

Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Economia
Dipartimento di Scienze Economiche, Aziendali e Statistiche

Appunti del corso di Matematica

09 - Derivate II
Limiti di forme indeterminate e
derivate di funzioni implicite

Anno Accademico 2015/2016

M. Tumminello, V. Lacagnina, A. Pecorella, D.

Provenzano e A. Consiglio

1. Limite di forme indeterminate

Nella valutazione di un limite è possibile ottenere forme indeterminate del tipo

$$\frac{0}{0} \text{ oppure } \frac{\infty}{\infty}.$$

In questi casi il calcolo del limite può essere complicato. Si veda, ad esempio, il

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Un metodo molto potente per risolvere limiti che presentano forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ si basa sulle proprietà delle derivate di funzioni e prende il nome di *regola di "de l'Hôpital"*.

TEOREMA 1.1 (Regola di de l'Hôpital). *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili in un intorno I del punto c tali che:*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0,$$

oppure

$$\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = \infty \quad e \quad \lim_{x \rightarrow c} |g(x)| = \infty.$$

Sia inoltre $g'(x) \neq 0 \forall x \in I$.

$$\text{Se esiste finito} \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma.$$

In altre parole, il limite di una forma indeterminata $0/0$ o ∞/∞ può essere calcolato risolvendo il limite del rapporto tra le derivate delle due funzioni:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma$$

Esempi 1.1

Forme indeterminate $0/0$

- Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\pi - 2x}.$$

Come si può osservare, questo limite presenta una forma indeterminata del tipo $0/0$. Inoltre entrambe le funzioni, a numeratore e denominatore, sono derivabili in un intorno di $\pi/2$. Possiamo quindi provare ad applicare il teorema di de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\pi - 2x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin(x)}{-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

- Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin(\sqrt{x})}.$$

Anche in questo caso siamo in presenza di una forma indeterminata $0/0$. Applicando il teorema di de l'Hôpital risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin(\sqrt{x})} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\cos(\sqrt{x})} = \frac{0}{1} = 0.$$

- Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}.$$

Come nei casi precedenti, possiamo applicare il teorema di de l'Hôpital

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \\ &= (\text{sfruttando il limite notevole già studiato}) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

E' tuttavia interessante notare come allo stesso risultato saremmo potuti arrivare applicando nuovamente il teorema di de l'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \\ &\stackrel{H}{=} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Esempi 1.2

Forme indeterminate ∞/∞

- Sia $\alpha > 0$. Determinare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha}.$$

Applichiamo il teorema di de l'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1+1}} = \\ &= \frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

- Determinare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k},$$

con $k \in \mathbb{N}$.

Applicando k volte il teorema di de l'Hôpital otteniamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{kx^{k-1}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{k(k-1)x^{k-2}} \stackrel{H}{=} \dots \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{k!} = \infty$$

Il teorema di de l'Hôpital può essere applicato indirettamente anche ad altre forme indeterminate: basta trasformare queste forme in forme indeterminate del tipo $0/0$ o ∞/∞ attraverso passaggi algebrici, come mostrano i seguenti esempi:

Esempi 1.3

Altre forme indeterminate (applicazione INDIRETTA)

- Determinare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x).$$

Questa è una forma indeterminata del tipo $(-) 0 \cdot \infty$. Per poter applicare il teorema di de l'Hôpital è necessario trasformare questa forma indeterminata in una forma indeterminata del tipo $0/0$ o ∞/∞ . Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}},$$

che è una forma indeterminata del tipo ∞/∞ . Possiamo dunque applicare la regola di de l'Hôpital a questa forma:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/2} = 0.$$

- Determinare

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) - \frac{1}{\cos(x)}.$$

Questa è una forma indeterminata del tipo $\infty - \infty$. Tuttavia essa può essere facilmente ricondotta ad una forma indeterminata $0/0$:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) - \frac{1}{\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{1}{\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin(x) - 1}{\cos(x)}.$$

Applicando il teorema di de l'Hôpital a questa forma otteniamo:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin(x) - 1}{\cos(x)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos(x)}{-\sin(x)} = 0.$$

- Determinare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x.$$

Questo limite presenta una forma indeterminata del tipo 0^0 , che appartiene alla classe di forme indeterminate che si ottengono da funzioni del tipo $[f(x)]^{g(x)}$, con $f(x) > 0$. A questa classe appartengono anche le forme indeterminate 1^∞ e ∞^0 . Tali forme indeterminate possono essere risolte notando che, in generale:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln[f(x)]}.$$

e quindi calcolando il limite dell'esponente, ossia di $y = g(x) \ln[f(x)]$. Nel nostro caso risulta $x^x = e^{x \ln(x)}$ e quindi $y = x \ln(x)$. Dobbiamo quindi calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x),$$

che è una forma indeterminata del tipo $0 \cdot \infty$, ma che possiamo facilmente ricondurre, ad una forma ∞/∞ cui applicare direttamente la regola di de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0.$$

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)} = e^0 = 1.$$

• Determinare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Questa è una forma indeterminata del tipo 1^∞ , che possiamo risolvere come nel caso precedente scrivendo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}}$$

e risolvendo il limite ad esponente (che è una forma indeterminata del tipo $0/0$) sfruttando il teorema di de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = 1,$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$$

• Determinare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin(x)}.$$

Questa è una forma indeterminata del tipo 0^0 , che oramai sappiamo ricondurre ad una forma indeterminata del tipo $0/0$ o ∞/∞ scrivendo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin(x) \ln(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) \ln(x)}$$

Dobbiamo quindi calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin(x)}},$$

che è una forma indeterminata ∞/∞ , cui possiamo applicare la regola di de l'Hôpital:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin(x)}} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\sin^2(x)}{x \cos(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1 \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin(x)} = e^0 = 1.$$

• Determinare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a^x + b^x)^{\frac{1}{x}}, \quad \text{con } 1 < a < b.$$

Questo limite presenta una forma indeterminata del tipo ∞^0 . Anche in questo caso sfruttiamo le proprietà delle funzioni esponenziale e logaritmo per ricondurci ad una forma indeterminata su cui sia applicabile la regola di de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a^x + b^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(a^x + b^x)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \ln(a^x + b^x)}.$$

Il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \ln(a^x + b^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a^x + b^x)}{x}$ rappresenta una forma indeterminata del tipo ∞/∞ . Quindi:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a^x + b^x)}{x} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln(a) + b^x \ln(b)}{a^x + b^x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x \ln(a) + \ln(b)}{\left(\frac{a}{b}\right)^x + 1} = \frac{\ln(b)}{1} = \ln(b).\end{aligned}$$

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a^x + b^x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(b)} = b.$$

ATTENZIONE: Un uso inappropriato della regola di de l'Hôpital (ossia la sua applicazione in casi in cui le ipotesi del teorema NON siano soddisfatte), può condurre ad errori. Per esempio applicarlo a limiti in una forma diversa da $0/0$ o ∞/∞ porta ad errori, come mostra il seguente esempio.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + \cos(x)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Se però avessimo ERRONEAMENTE applicato la regola di de l'Hôpital avremmo ottenuto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + \cos(x)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \sin(x)} = 1 \quad (!!!)$$

Esercizio 1.1

Lo studente provi a cercare esempi di limiti in cui una o più ipotesi del teorema di de l'Hôpital NON siano soddisfatte e mostri a quali errori la sua impropria applicazione conduca.

Esercizi 2.2

- Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x \sin(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln [1 + \sin(x)]}{\sin(2x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x - e \right] x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2) \right] x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$$