

# C.d.L. Magistrale in Matematica a. a. 2023/2024

## Geometria Algebrica

Docente: Prof. V. Kanev (<https://sites.unipa.it/kanev/>)

### Parte I

#### Insiemi algebrici affini.

Anelli noetheriani. Teorema di Hilbert della base -- \*Insiemi algebrici affini. Topologia di Zariski. Ideali e insiemi algebrici affini. Chiusi affini e spazi noetheriani.\* -- Riducibilità e irriducibilità. Insiemi algebrici affini irriducibili e ideali primi. -- \*Spazi topologici noetheriani.\* -- Scomposizione in unione di sottoinsiemi chiusi irriducibili. -- Teorema di Hilbert degli zeri. -- Corollari del teorema degli zeri. Ipersuperfici affini -- \*Funzioni polinomiali. Algebre di funzioni polinomiali e loro caratterizzazione algebrica. Insiemi chiusi e ideali nelle algebre di funzioni polinomiali.\* -- \*Applicazioni polinomiali. Applicazioni polinomiali e omomorfismi delle algebre di funzioni polinomiali. Isomorfismi.\* -- Applicazioni dominanti. Immersioni chiuse. -- Funzioni razionali. Regolarità. Partizione di unità. Funzioni regolari e funzioni polinomiali. -- \*Dominio di una funzione razionale\*.

#### Insiemi algebrici proiettivi.

\*Insiemi algebrici proiettivi. Ideali omogenei. Topologia di Zariski su  $\mathbf{P}^n$  -- \*Insiemi quasi proiettivi e loro proprietà topologiche. Corrispondenza tra i chiusi irriducibili in insiemi quasi proiettivi e i chiusi irriducibili in insiemi proiettivi\* -- Cono affine. Teorema degli zeri nel caso proiettivo. Ipersuperfici proiettive. -- Omeomorfismi di  $\mathbf{A}^n$  con gli insiemi quasi proiettivi  $\mathbf{A}_i^n$ . Corollari.

### Parte II

#### Varietà algebriche.

\*Anelli di frazioni. Esempi. Assiomi di regolarità. Fasci di funzioni.\* -- \*Fascio strutturale di insiemi algebrici affini. Fascio strutturale di insiemi irriducibili e funzioni razionali. Aperti principali\* -- Funzioni regolari su aperti principali. -- \*Spazi con funzioni. Esempi. Morfismi di spazi con funzioni. Sottospazi con funzioni. Proprietà di restrizioni di fasci, proprietà di morfismi.\* -- \*Varietà affini e varietà quasi affini\* -- Morfismi in varietà quasi affini. Isomorfismo di aperti principali con insiemi algebrici affini. -- Varietà algebriche. Struttura di varietà algebrica su insiemi aperti e su insiemi chiusi nelle varietà algebriche. -- Struttura di varietà algebrica su insiemi algebrici quasi proiettivi. Funzioni regolari sulla retta proiettiva  $\mathbf{P}^1$ . Morfismi della retta proiettiva. -- \*Incollamento di fasci di funzioni. Atlanti\* -- Varietà di Grassmann.

#### Varietà proiettive.

Prodotto cartesiano di chiusi affini. Irriducibilità del prodotto cartesiano. Proprietà universale del prodotto cartesiano. -- \*Prodotto cartesiano di spazi con funzioni. Unicità. Prodotto cartesiano di sottospazi con funzioni. Prodotto cartesiano di varietà algebriche (enunciato). Prodotto cartesiano di due morfismi.\* -- Varietà di Segre. Prodotto cartesiano di varietà quasi proiettive. -- Varietà algebriche separate. Grafico di un morfismo. Proprietà di separazione. -- Teorema dell'immagine di varietà proiettive. Corollari. -- Parametrizzazione delle ipersuperfici di grado  $m$  in  $\mathbf{P}^n$ . Il luogo delle ipersuperfici riducibili. Morfismo di Veronese. -- Applicazioni del morfismo di Veronese. Esistenza di soluzioni non banali di sistemi omogenei polinomiali.

*N.B. Le parti del programma circondate con \* non saranno chieste all'esame con dimostrazioni, bisogna sapere le definizioni e i vari enunciati.*

**Testi consigliati:**

K. Hulek, Elementary Algebraic Geometry, Amer. Math. Soc., Student Mathematical Library Vol.20 (2003)

I.R.Shafarevich, Basic Algebraic Geometry Vol. 1, Springer-Verlag, (1994)

G. Kempf, Algebraic Varieties, Cambridge University Press. (1993)

J. S. Milne, Algebraic Geometry, dispense (<http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/ag.html>)