che $P \notin dom(\varphi)$.

– Sia $C \subset \mathbb{A}^2_k$ la curva $x^2 + y^2 = 1$. Sia $\varphi = \frac{1-y}{x}$. Si calcoli il dominio di φ.

Insiemi algebrici proiettivi.

– Sia $u : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ l'applicazione definita da

$$u((x_0 : x_1)) = (x_0^3 : x_0^2 x_1 : x_0 x_1^2 : x_1^3)$$

Si dimostri che l'immagine $X = u(\mathbb{P}^1)$ è l'insieme proiettivo definito dalle equazioni $M_{i,j} = 0$, dove $M_{i,j}$ sono i minori 2×2 della matrice

$$\begin{pmatrix} T_0 & T_1 & T_2 \\ T_1 & T_2 & T_3 \end{pmatrix}$$

L'insieme proiettivo X è detto cubica gobba.

– Sia X la cubica gobba. Siano P_1, P_2, P_3, P_4 quattro punti distinti appartenenti a X. Si dimostri che essi non appartengono ad alcun piano in $\mathbb{P}^3$.

– Siano $P_1, \ldots, P_7$ sette punti della cubica gobba X. Si dimostri che se una quadrica Q in $\mathbb{P}^3$ contiene i sette punti $P_1, \ldots, P_7$ allora essa contiene la cubica gobba X.

– Sia $u : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ l'applicazione data di

$$u((x_0 : x_1)) = (x_0^n : x_0^{n-1} x_1 : \ldots : x_0 x_1^{n-1} : x_1^n)$$

Si dimostri che l'immagine $X = u(\mathbb{P}^1)$ è l'insieme proiettivo definito dalle equazioni $M_{i,j} = 0$, dove $M_{i,j}$ sono i minori 2×2 della matrice

$$\begin{pmatrix} T_0 & T_1 & \ldots & T_{n-1} \\ T_1 & T_2 & \ldots & T_n \end{pmatrix}$$

N.B. L'insieme proiettivo X è detto curva normale razionale di grado n.

– Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ la curva normale razionale di grado n. Sia $\Sigma = \{P_1, \dots, P_d\}$ un insieme di d punti distinti di X, dove $d > n$. Si dimostri che nessun sottoinsieme di $n+1$ punti di Σ appartiene ad un iperpiano di $\mathbb{P}^n$.[1].

– Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ un insieme quasiproiettivo. Si dimostri che X è insieme aperto nell'insieme proiettivo $\overline{X}$.

– Siano $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{P}^n$ punti dello spazio proiettivo. Si dimostri che esiste un iperpiano H, tale che $x_i \notin H$ per ogni i.

Suggerimento: Se $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ si consideri lo spazio proiettivo duale $\mathbb{P}(V^*)$ che parametrizza gli iperpiani in $\mathbb{P}^n$.

– Nell'esercizio precedente supponiamo che $m \geq 2$. Si dimostri che esiste un iperpiano H, tale che $x_1 \in H$ e $x_i \notin H$ per ogni $i \geq 2$.

[1] Si dice che l'insieme Σ è in posizione generale lineare.

Varietà algebriche.

– Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio con funzioni. Sia $Y \subset \mathbb{A}^n_k$ un insieme chiuso affine e sia $\mathcal{O}_Y$ il suo fascio di funzioni regolari. Si dimostri che vi è una corrispondenza biunivoca tra i morfismi $u : X \to Y$ degli spazi con funzioni $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$ e gli omomorfismi delle k-algebre $\varphi : A(Y) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

– Si dimostri che $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = k$.

– Si dimostri che ogni morfismo $\mathbb{P}^n \to \mathbb{A}^m$ trasforma $\mathbb{P}^n$ in un punto. In particolare $\mathbb{P}^n$ è isomorfo a una varietà quasi affine se e solo se $n = 0$.

– Si dimostri che la varietà quasiaffine $V = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ non è una varietà affine.

Suggerimento. Calcolare $\Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ e utilizzare il teorema degli zeri per le varietà affini.

– Si dimostri che $V = \mathbb{A}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ è una varietà affine se e solo se $n = 1$.

– Sia $V \subset \mathbb{P}^n$ una varietà quasi proiettiva. Siano $F_0(\underline{t}), \dots, F_m(\underline{t})$ polinomi omogenei dello stesso grado nelle variabili $\underline{t} = (t_0, t_1, \dots, t_n)$. Supponiamo che per ogni $x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in V$ esista $F_i(\underline{t})$ tale che x non sia zero di F_i, allora l'applicazione $\phi : V \to \mathbb{P}^m$ data da $\phi(x) = (F_0(x_0, \dots, x_n) : \dots : F_m(x_0, \dots, x_n))$ è un morfismo.

– Sia $V \subset \mathbb{P}^n$ un insieme quasi proiettivo. Si dimostri che un'applicazione $\varphi : V \to \mathbb{P}^m$ è morfismo se e solo se per ogni punto $P \in V$ esiste un intorno U e polinomi omogenei dello stesso grado $F_0(\underline{T}), \ldots, F_m(\underline{T})$ tali che la restrizione $\varphi|_U$ ha la forma dell'esercizio precedente.

– Sia $\varphi : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ una proiettività. Si dimostri che φ è un isomorphismo.[2]

– Si dimostri che la varietà di Grassmann $G(m, m+n)$ è irriducibile.

– Se $X = (x_{ij})$ è una matrice $m \times (m+n)$ con coefficienti nel campo k di rango m denotiamo con $W = [X]$ il sottospazio di k^{m+n} di dimensione m generato dalle righe di X. Consideriamo l'applicazione

$$u : G(m, m+n) \to \mathbb{P}^N$$

data di

$$W = [X] \mapsto (\ldots : M_{i_1 \cdots i_m} : \ldots)$$

dove $M_{i_1 \cdots i_m}$, con $i_1 < \cdots < i_m$, sono tutti i minori $m \times m$ della matrice X. Si dimostri che:

(i) u è applicazione ben definita;
(ii) u è un morfismo;
(iii) u è applicazione iniettiva.

[2]Un isomorfismo di una varietà algebrica in se stessa $\varphi : X \to X$ si dice automorfismo di X.

Varietà quasi proiettive

– Si dimostri che tra 9 punti in $\mathbb{P}^2$ passa almeno una cubica.

– Dati 9 punti in $\mathbb{P}^3$ si dimostri che esiste almeno una quadrica che li contiene.

– Sia $r_{n,m} = \binom{n+m}{n} - 1$, dove $m = r\ell,\ \ell \geq 2$. Denotiamo con T_ℓ il sottoinsieme di $\mathbb{P}^{r_{n,m}}$ che corrisponde ai polinomi omogenei in $n+1$ variabili che sono potenze ℓ-esime di polinomi di grado r. Si dimostri che T_ℓ è un sottoinsieme chiuso proiettivo, proprio di $\mathbb{P}^{r_{n,m}}$.

– Si dimostri che la varietà di Segre $\Sigma_{n,m} \subset \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$ non è contenuta in nessun iperpiano di $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$.

– Sia $X = \mathbb{A}^2 \setminus \{x\}$ dove x è un punto. Si dimostri che X non è isomorfa né a una varietà affine, né a una varietà proiettiva.

– Si dimostri che la varietà quasi proiettiva $V = \mathbb{P}^2 \setminus \{x\}$ non è isomorfa né a una varietà quasi affine, né a una varietà proiettiva.

Suggerimento. Si calcoli $\Gamma(V, \mathcal{O}_V)$.

– Si dimostri che la varietà quasi proiettiva $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1$ non è isomorfa né a una varietà quasi affine, né a una varietà proiettiva.

– Consideriamo l'applicazione di Segre $s_{1,1} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$. Sia $\Sigma_{1,1}$ la quadrica $w_{00}w_{11} - w_{01}w_{10} = 0$. Per ogni $\alpha = (\alpha_0 : \alpha_1) \in \mathbb{P}^1$ poniamo $L_\alpha = s_{1,1}(\alpha \times \mathbb{P}^1)$ e per ogni $\beta = (\beta_0 : \beta_1) \in \mathbb{P}^1$ poniamo $M_\beta = s_{1,1}(\mathbb{P}^1 \times \beta)$. Si dimostri che $L_\alpha, \alpha \in \mathbb{P}^1$ e $M_\beta, \beta \in \mathbb{P}^1$ formano due famiglie di rette contenute in $\Sigma_{1,1}$ con le seguenti proprietà:

(i) per ogni $\alpha, \alpha' \in \mathbb{P}^1, \alpha \neq \alpha'$ si ha $L_\alpha \cap L_{\alpha'} = \emptyset$ e per ogni $\beta, \beta' \in \mathbb{P}^1, \beta \neq \beta'$ si ha $M_\beta \cap M_{\beta'} = \emptyset$;

(ii) per ogni $\alpha \in \mathbb{P}^1$ e ogni $\beta \in \mathbb{P}^1$ si ha $|L_\alpha \cap M_\beta| = 1$.

– Sia il campo base k algebricamente chiuso di caratteristica $\neq 2$. Sia $Q \subset \mathbb{P}^3$ una quadrica di rango 4. Si dimostri che esistono due famiglie di rette $L_\alpha, \alpha \in \mathbb{P}^1$ e $M_\beta, \beta \in \mathbb{P}^1$ contenute in Q, tali che

- $L_\alpha \cap L_{\alpha'} = \emptyset$ se $\alpha \neq \alpha'$ e $M_\beta \cap M_{\beta'} = \emptyset$ se $\beta \neq \beta'$
- $|L_\alpha \cap M_\beta| = 1$ per $\forall \alpha, \beta$.

– Si dimostri che la varietà proiettiva $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ non è isomorfa a $\mathbb{P}^2$.

Suggerimento. Si utilizzi il teorema di Bézout.

– Sia il campo base k algebricamente chiuso. È noto che $\mathbb{P}^{r_{n,m}}$ parametrizza i polinomi omogenei di grado m nelle indeterminate $x_0, x_1, \ldots, x_n$ a meno di moltiplicazione per costanti non nulli. Si parametrizzi l'insieme $\{F(t_1, \ldots, t_n) \mathrm{mod} k^*\}$, dove F varia tra i polinomi do grado m, tramite i punti di una varietà algebrica irriducibile. Si dimostri che se $n \geq 2$ il polinomio generico di grado m è irriducibile, cioè nella varietà i polinomi riducibili corrispondono ad un sottoinsieme chiuso proprio.

– Sia il campo base k algebricamente chiuso e sia

$$F_t(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n} a_{i_1, \ldots, i_n}(t) t_1^{i_1} t_2^{i_2} \cdots t_n^{i_n}$$

una famiglia di polinomi di grado $\leq d$, dove $a_{i_1, \ldots, i_n}(t)$ sono funzioni razionali del parametro $t \in \mathbb{A}^1$. Supponiamo che per $t = c$ il polinomio F_c sia irriducibile di grado d. Si dimostri che esiste un sottoinsieme finito $\Sigma \subset \mathbb{A}^1$, tale che per ogni $t \in \mathbb{A}^1 \setminus \Sigma$ il polinomio F_t è irriducibile di grado d.

– Sia $k = \mathbb{R}$. Sia $F(t, x, y) \in \mathbb{R}[t, x, y]$ un polinomio. Al variare $t \in \mathbb{R}$ otteniamo una famiglia di polinomi in $\mathbb{R}[x, y]$ parametrizzati dal parametro t. Poniamo $f_t(x, y) = F(t, x, y)$. Supponiamo che

$$F(t, x, y) = a_1 + a_2 x^4 + a_3 y^4 + tG(t, x, y), \quad a_i \neq 0 \quad \text{per} \quad \forall a_i$$

dove il grado di $G(t, x, y)$ rispetto alle variabili x, y è minore o uguale a 4. Si dimostri che esiste un $\epsilon > 0$, tale che $f_t(x, y)$ è irriducibile per ogni $t \in \mathbb{R}$, $|t| < \epsilon$.