

FORMULE DI INTEGRAZIONE ¹

Integrali indefiniti immediati

Si ricavano dalle formule di derivazione delle funzioni elementari, per la stessa definizione di integrale indefinito. Tali formule sono di fondamentale importanza in quanto ad esse si cerca di ridurre il calcolo dell'integrale di funzioni elementari più complesse.

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \text{per } \alpha \neq -1, (x > 0, \text{ se } \alpha \text{ non è intero}); \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \quad (x \neq 0);$$

$$\int a^x dx = a^x \log_a e + c = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (\alpha > 0); \quad \int e^x dx = e^x + c;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c; \quad \int \sin x dx = -\cos x + c;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}); \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c \quad (x \neq n\pi, \quad n \in \mathbf{Z});$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c' \quad (-1 < x < 1; \quad c' = c + \frac{\pi}{2});$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c = -\operatorname{arccot} x + c' \quad (c' = c + \frac{\pi}{2}).$$

Integrali riconducibili a integrali indefiniti immediati

$$\int \varphi^\alpha(x) \varphi'(x) dx = \frac{\varphi^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c \quad \text{per } \alpha \neq -1, (\varphi(x) > 0);$$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln|\varphi(x)| + c \quad (\varphi(x) \neq 0); \quad \int e^{\varphi(x)} \varphi'(x) dx = e^{\varphi(x)} + c;$$

$$\int \cos \varphi(x) \varphi'(x) dx = \sin \varphi(x) + c; \quad \int \sin \varphi(x) \varphi'(x) dx = -\cos \varphi(x) + c;$$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\cos^2 \varphi(x)} dx = \tan \varphi(x) + c \quad (\varphi(x) \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z});$$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1-\varphi^2(x)}} dx = \arcsin \varphi(x) + c \quad (-1 < \varphi(x) < 1); \quad \int \frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)} dx = \arctan \varphi(x) + c; \quad \dots$$

¹Realizzato in L^AT_EX da Valerio Lacagnina, Dic 2000

Formula di integrazione per parti

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue nell'intervallo $I \subseteq \mathbf{R}$, con $f(x)$ dotata di derivata continua in I . Denotata con $G(x)$ una primitiva di $g(x)$ si ha:

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int G(x)f'(x)dx, \quad (x \in I).$$

Integrazione per sostituzione

Siano I e J due intervalli di \mathbf{R} e $\varphi : I \rightarrow J$, $f : J \rightarrow \mathbf{R}$ due funzioni numeriche di una variabile reale, con φ derivabile con derivata continua in I ed f è continua in J . Denotata con $F(x)$ una primitiva di $f(x)$, si ha:

$$F(\varphi(x)) + c = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

da cui segue

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

Nota: l'espressione $f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ si ottiene dalla $f(x)dx$ facendo la sostituzione $x = \varphi(t)$; infatti:

$$f[\varphi(t)] d\varphi(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Integrazione di funzioni razionali fratte

Caso particolare

Sia $x^2 + px + q$ con $\Delta = p^2 - 4q < 0$ allora:

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + px + q} dx = \frac{a}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2b - ap}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + c.$$

Caso generale: formula di Hermite

Sia $\int \frac{A(x)}{B(x)} dx$ con grado di $A(x)$ inferiore di quello di $B(x)$ (se così non è basta ricordare che $\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$ con $R(x)$ di grado inferiore a quello di $B(x)$). Supponiamo che $B(x)$ presenti h zeri reali e k zeri complessi (con i k coniugati) con molteplicità rispettivamente r_1, r_2, \dots, r_h ed s_1, s_2, \dots, s_k :

$$B(x) = a_0(x - \alpha_1)^{r_1} \dots (x - \alpha_h)^{r_h} (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \dots (x^2 + p_kx + q_k)^{s_k}$$

È possibile decomporre $\frac{A(x)}{B(x)}$ nel modo seguente:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \dots + \frac{A_h}{x - \alpha_h} + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{B_kx + C_k}{x^2 + p_kx + q_k} + \frac{d}{dx} \frac{D_1x^m + D_2x^{m-1} + \dots + D_{m+1}}{T(x)} \quad (1)$$

dove:

$$T(x) = a_0(x - \alpha_1)^{(r_1-1)} \dots (x - \alpha_h)^{(r_h-1)}(x^2 + p_1x + q_1)^{(s_1-1)} \dots (x^2 + p_kx + q_k)^{(s_k-1)}$$

e $D_1x^m + D_2x^{m-1} + \dots + D_{m+1}$ è un polinomio di grado $m = \text{grado}(T(x)) - 1$. Effettuata la derivata a secondo membro della (1), facendo il minimo comune multiplo del secondo membro della (1) ed eguagliando i coefficienti delle potenze di x del numeratore a quelli di $A(x)$ si ottiene un sistema (che ammette sempre soluzione) in tante equazioni quante sono le incognite $A_1, \dots, A_h, B_1, \dots, B_h, C_1, \dots, C_h, D_1, \dots, D_{m+1}$. Quindi:

$$\int \frac{A(x)}{B(x)} dx = \int \frac{A_1}{x - \alpha_1} dx + \dots + \int \frac{A_h}{x - \alpha_h} dx + \int \frac{B_1x + C_1}{x^2 + p_1x + q_1} dx + \dots + \int \frac{B_kx + C_k}{x^2 + p_kx + q_k} dx +$$

$$+ \int \frac{d}{dx} \frac{D_1x^m + D_2x^{m-1} + \dots + D_{m+1}}{T(x)} dx$$

ricordando che $\int \frac{d}{dx} \frac{D_1x^m + D_2x^{m-1} + \dots + D_{m+1}}{T(x)} dx = \frac{D_1x^m + D_2x^{m-1} + \dots + D_{m+1}}{T(x)}$.

Integrazione di funzioni irrazionali

Caso numero 1

$$\int R(x, (\alpha x + \beta)^{\frac{m_1}{n_1}}, (\alpha x + \beta)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, (\alpha x + \beta)^{\frac{m_r}{n_r}}) dx$$

Si pone $\alpha x + \beta = t^k$ con $k = m.c.m.(n_1, n_2, \dots, n_r)$ ($m.c.m.$ = minimo comune multiplo).

Caso numero 2

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

a) Se $a < 0$, $b^2 - 4ac > 0$ si pone $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t$ con α una radice dell'equazione $x^2 + bx + c$;

b) Se $a > 0$ si pone $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} + t$;

c) Se $c \geq 0$ si pone $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$;

d) Se $a = 0$ si pone $\sqrt{bx + c} = t$.

Integrazione di funzioni trascendenti

Caso numero 1

$$\int R(a^{\alpha x + \beta}) dx \quad \text{con } a, \alpha, \beta \text{ costanti, } a > 1, a \neq 1$$

si pone $a^{\alpha x + \beta} = t$ oppure $a^{\alpha x} = t$.

Caso numero 2

$$\int R(a^{\frac{m_1}{n_1}x}, a^{\frac{m_2}{n_2}x}, \dots, a^{\frac{m_r}{n_r}x}) dx$$

si pone $a^x = t^k$ con $k = m.c.m.(n_1, n_2, \dots, n_r)$.

Integrazione di funzioni trigonometriche

Caso numero 1

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

si pone $\tan \frac{x}{2} = t$ avendo espresso $\sin x$ e $\cos x$ in funzione di $\tan \frac{x}{2}$.

Caso numero 2

$$\int R(\tan x) dx$$

si pone $\tan x = t$.

Caso numero 3

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \tan x, \cot x) dx$$

si esprime $\sin^2 x$ e $\cos^2 x$ in funzione della $\tan x$ mediante le formule trigonometriche e si pone $\tan x = t$.