

**C.d.L. Magistrale in Matematica**  
**a. a. 2013/2014**  
**Geometria Superiore**  
**I modulo - Geometria Algebrica**  
**Docente: Prof. V. Kanev**  
**(<http://math.unipa.it/~kanev/>)**

**Parte 1<sup>o</sup>**

**Insiemi algebrici affini.**

Anelli noetheriani. Teorema di Hilbert della base. -- Ideali primi e ideali massimali. Radicale di un ideale. -- Insiemi algebrici affini. Topologia di Zariski. Ideali e insiemi algebrici affini. -- Irriducibilità di spazi topologici, insiemi algebrici affini irriducibili e ideali primi. -- Spazi topologici noetheriani. Scomposizione in unione di spazi irriducibili. -- Teorema di Hilbert degli zeri (enunciato e dimostrazione) – Corollari del teorema degli zeri. Ipersuperfici affini – Funzioni e applicazioni polinomiali. Algebre di funzioni polinomiali e loro caratterizzazione algebrica. Insiemi chiusi e ideali nelle algebre di funzioni polinomiali. -- Composizione di applicazioni polinomiali, isomorfismo. Applicazioni polinomiali e omomorfismi delle algebre di funzioni polinomiali -- Applicazioni dominanti. Immersioni chiuse. -- Funzioni razionali. Partizione di unità. Funzioni regolari e funzioni polinomiali. Dominio di una funzione razionale.

**Insiemi algebrici proiettivi.**

Insiemi algebrici proiettivi. Ideali omogenei. Topologia di Zariski su  $P^n$  -- Insiemi quasi proiettivi e loro proprietà topologiche. Corrispondenza tra i chiusi irriducibili in insiemi quasi proiettivi e i chiusi irriducibili in insiemi proiettivi -- Teorema degli zeri nel caso proiettivo. Ipersuperfici proiettive. -- Omeomorfismi di  $A^n$  con gli insiemi quasi proiettivi  $A_i^n$ . Corollari.

**Fasci di funzioni.**

Anelli di frazioni. – Assiomi di regolarità. Fasci di funzioni. -- Fascio strutturale di insiemi algebrici affini. Fascio strutturale di insiemi irriducibili. -- Aperti principali. Funzioni regolari su aperti principali.

*Nella prima parte del corso sono stati svolti gli esercizi dei fogli: "Insiemi algebrici affini; Insiemi algebrici irriducibili", "Algebra di funzioni polinomiali. Applicazioni polinomiali, isomorfismo. Funzioni razionali" e "Insiemi algebrici proiettivi".*

**Parte 2<sup>o</sup>**

**Varietà algebriche.**

Spazi con funzioni. Morfismi. Struttura di spazi con funzioni su sottospazi. Varie proprietà di morfismi e di restrizione di fasci di funzioni. -- Varietà affini e varietà quasi affini. Morfismi in varietà quasi affini. Isomorfismo di aperti principali con insiemi algebrici affini. -- Varietà algebriche. Struttura di varietà algebrica su insiemi aperti e su insiemi chiusi nelle varietà algebriche. -- Struttura di varietà algebrica su insiemi algebrici quasi proiettivi. Funzioni regolari sulla retta proiettiva  $P^1$ . Morfismi della retta proiettiva. -- Incollamento di fasci di funzioni. Atlanti. Varietà di Grassman.

**Varietà quasi proiettive.**

Prodotto cartesiano di insiemi algebrici affini. Irriducibilità del prodotto cartesiano. Proprietà universale del prodotto cartesiano. -- Prodotto cartesiano di spazi con funzioni. Unicità. Criteri d'esistenza di prodotto cartesiano. -- Prodotto cartesiano di varietà algebriche. Prodotto cartesiano di due morfismi. -- Varietà di Segre. Prodotto cartesiano di varietà quasi proiettive. -- Varietà algebriche separate. Grafico di un morfismo. Proprietà di separazione. -- Teorema dell'immagine di

varietà proiettive. Corollari. -- Parametrizzazione delle ipersuperfici di grado  $m$  in  $P^n$ . Il luogo delle ipersuperfici riducibili. Morfismo di Veronese. -- Applicazioni del morfismo di Veronese. Esistenza di soluzioni non banali di sistemi omogenei polinomiali.

### **Applicazioni razionali. Isomorfismo birazionale. Dimensione.**

Applicazioni razionali. Applicazioni razionali di insiemi affini irriducibili. Funzioni razionali. -- Composizione di applicazioni razionali. Isomorfismo birazionale. Varietà algebriche razionali: esempi. Teorema dell'isomorfismo birazionale. -- Dimensione. Dimensione di ipersuperfici. Isomorfismo birazionale di varietà algebriche con ipersuperfici.

*Nella seconda parte del corso sono stati svolti gli esercizi dei fogli: "Fasci di funzioni. Spazi con funzioni", "Varietà algebriche" e "Varietà quasi proiettive".*

### **Testi adottati:**

K. Hulek, Elementary Algebraic Geometry, Amer. Math. Soc., Student Mathematical Library Vol.20

I. R. Shafarevich: Basic Algebraic Geometry. (14-01 I 3)

G. Kempf: Algebraic Varieties (14 P I 1)

M. F. Atiyah, I. G. Macdonald: Introduzione a l'algebra commutativa, Feltrinelli Editore, 1981. (A177 -- A178)

S. Lang, Algebra (L 37)

J. S. Milne, Algebraic Geometry, dispense (<http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/ag.html>)