

C.d.L. Magistrale in Matematica a. a. 2022/2023
Geometria Algebrica
Docente: Prof. V. Kanev (<https://sites.unipa.it/kanev/>)

Parte I

Insiemi algebrici affini.

Anelli noetheriani. Teorema di Hilbert della base -- *Insiemi algebrici affini. Topologia di Zariski. Ideali e insiemi algebrici affini. Chiusi affini e spazi noetheriani.* -- Riducibilità e irriducibilità. Insiemi algebrici affini irriducibili e ideali primi. -- *Spazi topologici noetheriani.* -- Scomposizione in unione di sottoinsiemi chiusi irriducibili. -- Teorema di Hilbert degli zeri. -- Corollari del teorema degli zeri. Ipersuperfici affini -- *Funzioni polinomiali. Algebre di funzioni polinomiali e loro caratterizzazione algebrica. Insiemi chiusi e ideali nelle algebre di funzioni polinomiali.* -- *Applicazioni polinomiali. Applicazioni polinomiali e omomorfismi delle algebre di funzioni polinomiali. Isomorfismi.* -- Applicazioni dominanti. Immersioni chiuse. -- Funzioni razionali. Regolarità. Partizione di unità. Funzioni regolari e funzioni polinomiali. -- *Dominio di una funzione razionale*.

Insiemi algebrici proiettivi.

*Insiemi algebrici proiettivi. Ideali omogenei. Topologia di Zariski su \mathbf{P}^n * -- *Insiemi quasi proiettivi e loro proprietà topologiche. Corrispondenza tra i chiusi irriducibili in insiemi quasi proiettivi e i chiusi irriducibili in insiemi proiettivi* -- Cono affine. Teorema degli zeri nel caso proiettivo. Ipersuperfici proiettive. -- Omeomorfismi di \mathbf{A}^n con gli insiemi quasi proiettivi \mathbf{A}_i^n . Corollari.

Parte II

Varietà algebriche.

Anelli di frazioni. Esempi. Assiomi di regolarità. Fasci di funzioni. -- *Fascio strutturale di insiemi algebrici affini. Fascio strutturale di insiemi irriducibili e funzioni razionali. Aperti principali*. -- Funzioni regolari su aperti principali. -- *Spazi con funzioni. Esempi. Morfismi di spazi con funzioni. Sottospazi con funzioni. Proprietà di restrizioni di fasci, proprietà di morfismi.* -- *Varietà affini e varietà quasi affini*. -- Morfismi in varietà quasi affini. Isomorfismo di aperti principali con insiemi algebrici affini. -- Varietà algebriche. Struttura di varietà algebrica su insiemi aperti e su insiemi chiusi nelle varietà algebriche. -- Struttura di varietà algebrica su insiemi algebrici quasi proiettivi. Funzioni regolari sulla retta proiettiva \mathbf{P}^1 . Morfismi della retta proiettiva. -- *Incollamento di fasci di funzioni. Atlanti*. -- Varietà di Grassmann.

Varietà proiettive.

Prodotto cartesiano di chiusi affini. Irriiducibilità del prodotto cartesiano. Proprietà universale del prodotto cartesiano. -- *Prodotto cartesiano di spazi con funzioni. Unicità. Prodotto cartesiano di sottospazi con funzioni. Prodotto cartesiano di varietà algebriche (enunciato). Prodotto cartesiano di due morfismi.* -- Varietà di Segre. Prodotto cartesiano di varietà quasi proiettive. -- Varietà algebriche separate. Grafico di un morfismo. Proprietà di separazione. -- Teorema dell'immagine di varietà proiettive. Corollari. -- Parametrizzazione delle ipersuperfici di grado m in \mathbf{P}^n . Il luogo delle ipersuperfici riducibili. Morfismo di Veronese. -- Applicazioni del morfismo di Veronese. Esistenza di soluzioni non banali di sistemi omogenei polinomiali.

*N.B. Le parti del programma circondate con * non saranno chieste all'esame con dimostrazioni, bisogna sapere le definizioni e i vari enunciati.*

Testi consigliati:

K. Hulek, Elementary Algebraic Geometry, Amer. Math. Soc., Student Mathematical Library Vol.20 (2003)

I.R.Shafarevich, Basic Algebraic Geometry Vol. 1, Springer-Verlag, (1994)

G. Kempf, Algebraic Varieties, Cambridge University Press. (1993)

J. S. Milne, Algebraic Geometry, dispense (<http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/ag.html>)