Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Economia
Dip. di Scienze Statistiche e Matematiche "Silvio Vianelli"

Appunti del corso di Matematica Generale

Polinomio di Mac Laurin e di Taylor

Anno Accademico 2012/2013

V. Lacagnina - S. Piraino

Homines, dum docent, discunt
Quando insegnano, gli uomini imparano
SENECA

Realizzazione e sviluppo in LaTeX di Valerio Lacagnina (27/11/2012)

1. Caratterizzazione del comportamento di una funzione in un intorno di un suo zero

Si tratta di caratterizzare l'ordine di molteplicità di uno zero di una funzione. Diremo che x_0 è uno zero di molteplicità r o zero *r-plo* della funzione $f(x)$, continua in x_0, se risulta

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^r} = \lambda \neq 0 \tag{1}$$

o equivalentemente:
x_0 è uno zero *r-plo* per $f(x)$ se la funzione è infinitesima, per $x \to x_0$, di ordine r rispetto a $x - x_0$.

TEOREMA 1.1 (CNS affinchè x_0 sia zero *r-plo* di una funzione). *Sia $f(x)$ derivabile, r volte, almeno, in un intorno del punto x_0, zero della funzione, con derivate continue. Condizione necessaria e sufficiente perchè x_0 sia uno zero* r-plo *della $f(x)$ è che esso sia uno zero delle funzioni derivate $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(r-1)}(x)$ ma non della derivata $f^{(r)}(x)$, ossia:*
x_0 zero r-plo *di* $f(x) \Leftrightarrow f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(r-1)}(x_0) = 0$ *e* $f^{(r)}(x_0) \neq 0$

DIMOSTRAZIONE. **Condizione necessaria**
Se x_0 è uno zero *r-plo* di $f(x)$ si ha che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^r} \neq 0$$

mentre sono nulli i limiti dei quozienti

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^h} = 0 \ \text{ con } \ h = 0, 1, 2, \ldots, r - 1$$

che implica necessariamente

$$f^{(h)}(x_0) = 0 \ \text{ per } \ h = 1, 2, \ldots, r - 1$$

Se non fosse così si avrebbe che, per $h < r$, l'ordine della prima derivata non nulla in x_0, dovrebbe essere

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^h} = \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!} \neq 0$$

dato che

$$\frac{f(x)}{(x - x_0)^h} = \frac{f(x)}{(x - x_0)^r}(x - x_0)^{r-h}$$

e x_0 sarebbe uno zero di molteplicità $h < r$, contro l'ipotesi iniziale.
Condizione sufficiente
Supponiamo che in x_0 la funzione $f(x)$ si annulli assieme alle sue prime $r - 1$ derivate mentre $f^{(r)}(x_0) \neq 0$ e consideriamo in un intorno di x_0

il rapporto

$$\frac{f(x)}{g(x)} \text{ ove } g(x) = (x - x_0)^r$$

In $x = x_0$, $g(x)$ si annulla assieme alle sue prime $r - 1$ derivate mentre $g^{(r)}(x) = r!$

Per $x \neq x_0$ la funzione $g(x)$ e le sue derivate successive sono diverse da zero. Per quanto detto

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

applicando il teorema di Cauchy nell'intervallo $[x_0, x]$ si ottiene

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} \text{ con } x_0 < \xi_1 < x$$

Riapplicando il teorema di Cauchy alla funzione $f'(x)$ nell'intervallo $[x_0, \xi_1] \subset [x_0, x]$, si ottiene

$$\frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \frac{f'(\xi_1) - f'(x_0)}{g'(\xi_1) - g'(x_0)} = \frac{f''(\xi_2)}{g''(\xi_2)} \text{ con } x_0 < \xi_2 < \xi_1$$

essendo $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$.

Pertanto

$$\frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \frac{f''(\xi_2)}{g''(\xi_2)}$$

Procedendo allo stesso modo, si ha

$$\frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \frac{f''(\xi_2)}{g''(\xi_2)} = \ldots = \frac{f^{(r-1)}(\xi_{r-1})}{g^{(r-1)}(\xi_{r-1})} = \frac{f^{(r-1)}(\xi_{r-1}) - f^{(r-1)}(x_0)}{g^{(r-1)}(\xi_{r-1}) - g^{(r-1)}(x_0)} = \frac{f^{(r)}(\xi)}{g^{(r)}(\xi)}$$

essendo ξ in punto interno all'intervallo $[x_0, \xi_{r-1}] \subseteq [x_0, x]$, da cui si desume

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(r)}(\xi)}{g^{(r)}(\xi)}$$

Ricordando che

$$g(x) = (x - x_0)^r \text{ e } g^{(r)}(x) = r!$$

si trae

$$\frac{f(x)}{(x - x_0)^r} = \frac{f^{(r)}(\xi)}{r!}$$

Quando $x \to x_0$ segue che $\xi \to x_0$, avendo supposto $f^{(r)}(x)$ continua, segue

$$\lim_{\xi \to x_0} f^{(r)}(\xi) = f^{(r)}(x_0)$$

che per ipotesi è un numero diverso da zero. Si conclude pertanto che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^r} = \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!} \neq 0$$

e quindi che per la (1) $f(x)$ è infinitesima di ordine r rispetto a $x - x_0$ ossia x_0 è uno zero *r-plo*. □

2. Formula di Mac Laurin e formula di Taylor

Sia $f : I(0) \to \mathbb{R}$ ed ivi dotata di derivate successive fino all'ordine $n+1$, almeno, con $f^{(n+1)}(0) \neq 0$. Consideriamo, in $I(0)$, il polinomio

$$P(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots + \frac{f''(0)}{2}x^2 + f'(0)x + f(0)$$

Calcolando le derivate di $P(x)$ nel punto 0, si trova facilmente:

$$P'(0) = f'(0), \quad P''(0) = f''(0), \quad \ldots, \quad P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

essendo $P^{(n+1)}(0) = 0$ e $P(0) = f(0)$. Consideriamo in $I(0)$ la funzione ausiliaria

$$F(x) = f(x) - P(x)$$

La funzione F si annulla nel punto 0 assieme alle sue prime n derivate, essendo $F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ e $F^{(n+1)}(0) = f^{(n+1)}(0) \neq 0$.
In virtù del teorema 1.1 possiamo affermare che 0 è uno zero della funzione F di molteplicità $n+1$ e che, quindi, è vera la seguente relazione

$$\frac{F(x)}{x^{n+1}} = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

essendo ξ un punto interno all'intervallo $]0, x[\ \subseteq I(0)$. Tenendo conto della definizione di F, segue

$$\frac{f(x) - P(x)}{x^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

cioè

$$f(x) = P(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

L'espressione a cui si perviene dice che la funzione può essere approssimata in un $I(0)$ in cui sono verificate le ipotesi iniziali, da un polinomio $P(x)$ di grado n.
Lo scarto tra la funzione ed il polinomio è funzione di x e ξ, che chiamiamo *termine complementare* dello sviluppo, nella **forma di Lagrange**, lo indicheremo con R_n, ossia

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

Ordinando i termini di $P(x)$ secondo le potenze crescenti di x, otteniamo quella che nella letteratura viene chiamata formula di Mac Laurin:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \ldots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + R_n$$

Generalizzando il procedimento in un intorno di un punto x_0 otteniamo lo sviluppo di Taylor di punto iniziale x_0:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \\ &+ f'''(x_0)\tfrac{(x-x_0)^3}{3!} + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} + R_n \end{aligned}$$

con

$$R_n = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

e ξ punto interno all'aperto $]x, x_0[\ \bigcup\ ]x_0, x[$ ossia

$$\xi = x_0 + \vartheta(x - x_0)$$

e ϑ variabile nell'aperto $]0, 1[$.

Indice

1. Caratterizzazione del comportamento di una funzione in un intorno di un suo zero 3
2. Formula di Mac Laurin e formula di Taylor 5