Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Economia
Dip. di Scienze Economiche, Aziendali e Statistiche

Appunti del corso di Matematica Generale

Funzioni continue di una variabile

Anno Accademico 2013/2014

V. Lacagnina - S. Piraino

Homines, dum docent, discunt
Quando insegnano, gli uomini imparano
SENECA

Realizzazione e sviluppo in LaTeX di Valerio Lacagnina (08/01/2014)

1. Continuità di una funzione

Sia $f(x)$ definita nell'insieme A e x_0 un punto non isolato di A. La funzione si dice *continua* nel punto x_0 quando

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ossia quando il limite della funzione coincide con il valore della stessa nel punto x_0. La funzione $f(x)$ si dice *continua nell'insieme* A quando è continua in ogni punto x_0 non isolato di A.

1.1. Osservazione. Nel concetto di funzione continua i punti isolati non hanno alcuna importanza; nei casi pratici punti siffatti si incontrano raramente, l'unica eccezione di rilievo è il caso delle successioni in cui la definizione di continuità non ha senso.

Osserviamo che per la continuità in un punto x_0 non isolato di A deve esistere finito il limite della funzione per $x \to x_0$ e tale limite deve essere eguale a $f(x_0)$. Di conseguenza non si ha continuità della funzione nel punto x_0 quando il $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ non esiste oppure è infinito o il limite esiste finito ma non è uguale a $f(x_0)$.

Esempio 1.1
La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{per} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{per} \quad x = 0 \end{cases}$$

non è continua nel punto $x = 0$, perchè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

e il limite non coincide con il valore 0 assunto dalla funzione nel punto $x = 0$.

Esempio 1.2
La funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{per} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{per} \quad x = 0 \end{cases}$$

non è continua nel punto 0, perchè

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

la funzione non ammette limite nel punto $x = 0$.

Le funzioni elementari x^α, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, ricordando quanto detto nel trattare i limiti delle stesse in un punto del loro insieme di definizione, sono continue in ogni punto dell'insieme ove sono definite, ossia sono continue nel proprio insieme di definizione.

2. Punti di discontinuità

Abbiamo visto alcuni esempi di funzioni che non sono continue in punti del proprio dominio. Chiameremo tali punti, *punti di discontinuità* della funzione.

Un *punto di discontinuità*, x_0, si dice *eliminabile* se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

In questo caso, affinchè x_0 diventi un punto di continuità, basta modificare la funzione nel punto x_0 imponendo di assumere il valore del limite.

Un punto di discontinuità, x_0, si dice punto di *discontinuità di prima specie* quando esistono i limiti sinistro e destro e sono diversi tra loro.

Un punto di discontinuità, x_0, si dice punto di *discontinuità di seconda specie* se almeno uno dei limiti sinistro o destro non esiste o non è finito.

2.1. Continuità a sinistra o a destra.

Sia x_0 un punto di discontinuità. Se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

si dice allora che nel punto x_0 la funzione è continua a destra. Analogamente la funzione si dice continua a sinistra quando

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Esempio 2.1
La funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{per} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{per} \quad x = 0 \end{cases}$$

è continua a sinistra nel punto 0.

3. Operazioni sulle funzioni continue

Siano f e g due funzioni di A in $\mathbb{R}$. Se f e g sono continue in A, allora:

- la funzione $f + g$ è continua in A;
- la funzione $f \cdot g$ è continua in A;
- se $g(x) \neq 0$, $\forall x \in A$, la funzione $\dfrac{f}{g}$ è continua in A;
- la funzione $|f(x)|$ è continua in A;
- la funzione $c \cdot f$ è continua in A per ogni $c \in \mathbb{R}$;

- ogni funzione composta mediante funzioni continue è una funzione continua.

4. Funzioni monotone

Una funzione monotona presenta, al più, un numero finito o una infinità numerabile di punti di discontinuità di prima specie.

Esempio 4.1
Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ espressa da $f(x) = [x]$, leggasi, parte intera di x.
Essendo $\mathbb{R}$ archimedeo, per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che: $n \leq x < n+1$. L'intero n costituisce la parte intera di x. Consideriamo il grafico della funzione indicato in figura 1. La funzione ha come codominio l'insieme $\mathbb{Z}$. Ogni punto dell'asse delle x immagine di un numero intero è punto di discontinuità di prima specie della funzione.

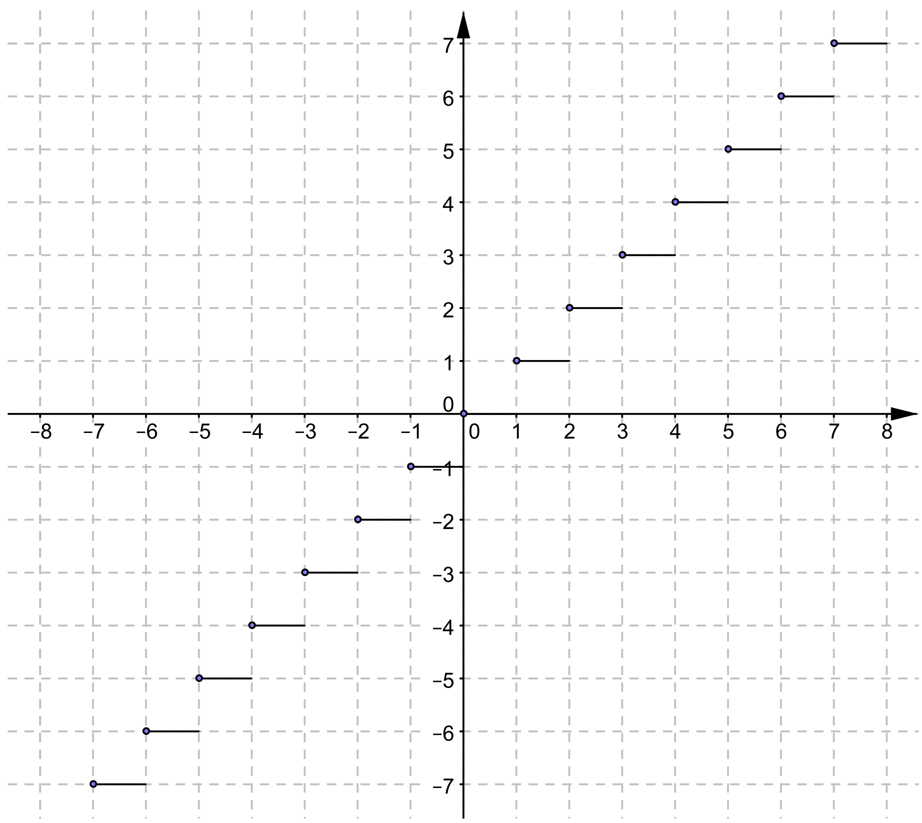

Figura 1. Grafico della funzione $f(x) = [x]$

5. Funzioni continue definite su un insieme compatto o su un intervallo

TEOREMA 5.1. *Se A è un insieme compatto e $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione continua in A allora $f(A)$ è un insieme compatto.*

TEOREMA 5.2 (Weierstrass). *Se A è un insieme compatto e $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione continua in A, allora esistono due punti $\alpha, \beta \in A$ tali che*

$$f(\alpha) = \min f \quad f(\beta) = \max f$$

DIMOSTRAZIONE. Essendo per ipotesi A un insieme compatto in virtù del teorema 5.1, $f(A)$ è un insieme chiuso e limitato.
Posto $m = \inf(f(A))$ e $M = \sup(f(A))$, essendo $f(A)$ chiuso, necessariamente m e M debbono appartenere ad $f(A)$, di conseguenza sono valori assunti dalla funzione. Pertanto α e β si ottengono prendendo $\alpha \in f^{-1}(m)$ e $\beta \in f^{-1}(M)$ □

TEOREMA 5.3. *Se A è un intervallo e $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione continua in A, allora $f(A)$ è un intervallo, eventualmente degenere.*

COROLLARIO 5.4. *Se la funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a, b]$, allora $f([a, b]) = [\min f, \max f]$.*

DIMOSTRAZIONE. Essendo $[a, b]$ un insieme compatto, per il teorema 5.2, di Weierstrass, esistono due punti α e $\beta \in [a, b]$ tali che $f(\alpha) = \min f$ e $f(\beta) = \max f$. Per il teorema 5.3, $f([a, b])$ è un intervallo, di conseguenza:

$$\forall x \in [a, b] \quad f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta)$$

quindi

$$\text{cod} f = [f(\alpha), f(\beta)] = [\min f, \max f]$$

□

Il teorema 5.3 esprime che se una funzione continua in un intervallo assume due valori, essa necessariamente assumerà tutti i valori compresi tra essi.

COROLLARIO 5.5. *Se A è un intervallo, $f : A \to \mathbb{R}$ è continua in A e a e b due punti di A tali che*

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

allora esiste almeno un punto $c \in A$ tale che $f(c) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Essendo A un intervallo, per il teorema 5.1, $f(A)$ è un intervallo a cui appartengono $f(a)$ e $f(b)$ e tutti i valori tra essi compresi. Essendo $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ (oppure $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$) necessariamente ad esso apparterrà anche il valore 0, di conseguenza $c \in f^{-1}(0)$ □

6. Continuità delle funzioni inverse

Teorema 6.1. *Se A è un insieme compatto e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione iniettiva e continua, allora la funzione inversa $f^{-1} : f(A) \to A$ è continua.*

Considerato che le funzioni strettamente monotone realizzano una iniezione di A in $f(A)$, possiamo affermare che se A è un intervallo e f una funzione crescente e continua in A allora essa è dotata di funzione inversa crescente e continua in $f(A)$. Analogamente se f è decrescente e continua in A, allora è dotata di funzione inversa decrescente e continua in $f(A)$.
Concludiamo affermando che:

Teorema 6.2. *Se A è un intervallo e f una funzione monotona di A in $\mathbb{R}$, allora f è continua se e solo se $f(A)$ è un intervallo.*

Indice