Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Economia
Dip. di Scienze Statistiche e Matematiche "Silvio Vianelli"

Appunti del corso di Matematica Generale

Gli Insiemi

Anno Accademico 2009/2010

V. Lacagnina - S. Piraino

Homines, dum docent, discunt
Quando insegnano, gli uomini imparano
SENECA

Realizzazione e sviluppo in LaTeX di Valerio Lacagnina

1. Insiemi

L'*insieme* e l'*elemento* di un insieme sono nozioni primitive ossia che non possono essere definite mediante altri concetti più semplici.

Intuitivamente, si può pensare all'insieme come a qualcosa *individuata* da tutti gli oggetti che soddisfano una data condizione.

Esempio 1.1
L'insieme delle matricole della facoltà di Economia.
L'insieme dei punti di un piano.
L'insieme dei numeri positivi.

Gli elementi di un insieme possono essere a loro volta insiemi.

Esempio 1.2
L'insieme delle circonferenze di un piano, per il quale ogni circonferenza è l'insieme dei punti che distano r dal suo centro.

Gli insiemi vengono indicati mediante le lettere maiuscole: $A, B, \ldots$ mentre si utilizzano le lettere minuscole per gli elementi: $a, b, \ldots$.

La scrittura

$$a \in T$$

si legge "a appartiene a T", e significa che a è un elemento dell'insieme T. Il segno "$\in$" si dice di appartenenza. La negazione di $a \in T$ è

$$a \notin T$$

che si legge "a non appartiene a T" e significa che a non è uno degli elementi di T.

Per definire un insieme è possibile utilizzare un metodo *analitico* elencando gli elementi che vi appartengono inseriti fra parentesi graffe.

Esempio 1.3
$A = \{a, d, t, q\}$ significa che A è un insieme costituito dai 4 elementi a, d, t e q.
$B = \{0, 1, \ldots, 9\}$ è costituito dalle 10 cifre del sistema decimale.
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ rappresenta l'insieme dei numeri naturali.

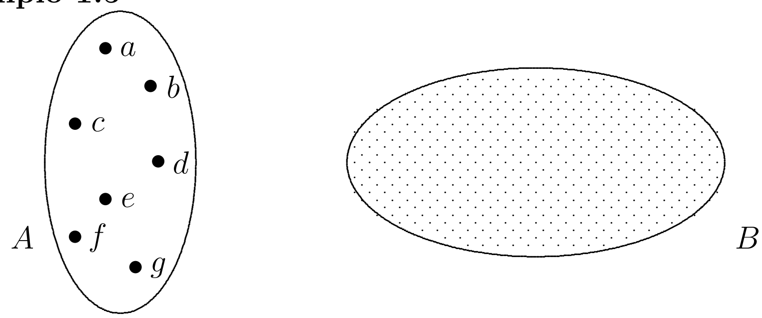
Gli elementi di un insieme sono *distinti* fra loro e l'*ordine* con cui si elencano è ininfluente.

Un altro modo per definire un insieme é il metodo *sintetico* con il quale si enuncia una proprietà verificata da tutti e soli gli elementi dell'insieme.

Esempio 1.4
$B = \{x \in \mathbb{N} \ : \ 0 \leq x \leq 9\}$ é l'insieme delle dieci cifre del sistema decimale.
$A = \{x \in \mathbb{N} \ : \ x \text{ dispari}\}$ é l'insieme dei numeri naturali dispari.

Gli elementi di un insieme si rappresentano spesso con dei punti interni ad una curva piana chiusa non intrecciata. Se gli elementi sono troppo numerosi l'insieme si rappresenta con tutti i punti interni alla curva tratteggiando eventualmente la regione interna.

Esempio 1.5



Una tale rappresentazione si dice *diagramma di* ***Eulero-Venn***.

Un insieme si dice *finito* se ha un numero finito di elementi, altrimenti si dice *infinito*.
Opportuni insiemi numerici infiniti di uso frequente sono i seguenti:

- $\mathbb{N}$ insieme dei numeri naturali
- $\mathbb{Z}$ insieme degli interi
- $\mathbb{Q}$ insieme dei numeri razionali
- $\mathbb{R}$ insieme dei numeri reali

Un insieme privo di elementi, ossia definito da due proprietá contraddittorie, si dice *insieme vuoto* e si rappresenta con $\varnothing$.

Si chiama *sottoinsieme* o *parte* di un insieme non vuoto A ogni insieme B tale che $x \in B$ implica $x \in A$ e si scrive

$$B \subseteq A \quad \text{o} \quad A \supseteq B$$

Si può anche dire che B è *incluso* o *contenuto* in A o, ancora, che A *contiene* B. Si assume che l'insieme vuoto $\varnothing$ sia sottoinsieme di ogni insieme.

Due insiemi A e B si dicono *uguali*, ossia

$$A = B$$

se ogni elemento di ciascun insieme appartiene anche all'altro, ossia se succede contemporaneamente che $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Se non si verifica almeno una delle due inclusioni, i due insiemi si dicono *distinti* e si scrive

$$A \neq B$$

Se $B \subseteq A$ e $B \neq A$, si dice che B è *sottoinsieme proprio* di A ovvero che B è *incluso propriamente* in A, e si indica con

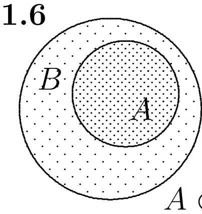
$$B \subset A$$

La scrittura

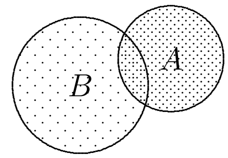
$$A \not\subset B$$

si legge A non è incluso in B, ossia esiste almeno un elemento dell'insieme A che non è contenuto in B.

Esempio 1.6



$A \subset B$



$A \not\subset B$

Per gli insiemi numerici vale la seguente catena di inclusioni:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

2. Insieme delle parti di un insieme

L'insieme dei sottoinsiemi di un insieme non vuoto I, ossia l'insieme i cui elementi sono le parti di I, compreso l'insieme vuoto $\varnothing$ ed I stesso, si dice *insieme delle parti* o *insieme potenza* di I e si denota con $\mathcal{P}(I)$. Se I é finito ed ha n elementi, $\mathcal{P}(I)$ avrá 2^n elementi.

Esempio 2.1
$I = \{a, b, c\}$ allora l'insieme delle parti di I è:
$\mathcal{P}(I) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ e gli elementi di $\mathcal{P}(I)$ sono $2^3 = 8$.

3. Operazioni su insiemi

Di considerevole importanza sono le operazioni fra gli insiemi. Siano A e B due sottoinsiemi di I.
$A \cup B$ si legge A *unione* B ed indica l'insieme degli elementi che appartengono ad A o a B. Sinteticamente:

$$A \cup B = \{x \in I : x \in A \text{ o } x \in B\}$$

ossia, un elemento x sta nell'unione se x è un elemento di A, oppure se è un elemento che sta in B, o ancora se è un elemento che sta sia in A che in B.

Esempio 3.1

$$S = \mathbb{N} \quad A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\} \quad B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$$

$A \cap B$ si legge A *intersezione* B ed indica l'insieme degli elementi che appartengono sia ad A che a B, in altri termini gli elementi comuni agli insiemi A e B. Sinteticamente:

$$A \cap B = \{x \in I : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

ossia, un elemento x appartiene all'intersezione se x è un elemento sia di A che di B.

Esempio 3.2

$$S = \mathbb{N} \quad A = \{2,3,5,7,11,13\} \quad B = \{1,3,5,7,9\}$$
$$A \cap B = \{3,5,7\}$$

$A - B$ si legge *differenza* dell'insieme A rispetto all'insieme B ed indica l'insieme di elementi di A che non appartengono a B. Sinteticamente:

$$A - B = \{x \in I : x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Esempio 3.3

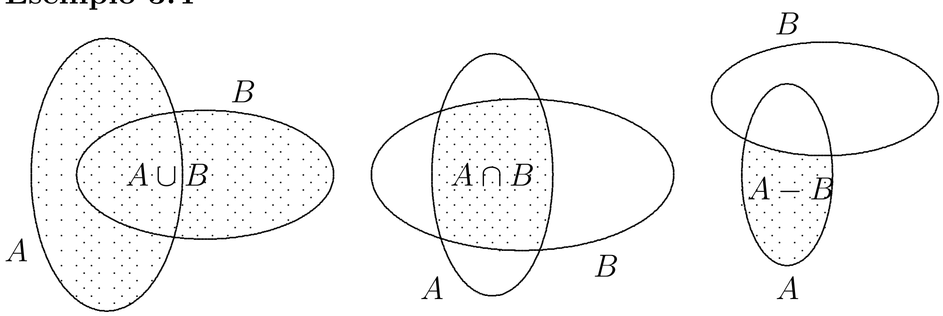
$$A = \{2,3,5,7,11,13\} \quad B = \{1,3,5,7,9\}$$
$$A - B = \{2,11,13\} \qquad B - A = \{1,9\}$$

Se B è un sottoinsieme di A, la differenza $A - B$ si chiama *complementare* di B rispetto ad A e si denota con $\mathcal{C}_A B$. É evidente che:

$$A - B = \mathcal{C}_A B \text{ se e solo se } B \subset A$$

È possibile rappresentare queste operazioni elementari tramite i diagrammi di Eulero-Venn.

Esempio 3.4



L'operazione di unione tra insiemi si estende ad un qualsivoglia numero di sottoinsiemi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ di I:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \in A_1 \text{ o } x \in A_2 \text{ o } \ldots \text{ o } x \in A_n\}$$

Analogamente, l'operazione di intersezione tra sottoinsiemi di I:

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \in A_1 \text{ e } x \in A_2 \text{ e } \ldots \text{ o } x \in A_n\}$$

Dati i tre sottoinsiemi A, B e C di I inoltre:

unione

$A \cup A = A$,	$A \cup \varnothing = A$,	
$A \subseteq A \cup B$,	$B \subseteq A \cup B$,	
$A \cup B = B$ se e solo se $A \subseteq B$		
$A \cup B = B \cup A$		proprietà commutativa,
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$		proprietà associativa,

intersezione

$A \cap A = A$,	$A \cap \varnothing = \varnothing$	
$A \supseteq A \cap B$,	$B \supseteq A \cap B$,	
$A \cap B = B$ se e solo se $A \supseteq B$		
$A \cap B = B \cap A$		proprietà commutativa,
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$		proprietà associativa,

e inoltre

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

Per ogni sottoinsieme A di $I \neq \varnothing$ si può mostrare che valgono le seguenti relazioni:

$$A \cup \mathcal{C}_I A = I, \quad A \cap \mathcal{C}_I A = \varnothing, \quad \mathcal{C}_I(\mathcal{C}_I A) = A.$$

Se $A, B \in \mathcal{P}(I)$, $I \neq \varnothing$ valgono le formule di *De Morgan*:

$$\mathcal{C}_I(A \cup B) = (\mathcal{C}_I A) \cap (\mathcal{C}_I B), \quad \mathcal{C}_I(A \cap B) = (\mathcal{C}_I A) \cup (\mathcal{C}_I B).$$

Dato un insieme di indici $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$, una famiglia $\{A_{i \in \mathcal{I}}\}$ di sottoinsiemi di un insieme non vuoto I per cui

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i = I$$

si dice *ricoprimento* di I. Un ricoprimento di I, $\{A_{i \in \mathcal{I}}\}$, tale che $A_i \neq \varnothing$, $\forall\ i \in \mathcal{I}$ e $A_i \cap A_j = \varnothing$, $\forall\ i \neq j \in \mathcal{I}$, si dice *partizione* di I.

4. Insieme dei numeri reali e sue proprietà

L'insieme dei numeri reali, $\mathbb{R}$, soddisfa contemporaneamente tre gruppi di proprietà:

(1) proprietà algebriche
(2) proprietà di ordinamento
(3) proprietà di completezza

Vediamo in dettaglio ognuno di questi gruppi.

4.1. Proprietà algebriche di $\mathbb{R}$. Sono definite le operazioni di *addizione* (+) e *moltiplicazione* ($\times$) tra coppie di numeri reali con le proprietà qui di seguito elencate:
Siano a, b e c tre numeri reali qualunque

Proprietà associativa: $<\textit{somma}>$ $(a + b) + c = a + (b + c)$,
$<\textit{prodotto}>$ $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

Proprietà commutativa: $<\textit{somma}>$ $a + b = b + a$,
$<\textit{prodotto}>$ $a \times b = b \times a$.

Proprietà distributiva: $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.

Esistenza degli elementi neutri: 0 e 1 sono elementi neutri rispettivamente per la somma e il prodotto
$<\textit{somma}>$ $a + 0 = 0 + a = a$,
$<\textit{prodotto}>$ $a \times 1 = 1 \times a = a$.

Esistenza degli opposti: per ogni numero $a \in \mathbb{R}$ esiste un numero reale, indicato con $-a$, tale che
$a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Esistenza dei reciproci: per ogni numero reale $a \neq 0$ esiste un numero reale, indicato con a^{-1} o $\dfrac{1}{a}$ tale che
$a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1$.

4.2. Proprietà di ordinamento di $\mathbb{R}$. È definita la relazione di *minore o uguale* ($\leq$) tra coppie di numeri reali con le proprietà qui di seguito elencate:
Siano a, b e c tre numeri reali qualunque

Dicotomia: per ogni coppia di numeri reali a e b si ha
$a \leq b$ oppure $b \leq a$.

Proprietà asimmetrica: se valgono contemporaneamente le relazioni $a \leq b$ e $b \leq a$ allora $a = b$.

Somma di una costante reale: se $a \leq b$ allora vale anche
$a + c \leq b + c$.

Somma e prodotto di positivi: se $0 \leq a$ e $0 \leq b$ allora
$0 \leq a + b$ e anche $0 \leq a \times b$.

4.3. Proprietà di completezza di $\mathbb{R}$. Siano A e B due insiemi non vuoti di numeri reali con la proprietà che ogni elemento a di A sia minore o eguale di ogni elemento $b \in B$ ($a \leq b, \forall\, a \in A$ e $b \in B$). Allora esiste almeno un numero reale c tale che $a \leq c \leq b$.

5. Massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore

Sia A un insieme costituito da numeri. Il *massimo* dell'insieme A, se esiste, è un numero $M \in A$ che è maggiore od uguale ad ogni elemento dell'insieme. In simboli si può scrivere che:

$$M = \max_{a \in A} \Leftrightarrow M \in A \;\text{ e }\; M \geq a, \forall\, a \in A$$

In modo del tutto analogo, il *minimo* di un insieme di numeri, se esiste, è un numero m appartenente all'insieme A che è minore od uguale ad ogni altro elemento di A, ossia:

$$m = \min_{a \in A} \Leftrightarrow m \in A \ \text{ e } \ m \leq a, \forall\, a \in A$$

Se si considera un insieme costituito da numeri reali (ma basterebbe anche un insieme di numeri naturali) non è detto che questo contenga necessariamente un massimo e/o un minimo. Si consideri l'insieme dei numero naturali pari $A = \{2, 4, \ldots\}$ è evidente che esiste un minimo, ossia 2 ma non esiste un massimo.
Se si considera l'insieme $B = \{x \in \mathbb{R} : x \ \text{ è positivo}\}$ si vede subito che questo non ha un massimo ma nemmeno un minimo (infatti il valore 0 non fa parte dei numeri reali positivi).

Si può verificare facilmente che se esiste per un insieme A massimo (minimo) questo è unico. Infatti, si supponga che M_1 ed M_2 siano due massimi dell'insieme A, allora applicando la definizione di massimo si deve avere:

$$M_1 \geq a, M_2 \geq a, \forall\, a \in A$$

ma dato che $M_1 \in A$ e $M_2 \in A$, per la proprietà del massimo deve essere contemporaneamente vero che $M_1 \geq M_2$ e $M_2 \geq M_1$, ossia necessariamente $M_1 = M_2$.

Rimanendo nel campo degli insiemi di numeri reali, si dice che un numero reale L è un *maggiorante* per un insieme A, se $L \geq a, \forall\, a \in A$. In modo del tutto analogo si dice che l è un minorante dell'insieme A se $l \leq a, \forall\, a \in A$.

Si noti che un insieme A non sempre ammette maggioranti e/o minoranti. Se ci riferiamo ai due esempi di prima si vede subito che $A = \{2, 4, \ldots\}$ ammette infiniti minoranti, ossia tutti i numeri minori o uguali a due, mentre non ammette nessun maggiorante, analogamente a quanto accade all'insieme $B = \{x \in \mathbb{R} : x \ \text{ è positivo}\}$ per il quale tutti i numeri minori o eguali a zero sono minoranti, mentre non esiste nessun maggiorante.

Si dice che un insieme A è *limitato superiormente* se ammette un maggiorante. A è *limitato inferiormente* se ammette un minorante. Infine se A è limitato sia superiormente che inferiomente si dice cha A è *limitato*. Quest'ultima definizione si riassume facilmente in simboli:

$$A \ \text{ è limitato } \ \Leftrightarrow \exists \ l, L \in \mathbb{R} : l \leq a \leq L, \forall\, a \in A$$

Si noti che il simbolo $\exists$ si legge *esiste*.

Come conseguenza della proprietà di completezza dei numeri reali si può dire che se A è un insieme non vuoto di numeri reali limitato superiormente allora esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti di A. Infatti, se indichiamo con B l'insieme costituito da tutti i maggioranti di A evidentemente, dato che A è limitato superiormente, necessariamente $B \neq \varnothing$.

Se applichiamo la proprietà di completezza ai due insiemi A e B allora esiste un numero reale E tale che

$$a \leq E \leq b, \quad \forall\, a \in A, \forall\, b \in B$$

Dato che per ogni elemento a di A si ha che $E \geq a$, ne consegue che E è un maggiorante di A ossia appartiene a B. Inoltre poichè per ogni elemento b di B si ha che $E \leq b$ vuol dire che E è il minimo di B. Ebbene il numero E viene detto *estremo superiore* di A. La definizione dell'estremo superiore E dell'insieme A è la seguente: E è estremo superiore di A (limitato superiormente) se esso è un maggiorante di A e se preso un numero positivo piccolo qualunque ϵ allora $E - \epsilon$ non è un maggiorante di A. In simboli si può scrivere:

$$E = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} E \geq a, \ \forall\, a \in A \\ \forall\, \epsilon > 0, \ \exists\, a \in A : M - \epsilon < a. \end{cases}$$

La scrittura sintetica indica che se E è estremo superiore di A esso è fra tutti i maggioranti il più piccolo ossia riducendo E di una qualsivoglia piccola quantità ϵ esiste almeno un elemento di A più grande.

In modo del tutto analogo a quanto detto per l'estremo superiore si può introdurre, per un insieme A limitato inferiormente, l'*estremo inferiore* e:

$$e = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} e \leq a, \ \forall\, a \in A \\ \forall\, \epsilon > 0, \ \exists\, a \in A : e + \epsilon > a. \end{cases}$$

Un insieme di numeri reali limitato ammette sia estremo superiore E che inferiore e. Entrambi sono numeri reali. Se si introducono i due simboli $+\infty$ e $-\infty$ si può dotare di estremi qualunque insiemi di numeri reali. Diremo quindi che A è illimitato superiormente se $\sup A = +\infty$ e che A è illimitato inferiormente se $\inf A = -\infty$. In particolare $\mathbb{R}$ è un insieme illimitato e quindi tale che $-\infty \leq x \leq +\infty$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Un'ultima considerazione: se A è illimitato superiormente

$$\sup A = +\infty \Leftrightarrow \forall\, L > 0, \ \exists\, a \in A : a > L,$$

se A è illimitato inferiormente

$$\inf A = -\infty \Leftrightarrow \forall\, l < 0, \ \exists\, a \in A : a < l.$$

6. Prodotto cartesiano

Dati due oggetti x e y, ad essi si associa un nuovo oggetto (x, y) definito come *coppia ordinata* individuata da x e y. Le coppie ordinate sono soggette a tale condizione: se (x, y) e (w, z) sono due coppie ordinate, allora

$$(x, y) = (w, z) \Leftrightarrow x = w \text{ e } y = z$$

Il simbolo $\Leftrightarrow$ é equivalente a "se e solo se" a volte scritto anche "s.se". Inoltre, l'oggetto (x, y) è diverso dall'insieme $\{x, y\}$ per il quale

$$\{x, y\} = \{y, x\}$$

Infatti, data la coppia ordinata (x, y) chiameremo x prima coordinata o primo elemento e y seconda coordinata o secondo elemento della coppia.

Dati due insiemi A e B non vuoti, si chiama *prodotto cartesiano* di A e B e si indica con $A \times B$ l'insieme di tutte le possibili coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$, ossia

$$A \times B = \{(a, b) \ : \ a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Per quanto detto sulle coppie ordinate, se $A \neq B$ si avrà evidentemente:

$$A \times B \neq B \times A$$

che implica che il prodotto cartesiano non è commutativo.

Esempio 6.1

$$\begin{gathered} A = \{a, b, c\} \quad B = \{1, 2\} \\ A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\} \\ B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\} \end{gathered}$$

La definizione di prodotto cartesiano è estendibile ad n insiemi:

$$\begin{gathered} A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \\ = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\} \end{gathered}$$

Si noti che $A \times A$ può essere indicato con A^2 e quindi, generalizzando, $\prod_{i=1}^{n} A = A^n$. Dati i tre generici insiemi A, B e C valgono le proprietà:

$$\begin{gathered} A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C), \\ A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C), \\ (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C), \\ (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C) \end{gathered}$$

ossia il prodotto cartesiano è distributivo rispetto le operazioni di unione e intersezione.

7. Relazioni

Siano dati due insiemi non vuoti, A e B. Si chiama *relazione binaria* di A in B una legge $\mathcal{R}$ che associa certi elementi di A con certi di B. Se la legge è vera per $a \in A$ e $b \in B$, si dice che *a è in relazione $\mathcal{R}$ con* b e si scrive

$$a\mathcal{R}b$$

altrimenti si scrive

$$a\not\mathcal{R}b$$

Il sottoinsieme delle coppie ordinate (a,b) di $A \times B$ tali che $a\mathcal{R}b$ si chiama *grafo* della relazione $\mathcal{R}$ e si denota con

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}} = \{(a,b) \in A \times B \mid a\mathcal{R}b\}$$

Una relazione di A in A stesso si dice relazione in A.

Sia $\mathcal{R}$ una relazione di A in B. Si chiama *dominio* di $\mathcal{R}$ l'insieme degli elementi di A che sono prima coordinata di almeno una coppia di $\mathcal{R}$ e indichiamo tale insieme con $\mathrm{dom}\mathcal{R}$. Si chiama *codominio* di $\mathcal{R}$ l'insieme degli elementi di B che sono seconda coordinata di almeno una coppia di $\mathcal{R}$ e indichiamo tale insieme con $\mathrm{cod}\mathcal{R}$. Simbolicamente:

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}\mathcal{R} &= \{x \in A : (x,y) \in \mathcal{R} \text{ per almeno un elemento di } y \in B\}\\ \mathrm{cod}\mathcal{R} &= \{y \in B : (x,y) \in \mathcal{R} \text{ per almeno un elemento di } x \in A\}\end{aligned}$$

Esempio 7.1
Dati i due insiemi $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{4,5,6\}$ e la relazione $\mathcal{R} = \{(1,4),(1,6),(3,4),(3,6)\}$ di A in B si ha:

$$\mathrm{dom}\mathcal{R} = \{1,3\}, \quad \mathrm{cod}\mathcal{R} = \{4,6\}$$

Se $\mathcal{R}$ è una relazione binaria di A in B, la relazione binaria di B in A avente per grafo l'insieme delle coppie ordinate $(b,a) \in B \times A$ tali che $a\mathcal{R}b$, si chiama *relazione inversa* di $\mathcal{R}$ e si denota con $\mathcal{R}^{-1}$, ossia

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b,a) : a \in A, b \in B \text{ e } (a,b) \in \mathcal{R}\}$$

Ne consegue che:

$$\mathrm{dom}\mathcal{R}^{-1} = \mathrm{cod}\mathcal{R} \quad \text{e} \quad \mathrm{cod}\mathcal{R}^{-1} = \mathrm{dom}\mathcal{R}$$

Inoltre, la relazione inversa della relazione inversa coincide con la relazione originaria, ossia

$$\left(\mathcal{R}^{-1}\right)^{-1} = \mathcal{R}$$

Se $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ sono relazioni binarie rispettivamente di A in B e di B in C, la relazione binaria $\mathcal{R}$ di A in C definita da

$$a\mathcal{R}c, (a,c) \in A \times C \Leftrightarrow \exists\, b \in B \mid a\mathcal{R}_1 b \text{ e } b\mathcal{R}_2 c$$

si dice *relazione composta* di $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$.

Un relazione binaria $\mathcal{R}$, definita nell'insieme non vuoto A, si dice:

(1) *riflessiva* se $\forall\, a \in A$, $a\mathcal{R}a$;
(2) *simmetrica* se $\forall\, a,b \in A$ tali che $a\mathcal{R}b$ risulta anche $b\mathcal{R}a$;
(3) *antisimmetrica* se $\forall\, a,b \in A$ tali che $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}a$ si ha $a = b$;
(4) *transitiva* se $\forall\, a,b,c \in A$ tali che $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}c$ risulta $a\mathcal{R}c$.

Si noti che una relazione $\mathcal{R}$ in A è antisimmetrica se e solo se per ogni $a,b \in A$, con $a \neq b$, appartiene ad $\mathcal{R}$ al più una delle due coppie (a,b), (b,a).

Esempio 7.2
Sia $\perp$ una relazione definita nell'insieme A delle rette di un piano euclideo in tal modo: le due rette r ed s sono in relazione $r \perp s$ se r è perpendicolare alla retta s.
Si vede subito che una retta r non può essere perpendicolare a se stessa, quindi $\perp$ non gode della proprietà riflessiva. Se $r, s \in A$, $r \perp s$, è anche $s \perp r$ e quindi la relazione $\perp$ gode della proprietà simmetrica.
Se due rette di A, r ed s, sono perpendicolari ad una terza retta t di A, sono tra di loro parallele ($r \parallel s$), dunque la relazione $\perp$ non è transitiva.

Una relazione binaria $\mathcal{R}$ definita in un insieme non vuoto A, si dice *relazione di equivalenza* se essa è riflessiva, simmetrica e transitiva.
La relazione di equivalenza definita in un insieme non vuoto A che associa ad ogni elemento di tale insieme l'elemento stesso si chiama *relazione d'identità*.

Esempio 7.3
La relazione $\parallel$ definita nell'insieme A delle rette di un piano euclideo è una relazione di equivalenza. Infatti, per ogni $r \in A$ risulta $r \parallel r$ (proprietà riflessiva). Per ogni $r, s \in A$ con $r \parallel s$ segue che $s \parallel r$ (proprietà simmetrica). Onfine, se $r, s, t \in A$, con $r \parallel s$ e $s \parallel t$, allora $r \parallel t$ (proprietà transitiva).

Se $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza nell'insieme A e $x\mathcal{R}y$, si scrive anche $x \equiv y \pmod{\mathcal{R}}$ e si legge x è equivalente a y modulo $\mathcal{R}$.

Una relazione binaria $\mathcal{R}$ definita in un insieme non vuoto A, si dice *relazione d'ordine* se essa è riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Esempio 7.4
La relazione "x è un divisore di y" nell'insieme $\mathbb{N}^*$ ($\{1, 2, \ldots\}$) è una relazione d'ordine. Infatti $\forall\ x \in \mathbb{N}^*$ si ha $x = 1 \cdot x$, ossia un numero naturale è divisore di se stesso (proprietà riflessiva). Se $x, y \in \mathbb{N}^*$, si vede subito che se x è divisore di y in generale non può essere vero il viceversa a meno che $x = y$ (proprietà antisimmetrica). Infine, con $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, se x è divisore di y, ossia $y = nx$ ($n \in \mathbb{N}^*$), e y è divisore di z, cioè $z = my$ ($m \in \mathbb{N}^*$), allora poichè $z = my = (mn)x$, x è divisore di z (proprietà transitiva).

Una relazione d'ordine si denota abitualmente con "$\preccurlyeq$" e l'insieme in cui essa è definita si dice *ordinato*.

Sia A un insieme ordinato dalla relazione $\preccurlyeq$ ed x e y due qualsiasi elementi di A. Se x e y sono *confrontabili*, cioè se si ha $x \preccurlyeq y$ oppure $y \preccurlyeq x$ allora si dice che l'insieme A è *totalmente ordinato* secondo la relazione $\preccurlyeq$ che si chiamerà *relazione d'ordine totale*. Diversamente la relazione d'ordine si dice *parziale* e l'insieme A *parzialmente ordinato*.

Esempio 7.5
La relazione dell'esempio precedente "x è un divisore di y" nell'insieme $\mathbb{N}^*$ è una relazione d'ordine parziale in quanto non tutti gli elementi di $\mathbb{N}^*$ sono confrontabili tramite la relazione, si pensi per esempio agli interi 3 e 5.
Invece la relazione "x è multiplo di y" nell'insieme $A = \{a^n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ con $a \in \mathbb{N}$ e $a \neq 1$ è una relazione d'ordine totale.
Infatti, se $n, m, l \in \mathbb{N}$, si ha: a^n è multiplo di se stesso (proprietà riflessiva); se a^n è multiplo di a^m, non è vero il viceversa a meno che $n = m$ (proprietà antisimmetrica); se a^n è multiplo di a^m, ossia $a^n = a^m a^p = a^{m+p}$, e a^m è multiplo di a^l, cioè $a^m = a^l a^q = a^{l+q}$, allora a^n è multiplo di a^l dato che $a^n = a^m a^p = a^l a^q a^p = a^{l+q+p}$ (proprietà transitiva). L'ordinamento è totale in quanto se $x = a^n$ e $y = a^m$ con $n \neq m$ se $n > m$ (altrimenti si invertono i ruoli di x e y) si ha $x : y = a^n : a^m = a^{n-m}$ con $n - m \in \mathbb{N}^*$. Ne consegue che qualunque due elementi di A sono confrontabili e l'ordine indotto dalla relazione è totale.

8. Funzioni

Una relazione binaria di un dominio non vuoto A in un codominio non vuoto B si chiama *funzione* o *applicazione* di A in B se ogni elemento di A è in relazione con un solo elemento di B.
Se f è una funzione di A in B, ossia

$$f : A \to B$$

l'unico elemento $y \in B$, corrispondente all'elemento $x \in A$, si dice *immagine* o *trasformato* di x tramite f o anche *valore assunto* dalla f in x e si denota con $f(x)$, cioè si pone $y = f(x)$.

Esempio 8.1
La legge che associa ad ogni elemento n dell'insieme $\mathbb{N}$ il suo quadrato n^2 è una funzione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$

Se $X \subseteq A$, l'insieme

$$f(X) = \{f(x) \in B \mid x \in X\}$$

si dice *immagine* di X secondo f. Si comprende che evidentemente $f(X) \subseteq B$. L'insieme $f(A)$ è detto semplicemente *immagine* di f.

Se $Y \subseteq B$, l'insieme

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$$

si chiama *controimmagine* o *immagine inversa* di Y mediante la f. Evidentemente$f^{-1}(Y) \subseteq A$.

Esempio 8.2
Siano dati gli insiemi $A = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ e $B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ e la funzione f di A in B che ad ogni elemento $x \in A$ associa il valore $\frac{1}{x}$.
Si determinino $f(A)$ e $f^{-1}(B)$.
$f(A) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots\} \subset B$ e $f^{-1}(B) = A$.

Se $f : A \to B$ e $f(A) = B$, ossia:

$$\forall\, y \in B, \exists\, x \in A \mid f(x) = y$$

si dice che f è una *funzione suriettiva* o una *suriezione*. Si noti che $\exists$ va letto come *esiste*.
Se elementi distinti hanno immagini distinte, cioè:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A \text{ e } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

si dice che f è una *funzione iniettiva* o una *iniezione*.

Se l'applicazione è sia suriettiva che iniettiva si dice che f è una *funzione biiettiva* o una *biiezione*.

Esempio 8.3
La funzione dell'esempio precedente è sicuramente iniettiva in quanto se $x \neq y$ segue che $\frac{1}{x} \neq \frac{1}{y}$. $f : A \to B$ non è suriettiva in quanto si vede subito che $f(A) \subset B$.
Se invece considerassimo come codominio della funzione l'insieme $C = f(A)$ evidentemente la f sarebbe anche suriettiva e quindi biiettiva.

Date le due funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$, si può associare un'applicazione di A in C applicando ad ogni elemento di A prima la f e quindi la g. Tale applicazione si chiama *funzione composta* di f e g, si indica con $g \circ f$ ed è definita ponendo

$$\forall\, x \in A, (g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

La composizione di applicazioni gode della proprietà associativa:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Indice

1.	Insiemi	3
2.	Insieme delle parti di un insieme	5
3.	Operazioni su insiemi	5
4.	Insieme dei numeri reali e sue proprietà	7
5.	Massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore	8
6.	Prodotto cartesiano	10
7.	Relazioni	11
8.	Funzioni	14