Geometria 3
Modulo 'Superfici di Riemann'
A.A. 2009 – 2010
Esercizi

Numeri complessi; Limiti e continuità.

–Sia $z = 1 + i$, $w = 2 - i$, $\zeta = 4 + 3i$. Calcolare
a) $Re(\zeta^{-1}), Im(\zeta^{-1})$, b) $\frac{w}{z}$ c) $\zeta^2 + 2\overline{\zeta} + 3$

–Rappresentare in forma esponenziale $re^{i\theta}$ i numeri
a) $\sqrt{5} - i$, b) $\frac{\sqrt{2}}{1+i}$ c) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4$

– Trovare le radici
a) $\sqrt[3]{-i}$, b) $\sqrt[5]{1-i}$ c) $\sqrt[7]{\frac{1}{1-i}}$

–Trovare i punti dove le funzioni sono continue

$$a) \qquad f(z) = \begin{cases} \frac{z^3+i}{z-i}, & z \neq i \\ -2 & z = i \end{cases}$$

$$b) \qquad f(z) = \begin{cases} \frac{z^4-1}{z-i}, & z \neq i \\ 4i & z = i \end{cases}$$

– Trovare i seguenti limiti all'infinito o spiegare perchè non esistono
a) $f(z) = \frac{1}{|z|-1}$, b) $h(z) = \frac{|z|}{z}$ c) $g(z) = \frac{4z^6-7z^3}{(z^2-4)^3}$

d) $h(z) = Arg(z)$ e) $g(z) = \frac{z^4-1}{z^3+3z+2}$

Serie. Serie di potenze.

– Siano $\sum_{k\geq 0} a_k$ e $\sum_{k\geq 0} b_k$ due serie di numeri complessi. Supponiamo le serie siano assolutamente convergenti e siano A e B le loro somme. Si dimostri che il prodotto di Cauchy $\sum_{n\geq 0} c_n$, dove $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ è assolutamente convergente a la sua somma è uguale a $A \cdot B$.

–Trovare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} k(z-1)^k$, b) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{3j}}{2^j}$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} 5^{(-1)^n} z^n$

–Trovare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k-1)!}(z-2)^k$, b) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$

– Supponiamo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ abbia raggio di convergenza $R > 0$. Suponiamo esista un $r \leq R$, $r > 0$ tale che $f(z) = 0$ per ogni $|z - z_0| < r$. Si dimostri che $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = \ldots = 0$.

– Se $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ e $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ hanno valori uguali in qualche disco $|z - z_0| < r$, $r > 0$, si dimostri che $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n, \ldots$.

– Trovare le somme infinite

a) $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$

– Siano $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ e $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ due serie di potenze convergenti nel disco $|z - z_0| < R$. Allora il prodotto di Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, dove $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ è convergente nello stesso disco e si ha $f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ per $|z - z_0| < R$.

Funzioni elementari.

– Si dimostri che valgono le seguenti identità:

a) $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \qquad \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

b) $\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \sin(z), \qquad \sin(\frac{\pi}{2} - z) = \cos(z)$

– Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione di variabile complessa. Un punto $z_0 \in A$ si dice zero di f se $f(z_0) = 0$. Trovare gli zeri delle funzioni $\sin(z)$ e $\cos(z)$.

– Siano

$$\sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = z + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \dots$$
$$\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = 1 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \dots$$

le estenzioni al piano complesso delle funzioni reali $\sinh(x)$ e $\cosh(x)$. Verificare le seguenti identità:

$$\sin(iz) = i\sinh(z), \qquad \cos(iz) = \cosh(z)$$

Trovare gli zeri delle funzioni $\sinh(z)$ e $\cosh(z)$.

– Sia $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Sia $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. Si dimostri che la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k \;=\; 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2 + \cdots ,$$

detta serie binomiale, ha raggio di convergenza 1.

– Sia $F_\alpha(z)$ la somma della serie binomiale. Si dimostri che vale l'identità

$$F'_\alpha(z) = \alpha\frac{F_\alpha(z)}{1+z}$$

Integrazione di funzioni a variabile complessa, Principio d'identità di funzioni olomorfe, Serie di Laurent

– Calcolare

$$a)\ \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^4}\,dz \qquad b)\quad \oint_{|z-1|=3} \frac{\sin(z+1)}{(z-1)^3}\,dz$$

– a) Si dimostri che invertendo $e^z = w$ si ottiene la funzione polidroma

$\log(w) = \ln(|w|) + i(Arg(w) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad Arg(w) \in [0, 2\pi)$

b) Si dimostri che la funzione

$$Log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots$$

soddisfa l'identità $e^{Log(1+z)} = 1 + z$. Quindi la funzione

$$Log(w) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(w-1)^n}{n}$$

è un ramo di $\log(w)$ nel disco $|w-1| < 1$.

– Determinare la serie di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)}$$

in un intorno bucato di ciascuno dei due poli $z = 2$ e $z = 3$, specificando il massimo raggio di convergenza.

– Trovare la parte principale e il residuo di ciascuna delle funzioni nel punto z_0.

a) $\frac{e^z-1}{z^2}$, $z_0 = 0$; b) $\frac{z^2}{z^2-1}$, $z_0 = 1$; c) $\frac{\sin z}{(z-\pi)^2}$, $z_0 = \pi$

Formula dei residui

– Calcolare gli integrali

$$\text{a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)(x^2+9)}\,dx \qquad \text{b)} \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

– Calcolare gli integrali

$$\text{a)} \int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+5}\,dx \qquad \text{b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$$

– Calcolare gli integrali

$$\text{a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,, \quad a,b>0 \qquad \text{b)} \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$$

– Calcolare gli integrali

$$\text{a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx \quad (\alpha>0) \qquad \text{b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^4+1}\,dx$$

– Calcolare gli integrali

$$\text{a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+6x+10}\,dx, \qquad \text{b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x+\alpha)^2+\beta^2}\,dx$$

– Calcolare gli integrali

$$\text{a)}\ \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2-\sin\theta)^2} \qquad \text{b)}\ \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+\beta\cos\theta)^2} \qquad -1<\beta<1$$

– Calcolare gli integrali

$$\text{a)}\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta \qquad \text{b)}\ \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1}\,dx \quad (a\geq 0)$$

$$\text{c)}\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\ (a>b>0) \qquad \text{d)}\ \int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{3+\cos\theta}d\theta$$