

C.d.L. Magistrale in Matematica
a. a. 2014/2015
Geometria Algebrica
Docente: Prof. V. Kanev
(<http://math.unipa.it/~kanev/>)

Parte 1^o

Insiemi algebrici affini.

Anelli noetheriani. Teorema di Hilbert della base. Ideali primi e ideali massimali. Radicale di un ideale. -- Insiemi algebrici affini. Topologia di Zariski. Ideali e insiemi algebrici affini. Chiusi affini e spazi noetheriani. -- Irriducibilità di spazi topologici, insiemi algebrici affini irriducibili e ideali primi. -- Spazi topologici noetheriani. Scomposizione in unione di spazi irriducibili. -- Teorema di Hilbert degli zeri. -- Corollari del teorema degli zeri. Ipersuperfici affini – Funzioni polinomiali. Algebre di funzioni polinomiali e loro caratterizzazione algebrica. Insiemi chiusi e ideali nelle algebre di funzioni polinomiali. -- Applicazioni polinomiali. Applicazioni polinomiali e omomorfismi delle algebre di funzioni polinomiali. Isomorfismi -- Applicazioni dominanti. Immersioni chiuse. -- Funzioni razionali. Partizione di unità. Funzioni regolari e funzioni polinomiali. Dominio di una funzione razionale.

Insiemi algebrici proiettivi.

Insiemi algebrici proiettivi. Ideali omogenei. Topologia di Zariski su \mathbf{P}^n -- Insiemi quasi proiettivi e loro proprietà topologiche. Corrispondenza tra i chiusi irriducibili in insiemi quasi proiettivi e i chiusi irriducibili in insiemi proiettivi -- Teorema degli zeri nel caso proiettivo. Ipersuperfici proiettive. -- Omeomorfismi di A^n con gli insiemi quasi proiettivi A_i^n . Corollari.

Fasci di funzioni.

Anelli di frazioni. Anelli locali – Assiomi di regolarità. Fasci di funzioni. -- Fascio strutturale di insiemi algebrici affini. Fascio strutturale di insiemi irriducibili e funzioni razionali. -- Aperti principali. Funzioni regolari su aperti principali.

Nella prima parte del corso sono stati svolti gli esercizi dei fogli: "Insiemi algebrici affini; Insiemi algebrici irriducibili"; "Algebra di funzioni polinomiali. Applicazioni polinomiali, isomorfismo. Funzioni razionali"; "Insiemi algebrici proiettivi".

Parte 2^o

Varietà algebriche.

Spazi con funzioni. Morfismi. Struttura di spazi con funzioni su sottospazi. Varie proprietà di spazi con funzioni e dei loro morfismi. – Varietà affini e varietà quasi affini. Morfismi in varietà quasi affini. Isomorfismo di aperti principali con insiemi algebrici affini. – Varietà algebriche. Struttura di varietà algebrica su insiemi aperti e su insiemi chiusi nelle varietà algebriche. – Struttura di varietà algebrica su insiemi algebrici quasi proiettivi. Funzioni regolari sulla retta proiettiva \mathbf{P}^1 . Morfismi della retta proiettiva. – Incollamento di fasci di funzioni. Atlanti. Varietà di Grassman.

Varietà quasi proiettive.

Prodotto cartesiano di insiemi algebrici affini. Irriducibilità del prodotto cartesiano. Proprietà universale del prodotto cartesiano. – Prodotto cartesiano di spazi con funzioni. Unicità. Criteri d'esistenza di prodotto cartesiano. – Prodotto cartesiano di varietà algebriche. Prodotto cartesiano di due morfismi. – Varietà di Segre. Prodotto cartesiano di varietà quasi proiettive. – Varietà algebriche separate. Grafico di un morfismo. Proprietà di separazione. – Teorema dell'immagine di varietà proiettive. Corollari. – Parametrizzazione delle ipersuperfici di grado m in \mathbf{P}^n . Il luogo delle ipersuperfici riducibili. Morfismo di Veronese. – Applicazioni del morfismo di Veronese. Esistenza di soluzioni non banali di sistemi omogenei polinomiali.

Applicazioni razionali. Isomorfismo birazionale. Dimensione.

Applicazioni razionali. Applicazioni razionali di insiemi affini irriducibili. Funzioni razionali. --
Composizione di applicazioni razionali. Isomorfismo birazionale. Varietà algebriche razionali:
esempi. Teorema dell'isomorfismo birazionale. -- Dimensione. Dimensione di ipersuperfici.
Isomorfismo birazionale di varietà algebriche con ipersuperfici.

*Nella seconda parte del corso sono stati svolti gli esercizi dei fogli: "Fasci di funzioni. Spazi con
funzioni. Varietà algebriche"; "Varietà quasi proiettive"; "Applicazioni razionali".*

Testi adottati:

K. Hulek, Elementary Algebraic Geometry, Amer. Math. Soc., Student Mathematical Library Vol.20

I. R. Shafarevich: Basic Algebraic Geometry. (14-01 I 3)

G. Kempf: Algebraic Varieties (14 P I 1)

M. F. Atiyah, I. G. Macdonald: Introduzione a l'algebra commutativa, Feltrinelli Editore, 1981.
(A177 -- A178)

S. Lang, Algebra (L 37)

J. S. Milne, Algebraic Geometry, dispense (<http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/ag.html>)